arXiv:2303.15945v1 [cs.CG] 28 Mar 2023

度量空间的在线嵌入*

Ilan Newman†，YuriRabinovich‡

2023年3月29日

摘要

我们研究在自适应对手面前，将度量空间确定性地在线嵌入赋范空间和树中的问题。主要结果包括：嵌入欧几里得空间时（乘法）畸变的多项式下界；嵌入直线时紧确的指数上界；以及在维数足够高的 ℓ_∞ 中畸变为（$1+\epsilon$）的嵌入。

1 引言

有限度量空间向各种宿主空间进行低畸变嵌入的现代理论，随着 20 世纪最后几十年 Johnson and Lindenstrauss [5][1] 和 Bourgain [4][2], 的经典成果问世而逐渐成形。人们很快认识到，这一理论为众多理论和实际算法问题提供了有力工具。如今，这是一个发展成熟的领域，与算法设计中的各种问题密切相关。

本文研究度量嵌入中一个相对少受关注的方面：在线嵌入。在这种设置下，输入有限度量空间（X,d）的顶点逐一揭示，同时给出它们到先前已揭示顶点的距离。每个顶点 v 在揭示时都会被映射到宿主空间（$\mathcal{H},d_{\mathcal{H}}$），而不改变先前已揭示顶点的映射。所得嵌入 $\phi: X\to\mathcal{H}$ 的质量由其扩张和收缩衡量：

$$\text{expansion}: \quad \max_{v,u\in X}\frac{d_{\mathcal{H}}(\phi(v),\phi(u))}{d(v,u)} \qquad \text{contraction}: \quad \max_{v,u\in X}\frac{d(v,u)}{d_{\mathcal{H}}(\phi(v),\phi(u))}$$

二者的乘积称为 ϕ的（乘法）畸变。嵌入 (X,d) 到 $(\mathcal{H},d_{\mathcal{H}})$ 的畸变 $\mathrm{dist}(d\hookrightarrow d_{\mathcal{H}})$，是所有此类映射 ϕ 中可能达到的最小畸变。由于宿主空间通常（尤其在本文中）是可缩放的，$\mathrm{dist}(d\hookrightarrow d_{\mathcal{H}})$ 也可以在离线设置下定义为非扩张映射中的最小可能收缩，或非收缩映射中的最小可能扩张。

由于在线设置中无法事后应用缩放，因此，限制为生成非收缩、非扩张或不受限制嵌入的算法，很可能会因其产生的畸变而表现不同。

本文仅关注针对自适应对手，将度量确定性嵌入到各种维数的标准赋范空间 ℓ_2、ℓ_1、ℓ_∞ 以及树中的情形。我们的结果阐明了在

*这是同名论文的扩展和修正版，该论文曾发表于 SWAT'20。

†计算机科学系，海法大学，海法，以色列。电子邮件：ilan@cs.haifa.ac.il。本研究得到以色列科学基金会资助，资助编号为 497/17

‡计算机科学系，海法大学，海法，以色列。电子邮件：yuri@cs.haifa.ac.il[1]任意 n点欧几里得度量都可以高效地嵌入到 $\ell_{\log_2}{}^{n/\epsilon^2}$ 中，并具有（$1+\epsilon$）畸变。[2]任意 n点度量都可以高效地嵌入欧几里得空间，并具有 $O(\log n)$ 畸变。

维数为一以及维数为 n 的指数级时可以实现的目标。介于两者之间的情形仍是一个富有挑战性的开放问题。我们还给出了将大小为 n 的度量在线嵌入到 ℓ_2 中（维数无界）的下界。我们希望，本文的研究结果能够为进一步研究在线嵌入提供良好的起点。

除了确定性在线嵌入算法之外，考虑针对非自适应对手的更为宽松的概率在线嵌入概念也是很自然的。在这种情况下，不再考虑 d与 $d_{\mathcal{H}}$之间的畸变，而是考虑 d 与 $E[d_{\mathcal{H}}]$之间的畸变，即对随机嵌入生成的宿主度量取期望。与之前不同，对手无法看到部分嵌入，因此必须预先准备困难度量。在这一宽松设定下，此前已经取得了强得多的结果，下一节将对此进行讨论。

1.1 前人工作

据我们所知，关于在线嵌入的首个结果隐含地出现在本文作者发表于 [9]的论文中。该文的主要结果是：将某一类规模为 n 的指数级串并联图 $\{D_n\}$ 的最短路径度量离线嵌入到 ℓ_2中时，其畸变存在 $\Omega(\sqrt{n})$ 的下界。尽管文中从未提及“在线”一词，但其证明实际上建立了这样一个下界：将某个简单的、具有 $2n$个顶点的 D_n 子图族 G_{2n} 的最短路径度量进行在线嵌入时，畸变至少为 $\sqrt{n}$。虽然论文 [9] 确实得到了应有的关注，其在线含义也被 [6][3], 的作者所理解，但这一明确表述在其相关语境中当时以及现在仍然代表着最先进的成果，却从未正式发表，并且在很大程度上未受到注意。本文将在此纠正这一状况。具体处理见第 2 节。

另一项相关结果出现在 [1]（定理 3.1）中，但背景与此颇为不同。设 (X, d) 是一个满足 $|X| = n$ 的任意度量空间。假设 X 按随机均匀顺序揭示。此时，贪心在线算法将每个新点 v 通过一条长度为 $d(v, u)$ 的边连接到迄今揭示的点中最近的一个，记作 u，由此得到一棵随机支配树 T，使得 $\mathrm{E}[d_T]$ 将 d 扩张 $O(n^2)$ 倍。

如果顺序固定，类似但更简单的分析表明，d_T 至多扩张 d 倍，扩张因子为 2^n。由于对于到树的确定性嵌入而言，这个界相当紧（指数的底数除外），我们将在第 3 节中更详细地讨论。

第一篇明确以在线嵌入为主题的已发表论文是 [6]。 [6] 注意到， [2] 中离线嵌入过程的很大一部分可以在线实现，并据此为概率在线嵌入建立了相当强的结果。这些结果大多取决于输入度量 d 的所谓长宽比 Δ，也就是其中最大距离与最小距离之比。 [6] 的主要结果如下（假设 $|X| = n$）：

1. 度量空间（X、d）可以概率在线嵌入到$\ell_p^{O(\log n \log \Delta)}$，畸变为 $O(\log n \log \Delta)$，适用于任意 $p \in [1, \infty)$。对于 $p = \infty$，（X、d）也可以嵌入到 $\ell_\infty^{\log^{O(1)} n}$，畸变为 $O(\log n \cdot \sqrt{\log \Delta})$。2. 度量空间（$X$、$d$）可以概率在线嵌入到非收缩超度量（随后嵌入到树度量）的一个分布中，畸变为 $O(\log n \log \Delta)$。从否定方面来看，（X、d）不可能以优于 $\min\{n, \log \Delta\}$ 的畸变概率在线嵌入到非收缩超度量的一个分布中。

~后续研究 [3] 扩展了 [6], 的结果，特别是证明了将概率嵌入映射到树时，畸变的下界为 $\Omega(\log n \cdot \log \Delta)$。

[3]这为他们的论文提供了部分动机。 [作者私下交流]

1.2 我们的结果

我们关注映射到赋范空间的在线嵌入，尤其关注畸变与宿主空间维数之间的相互作用。与 [6, 3], 不同，我们寻求与长宽比无关的界，只考虑确定性嵌入，并假设对手是自适应的。

1. 嵌入 ℓ_2：存在一族度量 $\{d_{2n}\}$，使得每个 d_{2n}（定义在 $2n$ 个点上的度量）在任何确定性在线嵌入到任意维数的 ℓ_2 时，都需要 $\sqrt{n}$ 的畸变。这些度量 $\{d_{2n}\}$ 是一族带权串并联图 $\{G_{2n}\}$ 的最短路径度量。这些度量相当简单；例如，它们可以嵌入到直线中，且畸变有一个普适常数上界。

   根据有限维赋范空间理论中的 John 定理，这意味着在线将 d_{2n} 嵌入到维数为 D 的任意赋范空间中存在一个 $\sqrt{n/D}$ 下界。

2. 嵌入到树和直线中。如上所述，一种简单的贪心在线嵌入算法可得到一棵支配树，其度量对输入 d 的扭曲至多为 2^n。我们证明这一结果在指数底数意义下是紧的，并给出下界 $\Omega(2^{\frac{n}{2}})$。证明中使用的“困难”度量实际上是一个（连续）环的子度量，并且它们可以（离线）嵌入到直线中，且畸变有一个普适常数上界。

   嵌入到直线中要困难得多。我们给出一种在线算法，其畸变为$O(n \cdot 4^n)$。

3. 畸变与维数。最小的维数 D 是多少，才能使 d 以至多 $(1+\epsilon)$ 的畸变嵌入到 ℓ_∞^D？有些出人意料的是，事实证明，即使是 4 点度量（总能离线等距嵌入到 ℓ_∞^3 中），也需要维数 $D = \Omega(\frac{1}{\epsilon})$。

   积极的一面是，我们（高效地）证明了 $D = \left(\frac{cn}{\epsilon}\right)^n$，其中 c 是一个适当的普适常数，足以满足 $\epsilon \leq 1$。这样的结果似乎相当符合预期，但其证明需要一些技术性工作。

4. 等距在线嵌入。我们证明，大小为 n 的树度量（即加权树最短路径度量的任意子度量）可以等距在线嵌入到 ℓ_1^{n-1}。这意味着，例如，这类度量可以在线嵌入到 ℓ_2^{n-1} 中，畸变为 $\sqrt{n}$，并且对于 $n > 1$，可以等距在线嵌入到 $\ell_\infty^{2^{n-2}}$。

开放问题：本文的结果似乎表明，与经典离线情形不同，在经典离线情形中，“良好”的嵌入的畸变关于 n 是多对数的，而在在线设置中，“良好”的嵌入具有关于 n 的多项式畸变。我们猜想，多项式畸变确实是可实现的，并且多项式维数始终足以完成这一任务。目前不能排除常数维数也足以完成这一任务的可能性。

2 嵌入到 ℓ_2 的下界

如上一节所述，以下定理可由 [9] 的主要结果的证明推出。为简便起见，我们将讨论限制在非压缩嵌入上。移除此限制只需对论证进行略微修改。

定理 2.1。对于任意自然数 n，存在一个定义在 $2n$ 个点上的度量族 $\{d_{2n}\}$，使得将其在线嵌入到任意维数（包括无穷维）的 ℓ_2 中的任何非压缩嵌入都需要扩张 $\geq \sqrt{n}$。

证明。（概述）给定一个在线非收缩嵌入算法 $\mathcal{A}$，“困难的” $\{d_{2n}\}$ 构造如下。它将是以下加权图 G_{2n}的最短路径度量。G_2 只是单位权重K_2。图 G_{2n} 由 G_{2n-2} 得到：在 G_{2n-2}中选择一条权重为 2^{2-n} 的边 $e = (v, u)$，并且

将其替换为一个四环 v-x-u-y-v，其边的权重为 2^{1-n}。也就是说，会暴露出一对新顶点 x、y，以及它们到先前已暴露顶点的距离。

剩下需要指定边 e。对手将选择一条边 $e=(v,u)$，其权重为 2^{2-n}，在 G_{2n-2} 中经 $\mathcal{A}$ 扩展后至少增长 $\sqrt{n-1}$ 倍。此类边的存在性可通过归纳法证明。显然，当 $n=2$ 时它存在。令 ϕ 为 $\mathcal{A}$ 生成的嵌入。根据欧几里得空间的平行四边形定律，

$$\|\phi(x)-\phi(v)\|_2^2+\|\phi(x)-\phi(u)\|_2^2+\|\phi(y)-\phi(u)\|_2^2+\|\phi(y)-\phi(v)\|_2^2 \quad \geq \quad \|\phi(v)-\phi(u)\|_2^2+\|\phi(x)-\phi(y)\|_2^2 .$$

由于根据归纳假设 $\|\phi(v)-\phi(u)\|_2 \geq \sqrt{n-1}\cdot 2^{2-n}$，且 ϕ 是非收缩的，$\|\phi(x)-\phi(y)\|_2 \geq 2^{2-n}$，因此可以得出结论：四条新边 (v,x)、(x,u)、(u,y) 和 (y,u) 中必有一条，其在 $\mathcal{A}$ 中至少扩展 $\sqrt{n}$ 倍。

如上所述，这些度量 d_{2n} 非常简单。例如，不难验证，每个 d_{2n}（离线）都可以嵌入到直线中，畸变为 ≤ 3，并且可以等距嵌入到 ℓ_1中。 ■

目前，我们不知道上述界有多紧，也不知道能否在在线嵌入到 ℓ_2时，获得关于 n 呈多项式级小的畸变。我们知道，对于树度量这是可行的，依据是下面的定理 6.2。

最后补充一点，这里使用的论证可用于任意一致凸空间，而不仅仅是 ℓ_2。例如，可参见 [9] by [7] 的推广。

3 在线嵌入到树中

我们所说的嵌入到树中，是指一种在线嵌入，它构造一棵顶点中可以包含 Steiner点的树。也就是说，构造出的树除了包含与输入度量相对应的点之外，还可以包含其他点。每一步中，一旦出现一个新顶点，嵌入算法就会选择一个已有顶点，或创建一个 Steiner点，并用一条权重合适的新边将新顶点连接到该点。

定理 3.1. 任意包含 n 个点的度量空间，都可以确定性地在线嵌入到一棵树中，畸变为 $\leq 2^{n-1}-1$，即使不使用 Steiner点也可以。无需预先了解 n。

证明. 算法采用贪心策略，将新点 v 通过一条权重为 $d(v,u)$ 的边连接到此前已出现、在度量 d 中距离 v 最近的点 u。

分析与 [1] 中的基本相同。令 $\widetilde{d}$ 表示近似 d 的树度量，显然 $\widetilde{d}$ 不会收缩，令 α_k 表示经过 k 步后的扩张。那么，$\alpha_2=1$，且 $\alpha_{k+1}\leq 2\alpha_k+1$。事实上，设 x 是新点，并假设它连接到了 y。那么，对于任意此前已出现的顶点 a，

$$\widetilde{d}(a,x) = \widetilde{d}(a,y)+d(x,y) \leq \alpha_k\cdot d(a,y)+d(x,y) \leq \alpha_k\cdot(d(a,x)+d(x,y))+d(x,y) \leq (2\alpha_k+1)\cdot d(a,x),$$

其中，最后一个不等式由 y 的选择可得。

递推公式 $\alpha_2=1$，$\alpha_{k+1}\leq 2\alpha_k+1$ 意味着 $\alpha_n\leq 2^{n-1}-1$。 ■

事实证明，这个结果相当紧：

定理 3.2. 存在一个度量族 $\mathcal{F}$，定义在 n个点上，使得任何到树的在线嵌入所产生的畸变至少为 $2^{\lfloor (n-4)/2\rfloor}$。

$\mathcal{F}$中的所有度量都是 (C,d_C) 的子度量，其中 C 是长度为 1 的连续环，并配备其最短路径度量。此外，它们都可以离线嵌入到直线中，畸变为 3。

证明。自适应对手将选择 C 中的点，使其成为暴露点。对手的目标是确保对于每个 $k\geq 2$，由前 $2k$ 个暴露点所诱导的树度量，对 d_C 所诱导的度量造成至少 2^{k-2} 的畸变。

我们从以下简单的论断开始。对于一棵树 T，以及 x、$y\in V[T]$，令 $P_T(x,y)$ 表示 x 和 y 在 T 中之间的唯一路径。将 T 和 P_T 视为连续对象而非抽象图会很方便。

命题 3.3。设 u_1、u_2、u_3、u_4 是树 T 中的四个顶点。那么，要么 $P(u_1,u_2) \cap P(u_3,u_4) \neq \emptyset$，要么 $P(u_2,u_3) \cap P(u_1,u_4) \neq \emptyset$。 ■

命题 3.4. 设 p,q,r,s 是度量空间中的点，使得 $d(p,q)\ d(r,s) \leq \alpha$，而 $d(p,r)\ d(p,s)\ d(q,r)$，$d(q,s) \geq \beta$。假设 p,q,r,s 通过映射 ϕ 嵌入加权树 T 中，且满足 $P_T(\phi(p)\ \phi(q)) \cap P_T(\phi(r)\ \phi(s)) \neq \emptyset$。那么，$d_T$，$T$ 的最短路径度量对 d_C 的扭曲至少为 β/α。

证明。只需在 T 中对适当路径上的边进行计数，即可验证

$$d_T(\phi(r),\phi(p)) + d_T(\phi(p),\phi(s)) + d_T(\phi(s),\phi(q)) + d_T(\phi(q),\phi(r)) \ \leq\ 2d_T(\phi(r),\phi(s)) + 2d_T(\phi(p),\phi(q))\,. \tag{1}$$

这个不等式可能是严格的，因为 $P_T(\phi(p)\ \phi(q))$ 与 $P_T(\phi(r)\ \phi(s))$ 的交集中的边在右边被计数了四次，而不是两次。另一方面，

$$d_C(r,p)\ +\ d_C(p,s)\ +\ d_C(s,q)\ +\ d_C(q,r))\ \geq\ \frac{4\beta}{4\alpha}\cdot(2d_C(r,s)\ +\ 2d_C(p,q))\,. \tag{2}$$

比较 (1) 和 (2)，并注意到 (1) 的左边至多等于 (2) 的左边乘以 ϕ 的扩张，而 $2d_T(\phi(r)\ \phi(s)) + 2d_T(\phi(p)\ \phi(q))$ 至少等于 $2d_C(r,s) + 2d_C(p,q)$ 除以 ϕ 的收缩，可得 ϕ 的扩张与收缩之积至少为 β/α。

■

对手将分阶段进行：第一阶段暴露 4 个点，之后每个阶段暴露 2 个点。令 T_t 表示嵌入算法经过 t 个阶段后构造的加权树，并令 ϕ 表示相应的嵌入。

我们选取任意参考点 $p_0 \in C$，并将 C 参数化；定义 $p_x \in C$ 为从 p_0 沿环的顺时针方向移动距离 x，$0 \leq x < 1$后得到的点。给定一对（非对径）点 $p_x, p_y \in C$，令 $I_C[p_x,p_y]$ 表示包含 p_x, p_y的最短长度区间。

在第一阶段，对手暴露点 $p_0, p_{0.25}, p_{0.5}, p_{0.75}$。根据命题 3.3，在相应的$T_1$中，$I_C[p_0,p_{0.25}]$和 $I_C[p_{0.5},p_{0.75}]$的 ϕ 像，或 $I_C[p_{0.25},p_{0.5}]$和 $I_C[p_{0.75},p_0]$的 ϕ像，必有一对相交。不失一般性，假设前一种情况成立。

对手的策略是在每个阶段结束时建立 t 四个点 x_t、x_{t+1}、x_{t+2}、x_{t+3}，使得：

* $I_C[x_t,x_{t+1}] \subseteq I_C[p_0,p_{0.25}]$、$I_C[x_{t+2},x_{t+3}] \subseteq I_C[p_{0.5},p_{0.75}]$；* $|I_C[x_t,x_{t+1}]| = |I_C[x_{t+2},x_{t+3}]| = 2^{-t-1}$；* $I_C[x_t,x_{t+1}]$ 和 $I_C[x_{t+2},x_{t+3}]$ 的 ϕ-像在 T_t 相交。

如果对手能够做到这一点，那么注意到对于 $i \in \{t,t+1\}$、$j \in \{t+2, t+3\}$，$d_C(x_i,x_j) \geq 0.25$，并使用命题 3.4，可以得出 ϕ 在经过 t 个阶段后的畸变至少为 $0.25 \cdot 2^{t+1} = 2^{t-1}$。由于经过 t 个阶段后暴露的点数为 $(2t+2)$，这就证明了该定理。

现在还需明确对手的策略。对于 $t = 1$，将点 x_1、x_2、x_3、x_4 分别定义为 p_0、$p_{0.25}$、$p_{0.5}$、$p_{0.75}$。归纳假设，在阶段 $(t-1)$ 结束时，存在所要求的四元组 x_{t-1}、x_t、x_{t+1}、x_{t+2}。对手将揭示的新点分别是 $I_C[x_{t-1},x_t]$的中位数 a，以及 $I_C[x_{t+1},x_{t+2}]$的中位数 b。

由于 $I_C[x_{t-1},x_t]$ 和 $I_C[x_{t+1},x_{t+2}]$ 的 ϕ-像在 T_{t-1} 中相交，因此它们也将在 T_t 中相交。于是，区间 $I_C[x_{t-1},a]$、$I_C[a,x_t]$ 中的一个区间的 ϕ-像，必与区间 $I_C[x_{t+1},b]$、$I_C[b,x_{t+2}]$ 中的一个区间的 ϕ-像相交。不妨设 $\phi\,(I_C[x_{t-1},a]) \cap \phi\,(I_C[b,x_{t+2}]) \neq \emptyset$，令 $x'_t = x_{t-1}$、$x'_{t+1} = a$、$x'_{t+2} = b$、$x'_{t+3} = x_{t+2}$。

观察到，将 C 在点 $p_{0.51}$ 处“切开”以得到一个区间，就能将 $\mathcal{F}$ 中的任意度量嵌入该区间，进而嵌入直线，且畸变不超过 3。由此即可完成证明。 ■

4 在线嵌入到直线

本节将证明，存在一种在线算法，能够将任意 n 点度量空间嵌入直线，且具有指数失真。由于直线是树的一种非常特殊的情形，而即便是树度量也无法很好地嵌入直线，因此这可以视为对定理 3.1 的重大加强。不过，上界较弱。

定理 4.1. 任意大小为 n 的度量空间 (X,d) 都可以在线嵌入到直线中，畸变至多为 $O(n4^n)$。无需预先了解 n。

证明. 将 (X,d) 在线嵌入到直线中的嵌入 ϕ 按照以下归纳方式构造。设 $x_k \in X$ 是阶段 k 揭示的点。

定义 4.2. 令 $\phi(x_1) = 0$。对于 $k > 1$，令 z 为 x_k 在先前揭示的点中的最近邻。令 I^{x_k} 为 z 右侧长度为 $2^{-k}d(z,x_k)$ 且不包含任何先前揭示点的最左侧开区间。令 $\phi(x_k)$ 为此区间的中点。

下文中，我们称这样的 z 为 x_i 的父节点，并将其记为 $z = \mathrm{father}(x_k)$。注意，由于在 x_k 之前仅揭示了 $(k-1)$ 个点，因此必定存在这样一个空区间，其起点与 $\phi(z)$ 的距离至多为 $(k-2)\cdot 2^{-k}d(x_k,z)$。因此，

$$0 \;\le\; \phi(x_k) - \phi(\mathrm{father}(x_k)) \;\le\; (k-1.5)\cdot 2^{-k} d(x_k, \mathrm{father}(x_k))\,. \tag{3}$$

给出扩张的上界：
令 γ_k 表示嵌入 x_k 后 ϕ 的扩张。对 γ_k 的上界，可通过与定理 3.1 中类似的归纳论证得到。令 $z =$ 为 x_k 的父节点，并令 y 为任意一个先前已揭示的点。根据 z 的定义， $d(x_k,z) \le d(x_k,y)$，且 $d(y,z) \le d(x_k,y) + d(x_k,z) \le 2d(x_k,y)$。将此与 (3) 结合，得到

$$|\phi(x_k)-\phi(y)| \;\le\; |\phi(x_k)-\phi(z)| \;+\; |\phi(z)-\phi(y)| \;\le\; (k-1.5)\cdot 2^{-k} d(x_k,z) \;+\; \gamma_{k-1} d(y,z) \;\le$$

$$\le\; k2^{-k}\cdot d(x_k,y) + 2\gamma_{k-1} d(x_k,y) \;=\; (k2^{-k} + 2\gamma_{k-1})\cdot d(x_k,y)\,.$$

因此，得到递归方程 $\gamma_k \le k2^{-k} + 2\gamma_{k-1}$。结合 $\gamma_2 = 1$，可推出 $\gamma_k \le 2^{k+1}$。

给出收缩的上界：我们从以下一般
性断言开始：
断言 4.3. 设 I^x 为一个开区间，其中点为 $\phi(x)$，并令 I^x_L 和 I^x_R 分别为其左半部分和右半部分（均为开区间）。假设在揭示过程中的某个时刻，且在 x 被揭示之后， I^x_L 命中了 p 次，而 I^x_R 命中了 r 次。（这里的命中是指将 $\phi(y)$、 $y \in X$ 分配给区间内的一个点。）那么，

* I^x_L 包含一个长度为 $\ge |I^x_L|/2^p$ 、与 ϕ相邻的空开区间 x
. * I^x_R 包含一个长度为 $\ge |I^x_R|/$的空开区间（$r+1$） $\ge |I^x_R|/2^r$。

证明。第一个陈述可通过对 p使用归纳法轻松证明。第二个陈述则可直接由以下观察得出：任意 r 个点将 I^x_R 分成至多（$r+1$）个部分。 ∎

任取一对暴露点 a、 b 。根据嵌入算法的定义，存在两个具有相同初始元素的序列 $z = y_1$、 y_2、 ...、 $y_q = a$ 和 $z = w_1$、 w_2、 ...、 $w_f = b$，其中 y_i =是y_{i+1}的父节点， w_j = 是w_{j+1}的父节点，并且 $\{y_i\}_2^q$ 与 $\{w_j\}_2^f$ 互不相交。下文中，对于 $x \in X$ ，方便起见，我们用 t(x) 表示 x被揭示的时间。

令 $\delta_i = d(y_{i-1}, y_i)$ $i = 2,\ldots,q$ 和 $\zeta_j = d(w_{j-1}, w_j)$ $j = 2,\ldots,f$。令 D 为所有 δ_i 和 ζ_j 中的最大值，并且不失一般性地假设 $D = d(y_{k-1}, y_k)$。因此， $\phi(y_k)$ 是一个

长度为 $2^{-\mathrm{t}(y_k)}D$、起始于 $\phi(y_{k-1})$ 的空区间 $I = I^{y_k}$。令 $I_L = I_L^{y_k}$ 和 $I_R = I_R^{y_k}$ 分别为 I 的左半部分和右半部分。

断言 4.4. 对于 $i > k$，有 $\phi(y_i) \in I_R$，此外，$\phi(y_i) - \phi(y_k) \le \frac{|I|}{2} \cdot (1 - 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(y_i)})$。

证明。我们断言，对于每个 y_i、$i \ge k$，在阶段 $\mathrm{t}(y_i)$ 结束时，都存在一个长度为 $\ge \frac{|I|}{2} \cdot 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(y_i)}$ 的空区间 $J^i \subseteq I_L$，其完全位于 $\phi(y_i)$ 的右侧。确实，对于 $i = k$，情况就是如此，其中 $J^k = I_R$。归纳地假设该断言对 $(i-1)$ 成立。那么，在 y_i 到达之前，区间 J^{i-1} 至多有 $\mathrm{t}(y_i) - \mathrm{t}(y_{i-1}) - 1$ 次命中，因此根据断言 4.3，它包含一个长度为 $|J^{i-1}|/2^{\mathrm{t}(y_i)-\mathrm{t}(y_{i-1})-1}$ 的子区间。根据归纳假设以及 I 和 I^{y_k} 的定义，

$$\frac{|J^{i-1}|}{2^{\mathrm{t}(y_i)-\mathrm{t}(y_{i-1})-1}} \ge \frac{|I|}{2} \cdot \frac{2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(y_{i-1})}}{2^{\mathrm{t}(y_i)-\mathrm{t}(y_{i-1})-1}} = |I| \cdot 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(y_i)} = D \cdot 2^{-\mathrm{t}(y_i)} \ge |I^{y_i}|.$$

这意味着，在 y_i 到达时，存在一个长度为 $\ge |I| \cdot 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(y_i)} \ge |I^{y_i}|$ 的空区间，它完全位于 J^{i-1} 中，因此也位于 I 中，特别是位于 y_{i-1} 的右侧，其中 y_{i-1} 是 y_i 的父节点。因此，y_i 将被映射到 J^{i-1} 中点的左侧（也可能与中点重合），结论由此得证，取 $J^i = J_R^{i-1}$ 即可。

为界定 $\phi(y_i) - \phi(y_k)$，注意到

$$\phi(y_i) - \phi(y_k) \le |I_R| - |J^i| \le \frac{|I|}{2} \cdot (1 - 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(y_i)}).$$

■

一个非常相似的论证也能推出以下断言。其证明与断言 4.4 的证明十分相近，故略去。

断言 4.5. 设 $\{w_j\}_1^f \subset X$ 为上述序列，满足 $w_f = b$，并假设对某个 $s \le f$，有 $w_s \in I_L$。那么，$b \in I_L$，此外，$\phi(y_k) - \phi(b) \ge \frac{|I|}{2} \cdot 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(b)}$。 ■

我们可以给出收缩的上界。考虑与之前相同的序列 $\{y_i\}_1^q$，$\{w_j\}_1^f$，其中 $y_q = a, w_f = b$。令 w^* 为 w_i 中满足 $\mathrm{t}(w^*) \le \mathrm{t}(y_k)$ 的最后一个元素。这样的元素确实存在，因为 z 是 y_i 和 w_j 的共同祖先。回想一下，在揭示 y_k 时，其区间 I 完全为空。需要考虑两种情况：

如果将 w^* 映射到 $\phi(y_k)$ 的左侧，那么根据断言 4.5，b 也在其左侧，并且有 $\phi(a) - \phi(b) \ge \phi(y_k) - \phi(b) \ge |I|/2 \cdot 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(b)}$。

它 w^* 被映射到右侧 I，那么 b 也在右侧，并且根据断言 4.4，$\phi(b) - \phi(a) \ge |I|/2 \cdot 2^{\mathrm{t}(y_k)-\mathrm{t}(a)}$。

在这两种情况下，$\phi(b) - \phi(a) \ge D/2 \cdot 2^{-n}$。然而，

$$d(a,b) \le d(a,z) + d(b,z) \le \sum_{i=2}^{q} d(y_{i-1}, y_i) + \sum_{j=2}^{f} d(w_{j-1}, w_j) \le nD.$$

结合这两个观察可知，收缩至多为 $n2^{n+1}$，因此畸变为 $O(2^n \cdot n2^n) = O(n4^n)$。

■

5 在线嵌入到 ℓ_∞ 中，畸变为 $(1+\epsilon)$

本节研究将度量空间（X，d）在线嵌入到 ℓ_∞ 中，畸变上界为（$1+\epsilon$），其中 ϵ 可以任意小。目标是使宿主 ℓ_∞ 空间的维数尽可能小。我们给出了维数关于 $|X|$ 和 ϵ 的一些上界和下界。

众所周知，任何具有 $|X| = n$ 个点的度量空间（X、d）都可以等距嵌入到 ℓ_∞^n 中。稍后将讨论实现这一点的典范嵌入的具体细节。有些出人意料的是，

下面的定理 5.2 表明，即使是 4 个点上的度量，也无法在线等距嵌入到任意有限维的 ℓ_∞ 中。此外，实现（$1+\epsilon$）-畸变比人们预期的更加困难。

本节的主要结果如下：

定理 5.1. 对于任意 $\epsilon \in (0,1]$, 且预先未知的）输入度量空间（X， d），满足 $|X| = n$，(X， d) 可以在线嵌入到配备 ℓ_∞ 度量的 $\mathbb{R}^r$ 中，其乘性失真上界为 $(1+\epsilon)$，其中 $r = 2^{O(n \log n)} \cdot (1+1/\epsilon)^n$。

定理 5.2. 考虑任意一个将度量空间（X， d） $|X| = 4$ 1-Lipschitz 嵌入到 ℓ_∞^k 的一致在线嵌入过程。存在 (X_0， d_0)，使得所得嵌入 Φ 产生 $(1+\frac{1}{2k+1})$ 的收缩。因此，为确保畸变至多为 $(1+\epsilon)$，维数必须为 $\Omega(\epsilon^{-1})$。

下文中，将度量空间（X， d）到 ℓ_∞^r 的嵌入 Φ 视为一族 $\Phi = \{\varphi_i\}_1^r$ 个从（X， d）到直线的嵌入会很方便，其中 φ_i 是 Φ 的第 i 个坐标，而 $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty = \max_i |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)|$。注意， Φ 是 1-Lipschitz 当且仅当每个 φ_i 都是。（X， d）到 ℓ_∞^n， $n = |X|$ 中的典型等距嵌入Φ，可以用这些术语描述为 $\Phi = \{\varphi_x\}_{x \in X}$，其中对于每个 $x \in X$，$\varphi_x : X \to \mathbb{R}$ 由 $\varphi_x(z) = d(x, z)$ 定义。

5.1 定理 5.1 的证明：在线嵌入过程及其分析

$\langle x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \rangle$ 是 X 上的揭示顺序，规定了来自 X 的各点的出现顺序。

定义 $\Phi^t = \{\varphi_i^t\}$ 为将 $X^t = \langle x_1, x_2, \ldots\ldots, x_t \rangle$ 1-Lipschitz 嵌入直线的嵌入族。用树状方式描述嵌入过程会很方便，其中 Φ^t 的嵌入对应于下方树的第 $(t-1)$ 层的顶点。根 Φ^1 是一个将 x_1 发送到 0 的单一嵌入 φ^1。一旦 x_t 被揭示，每个嵌入 $\varphi^{t-1} \in \Phi^{t-1}$ 都会根据赋予 φ^t 的值 x_t 分裂（即扩展）成若干嵌入 $\varphi^t \in \Phi^t$。先前赋予 X^{t-1} 的值保持不变，即对于 φ^{t-1} 的每个子节点 φ^t，都有 $\varphi^t|_{X^{t-1}} = \varphi^{t-1}|_{X^{t-1}}$。定义 Φ 为 Φ^n。在实际实现中，由于无法在线实现分裂，所有 Φ^t 都将具有相同的大小 $|\Phi^n|$，其中包含每个嵌入 φ^t 的适当数量的副本。

众所周知， ϕ^{t-1} 从 X^{t-1} 到直线的 1-Lipschitz 嵌入可以始终扩展为 ϕ^t 从 X^t 到直线的 1-Lipschitz 嵌入。更具体地，定义区间 $I(x_t, \phi^{t-1}) = [\max_{y \in X^{t-1}} \phi^{t-1}(y) - d(y, x_t), \min_{y \in X^{t-1}} \phi^{t-1}(y) + d(y, x_t)]$，$y_1, y_2 \in X^{t-1}$，$\min(\cdot,\cdot)$。此区间非空，因为对于任意，都有

$$[\phi^{t-1}(y_2) + d(y_2, x_t)] - [\phi^{t-1}(y_1) - d(y_1, x_t)] = [d(y_1, x_t) + d(y_2, x_t)] + [\phi^{t-1}(y_2) - \phi^{t-1}(y_1)] \geq$$

$$d(y_2, y_1) - |\phi^{t-1}(y_2) - \phi^{t-1}(y_1)| \geq 0\,.$$

容易验证，赋值 $\phi^t(x_t) = y$ 是 ϕ^{t-1} 的 1-Lipschitz 延拓，当且仅当 $y \in I(x_t, \phi^{t-1})$。

现在，为了描述在线嵌入过程，只需明确说明如何生成每个 $\varphi^{t-1} \in \Phi^{t-1}$ 的子嵌入 $\{\varphi^t\}$。

φ^{t-1} 与 x_t的扩展

设 $\delta \in (0,1]$ 为固定参数，并设 X^{t-1} 和 φ^{t-1} 如上所述。

定义 5.3。对所有 $i \leq t$，定义尺度 $s(x_i, x_t) = \delta \cdot d(x_i, x_t)$，以及相应的无限集 $S(x_i, x_t) = s(x_i, x_t) \cdot \mathbb{Z}$。

令 $A^t = \cup_{i<t} S(x_i, x_t) \cup \{\varphi^{t-1}(x_i)\}_{i=1}^{t-1}$。 A^t 将称为 $\varphi^t(x_t)$ 的可容许范围，这意味着 $\varphi^t(x_t)$ 只能取自 A^t。

最后，将 $P^t \subset A^t$ 定义为 $\varphi^t(x_t)$ 的可行范围，即 $P^t = A^t \cap I(x_t, \varphi^{t-1})$，它是 $\varphi^t(x_t)$ 将取到的所有实际值的集合。对于 $t = 1$，令 $P^t = \{0\}$。

定义 5.4。对于每个点 $p \in P^t$，通过赋值 $\varphi^t(x_t) = p$，创建 φ^{t-1} 的扩展 φ^t。如果 P^t 为空（后续分析中不会遇到这种情况），则对于任意点 $p \in I(x_t, \varphi^{t-1})$，通过赋值 $\varphi^t(x_t) = p$，创建 φ^{t-1} 的扩展 φ^t。

根据 $I(x_t, \varphi^{t-1})$ 的定义，每个 φ^t 确实都是将 X^t 嵌入直线的 1-Lipschitz 嵌入。

还要注意，$I(x_t, \varphi^{t-1})$ 包含于 $[\varphi^{t-1}(x_i) - d(x_i, x_t),\ \varphi^{t-1}(x_i) + d(x_i, x_t)]$，因此其长度至多为 $2d(x_i, x_t)$。因此，$|S(x_i, x_t) \cap I(x_t, \varphi^{t-1})| \le 2\delta^{-1} + 1$，这意味着 φ^{t-1} 的不同扩展 φ^t 数量至多为 $(t-1)(2\delta^{-1}+2)$。于是，$|\Phi^n| \le (n-1)! \cdot (2\delta^{-1}+2)^{n-1}$。

这就完整地定义了在线嵌入过程。注意，任何 $\varphi \in \Phi$ 都会将 x_1 映射到 0。

5.1.2 弱加性近似性质

本节陈述并证明上述嵌入 Φ 的关键性质。

设 $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ 是将 (X, d) 嵌入直线的任意 1-Lipschitz 嵌入。设 $\langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle$ 是对 X 重新排序后的序列，使得 $\psi(z_i) \le \psi(z_{i+1})$ $i = 1, \ldots, n-1$。我们将此顺序称为 X 上的 z-顺序，以区别于 X 上的揭示顺序，后者也称为 x-顺序。

对于 $i < j$，令 $D_{ij} = \max_{x,\ y \in \langle z_i,\ \cdots,\ z_j \rangle} d(x, y)$。

~引理 5.5。对于任意 1-Lipschitz $\psi\colon X \to \mathbb{R}$ 以及任意一对指标 $i < j$，存在 $\psi \in \Phi$ 使得，

$$\widetilde{\psi}(z_j) - \widetilde{\psi}(z_i) \ \ge\ \psi(z_j) - \psi(z_i) - 10n^2\delta \cdot D_{ij}\,,$$

其中 δ 是构造 Φ 时使用的参数。

证明。我们通过考察复杂程度逐步增加的特殊情形来进行证明。从某种意义上说，情形 1 是基础情形；其他情形则可通过对给定的 ψ 进行处理，并将其替换为合适的 1-Lipschitz ψ^*，归约到情形 1，同时保持 ψ 在 z_i 和 z_j 上的取值不变。

点 z_i、z_j 及其值 $L = \psi(z_i)$ 和 $R = \psi(z_j)$ 是固定的，不会受到 ψ 变化的影响；它们分别处于 z 顺序中（尽管旧索引 i、j 可能会变得无关紧要）。

设 S^ψ 为集合，其中包含 z 顺序区间 $\langle z_i、\ z_{i+1}、\ \ldots、\ z_j \rangle$ 的元素。注意，区间 $[L, R]$ 可能包含点 $x \notin S^\psi$ 的像，例如某些满足 $k < i$ 的 z_k，但 $\psi(z_k) = \psi(z_i)$。这类点称为附带点，通常需要特别注意。

有时使用记号 D^ψ 会比使用 D_{ij}（即 S^ψ 的 d 直径）更方便。设 z_f（或 z_f^ψ）表示 S^ψ 中揭示顺序最靠前的点。z 顺序的变化可能导致 z_f^ψ 发生变化，也可能影响 S^ψ 和 D^ψ；后两者只会增大。

<u>* 情形 I:</u> $z_i = z_f = x_1$，$z_j = z_n$。

不失一般性地，假设 $\psi(x_1) = 0$，所有 $\varphi \in \Phi$ 均满足这一条件。否则，考虑 $\psi - \psi(x_1)$ 而不是 ψ。~我们首先为每个 z_k 设置目标 $t(z_k) \in \mathbb{R}$，这些目标是 $\psi(z_k)$ 取值的候选值。命题 5.8 将说明这一定义背后的逻辑。

定义 5.6。对于 $1 \le k \le f$，设 $t(z_k) = 0$。对于 $k > f$，将 $t(z_k)$ 设为 $S(z_f, z_k)$ 中满足以下条件的最大值：

$$t(z_k) \ \le\ \psi(z_k) - \delta \cdot (k - f - 1)\, D_{ij}\,.$$

特别地，对于 $k \ge f$，$\psi(z_k)$ 距离 $\psi(z_f)$ 越远，$t(z_k)$ 就越会从 $\psi(z_k)$ 向左偏移，朝 0 移动。

请注意，目标 $t(z_k)$ 是 z_k 的可容许值，因为值 0 始终是可容许的，并且对于~每个 $k \ge f$，$t(z_k) \in S(z_f, z_k)$。然而，一般而言，$t(z_k)$ 并不可行。为解决此问题，ψ 将按照 X 的揭示顺序（而非 z-顺序）以归纳（离线）方式定义，同时~~注意保持 z-顺序；也就是说，如果 z_i 在 z-顺序中先于 z_j，则 $\psi(z_i) \le \psi(z_j)$。

对于 $k > f$，令 z_k^- 和 z_k^+ 分别表示 X 中在揭示顺序下先于 z_k 的最大点，以及 X 中在揭示顺序下后于 z_k 的最小点。虽然 z_k^+ 可能未定义，但 z_k^- 始终有定义，因为 $k < f$。ψ 的形式化定义如下：

定义 5.7. 对于 $k \le f$，令 $\widetilde{\psi}(z_k) = 0$。对于 $k > f$，根据关于保持 z 阶的归纳假设，有 $\widetilde{\psi}(z_k^-) \le \widetilde{\psi}(z_k^+)$。$\widetilde{\psi}(z_k)$ 的值根据 $t(z_k)$ 的值与 $\widetilde{\psi}(z_k^-)$ 和 $\widetilde{\psi}(z_k^+)$ 的值之间的关系来定义：若 $\widetilde{\psi}(z_k^-) \le t(z_k) \le \widetilde{\psi}(z_k^+)$，则 $\widetilde{\psi}(z_k) = t(z_k)$；若 $t(z_k) < \widetilde{\psi}(z_k^-)$，则 $\widetilde{\psi}(z_k) = \widetilde{\psi}(z_k^-)$；（将 $t(z_k)$ 从 0 处“回拉”）若 $t(z_k) > \widetilde{\psi}(z_k^+)$，则 $\widetilde{\psi}(z_k) = \widetilde{\psi}(z_k^+)$。（将 $t(z_k)$ 朝 0 处“前推”）

显然，$\widetilde{\psi}(z_k^-) \le \widetilde{\psi}(z_k) \le \widetilde{\psi}(z_k^+)$ 成立，因此确实保留了 z-序。

接下来，我们声称在 $\widetilde{z}$-序中，x_1 先于或等于 z_f，因此 $\psi(x_1) = 0$，如所需。对于每个 $z_k \ne x_1$，如上所定义的值 $\psi(z_k)$ 对于 z_k 是可容许的，因为 $t(z_k)$ 原本就是如此。接下来还需证明它也是可行的；在当前语境下，这等价于证明 ψ 是 1-Lipschitz。

命题 5.8. 对于每个 $k > 1$，$0 \le \widetilde{\psi}(z_k) - \widetilde{\psi}(z_{k-1}) \le \psi(z_k) - \psi(z_{k-1})$。

证明。若 $k \le f$，则结论显然成立，因为此时 $\widetilde{\psi}(z_k) = \widetilde{\psi}(z_{k-1}) = 0$。考虑 $k > f$。若 $\widetilde{\psi}(z_k) = \psi(z_k)$，则 $\widetilde{\psi}(z_k)$ 是通过“回拉”定义的，或者 $\widetilde{\psi}(z_{k-1})$ 是通过“前推”定义的；那么根据 z-序的保序性，$\widetilde{\psi}(z_k) = \widetilde{\psi}(z_{k-1})$，结论得证。否则，必有 $\widetilde{\psi}(z_k) \le t(z_k)$，而 $\widetilde{\psi}(z_{k-1}) \ge t(z_{k-1})$。此时，引入记号 $\alpha_t = \psi(z_t) - \delta \cdot (t - f - 1) D_{ij} - t(z_t) \ge 0$（参见定义 5.6），可得：

$$\widetilde{\psi}(z_k) - \widetilde{\psi}(z_{k-1}) \le t(z_k) - t(z_{k-1}) = \psi(z_k) - \delta \cdot (k - f - 1) D_{ij} - \alpha_k] - [\psi(z_{k-1}) - \delta \cdot ((k-1) - f - 1) D_{ij} - \alpha_{k-1}]$$

$$= \psi(z_k) - \psi(z_{k-1}) - (\delta \cdot D_{ij} + \alpha_k - \alpha_{k-1}) \le \psi(z_k) - \psi(z_{k-1}),$$

其中，最后一个不等式成立是因为 $\alpha_k \le s(z_f, z_k) = \delta \cdot d(z_f, z_k) \le \delta \cdot D_{ij}$，$0 \le \alpha_{k-1}$，因此 $(\delta \cdot D_{ij} + \alpha_k - \alpha_{k-1}) \ge 0$。 ■

命题 5.8 立即推出，ψ 相对于由 ψ 在 X 上诱导的线度量是 1-Lip，因此相对于原始的 (X, d) 也是 1-Lip。

最后，我们需要证明 $\psi(z_j) - \widetilde{\psi}(z_i) \ge d(z_i, z_j)$，这正是引理所要求的。根据定义 5.7，由于 $z_i = z_f = x_1$，有 $\widetilde{\psi}(z_i) = 0$；又由于 $j = n$，有 $\psi(z_j) \ge t(z_j)$。牢记根据我们的假设，$\psi(z_i) = \psi(x_1) = 0$，并沿用命题 5.8 证明中的记号 α_t，可得

$$\widetilde{\psi}(z_j) - \widetilde{\psi}(z_i) \ge t(z_j) - 0 = [\psi(z_j) - \delta \cdot (j - f - 1) D_{ij} - \alpha_j] - \psi(z_i) \ge \psi(z_j) - \psi(z_i) - \delta \cdot (j - i) D_{ij} \quad (4)$$

* 情形 Ia：$z_i = z_f$，x_1 先于 z_i，$z_j = z_n$。

构造与情形 I 类似，唯一的区别是需要考虑 $\psi(x) - \psi(z_f)$，而不是 $\psi(x)$，并且对所有 $k \le f$，令 $\psi(z_k) = 0$。很容易验证，ψ 确实是可行的。

* 间歇：ψ 上的有用算子

以下所有算子都保持 $x \in S^\psi$ 的值不变，尤其是保持区间 $[L, R] \subset \mathbb{R}$ 不变。

定义 5.9。

• L-截断和 R-截断。ψ 的 L-截断定义为 ψ^*，其中当 $k \geq i$ 时，$\psi^*(z_k) = \psi(z_k)$；当 $k \leq i$ 时，$\psi^*(z_k) = \psi(z_i)$。ψ 的 R-截断定义为 ψ^*，其中当 $k \leq j$ 时，$\psi^*(z_k) = \psi(z_k)$；当 $k \geq j$ 时，$\psi^*(z_k) = \psi(z_j)$。这些算子保持原有的 z 次序和 1-Lipschitz 性质。集合 S^ψ 保持不变。

• L-扩张和 R-扩张。关于 S^ψ 的 L-扩张定义为 ψ^*，其中如果 $z_k \in S^\psi$，则 $\psi^*(z_k) = \psi(z_k)$，或者 $\psi(z_k) > L$。否则，$\psi^*(z_k) = \max_{y \in S^\psi} \psi(y) - d(y, z_k)$。关于 S^ψ 的 R-扩张定义为 ψ^*，其中如果 $z_k \in S^\psi$，则 $\psi^*(z_k) = \psi(z_k)$，或者 $\psi(z_k) < R$。否则，$\psi^*(z_k) = \min_{y \in S^\psi} \psi(y) + d(y, z_k)$。将实际用于定义 $\psi^*(z_k)$ 的 $y_0 \in S^\psi$ 称为 z_k的锚点。特别地，$z_k \in S^\psi$ 的锚点就是 z_k本身。集合 S^ψ 保持不变。

• L-折叠和 R-折叠。ψ 的 L-折叠定义为 ψ^*，其中如果 $\psi(x) \geq L$，则 $\psi^*(x) = \psi(x)$，且 $\psi^*(x) = L + (L - \psi(x))$；否则，它是 $\psi(x)$ 关于 L的反射。ψ 的 R-折叠定义为 ψ^*，其中如果 $\psi(x) \leq R$，则 $\psi^*(x) = \psi(x)$，且 $\psi^*(x) = R - (\psi(x) - R)$；否则，它是 $\psi(x)$ 关于 R的反射。容易验证，折叠保持 1-Lipschitz 性质。不过，它们可能显著改变z-序。对于通过折叠从 ψ 得到的 ψ^*，集合 S^{ψ^*} 是由 S^ψ 增添所有满足以下条件的点 x得到的：$\psi^*(x) \in [L, R]$，但 $\psi(x) \neq \psi^*(x)$。

• 扩展 L-折叠和 R-折叠。ψ 的扩展 R-折叠定义为 ψ^*，它由相对于 S^ψ的 R-扩张得到，随后进行 R-折叠。扩展 L-折叠的定义类似。集合 S^{ψ^*} 按照简单折叠中的方式从 S^ψ 得到。

• 扩展截断 L-折叠和 R-折叠。ψ 的扩展 R-折叠定义为 ψ^*，它由相对于 S^ψ的 R-扩张得到，随后进行 R-折叠，然后收集所有满足 $\psi(z) \geq R$ 且当前值为 $< L$的 z，并将该值重置为 L。扩展 L-折叠的定义类似。集合 S^{ψ^*} 按照扩展折叠中的方式从 S^ψ 得到；但是，在最后一步中其值被重置的点不包括在内，将它们视为偶然点。正如我们将看到的，扩展截断折叠保持 1-利普希茨性质。

断言 5.10. 设 ψ 是 1-Lipschitz，且 ψ^* 是它的 R-扩张。则，$\forall x\ \psi^*(x) \geq \psi(x)$，并且 $\psi^*|_{S^\psi \cup \{x \mid \psi(x) \geq R\}}$ 关于 d 是 1-Lipschitz。对于 L-扩张，也有类似的结论。

证明。对于第一个结论，只需对满足 $\psi(x) \geq R$ 的 x's 验证即可。记住 ψ 是 1-Lipschitz，并利用 x 的锚点 $x_0 \in S^\psi$，可得

$$\psi^*(x) - \psi(x) = [\psi(x_0) + d(x_0, x)] - \psi(x) = d(x, y) - [\psi(y) - \psi(x)] \geq 0\,.$$

对于 s 第二个陈述，令 $z, y \in S^\psi \cup \{x \mid \psi(x) \geq R\}$，并令 z_0 为 z的锚点。 n,

$$\psi^*(z) - \psi^*(y) \leq [\psi(z_0) + d(z_0, z)] - [\psi(z_0) + d(z_0, y)] = d(z_0, z) - d(z_0, y) \leq d(x, y)\,.$$

■

命题 5.11。设 ψ 是 1-Lipschitz，且令 ψ^* 为其扩展 R-折叠。那么，相对于 d，$\psi^*|_{S^{\psi^*}}$ 是 1-Lipschitz，且$D^{\psi^*} \le D^{\psi} + 4(R-L)$。扩展 L-折叠也有类似的结论。

证明。第一条结论可由前面的断言以及 R-折叠的 1-Lipschitz 保持性质立即得出。

对于第二条结论，注意到 $x \in S^{\psi*} \setminus S^{\psi}$ 当且仅当 $R < \psi^*(x) \le 2R - L$。令 x_0为 x的锚点。于是，由于 $\psi(x_0) \ge L$ 且 $\psi^*(x) = \psi(x_0) + d(x_0, x) \le 2R - L$，可得$d(x_0, x) \le 2(R-L)$。由于 $S^{\psi*}$ 是通过添加与 S^{ψ}的 d-距离至多为 $2(R-L)$ 的点，从 S^{ψ} 得到的，因此结论成立。 ∎

由于截断确保，对于 $x \in S^{\psi*} \setminus S^{\psi}$，$\psi^(x)$ 只能逐渐接近 $\psi(y)$ 中带有 $y \le L$ 的项，而不会越过它们，因此我们得到

推论 5.12。设 ψ 是 1-Lipschitz，且 ψ^* 是其扩展的截断 R-折叠。那么，ψ^* 相对于 d是 1-Lipschitz，且 $D^{\psi^*} \le D^{\psi} + 4(R-L)$。扩展 L-折叠也有类似结论。

现在我们可以回到对其余情形的分析。

<u>* 情形 II:</u> $z_i = z_f$、$\psi(x_1) = \psi(z_f)$，z_j任意。

使用情形 Ia 的构造时，困难在于 D_{in} 现在可能显著大于 D_{ij}。为解决这一困难，我们将原始的 ψ 替换为其扩展的截断 R-折叠，然后对其应用 L-截断。根据推论 5.12，这两个操作都保持 1-利普希茨性质，因此所得的 ψ^* 是 1-利普希茨的，而D^{ψ^*}（S^{ψ^*}的 d-直径）至多为 $5D_{ij}$。因此，将 ψ 替换为 ψ^*，就把原问题化归为情形$\widetilde{\ }$Ia，并推出存在 $\psi^* \in \Phi$，使得

$$\widetilde{\psi^*}(z_j) - \widetilde{\psi^*}(z_i) \ \ge \ \psi(z_j) - \psi(z_i) - \delta \cdot 5(j-i)D_{ij}\,.$$

<u>* 情形 III:</u> $z_f = x_1 \in [z_i, z_j]$按 z-阶。

不妨设 $\psi(x_1) = 0$。将扩展的截断 L-折叠分别应用于$\psi|_{\langle z_1,\ \ldots\ldots,\ x_1\rangle}$，其中取 z_i 和 $z'_j = x_1$；将扩展的截断 R-折叠分别应用于$\psi|_{\langle x_1,\ \ldots\ldots,\ z_n\rangle}$，其中取$z'_i = x_1$ 和z_j，然后取所得部分函数的并集，即可将此情形化归为情形 II。这是可能的，因为它们的定义域仅共享 x_1这一点，且两个部分函数在该点都取相同的值 0。这样构造的 ψ^* 是 1-利普希茨的，并且不改变原来 z_i、z_j的值；这一点很容易验证，留给读者完成。结论是

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi^*}(z_j) - \widetilde{\psi^*}(z_i) \ \ge \ [\psi(z_f) - \psi(z_i) - \delta\cdot 5(f-i)\cdot D_{if}] \ + \ [\psi(z_j) - \psi(z_j) - \delta\cdot 5(j-f)\cdot D_{fj}] \ \ge \\ \ge \ \psi(z_j) - \psi(z_i) - \delta\cdot 5(j-i)\cdot D_{ij}\,. \qquad (5)\end{aligned}$$

<u>* 情形 IV:</u> $x_1 \notin [z_i, z_j]$按 z阶。

在此情形下，我们反复进行扩展 L-折叠，随后进行扩展 R-折叠，从而生成一系列映射 $\psi_0 = \psi, \psi_1, \psi_2$, . . .，其中第 i次折叠是相对于 $S^{\psi_{i-1}}$进行的。当 $S^{\psi_t} = S^{\psi_{t+1}}$时，过程停止。

注意，只要过程仍在进行，$|S^{\psi_i}|$ 就会严格增大，因此最多经过 $(n-2)$ 轮便会停止。还要注意，根据命题 5.11，所有部分映射 $\psi^i|_{S^{\psi_i}}$ 都是 1-Lipschitz。最后，注意命题 5.11 蕴含在停止时刻 t，由于 $S^{\psi_t} = S^{\psi_{t+1}}$，对于每个 $x \notin S^{\psi_t}$，d-距离 $\mathrm{dist}(x, S^{\psi_t}) > 2(R-L)$。

定义一个新的映射 ψ^*：当 $x \in S^{\psi_t}$时，$\psi^*(x) = \psi_t(x)$；否则，$\psi^*(x) = \psi_t(z_f^{\psi_t})$。根据关于 ψ^t 的最后一个观察结果，ψ^* 是 1-Lipschitz。

根据命题 5.11,

$$D^{\psi_t} \;\le\; D^{\psi} + 2t\cdot(R-L) \;<\; (2n-3)\cdot D_{ij}\,.$$

现在只需稍作调整，就可以将问题化归为情形 III。问题在于，将所有 $x \notin S^{\psi_t}$ 映射到 $\psi_t(z_f^{\psi_t})$ 会使 S^{ψ^*} 严格包含 S^{ψ_t}，进而可能导致 D^{ψ_t}不受控制地增长。为解决这一问题，不失一般性地假设 $\psi_t(z_f^{\psi_t}) = 0$，并对所有 $x \in S^{\psi_t}$按情形 III 处理，同时对所有 $x \notin S^{\psi_t}$令 $\widetilde{\psi^*}(x) = 0$。容易看出，由此得到的 $\widetilde{\psi^*}$ 是可行的。因此，存在$\sim\psi^* \in \Phi$使得

$$\widetilde{\psi^*}(z_j) - \widetilde{\psi^*}(z_i) \;\ge\; \psi(z_j) - \psi(z_i) - \delta\cdot 5(j-i)\cdot 2n\cdot D_{ij}\,. \tag{6}$$

引理的证明至此完成。 ∎

5.1.3 结论

现在可以完成定理 5.1 的证明。

如前所述，将 (X,d) 嵌入由 $\varphi_x(z) = d(x,z)$ 给出的直线的映射 φ_x，一方面是 1-Lipschitz，另一方面保留了 x 与 X中其他点之间的所有距离。因此，将引理 5.5 应用于 φ_x，取 $z_i = x$ 和 $z_j = y$，注意到 $D_{ij} \le 2d(z_i, z_j)$，并选择 $\delta = \epsilon/20n^2$，我们可以得出存在 $\widetilde{\varphi_x} \in \Phi$，使得

$$\widetilde{\varphi_x}(y) - \widetilde{\varphi_x}(x) \;\ge\; [\varphi_x(y) - \varphi_x(x)] - \delta\cdot 10n^2\cdot D_{xy} \;=\; d(x,y) - \epsilon\cdot D_{xy}/2 \;\ge\; (1-\epsilon)\cdot d(x,y).$$

遍历所有 φ_x 和 y，x、$y \in X$，即可得到所需结论。根据定义 5.4 之后的讨论，宿主空间的维数上界为

$$(n-1)!\cdot(2\delta^{-1}+2)^{n-1} \;\le\; 40^n\,(n-1)!\,n^{2n}\,(1+1/\epsilon)^n\,.$$

5.2 下界

接下来我们证明定理 5.2。

考虑定义在 $X = \{a,b,c,q\}$ 上的一类度量 $\mathcal{A}$，它们由 $\mathbb{S}^1$（即连续一维环）的测地度量诱导，并涉及两对对径点 $\{a,b\}$ 和 $\{c,q\}$。距离 $d(a,b)$ 和 $d(c,q)$ 均等于 1。距离 $\alpha = d(a,c) = d(b,q)$ 完全确定了 $\mathcal{A}$ 中的一个度量。我们将其记作 d_α。

定理 5.13。设 ϕ 是将上述度量类 $\mathcal{A}$嵌入 ℓ_∞^k 的任意 1-Lipschitz 在线嵌入。那么，存在 $d_\alpha \in \mathcal{A}$，使得 ϕ 遭受 $(1+\frac{1}{2k+1})$ 的收缩。因此，若要确保所有 $d_\alpha \in A$ 的畸变为$\le 1+\epsilon$，维数必须为 $\Omega(\epsilon^{-1})$。

证明。对手首先公开距离为 1 的对踵点 a、b。随后，在观察到这两个点的嵌入后，对手将适当选择 α，并根据 d_α公开对踵点 c、q。

如前所述，我们将嵌入 $\Phi\colon\; X \to \ell_\infty^k$ 视为一族将 X 在线嵌入直线的 k 个非扩张嵌入，即 $\Phi = \{\phi_1,\ldots,\phi_k,\;\phi_i\colon\; X \longrightarrow \mathbb{R}\}$。不失一般性地，假设对于所有 $\phi_i \in \Phi$，$\phi_i(a) = 0$，并且 $\phi_i(a) \le \phi_i(b) \le 1$。为方便起见，还假设 ϕ_i 按 $\phi_i(b)$ 的值排序，即 $0 \le \phi_1(b) \le \phi_2(b) \le \ldots \le \phi_k(b) \le 1$。值 $\{\phi_i(b)\}$ 将 $[0,1]$ 划分为至多 $(k+1)$ 个区间，因此根据鸽巢原理，最长区间的中点与任意 $\phi_i(b)$ 至少相距 $\frac{1}{2(k+1)}$。将该点记为 p。令 j 为满足 $0 \le \phi_j(b) < p < \phi_{j+1}(b) \le 1$ 的 j。根据 p 的选择，当 $i \le j$ 时，有 $p \ge \phi_i(b) + \frac{1}{2(k+1)}$；当 $i > j$ 时，有 $p \le \phi_i(b) - \frac{1}{2(k+1)}$。

对手选择的 α 将是 $\alpha = \frac{1-p}{2}$。也就是说，在所选的 d_α中，a 与 c 之间的距离为 $\frac{1-p}{2}$。我们声称，对于所有 i，无论 $\phi_i(c)$ 和 $\phi_i(q)$ 的值如何，$|\phi_i(q) - \phi_i(c)| \le 1 - \frac{1}{2(k+1)}$。事实上，回想一下，对于所有 $i \in [k]$，ϕ_i 都不是扩张的，因此 $\phi_i(c) \in [-\alpha,\alpha]$。

先考虑 $i \le j$，然后 $\phi_i(q) \in [\phi(b)\alpha,\ \phi+\alpha$，因此

$$|\phi_i(q)-\phi_i(c)| \ \le\ (\phi_i(b)+\alpha)-(\phi_i(a)-\alpha) \ =\ \phi_i(b)+2\alpha \ \le\ \phi_j+1-p \ \le\ 1-\frac{1}{2(k+1)}\,.$$

现在考虑 $i \ge j+1$。再次利用 ϕ_i 的不扩张性，我们得出

$$\phi_i(b)-(1-\alpha) \ \le\ \phi_i(c) \ \le\ \phi_i(a)+\alpha\,; \qquad \phi_i(b)-\alpha \ \le\ \phi_i(q) \ \le\ \phi_i(a)+(1-\alpha)$$

但是，由于 $\alpha \le 0.5$，这意味着，

$$|\phi_i(q)-\phi_i(c)| \ \le\ \max\{\,\phi_i(a)+(1-\alpha)-(\phi_i(b)-(1-\alpha)),\ \phi_i(a)+\alpha\ -(\phi_i(b)-\alpha)\,\}$$

$$=\ \max\{\,2(1-\alpha)-\phi_i(b),\ 2\alpha-\phi_i(b)\,\} \ =\ 2(1-\alpha)-\phi_i(b) \ =\ 1+p-\phi_i(b) \ \le\ 1-\frac{1}{2(k+1)}\,.$$

因此，ϕ的收缩至少为 $(1-\frac{1}{2(k+1)})^{-1} = 1+\frac{1}{2k+1}$。 ■

6 关于树的等距在线嵌入的几点说明

最后，我们就树度量的等距嵌入作几点说明。众所周知，树度量 d_T（如欧氏度量）具有刚性，即存在唯一的（最小）加权树T^*，其上带有 Steiner 点，并以 d_T作为其子度量。此外，无论揭示顺序如何，这种 T^* 都可以在线构造。

定理6.1. 每个树度量 d_T 都可以等距在线嵌入到加权树 T^*的度量中（使用 Steiner 点）。无需预先了解 n。

略去细节，在每一步中，给定一个新点 x，嵌入会在目前构造的树中引入一个新的（唯一确定的）Steiner 点 s_x，并通过一条权重为（唯一确定的）w_x的新边，将 x 连接到 s_x。Steiner点 s_x 也可以是树的一个真顶点。

接下来我们断言，树度量可以在线等距嵌入到 ℓ_1 和 ℓ_∞ 中。

Th定理 6.2. 每个定义在 n 个点上的树度量都可以等距在线嵌入到 ℓ_1^{n-1} 中 .

总体思路是采用上文所述的到加权树中的等距嵌入。该嵌入的关键性质是，树中相邻顶点的像仅在一个坐标上不同。利用这一点，位于现有相邻顶点 v 和 u之间的新Steiner点 y_x 的像，将在与 v 和 u相同的坐标上分别与二者一致，并在剩余坐标上与二者均不同。

将新点 x 连接到相应的Steiner点 y_x，需要取表示 y_x的向量，并为其添加一个值为 w_x的新坐标。假设目前构造的向量在该坐标上的值均为 0。通过相对简单的分析可以证明，该在线嵌入确实是一个等距映射。

我们最后要指出的是，任何能够在线嵌入到 ℓ_1 中且其先验已知维数为 $D(n)$的对象，也能够在线嵌入到 ℓ_∞ 中，且维数为 $2^{D(n)}$。这是因为映射 $x=(x_1,\ldots,x_D) \to (\langle x,\epsilon^1\rangle,\ldots,\langle x,\epsilon^{2^D}\rangle)$是 ℓ_1^D与 $\ell_\infty^{2^D}$ 之间的等距映射，其中 ϵ^i遍历维数为 D的 ±1的所有符号向量；此外，该映射还可以在线构造。通过将所有ϵ_i的第一个坐标固定为1，可以将维数 2^D 改进为 2^{D-1}。因此，

定理6.3。任意具有 n 个点的树度量都可以等距在线嵌入到 $\ell_\infty^{2^{n-2}}$ 中。

参考资料

[1] S. Arora、L. Lov´asz、I. Newman、Y. Rabani、Y. Rabinovich、S. Vempala（2012），度量空间的局部性质与整体性质。SIAM 计算杂志，41(1)，250-271[2] Y. Bartal，关于用树度量逼近任意度量。载于：计算理论研讨会（STOC）论文集，161–168（1998）[3] Y. Bartal、N. Fandina、S.W. Umboh，在线概率度量嵌入：绕过固有界限的通用框架。载于：第三十一届 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA）论文集，1538–1557（2020）[4] J. Bourgain，关于将有限度量空间利普希茨嵌入希尔伯特空间。以色列数学杂志，52(1-2):46–5（1984）[5] Johnson, W.B.、Lindenstrauss, J.，将1-Lipschitz映射扩展到希尔伯特空间。载于：现代分析与概率会议。当代数学。26，189–206（1984）[6] P. Indyk、A. Magen、A. Sidiropoulos、A. Zouzias，在线嵌入。载于：近似、随机化与组合优化：算法与技术（APPROX/RANDOM 2010），246–259（2010）[7] A. Naor、J. Lee，将菱形图嵌入Lp及 L_1中的降维，几何与泛函分析（GAFA）14(4)，745-747（2004）[8] N. Linial、E. London、Y. Rabinovich，图的几何及其若干算法应用。Combinatorica，215-245（1995）[9] I. Newman、Y. Rabinovich，将平面度量嵌入欧几里得空间的畸变下界。离散与计算几何29，77–81（2002）。