arXiv:2303.16000v1 [math.MG] 28 Mar 2023

Monge-Amp`ere算子与赋值

Jonas Knoerr

本文研究并分类了两类与Monge-Amp`ere算子相关的凸函数上的测度值赋值。研究表明，所有取值于 $\mathbb{R}^n$ 上的复Radon测度空间、具有局部决定性、连续性、对偶上图平移不变性以及平移等变性的赋值所构成的空间是有限维的。本文建立了这些赋值的积分表示，并用混合Monge-Amp`ere算子对其进行了描述；此外，还利用Hessian 测度刻画了SO(n)-等变赋值。

1 引言

Monge-Amp`ere型方程源于分析学和几何学中的许多问题，包括Minkowski问题、最优传输、仿射几何、多复势理论以及物理学，并且在Calabi-Yau定理 [58]中发挥着重要作用。在经典形式下，Monge-Amp`ere方程写作

$$\det(D^2 f(x)) = F(x, f(x), \nabla f(x)) \quad \text{for } x \in U, \tag{1}$$

其中， $U \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个开凸子集， $D^2 f$ 表示凸函数$f\colon U \to \mathbb{R}$的Hessian矩阵，且 $F\colon U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 是给定的。关于 Monge-Amp`ere 方程及其几何应用的背景，可参阅 Figalli [21] 以及 Trudinger 和 Wang [54] 的文章。

Monge-Amp`ere 方程的广义解概念可追溯至 Alexandrov。在这里，(1) 的左端被解释为 $U$ 上的一个 Borel测度 MA($f$)，称为 $f$ 的 Monge-Amp`ere 测度；它可通过连续性延拓到 U 上所有的有限值凸函数。更准确地说，设 Conv($U,\mathbb{R}$) 表示凸开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上所有有限值凸函数的空间，并设 $\mathcal{M}(U) := (C_c(U))'$ 表示 U 上复Radon测度的空间，将其视为具有紧支集的复值连续函数空间 $C_c(U)$ 的连续对偶。若我们给 Conv($U,\mathbb{R}$) 赋予由局部一致收敛诱导的拓扑，并给 $\mathcal{M}(U)$ 赋予弱*拓扑，那么实 Monge-Amp`ere 算子

$$\begin{aligned} \mathrm{MA} : \mathrm{Conv}(U,\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}(U) \\ f &\mapsto \mathrm{MA}(f) \end{aligned}$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 52B45, 26B25, 53C65, 52A39.*Key words and phrases.*
凸函数、函数上的赋值、Monge-Amp`ere 算子。

是一个连续映射，并且对 $f \in \mathrm{Conv}(U,\mathbb{R}) \cap C^2(U)$，满足 $d\,\mathrm{MA}(f)[x] = \det(D^2 f(x))d\,\mathrm{vol}_n(x)$。对于其他 Monge-Amp`ere 型算子，也有类似结果，例如复 Monge-Amp`ere 算子。

这些算子的基本性质之一是，它们在 $\mathrm{Conv}(U,\mathbb{R})$ 上定义了赋值。这里，如果在一族 X 取扩展实值函数上定义的泛函 Ψ 满足

$$\Psi(f) + \Psi(h) = \Psi(f \vee h) + \Psi(f \wedge h)$$

对于所有满足条件的 f、$h \in X$，逐点最大值 $f \vee h$ 和最小值 $f \wedge h$ 都属于 X。这可以看作是集合族上赋值概念的推广，其中逐点最大值和最小值分别由并集和交集取代。近年来，对不同集合族，尤其是凸体上的赋值的研究受到了广泛关注，并取得了大量分类结果及其在积分几何中的应用 [1, 4, 5, 9, 10, 11, 25, 26, 33, 39, 43, 44, 56, 57]。类似地，关于函数 [7, 15, 19, 20, 28, 34, 38, 40, 41, 42, 47, 51, 55], 上赋值的研究也十分丰富，其中包括对许多重要几何算子的分类。

Monge-Amp`ère 型算子在现代赋值理论中有许多应用，例如用于构造凸体和函数上的连续赋值[2, 3, 31, 32]。同样，Hessian 测度在 Colesanti、Ludwig 和 Mussnig[14, 16, 17, 18]，对 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 上一类旋转不变赋值的刻画中发挥着重要作用，这一结果与 Hadwiger [27] 的经典结果相呼应。这些测度此前由 Trudinger 和 Wang [52, 53] 研究过，并且与凸体的支撑测度以及半凸函数的奇异集 [12, 13]密切相关。

本文的主要结果完整描述了 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 上两类测度值赋值，它们具有许多与实 Monge-Amp`ère 算子相同的性质。设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为一个开凸集。我们称映射 $\Psi : \mathrm{Conv}(U,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(U)$

- 若满足以下条件，则称为局部决定：若 $f,h \in$ 凸函数$(U,\mathbb{R})$ 在开子集 $V \subset U$ 上满足 $f \equiv h$，则

$$\Psi(f)[B \cap V] = \Psi(h)[B \cap V] \quad \text{for all relatively compact Borel sets } B \subset U;$$

- 若 $U = \mathbb{R}^n$，且对所有 $f \in$ 凸函数$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 和所有 $x \in \mathbb{R}^n$，则称为平移等变，

$$\Psi(f(\cdot + x))[B] = \Psi(f)[B + x] \quad \text{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n;$$

- 若满足

$$\Psi(f + l) = \Psi(f) \quad \text{for all } f \in \mathrm{Conv}(U,\mathbb{R}),\ l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ affine};$$

- 若对所有 $f \in$ 凸函数$(E,\mathbb{R})$ 和所有真子空间 $E \subset \mathbb{R}^n$，均有 $\Psi(\pi_E^* f|_U) = 0$，则称为对偶简单，其中 $\pi_E : \mathbb{R}^n \to E$ 表示正交投影。

后两个概念的术语源于从上图上的赋值角度对这些性质的几何诠释。有关详情请参阅 [15, 18]，这里仅指出，实 Monge-Amp`ere 算子 MA 具备所有这些性质。我们的第一个结果表明，它本质上是唯一一个具有这些性质的连续赋值 $\Psi : \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$。

定理 1.1. 设 $\Psi : \mathrm{Conv}(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(U)$ 是一个连续的、对偶上图平移不变赋值。若 Ψ 是对偶简单且局部决定的，则存在唯一的连续函数 $\psi \in C(U)$，使得对于每个 $f \in \mathrm{Conv}(U, \mathbb{R})$,

$$\Psi(f)[B] = \int_B \psi(x) d\,\mathrm{MA}(f)[x] \quad \textit{for all relatively compact Borel sets } B \subset U.$$

如果我们假设 $U = \mathbb{R}^n$，并且定理 1.1 中的赋值 Ψ 还具有平移等变性，那么该结果意味着 Ψ 是实 Monge-Amp`ère 算子的数乘。我们要指出的是，对于取实值、对偶上图平移不变且连续的赋值，也有类似结果，正如 Colesanti、Ludwig和Mussnig [15, 18] 所示。

对于我们的第二个主要结果，我们舍弃赋值是对偶简单的假设，转而考虑平移等变赋值。

定义 1.2. 令 $\mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 上所有取值于 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$、连续、对偶上图平移不变、局部决定且平移等变的赋值所构成的空间。

我们将非正式地把空间 $\mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ 视为 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 上的平移等变 Monge-Amp`ère 算子空间；下面的结果将为这一概念提供论证。

作为 [35]，中关于对偶上图平移不变赋值的一个非常一般的结果的推论，这个空间具有齐次分解，类似于 McMullen 的一个经典结果 [45]：称 $\Psi \in \mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ k-齐次，如果对于所有$f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\Psi(tf) = t^k \Psi(f)$。若将相应的子空间记为 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，则

$$\mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$$

参见第 4.1 节。

在陈述这个赋值空间的分类结果之前，我们先讨论一些例子。先从通过极化由实 Monge-Amp`ere 算子得到的赋值开始。定义混合 Monge-Amp `ere 测度如下：

$$\mathrm{MA}(f_1, \ldots, f_n) := \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \ldots \partial \lambda_n}\Big|_0 \mathrm{MA}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right) \quad \text{for } f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

容易看出，$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \mathrm{MA}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)$ 是关于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ 的多项式，因此定义良好。将此表达式取 f k 次，我们得到次数为 k的混合 Monge-Amp `ere 算子，

$$f \mapsto \mathrm{MA}(f[k], f_1, \ldots, f_{n-k}),$$

当 $f_1, \ldots, f_{n-k}$ 为二次多项式时，它们定义 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 的元素。在这种情况下，我们称 $f \mapsto \mathrm{MA}(f[k], f_1, \ldots, f_{n-k})$ 为二次型混合 Monge-Amp`ere 算子。

构造此类泛函的第二种方法如下：若 $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$，则其微分图的图像 $\mathrm{graph}(df)$ 定义了一个定向的 n 维 C^1 子流形，位于

余切丛 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 中。特别地，我们可以通过对适当的微分形式积分，将此图像视为一个 n 维流。正如 Fu [22], 所示，这种构造可自然推广到一大类函数，称为 Monge-Amp`ere 函数，其中包括空间 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$。对于任意此类函数 f，都可以在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上关联一个积分流 $D(f)$；该积分流由一系列自然性质唯一刻画，而这些性质由某个 C^2 函数的微分图像所满足。流 $D(f)$ 称为 f 的微分循环，可用于构造凸体 [6] 和凸函数 [34, 36, 37] 上的赋值。

令 $\Lambda^{n-k,\,k} := \Lambda^{n-k}\mathbb{R}^n \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ 表示 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上双次数为 $(n-k, k)$ 的常值微分形式空间，且系数为复数。若 $\pi\colon T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 表示到第一因子的投影，则任意 $\tau \in \Lambda^{n-k,\,k}$ 通过如下定义确定一个元素 $\Psi_\tau \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$:

$$\Psi_\tau(f)[B] := D(f)[1_{\pi^{-1}(B)}\tau] \quad \text{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n$$

关于 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，见下文定理 4.10。对于 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$，该测度因此由下式给出:

$$\Psi_\tau(f)[B] = \int_{\pi^{-1}(B)\cap \mathrm{graph}(df)} \tau \quad \text{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n.$$

我们的第二个主要结果利用这些算子，给出了 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 的完整刻画。

定理 1.3. 对于连续映射 $\Psi : \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，以下条件等价:

1. $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$。
2. Ψ 是次数为k的二次型混合 Monge-Amp`ere 算子的线性组合。

3. 存在一个微分形式 $\tau \in \Lambda^{n-k,\,k}$ 使得对于所有 $f \in$ 凸函数$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\Psi(f)[B] = \int_{\pi^{-1}(B)\cap \mathrm{graph}(df)} \tau \quad \textit{for all bounded Borel subsets } B \subset \mathbb{R}^n.$$

4. 存在一个定义在对称 $(n \times n)$-矩阵空间上的多项式 P，它是 $(k \times k)$-子式的线性组合，使得对于所有 $f \in$ 凸函数$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\Psi(f)[B] = \int_B P(D^2 f(x))dx \quad \textit{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n.$$

这一结果的证明基于这样一个观察：所有这些构造都可以关联到同一类复多项式——即由复对称 $(n \times n)$ 矩阵的 $(k \times k)$ 子式张成的空间。由此，定理 1.3 可归结为一个简单的表示论命题，即将这些多项式视为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的表示。事实上，这种方法得出了以下更强的刻画结果：将 $\mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ 视为 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的表示，其中运算定义为

$$[g \cdot \Psi](f)[B] = \Psi(f \circ g, g^{-1}B) \quad \text{for } f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),\ B \subset \mathbb{R}^n \text{ bounded Borel set.} \qquad (2)$$

Theo注 1.4. $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}$ 的有限维不可约表示).

注意，这直接意味着定理 1.3 中给出的三类算子张成 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，因为它们都定义了非平凡的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-不变子空间。

值得指出的是，Alesker [1] 给出了凸体空间上平移不变连续赋值空间的一个类似刻画；该空间是一般线性群的无限维表示。不过，上述结果并非基于他的刻画，但两种证明都依赖类似的嵌入，从而将问题化归为一个纯粹的表示论命题。

作为这些结果的一个应用，我们得到了 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 中所有关于旋转等变的元素$\Psi \in$ 的 Hadwiger 型刻画，也就是说，这些元素满足

$$g \cdot \Psi = \Psi \quad \text{for } g \in \mathrm{SO}(n),$$

其中，我们考虑式 (2) 中定义的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 作用。

定理 1.5. 若 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{SO}(n)$-等变的，则 Ψ 是第 k 个 Hessian 测度的倍数，也就是说，存在 $c \in \mathbb{C}$，使得对于 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\Psi(f)[B] = c \int_B [D^2 f(x)]_k d\,\mathrm{vol}_n(x) \quad \textit{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n,$$

其中，$[D^2 f(x)]_k$表示 $D^2 f(x)$ 的特征值中的第 k 个初等对称多项式。

利用这一分类，我们在第 5.1 节描述了 $\mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ 中关于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 等变的元素，由此得到实 Monge-Amp`ere 算子的一种替代刻画。在第 7 节中，我们还刻画了非负赋值锥，即所有满足以下性质的 $\Psi \in \mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$：对于任意 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$，$\Psi(f)$ 都定义一个非负测度。

1.1 文章结构

第 2 节回顾凸几何中的一些记号，并讨论微分循环的若干性质。第 3 节介绍凸函数上的对偶上平移不变赋值的相关背景，并对 [15, 35] 中的结果作一些小幅推广。特别地，我们考察与齐次赋值相关的 Goodey-Weil 分布，以及这些分布的傅里叶-拉普拉斯变换。在第 4.1 节中，我们将这些结果应用于测度值赋值，并证明定理 1.1。我们还说明了如何利用微分循环构造局部决定赋值。

第 5 节考察 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 中元素对 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子空间的一种限制概念，并利用它证明定理 1.5。

最后在第 6 节证明定理 1.3 和定理 1.4。我们首先引入由原始微分形式导出的两个多项式族，并借助一些基本的表示论工具，证明这些多项式与由 $(k \times k)$-子式生成的某些空间重合。随后，我们考察由 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 中元素得到的某些复值赋值的 Goodey-Weil 分布的傅里叶-拉普拉斯变换，并证明所得全纯函数具有一种特征结构，其中涉及相同的多项式族。

作为一项应用，我们在第 7 节考察非负赋值锥。

2 预备知识与记号

我们将 $\mathbb{R}^n$ 视为配备标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 及其诱导范数 $|\cdot|$的欧几里得向量空间。我们用 vol_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度，用 ω_n表示单位球 $B_1(0)$ 的体积。 $\mathbb{R}^n$ 上所有 k维线性子空间构成的格拉斯曼流形记为 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$。对于 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$，我们用 vol_E表示由标量积在 E 上的限制所诱导的勒贝格测度。

对于局部凸向量空间 F，也就是说，对于一个配备由半范数诱导的豪斯多夫拓扑的复向量空间，我们将 F 上所有连续线性泛函组成的空间记为 F'。注意， F' 能分离 F 中的点，即对于所有 $\lambda \in F'$，若 $\lambda(v) = 0$，则 $v = 0$ 对于 $v \in F$。

2.1 凸函数

关于凸函数与凸体的全面背景知识，可参阅 Rockafellar 和 Wets [49] 以及 Schneider [50] 的专著。本文只需了解以下关于所讨论的凸函数空间拓扑的简单说明：若 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开凸集，则我们在所有凸函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 组成的空间 $\mathrm{Conv}(U,\mathbb{R})$ 上赋予紧子集上一致收敛的拓扑。特别地，$\mathrm{Conv}(U,\mathbb{R})$ 是可度量化空间。该拓扑与逐点收敛所诱导的拓扑一致，参见 [48, 定理 7.17], ；若 $U = \mathbb{R}^n$，则该拓扑也与上图收敛所诱导的拓扑一致。由于本文不会用到上图收敛，我们省略其定义。

2.2 凸体上的平移不变赋值

令 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 表示凸体空间，即 $\mathbb{R}^n$ 的所有非空、紧且凸的子集构成的集合，并赋予豪斯多夫度量。给定一个凸体 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，其支撑函数 $h_K \in$ 凸函数$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 定义为

$$h_K(y) = \sup_{x\in K}\langle y, x\rangle \quad \text{for } y \in \mathbb{R}^n.$$

支撑函数唯一确定 K 。此外，它具有以下众所周知的性质：

- $h_{tK} = t h_K$ 对所有 $t \geq 0$, $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 均成立。
- 若 K, L 是凸体，且 $K \cup L$ 是凸的，则 $h_{K\cup L} = h_K \vee h_L$ 且 $h_{K\cap L} = h_K \wedge h_L$。
- $h_{K+x}(y) = h_K(y) + \langle y, x\rangle$ 对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 均成立。
- 凸体序列（K_j）$_j$ 关于豪斯多夫度量收敛到 K ，当且仅当（h_{K_j}）$_j$ 在紧子集上一致收敛到 h_K 。

从 $\mathcal{K}$（$\mathbb{R}^n$）到 $\to$ （G, $+$）的映射 μ 称为取值于阿贝尔半群的赋值，如果

$$\mu(K \cup L) + \mu(K \cap L) = \mu(K) + \mu(L)$$

对于所有满足 $K \cup L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 的 $K, L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$。对于豪斯多夫拓扑向量空间 F，我们用 $\mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F)$ 表示所有满足以下条件的赋值 $\mu\colon \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to F$

- 平移不变，即对于所有 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，$x \in \mathbb{R}^n$，均有 $\mu(K+x) = \mu(K)$，
- 关于豪斯多夫度量连续。

令 $\mathrm{Val}_k(\mathbb{R}^n, F)$ 表示所有赋值 $\mu \in \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F)$ 的子空间，这些赋值是 k-齐次的，即对所有 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，$t \geq 0$，都满足 $\mu(tK) = t^k \mu(K)$。则下述结论成立。

定理 2.1（McMullen [45]）。$\mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{Val}_k(\mathbb{R}^n, F)$

对于 $F = \mathbb{C}$，我们也将这些空间记作 $\mathrm{Val}(\mathbb{R}^n) := \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$，$\mathrm{Val}_k(\mathbb{R}^n) := \mathrm{Val}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$。这些空间带有自然拓扑：对于一个具有~非空内点的凸体 $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，考虑集合 $\mathcal{B} := \{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) : K \subset B\}$。根据布拉施克选择~定理，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 的紧子集。对于一个开集 $O \subset F$，考虑集合

$$\mathcal{M}(\tilde{B}, O) := \{\mu \in \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F) : \mu(K) \in O \quad \text{for all } K \in \tilde{B}\}.$$

这些子集构成 $\mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F)$ 上紧开拓扑的一个基，且不依赖于 $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 的选取。注意，由定理 2.1 可知，该拓扑是豪斯多夫的。

2.3 Monge-Amp`ere 函数与微分循环

Fu 在 [22] 中引入了 Monge-Amp`ere 函数。关于这些结果的推广，另请参见 [30]。为方便起见，我们用 $\mathrm{vol}_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ 表示由标量积诱导的体积形式。

定理 2.2（Fu [22]定理 2.0）。设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个局部利普希茨函数。至多存在一个定义在 $T^*\mathbb{R}^n$ 上的积分 n-流 S，使得

1. S 是闭的，即 $\partial S = 0$,
2. S 是拉格朗日的，即 $S \llcorner \omega_s = 0$，其中 ω_s 表示自然的辛形式,
3. S 在局部垂直有界，即对于所有 $A \subset \mathbb{R}^n$ 紧集，$\mathrm{supp}\, S \cap \pi^{-1}(A)$都是紧的,
4. $S(\phi(x,y)\pi^* \mathrm{vol}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, df(x)) d\,\mathrm{vol}(x)$ *for all* $\phi \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$.

注意，最后一个等式右端的定义良好性由拉德马赫定理保证。

若这样的流存在，则称函数 f 为 Monge-Amp`ere 函数。相应的流记作 $D(f)$（在 [22]中记作 $[df]$），并称为 f的微分循环。本文只需用到如下事实：$\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$中的任意元素都存在微分循环，参见 [22,命题 3.1]

我们陈述微分循环的以下两个性质。第一个是 [22,命题 2.4]的一个特例。

命题 2.3. 设 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$。若 $h \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$，则 $f + h$ 的微分循环由下式给出

$$F(f+h) = G_{h*} D(f),$$

其中 $G_h\colon T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ 由（x，y）$\mapsto$（x，$y + dh$（x））给出。

以下结果在 [22, 命题 2.5] 中针对保向微分同胚给出。对于保向微分同胚，可以应用相同的推理，参见 [34, 命题 4.4]。

命题 2.4. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 $C^{1,1}$ 类微分同胚，且 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 Monge-Amp`ere 函数。则 $f \circ \phi$ 是 Monge-Amp`ere 函数，并且

$$D(f \circ \phi) = \left(\phi^{\#}\right)_* D(f),$$

若 ϕ 保向，且

$$D(f \circ \phi) = -\left(\phi^{\#}\right)_* D(f),$$

若 ϕ反向保向。这里 $\phi^{\#}$: $T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{R}^n$ 由 $(x, y) \mapsto (\phi^{-1}(x)\ \phi^* y)$ 给出。

3 对偶上图平移不变赋值

3.1 齐次分解与 Goodey-Weil 分布

设 F是一个局部凸向量空间， $U \subset \mathbb{R}^n$是一个开凸集，并令 $\mathrm{VConv}(U, F)$ 表示 $\mathrm{Conv}(U, \mathbb{R})$ 上所有取值于 F、对偶上图平移不变的连续赋值 μ 所构成的空间，也就是说，它们满足

$$\mu(f + l) = \mu(f) \quad \text{for all } f \in \mathrm{Conv}(U, \mathbb{R}),\ l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ affine.}$$

在大多数情况下，由于以下简单结果，只需考虑 $U = \mathbb{R}^n$ 的情形。

引理 3.1（[35]引理 7.7）。映射

$$\begin{aligned} \mathrm{res}^* : \mathrm{VConv}(U, F) &\to \mathrm{VConv}(\mathbb{R}^n, F) \\ \mu &\mapsto [f \mapsto \mu(f|_U)] \end{aligned}$$

是良定义且单射的。

考虑由所有 k-齐次赋值构成的子空间 $\mathrm{VConv}_k(U, F)$，也就是说，所有满足 $\mu(tf) = t^k \mu(f)$ 对任意 $t \geq 0$, $f \in \mathrm{Conv}(U, \mathbb{R})$ 均成立的 $\mu \in \mathrm{VConv}(U, F)$。对于 $F = \mathbb{C}$，我们也将这些空间记为 $\mathrm{VConv}(U)$ 和 $\mathrm{VConv}_k(U)$。我们有如下分解；对于 $U = \mathbb{R}^n$，Colesanti、Ludwig和Mussnig [15] 也在标量值情形下得到了这一结果。

定理 3.2。

$$\mathrm{VConv}(U, F) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{VConv}_k(U, F)$$

证明。实质上，这一内容已包含在 [35]，第 7.2 节中，但其中仅在 $U = \mathbb{R}^n$ 的情形下于 [35，定理 1] 中明确陈述。我们由这个特殊情形推导出上述结论。设 $\mu \in \mathrm{VConv}(U, F)$，并对 $t \geq 0$ 定义 $\mu^t \in \mathrm{VConv}(U, F)$，使得 $\mu^t(f) := \mu(tf)$

对于 $f \in \mathrm{Conv}(U,\mathbb{R})$。那么 $[\mathrm{res}^*\,\mu^t](f) = [\mathrm{res}^*\,\mu](tf)$。根据 [35, 定理 1]，因此存在赋值 $\mu_k \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n, F)$，使得 $\mathrm{res}^*\,\mu = \sum_{k=0}^n \mu_k$。特别地，

$$[\mathrm{res}^*\,\mu_t](f) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mu_k(f) \quad \text{for } f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), t \geq 0.$$

代入 $t = 1, \ldots, n+1$ 并利用范德蒙德矩阵的逆矩阵，我们得到$c_{kj} \in \mathbb{R}$，其中

$$\mu_k(f) = \sum_{j=1}^{n+1} c_{kj}[\mathrm{res}^*\,\mu^j](f) = \mathrm{res}^*\left[\sum_{j=1}^{n+1} c_{kj}\mu(j\cdot)\right](f).$$

若我们通过 $\tilde{\mu} := \sum_{j=1}^{n+1} c_{kj}\mu(j\cdot)$ 定义 $\tilde{\mu}_k \in \mathrm{VConv}(U,F)$，则可得

$$\mathrm{res}^*\,\tilde{\mu}_k^t = \mu_k(t\cdot) = t^k\mu_k = \mathrm{res}^*(t^k\tilde{\mu}_k) \quad \text{for } t \geq 0,$$

因此，由于 res^* 的单射性，对于 $t \geq 0$，$\tilde{\mu}_k(t\cdot) = t^k\tilde{\mu}_k$。于是 $\tilde{\mu}_k \in \mathrm{VConv}_k(U,F)$。类似地，

$$\mathrm{res}^*\left[\sum_{k=0}^{n}\tilde{\mu}_k\right](f) = \sum_{k=0}^{n}[\mathrm{res}^*\,\tilde{\mu}_k](f) = \sum_{k=0}^{n}\mu_k(f) = [\mathrm{res}^*\,\mu](f).$$

由于 res^* 是单射，这意味着 $\mu = \sum_{k=0}^n \tilde{\mu}_k$，从而完成证明。 □

本节余下部分我们只考虑 $U = \mathbb{R}^n$ 的情形。注意，对于$\mu \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n, F)$，极化 $\bar{\mu}\colon \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})^k \to F$，

$$\bar{\mu}(f_1,\ldots,f_k) := \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1\ldots\partial\lambda_k}\Big|_0 \mu\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i\right),$$

根据定理 3.2，$(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \mapsto \mu\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i\right)$ 是 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k > 0$ 的多项式，因此上述定义是良定的。此外，μ 本质上是一个满足 $\bar{\mu}(f,\ldots,f) = \mu(f)$ 的多重线性泛函。如 [37], 所示，极化提升为 $(\mathbb{R}^n)^k$ 上的一个分布。对于复值赋值，这些分布可以用以下方式刻画。

定理 3.3（[35] 定理 2）。对于每个 $\mu \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n)$，存在唯一的对称分布 $\mathrm{GW}(\mu)$，定义在 $(\mathbb{R}^n)^k$ 上且具有紧支集，并满足以下性质：若f_1，...，$f_k \in$凸函数$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$，则

$$\mathrm{GW}(\mu)[f_1 \otimes \ldots \otimes f_k] = \bar{\mu}(f_1,\ldots,f_k).$$

特别地，μ 由 $\mathrm{GW}(\mu)$ 唯一确定。

Goodey 和 Weil [23] 在凸体上的连续平移不变赋值这一背景下使用了类似的构造，我们将 $\mathrm{GW}(\mu)$ 称为 $\mu \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n)$ 的 Goodey-Weil 分布。也可以为取值于任意局部凸向量空间的赋值定义这些分布，不过一般来说，这些分布不具有紧支集。更多详情请参见 [35] 。

3.2 傅里叶-拉普拉斯变换与对偶简单赋值

本节将刻画 VConv(U,F) 中的对偶简单赋值。事实上，这些结果为 k-齐次赋值提供了另一种刻画。若 $\mu \in$VConv(U,F) 在 k 维子空间 $E \in$Gr$_k(\mathbb{R}^n)$ 上消失，即对于所有 $f \in$Conv$(E,\mathbb{R})$，都有 $\mu(\pi_E^* f|_U) = 0$，我们就这样称呼它。我们将赋值 $f \mapsto \mu(\pi_E^* f|_U)$ 视为 $\mu \in$ VConv(U,F) 在子空间 E 上的限制。注意，这定义了 VConv(E,F) 中的一个元素。

定理 3.4. 若 $\mu \in$VConv$_k(U,F)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中所有 k 维子空间上均为零，则$\mu = 0$。特别地，$\mu \in$ VConv(U,F) 是对偶简单的，当且仅当 μ 是 n-齐次的。

证明。根据引理 3.1，只需考虑 $U = \mathbb{R}^n$ 的情形。对于复值赋值，这一点已由 $[36,$定理 $3]$证明。对于一般情形，注意到 $\mu \in$VConv$_k(\mathbb{R}^n,F)$ 恒等于零，当且仅当复值赋值 $\lambda \circ \mu \in$ VConv$(\mathbb{R}^n)$ 对所有 $\lambda \in F'$ 均为零，其中 F' 表示 F 的拓扑对偶空间。若 μ 在所有 k 维子空间上均为零，则对于 $\lambda \in F'$，$\lambda \circ \mu$ 也同样成立。因此，$[36,$定理 $3]$ 蕴含 $\lambda \circ \mu = 0$ 对所有 $\lambda \in F'$ 均成立。由于 F' 在 F 中能够分离点，故得出 $\mu = 0$，这证明了第一个结论。

对于第二个结论，注意到，根据定理 3.2，VConv$_k(\mathbb{R}^n,F)$ 中任意赋值在维数小于 k 的子空间上的限制都为零。若 $\mu \in$VConv$(\mathbb{R}^n)$ 是一个对偶简单赋值，且 $\mu = \sum_{k=0}^n \mu_k$ 是其齐次分解，那么它在 k 维子空间 E 上的限制因此由 $\mu(\pi_E^* f) = \sum_{j=0}^k \mu_j(\pi_E^* f)$ 给出，其中 $f \in$ Conv$(E,\mathbb{R})$。因此，我们可以对 $k < n$ 使用归纳法，证明 μ_k 在所有 k 维子空间上都为零，这意味着 $\mu_k = 0$ 对于 $0 \le k \le n-1$ 成立。因此，$\mu = \mu_n$ 是 n 次齐次的。 □

在 $[36]$ 中，复值情形是由 Goodey-Weil 分布的傅里叶-拉普拉斯变换的性质直接得到的。Colesanti、Ludwig和Mussnig在 $[18]$ 中给出了对 VConv$(\mathbb{R}^n)$ 中对偶简单赋值进行刻画的另一种证明。

由于 Goodey-Weil 分布的傅里叶-拉普拉斯变换将在定理 1.3 的证明中发挥重要作用，我们回顾其构造及一些基本性质。因为当 $\mu \in$ VConv$_k(\mathbb{R}^n)$ 时，分布 GW(μ) 是紧支集的，其傅里叶-拉普拉斯变换 $\mathcal{F}$(GW(μ)) 在 $(\mathbb{C}^n)^k$ 上定义了一个整函数，该函数由 $z_1,\dots,z_k \in \mathbb{C}^n$ 给出

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\mu))[z_1,\dots,z_k] = \mathrm{GW}(\mu)[\exp(i\langle z_1,\cdot\rangle)\otimes\cdots\otimes\exp(i\langle z_k,\cdot\rangle)].$$

如果对于 $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$ 有 $z_1 = ix_1,\dots,z_k = ix_k$，那么该函数可通过在定义于实子空间 span$(x_1,\dots,x_k)$ 上的凸函数处取 GW(μ) 的值来给出，其中该实子空间是 $\mathbb{R}^n$ 的实子空间；也就是说，我们考虑将一个 k-齐次赋值 μ 限制到一个维数至多为 k 的子空间上。这些赋值的限制由以下最大次数赋值的刻画给出。

定理 3.5（Colesanti-Ludwig-Mussnig $[15]$ 定理 5）。 $\mu \in$ VConv$_n(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在一个（必然唯一的）函数 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\,\mathrm{MA}(f) \quad \forall f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}).$$

这有以下推论。令 MA_E 表示作用于$E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$上的实 Monge-Amp`ere 算子。

引理 3.6（[36] 引理 2.6）。设 $\mu \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n)$。对于 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$，令 $\phi_E \in C_c(E)$ 表示唯一满足对所有 $f \in \mathrm{Conv}(E,\mathbb{R})$ 都有 $\mu(\pi_E^* f) = \int_E \phi_E d\,\mathrm{MA}(f)$ 的函数。那么对于 $z_1,\dots,z_k \in E_{\mathbb{C}} := E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\mu))[z_1,\dots,z_k] = \frac{(-1)^k}{k!} \det\left(\langle z_i, z_j\rangle\right)_{i,j=1}^k \mathcal{F}_E(\phi_E)\left[\sum_{i=1}^k z_i\right].$$

这里，$\mathcal{F}_E$ 表示 $L^1(E)$ 上的傅里叶-拉普拉斯-拉普拉斯变换，而 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示标量积在 $\mathbb{R}^n$ 上的 $\mathbb{C}$-线性扩张。

下述消失性质对于定理 1.3 的证明至关重要。

引理 3.7。设 $\mu \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n)$。当 $z_1,\dots,z_k \in \mathbb{C}^n$ 线性相关时，$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\mu))[z_1,\dots,z_k] = 0$。

证明。若对于某个实子空间 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$，$z_1,\dots,z_k \in E_{\mathbb{C}}$，则结论由引理 3.6 得出。对于一般情形，固定 $a_1,\dots,a_{k-1} \in \mathbb{C}$，并考虑定义在 $(\mathbb{C}^n)^{k-1}$ 上的全纯函数H，其表达式为

$$H(z_1,\dots,z_{k-1}) = \mathcal{F}(\mathrm{GW}(\mu))\left[z_1,\dots,z_{k-1},\sum_{j=1}^{k-1} a_j z_j\right].$$

于是 H 在全实子空间 $(\mathbb{R}^n)^{k-1} \subset (\mathbb{C}^n)^{k-1}$ 上消失，因而必定在 $(\mathbb{C}^n)^{k-1}$ 上恒等于零。由于这对任意选取的 $a_1,\dots,a_{k-1} \in \mathbb{C}$ 都成立，且 $(\mathrm{GW}(\mu))$ 对称，我们推得 $\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\mu))$ 在所有线性相关的 $(z_1,\dots,z_k) \in \mathbb{C}^n$ 上都消失。 □

4 凸函数上的测度值赋值

4.1 齐次分解

命题 4.1。设 $\Psi \in \mathrm{VConv}(U,\mathcal{M}(U))$，且 $\Psi = \sum_{k=0}^n \Psi_k$ 是其在 $\mathrm{VConv}(U,\mathcal{M}(U))$ 中的齐次分解。

1. 如果 Ψ 是局部决定的，那么对于 $0 \le k \le n$，Ψ_k 也是如此。

2. 如果 Ψ 是平移等变的，那么对于 $0 \le k \le n$，Ψ_k 也是如此。

证明。注意，映射 $t \mapsto \Psi(tf)$ 是一个次数至多为 n、取值于 $\mathcal{M}(U)$ 的多项式，因为 $\Psi(tf) = \sum_{k=0}^n t^k \Psi_k(f)$。利用范德蒙德矩阵的逆，我们得到 $c_{kj} \in \mathbb{R}$，使得

$$\Psi_k(f) = \sum_{j=1}^{n+1} c_{kj} \Psi(jf).$$

利用这一表示，很容易看出，如果 Ψ 是局部决定的或平移等变的，那么对于 $0 \le k \le n$，Ψ_k 也具有相同性质。 □

回忆一下，MAVal($\mathbb{R}^n$) 表示 VConv($\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$) 中由所有局部决定且平移等变的元素构成的子空间。

推论 4.2. $\mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$

引理 4.3. $\mathrm{MAVal}_0(\mathbb{R}^n)$ 是一维的，由勒贝格测度张成。

证明. 由于任意 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_0(\mathbb{R}^n)$ 都是 0 次齐次的，因此它是常数，即对所有 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，都有 $\Psi(f) = \Psi(0)$。由于 Ψ 是平移等变的，$\Psi(0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上平移不变的拉东测度，因此它是勒贝格测度的倍数。 □

4.2 对偶简单且局部确定的测度值赋值

我们对定理 1.1 的证明基于 Colesanti、Ludwig 和 Mussnig 的这一观察：$\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 上的赋值完全由其在支撑函数平移上的限制所确定。

引理 4.4. 设 $(G, +)$ 是一个带有消去律的阿贝尔半群，并赋有 Haus- dorff 拓扑，且 $\mu_1, \mu_2 : \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to G$ 是两个连续赋值。若对所有 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$、$x \in \mathbb{R}^n$ 和 $c \in \mathbb{R}$，都有 $\mu_1(h_K(\cdot - x) + c) = \mu_2(h_K(\cdot - x) + c)$，则 $\mu_1 \equiv \mu_2$ 在 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 上成立。

证明。这是 [47] 引理 5.1的一个稍弱形式。准确地说，[47]中的版本考虑的是平移不变赋值，但证明只使用了上述较弱的性质。

□

设 F为一个局部凸向量空间。对于 $\mu \in \mathrm{VConv}(\mathbb{R}^n, F)$和 $x \in \mathbb{R}^n$，定义

$$\begin{aligned} S(\mu)[\cdot, x] : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) &\to F \\ K &\mapsto S(\mu)[K, x] = \mu(h_K(\cdot - x)). \end{aligned}$$

令 $S(\mu)$表示函数 $x \mapsto S(\mu)[\cdot, x]$

定理 4.5。 $S : \mathrm{VConv}(\mathbb{R}^n, F) \to C(\mathbb{R}^n, \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F))$是良定义且单射的 .

证明。支撑函数的性质（参见第 2.2 节）蕴含，对于所有 $x \in U$，$S(\mu)[x] \in \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F)$。为说明 S 是单射，假设 $S(\mu) = 0$。由于 μ在加上常数后保持不变，这意味着对于所有 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$以及所有 $x \in \mathbb{R}^n$、$c \in \mathbb{R}$，$\mu(h_K(\cdot - x) + c) = 0$，因此引理 4.4 蕴含 $\mu \equiv 0$ 在 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$上成立。

现在令 $\tilde{B} \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 为有限非空的凸体，并设 $O \subset F$ 为开集。下面，我们将证明集合 $\mathcal{M}(\tilde{B}, O) := \{\mu \in \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F) : \mu(K) \in O \ \forall K \in \tilde{B}\}$ 构成 $\mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F)$的拓扑的一组基由以下开子集给出

$$\mathcal{M}(\tilde{B}, O) = \{\mu \in \mathrm{Val}(\mathbb{R}^n, F) : \mu(K) \in O \ \forall K \in \tilde{B}\},$$

其中 $O \subset F$ 是开集。下面证明映射

$$\begin{aligned} R : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n &\to \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ (K, x) &\mapsto h_K(\cdot - x) \end{aligned}$$

是连续的。假设 (K_j, x_j) 收敛于 $(K, x) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$。那么

$$\left|h_{K_j}(\cdot - x_j) - h_K(\cdot - x)\right| \leq \left|h_{K_j}(\cdot - x_j) - h_K(\cdot - x_j)\right| + \left|h_K(\cdot - x_j) - h_K(\cdot - x)\right|.$$

由于函数序列 $(h_{K_j})_j$ 在紧子集 $\{x_j$ 上一致收敛: $j \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$，右侧逐点收敛于 0。因此，序列 $(h_{K_j}(\cdot - x_j))_j$ 在 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 中收敛于 $h_K(\cdot - x)$。

我们推得 $(K, x) \mapsto S(\mu)[x](K) = [\mu \circ R](K, x)$ 在紧子集上一致连续。特别地，给定原点的一个开邻域 $O \subset F$，我们可以找到 $\delta > 0$ 使得

$$\mu(h_K(\cdot - x)) - \mu(h_K(\cdot - x')) \in O \quad \text{for all } K \subset B,\ x, x' \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x - x'| < \delta,$$

即,

$$S(\mu)[x] - S(\mu)[x'] \in \mathcal{M}(\tilde{B}, O) \quad \text{for all } x, x' \in \mathbb{R}^n \text{ with } |x - x'| < \delta.$$

因此 $S(\mu)$ 是连续的。 □

推论 4.6. 如果 $\mu \in \mathrm{VConv}_n(\mathbb{R}^n, F)$，那么对于所有$K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$， $x \in \mathbb{R}^n$，都有 $S(\mu)[K, x] = \frac{1}{\omega_n} S(\mu)[B_1(0)\ x] \mathrm{vol}_n(K)$。

证明。如果 $\lambda \in F'$，则 $K \mapsto \lambda(S(\mu)[K, x])$ 属于 $\mathrm{Val}_n(\mathbb{R}^n)$，因此根据 Hadwiger 的一个结果，它是勒贝格测度的常数倍；也就是说，存在 $c_\lambda(x) \in \mathbb{C}$，使得对于所有 $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，都有 $\lambda(S(\mu)[K, x]) = c_\lambda(x) \mathrm{vol}(K)$。因此，对于 $K = B_1(0)$，我们得到

$$c_\lambda(x) = \frac{1}{\omega_n} \lambda(S(\mu)[B_1(0), x]).$$

Thus

$$\lambda\left(S(\mu)[K, x] - \frac{1}{\omega_n} S(\mu)[B_1(0), x] \operatorname{vol}(K)\right) = 0 \quad \text{for all } \lambda \in F',$$

这表明该结论成立，因为 F'在 F中分离点。 □

以下引理是定理 1.1 证明中的关键。

引理 4.7. 设 $P \subset \mathbb{R}^n$ 是一个多胞体。对于每个 $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，存在 y_0的一个邻域 U 以及一个维数至多为 $n - 1$的多胞体 P'，使得 $h_{P'} = h_P$在 U上。

证明。固定 $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$。由于 P是凸的，函数 $x \mapsto \langle y_0, x\rangle$ 在 P的某些顶点处取得其最大值 $h_P(y_0)$。若 P有 m 个顶点，则因此不妨设 $v_1, \ldots, v_m$是 P 的顶点，并满足

$$\begin{aligned} h_P(y_0) &= \langle y_0, v_i\rangle \quad \text{for } 1 \le i \le k, \\ h_P(y_0) &> \langle y_0, v_i\rangle \quad \text{for } k+1 \le i \le m, \end{aligned}$$

对于某个 $1 \le k \le m$。注意，这意味着 $v_1, \ldots, v_k$属于面 $P' := \{x \in P : \langle x, y_0\rangle = h_P(y_0)\}$，其维数至多为 $n - 1$。若 $k = m$，则这表明结论成立，因为在这种情况下 $P' = P$。因此，设 $1 \le k < m$。

由于 h_P 是 连续的，我们可以选择 $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 的一个邻域，使得对于所有 $y \in U$

$$h_P(y) > \langle y, v_i\rangle \quad \text{for } k+1 \le i \le m.$$

对于 $y \in U$，函数 $x \mapsto \langle y\, x\rangle$ 在 P 的某个顶点上取得其最大值 $h_P(y)$，因此我们可以找到$1 \le i \le k$ 使得 $h_P(y) = \langle v_i\, y\rangle$。特别地，对于所有 $y \in U$，都有 $h_P(y) \le h_{P'}(y)$，这意味着对于所有 $y \in U$，$h_{P'}(y) = h_P y$，因为 $P' \subset P$。 □

回顾定理 3.4，$\mathrm{VConv}(U,\mathcal{M}(U))$ 是对偶简单的，当且仅当它是 n-齐次的。因此，定理 1.1 由以下结果推出。

定理 4.8. 设 $\Psi\in\mathrm{VConv}_n(U,\mathcal{M}(U))$ 局部决定。那么存在唯一的函数 $\psi\in C(U)$，使得对于 $f\in\mathrm{Conv}(U,\mathbb{R})$

$$\Psi(f)[B]=\int_B\psi(x)d\,\mathrm{MA}(f,x)\quad \textit{for all relatively compact Borel sets } B\subset U. \tag{3}$$

此外，ψ 由下式给出

$$\psi(x)=\frac{1}{\omega_n}S(\Psi)[B_1(0),x](\{x\})\quad \textit{for } x\in U.$$

证明. 给定 $\psi\in C(U)$，(3) 式右端定义了一个元素 $\Psi_\psi\in\mathrm{VConv}_n(U,\mathcal{M}(U))$。由于 $\mathrm{MA}(h_K(\cdot-x))=\mathrm{vol}_n(K)\delta_x$（证明概要见例如 [3, 引理 2.4]），我们得到

$$\psi(x)=\frac{1}{\omega_n}S(\Psi_\psi)[B_1(0),x](\{x\})=\frac{1}{\omega_n}\Psi_\psi(h_{B_1(0)}(\cdot-x)[\{x\}]\quad\text{for } x\in U,$$

因此，这个表示是唯一的。

现在设 $\Psi\in\mathrm{VConv}_n(U,\mathcal{M}(U))$。利用引理 3.1，我们将 Ψ 视为 $\mathrm{VConv}_n(\mathbb{R}^n,\mathcal{M}(U))$ 的一个元素。我们声称，Ψ局部决定这一事实意味着存在$c(K,x)\in\mathbb{C}$，使得对于 $K\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，$x\in\mathbb{R}^n$ 满足

$$S(\Psi)[K,x]=\begin{cases}c(K,x)\delta_x & \text{for } x\in U,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

事实上，设 $\phi\in C_c(U)$ 是一个函数，使得 ϕ 的支集不包含点 x。如果 $K=P$ 是一个多胞体，那么根据引理 4.7，对于某个维数至多为 $n-1$ 的多胞体 P'，$h_P(\cdot-x)=h_{P'}(\cdot-x)$ 在点 $y\in\mathbb{R}^n\setminus\{x\}$ 的某个邻域上成立。利用单位分解，可以假设 ϕ 的支集包含于这样的一个邻域中。由于 Ψ 是局部决定的，这意味着

$$\Psi(h_P(\cdot-x))[\phi]=\Psi(h_{P'}(\cdot-x))[\phi].$$

然而，Ψ 是一个对偶简单赋值，因此右端为零。于是 $S(\Psi)[\cdot,x][\phi]$ 在多胞体上为零，进而由连续性可知其在所有凸体上都为零。如果 $x\notin U$，这意味着 $S(\Psi)[\cdot,x]$ 恒等于零。如果 $x\in U$，则对于每个 $K\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$，测度 $S(\Psi)[K,x]\in\mathcal{M}(U)$ 支持于 $\{x\}$ 上，因此是 δ_x 的倍数。由推论 4.6，

$$S(\Psi)[K,x]=\frac{1}{\omega_n}S(\Psi)[B_1(0),x]\,\mathrm{vol}(K),$$

因此，对于每个 $x\in U$，$S(\Psi)[K,x]=\psi(x)\,\mathrm{vol}(K)\delta_x$ for

$$\psi(x):=\frac{1}{\omega_n}S(\mu)[B_1(0),x](\{x\})=\frac{1}{\omega_n}\Psi(h_{B_1(0)}(\cdot-x))[\{x\}].$$

注意，ψ在 U 上是连续的：对于任意紧子集 $K \subset U$，存在 $\phi \in C_c(U)$，使其在该子集的某个邻域上等于 1。因此

$$\psi(x) = \frac{1}{\omega_n} S(\Psi)[B_1(0), x](\{x\}) = \frac{1}{\omega_n} S\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi\right)[B_1(0), x], \quad \text{for } x \in K.$$

其中 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi \in \mathrm{VConv}_n(U)$ 是一个连续的复值赋值。由于根据定理 4.5，$S\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi\right)$在 U 上定义了一个连续函数，因此 ψ 在 U 的每个紧子集上都与一个连续函数重合，故其连续。

接下来，注意泛函 $\Psi : \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(U)$ 对于 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 定义如下：

$$\tilde{\Psi}(f)[B] = \int_B \psi(x) d\,\mathrm{MA}(f, x) \quad \text{for all relatively compact Borel sets } B \subset U$$

由于 ψ连续，它定义了 $\mathrm{VConv}_n(U, \mathcal{M}(U))$ 的一个元素。由于 $\mathrm{MA}(h_K(\cdot - x)) = \tilde{\mathrm{vol}}(K)\delta_x$，$S(\Psi)[x] = S(\Psi)[x]$ 对于 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立。由于根据定理 4.8，S 是单射，这意味着 $\Psi = \Psi$，从而得到表示公式。 □

由此可推得实 Monge-Amp`ere 算子的如下刻画。

推论 4.9. 设 $\Psi : \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续、对偶简单且对偶上平移不变赋值。如果 Ψ 是局部决定且平移等变的，那么存在 $c \in \mathbb{C}$ 使得 $\Psi = c \cdot \mathrm{MA}$。特别地，$\mathrm{MAVal}_n(\mathbb{R}^n)$ 是一维的，并由 MA 张成。

4.3 利用微分循环构造测度值赋值

定理 4.10. 设 $\tau \in \Omega^n(T^*\mathbb{R}^n)$ 是一个连续微分 n-形式，并定义 $\Psi_\tau(f) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$，其中 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$，定义如下：

$$\Psi_\tau(f)[B] := D(f)[1_{\pi^{-1}(B)}\tau] \quad \textit{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n.$$

那么 $\Psi_\tau : \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续且局部决定的赋值。如果 τ 在 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$的第二因子中的平移作用下不变，那么 Ψ_τ 是对偶上平移不变的。如果 τ 在第一因子中的平移作用下不变，那么 Ψ_τ 是平移等变的。

证明。注意，对于 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，$f \in$ 凸函数$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\Psi_\tau(f, x) = D(f)[\pi^*\phi \wedge \tau].$$

已在 [37, 推论 4.7] 中证明，该方程右端关于 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ Ψ_τ 连续。因此，Ψ_τ 是弱*连续的。由 [22, 第 2.1] 节中的说明可知，$f = h$ 在开子集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上成立，意味着 $D(f)|_{\pi^{-1}(U)} = D(h)|_{\pi^{-1}(U)}$，这表明 Ψ_τ 是局部决定的。

如果 τ 在第二因子中的平移下保持不变，那么对于所有有界博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}^n$，$1_{\pi^{-1}(B)} \wedge \tau$ 也具有相同性质。如果 $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是仿射函数，那么命题 2.3 意味着

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(f+\lambda)[B] =& G_{\lambda *} D(f)[1_{\pi^{-1}(B)} \wedge \tau] = D(f)[G_\lambda^*(1_{\pi^{-1}(B)} \wedge \tau)] = D(f)[1_{\pi^{-1}(B)} \wedge \tau] \\ =& \Psi_\tau(f)[B].\end{aligned}$$

因此，Ψ_τ 是对偶上图平移不变的。

最后，假设 τ 在第一因子中的平移下保持不变。对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，考虑映射

$$\begin{aligned}\Phi_{x_0} : T^*\mathbb{R}^n &\to T^*\mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto (x - x_0, y).\end{aligned}$$

于是 $D(f(\cdot + x_0)) = \Phi_{x_0 *} D(f)$ 根据命题 2.4，因此我们对所有 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\cdot - x_0) d\Psi(f) &= D(f)[\pi^*\phi(\cdot - x_0) \wedge \tau] = D(f)\left[\Phi_{x_0}^* (\pi^*\phi \wedge \tau)\right] \\ = (\Phi_{x_0 *} D(f))\left[\pi^*\phi \wedge \tau\right] &= D(f(\cdot + x_0))[\pi^*\phi \wedge \tau] = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi(f(\cdot + x_0)).\end{aligned}$$

因此，Ψ_τ 是平移等变的。 □

注意，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 通过对角作用作用于 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$

$$g^\#(x,y) = (g^{-1}x, g^* y) \quad \text{for } g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*.$$

因此，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$通过拉回作用于 $\Lambda^{n-k,\ k}$：

$$g \cdot \tau = (g^\#)^* \tau \quad \text{for } g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ \tau \in \Lambda^{n-k,k}.$$

推论 4.11. 映射

$$\begin{aligned}\Lambda^{n-k,k} &\to \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n) \\ \tau &\mapsto \Psi_\tau\end{aligned}$$

是良定义的，并且在以下意义下是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-等变的：对于 $f \in$凸函数$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\Psi_{g\cdot\tau}(f)[B] = \mathrm{sign}(\det(g))\Psi_\tau(f \circ g)[g^{-1}B]$$

对所有有界博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}^n$均成立。

证明. 由定理 4.10 可知，该映射是良定义的。利用命题 2.4，对于 $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，$\tau \in \Lambda^{n-k,\ k}$，

$$\begin{aligned}\Psi_{(g^\#)^*\tau}(f)[B] =& D(f)[1_{\pi^{-1}(B)}(g^\#)^*\tau] \\ =& D(f)[(g^\#)^*(((g^{-1)})^\#)^* 1_{\pi^{-1}(B)}\tau)] \\ =& \left((g^\#)_* D(f)\right)[1_{\pi^{-1}(g^{-1}B)}\tau] \\ =& \mathrm{sign}(\det(g)) D(f \circ g)[1_{\pi^{-1}(g^{-1}B)}\tau] \\ =& \mathrm{sign}(\det(g))\Psi_\tau(f \circ g)[g^{-1}B],\end{aligned}$$

因此这个映射是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-等变的。 □

5 Tr平移等变赋值及其对子空间的限制

对于子空间 $E \subset \mathbb{R}^n$，令 $\pi_E : \mathbb{R}^n \to E$ 表示正交投影，$E^\perp \subset \mathbb{R}^n$ 表示其正交补。给定 $\mathbb{R}^n$ 上的有限测度 μ，我们将其沿 $\pi_{E^\perp}$ 的推前测度记为 $\pi_{E^\perp *}\mu$。

引理 5.1. 固定 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，并设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一个 k 维子空间，$f \in$凸函数$(E,\mathbb{R})$。则

$$\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \pi_E^* \phi_E] \in \mathcal{M}(E^\perp)$$

对于每个 $\phi_E \in C_c(E)$，其为 $E^\perp$ 上勒贝格测度的倍数。

证明。注意到 $\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E] \in \mathcal{M}(E^\perp)$ 是平移不变的：若 $x_{E^\perp} \in E^\perp$ 且 $\psi \in C_c(E^\perp)$，则

$$\begin{aligned}\int_{E^\perp} \psi(\cdot - x_{E^\perp}) d\left(\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \pi_E^* \phi_E]\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_E \cdot \pi_{E^\perp}^* \psi(\cdot - x_{E^\perp}) d\Psi(\pi_E^* f) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_E \cdot \pi_{E^\perp}^* \psi d\Psi(\pi_E^* f(\cdot + x_{E^\perp})),\end{aligned}$$

因为 Ψ 是平移等变的。但 $\pi_E^* f(\cdot + x_{E^\perp}) = \pi_E^* f$。因此，该测度是平移不变的，从而是 $E^\perp$ 上勒贝格测度的倍数。 □

命题 5.2. 对于每个 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，存在唯一连续函数 $\mathrm{Kl}_\Psi \in C(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n))$，使得对于 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$

$$\Psi(\pi_E^* f) = \mathrm{Kl}_\Psi(E)\, \mathrm{MA}_E(f) \otimes \mathrm{vol}_{E^\perp} \quad \textit{for } f \in \mathrm{Conv}(E, \mathbb{R}).$$

此外，当且仅当 $\mathrm{Kl}_\Psi = 0$ 时，$\Psi = 0$。

证明。由 $f \in \mathrm{Conv}(E,\mathbb{R})$，根据引理 5.1，$\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]$ 是 $E^\perp$ 上勒贝格测度的倍数。取满足 $\int_{E^\perp} \phi(x) d\mathrm{vol}_{E^\perp}(x) = 1$ 的 $\phi \in C_c(E^\perp)$。那么

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} : \mathrm{Conv}(E,\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}(E) = (C_c(E))' \\ f &\mapsto \left(\phi_E \mapsto \int_{E^\perp} \phi d[\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]]\right)\end{aligned}$$

属于 $\mathrm{MAVal}_k(E)$，因此是 MA_E 的倍数。因此，存在 $\mathrm{Kl}_\Psi(E) \in \mathbb{C}$，使得

$$\tilde{\Psi}(\pi_E^* \cdot) = \mathrm{Kl}_\Psi(E)\, \mathrm{MA}_E\,.$$

对于 $f \in$凸函数$(E,\mathbb{R})$，考虑测度 $\Psi_0(f) := \mathrm{Kl}_\Psi(E)\, \mathrm{MA}_E(f) \otimes \mathrm{vol}_{E^\perp} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$。对于$\phi_E \in C_c(E)$和 $\phi_{E^\perp} \in C_c(E^\perp)$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_E \cdot \pi_{E^\perp}^* \phi_{E^\perp} d\Psi_0(f) = \mathrm{Kl}_\Psi(E) \int_E \phi_E d\,\mathrm{MA}_E(f) \cdot \int_{E^\perp} \phi_{E^\perp} d\,\mathrm{vol}_{E^\perp} \\ &= \int_E \phi_E d\tilde{\Psi}(f) \int_{E^\perp} \phi_{E^\perp} d\,\mathrm{vol}_{E^\perp} = \int_{E^\perp} \phi d[\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]] \int_{E^\perp} \phi_{E^\perp} d\,\mathrm{vol}_{E^\perp}\,.\end{aligned}$$

由于 $\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]]$ 是勒贝格测度的倍数，且 $\int_{E^\perp} \phi d\,\mathrm{vol}_{E^\perp} = 1$，

$$\int_{E^\perp} \phi d[\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]] \int_{E^\perp} \phi_{E^\perp} d\,\mathrm{vol}_{E^\perp} = \int_{E^\perp} \phi_{E^\perp} d[\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]],$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_E \cdot \pi_{E^\perp}^* \phi_{E^\perp} d\Psi_0(f) &= \int_{E^\perp} \phi_{E^\perp} d[\pi_{E^\perp *}[\Psi(\pi_E^* f) \llcorner \phi_E]] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_E \cdot \pi_{E^\perp}^* \phi_{E^\perp} d\Psi(\pi_E^* f).\end{aligned}$$

由斯通-魏尔施特拉斯定理，形如 $x \mapsto \phi_E(\pi_E(x)) \cdot \phi_{E^\perp}(\pi_{E^\perp}(x))$ 的函数张成了 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 的一个稠密子空间。因此

$$\Psi(\pi_E^* f) = \Psi_0(f) = \mathrm{Kl}_\Psi(E)\,\mathrm{MA}_E(f) \otimes \mathrm{vol}_{E^\perp} \quad \text{for } f \in \mathrm{Conv}(E, \mathbb{R}).$$

我们得到一个定义良好的映射 $\mathrm{Kl}_\Psi : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$。为证明 Kl_Ψ 连续，注意我们可以按以下方式恢复这些函数：首先，选择 $\phi_1, \phi_2 \in C_c([0,\infty))$，使得 $\phi_1(0) = 1$, $\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \phi_2(|x|) d\mathrm{vol}_{n-k}(x) = 1$。若 B_E 表示 E 中的单位球，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_1 \cdot \pi_{E^\perp}^* \phi_2 d\Psi(\pi_E^* h_{B_E}) = \mathrm{Kl}_\Psi(E) \int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_1 \cdot \pi_{E^\perp}^* \phi_2 d(\mathrm{MA}_E(h_{B_E}) \otimes \mathrm{vol}_{E^\perp}).$$

由于 $\mathrm{MA}_E(h_{B_E}) = \omega_k \delta_0$，因此我们得到

$$\mathrm{Kl}_\Psi(E) = \frac{1}{\omega_k} \int_{\mathbb{R}^n} \pi_E^* \phi_1 \cdot \pi_{E^\perp}^* \phi_2 d\Psi(\pi_E^* h_{B_E}),$$

其中右侧关于 E 连续。因此 Kl_Ψ 连续。

最后，我们来证明 $\mathrm{Kl}_\Psi = 0$ 蕴含 $\Psi = 0$。注意，$\Psi = 0$ 当且仅当这些赋值

$$\mu_\phi(f) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi(f)$$

对所有 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 恒等为零。根据定理 3.4 中对偶简单赋值的刻画，当且仅当限制

$$\mu_\phi(\pi_E^* f) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi(\pi_E^* f) = \mathrm{Kl}_\Psi(E) \int_{\mathbb{R}^n} \phi d(\mathrm{MA}(f) \otimes \mathrm{vol}_{E^\perp}), \quad f \in \mathrm{Conv}(E, \mathbb{R}),$$

对所有 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 恒等为零。固定 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$。根据斯通-魏尔施特拉斯定理，形如 $x \mapsto \phi_1(\pi_E(x)) \cdot \phi_2(\pi_{E^\perp}(x))$、$\phi_1 \in C_c(E)$、$\phi_2 \in C_c(E^\perp)$ 的函数的线性组合在 $C_c(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。因此，当且仅当赋值

$$\mu_{\phi_1,\phi_2}(\pi_E^* f) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(\pi_E(x)) \cdot \phi_2(\pi_{E^\perp}(x)) d\Psi(\pi_E^* f) = \mathrm{Kl}_\Psi(E) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_1 d\,\mathrm{MA}_E(f) \cdot \int_{E^\perp} \phi_2 d\,\mathrm{vol}_{E^\perp}$$

对所有 $\phi_1 \in C_c(E)$、$\phi_2 \in C_c(E^\perp)$ 都恒为零。若 $\phi_1 \neq 0$，则赋值 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1 d\mathrm{MA}_E$ 不恒为零，因此我们可以选择 $\phi_2 \in C_c(E^\perp)$，使得 $\int_{E^\perp} \phi_2 d\mathrm{vol}_{E^\perp} \neq 0$。因此 $\mu_{\phi_1,\,\phi_2}(\pi_E^* f)$ 对所有 $f \in \mathrm{Conv}(E, \mathbb{R})$ 都成立，当且仅当 $\mathrm{Kl}_\Psi(E) = 0$。由于这对所有 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 都成立，结论得证。

□

注记5.3. Klain *[33]* 已经证明，对于次数为 k 的凸体上的连续、偶、平移不变赋值，也有类似的刻画结果。这些相似之处并非偶然，我们将在未来的一篇文章中探讨。

若 $G \subset \mathrm{O}(n)$ 是一个子群，则称 $\Psi \in \mathrm{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ 是 G-等变的，当且仅当

$$g \cdot \Psi = \Psi \quad \text{for all } g \in GF,$$

其中，我们考虑式 (2) 中定义的运算。由于实 Monge-Amp`ere 算子是 $\mathrm{O}(n)$-等变的，我们可直接得到以下结果。

推论5.4. 映射 $\mathrm{Kl} : \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n) \to C(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n))$ 是 $\mathrm{O}(n)$-等变且单射的。特别地，$\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 关于子群 $G \subset \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ 是 G-等变的，当且仅当 Kl_Ψ 是 G-不变的。

5.1 $\mathrm{SO}(n)$-与 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变赋值

我们将定理 1.5 重新表述如下。

定理 5.5. $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 中 $\mathrm{SO}(n)$-等变赋值构成的空间是一维的，由 k 阶 Hessian 测度张成。

证明。设 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathrm{SO}(n)$-等变的。根据推论5.4，$\mathrm{Kl}_\Psi \in C(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n))$ 是 $\mathrm{SO}(n)$-不变的。由于 $\mathrm{SO}(n)$ 在 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 上传递地作用，Kl_Ψ 是常数。然而，命题 5.2 表明 Ψ 由 Kl_Ψ 唯一确定，因此这个空间的维数至多为 1。由于第 k 阶 Hessian 测度在此空间中定义了一个非平凡元素，我们便得到所需结果。 □

称 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 是权 $q \in \mathbb{R}$ 的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的，若

$$g \cdot \Psi = |\det_{\mathbb{R}}(g)|^q \Psi \quad \text{for all } g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Theo备注 5.6. $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 是权 $q \in \mathbb{R}$ 的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的，当且仅当

- $k = 0$、$q = -1$ 和 Ψ 是勒贝格测度的倍数，或者
- $k = n$, $q = 1$ 和 Ψ 是实 Monge-Amp`ere 算子的一个倍数。

证明。显然，勒贝格测度和实 Monge-Amp`ere 算子在给定的权下都是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的。

注意，任何 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 都是 $\mathrm{SO}(n)$-等变的，因此根据定理 5.5，它是 Hessian 测度 Φ_k 的一个倍数。因此，我们将证明，对于 $1 \le k \le n-1$，这些测度中没有一个在任何权下都是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的。

注意，对于 $t > 0$，$(tId) \cdot \Phi_k = t^{-(n-2k)} \Phi_k$。特别地，$\Phi_k$ 不具有权 $q = -1$ 的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变性。将 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ 分开，并令 g_t 表示在 $t > 0$ 上的乘法

（第二因子）。若 $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$，且 $\pi\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ 是到第一因子的投影，则 $[\pi^* f] \circ g_t = \pi^* f$，因此命题 5.2 对博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^{n-k}$ 蕴含

$$\begin{aligned}
[g_t \cdot \Phi_k](\pi^* f)[A \times B] =& \Phi_k([\pi^* f] \circ g_t)[g_t^{-1}(A \times B)] \\
=& \Phi_k(\pi^* f_t)[g_t^{-1}(A \times B)] \\
=& (\mathrm{Kl}_{\Phi_k} \mathrm{MA}_{\mathbb{R}^k}(f) \otimes \mathrm{vol}_{n-k})[g_t^{-1}(A \times B)] \\
=& t^{-(n-k)} (\mathrm{Kl}_{\Phi_k} \mathrm{MA}_{\mathbb{R}^k}(f) \otimes \mathrm{vol}_{n-k})[A \times B] \\
=& t^{-(n-k)} \Phi_k(\pi^* f)[A \times B].
\end{aligned}$$

因为 $\det(g_t) = t^{n-k}$，Φ_k 不可能对于任何权 $q \neq -1$ 都是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的。因此，$\Phi_k$ 对于任何权都不是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-等变的，证明完毕。 □

6 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 的刻画

6.1 从本原微分形式导出的多项式

本节将讨论与常值微分形式和对称矩阵的 $(k \times k)$-子式相关的某些多项式。

定义 6.1. 令 $P\Lambda^{n-k,k} \subset \Lambda^{n-k}\mathbb{R}^n \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ 表示复值本原微分形式的子空间，即所有满足 $\omega_s \wedge \tau = 0$ 的 $\tau \in \Lambda^{n-k}\mathbb{R}^n \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$，其中 ω_s表示 $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上的自然辛形式。

根据 Lefschetz 分解（例如参见 [29, 命题 1.2.30]），$T^*\mathbb{R}^n$ 上的任意微分形式都可以唯一地写成一个本原微分形式与辛形式的倍数之和。因此，就我们的目的而言，只需考虑本原微分形式，因为微分循环在辛形式的倍数上取值为零；参见定理 2.2。

我们通过 $\mathbb{C}$-线性将 $\Lambda^{n-k,k}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$ 中的元素扩展为 $\Lambda^{n-k,k}(\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*)$ 中的元素。换言之，我们将 $\Lambda^{n-k,k}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$ 视为 $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 上常值全纯形式的空间。$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 通过对 $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 的对角作用，在 $\Lambda^{n-k,k}(\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*)$ 上作用，即

$$g \cdot \tau := ((g^{-1})^{\#})^* \tau \quad \text{for } \tau \in \Lambda^*(\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*),\ g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),$$

其中 $g^{\#}\colon \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* \to \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 定义为 $g^{\#}(z, w) = (g^{-1}z, g^* w)$。注意，$\omega_s$ 对应于一个 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-不变的全纯形式。这就推出以下结论。

引理 6.2. $P\Lambda^{n-k,k} \subset \Lambda^n(\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*)$ 是一个 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-不变子空间，因此是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的一个表示。

我们将为 $P\Lambda^{n-k,\ k}$ 的元素关联两种不同类型的多项式，它们分别与不同类型复矩阵的 $(k \times k)$-子式有关。首先引入一些记号。对于复向量空间 V，我们用 $\mathcal{P}^k(V)$ 表示 V 上 k 次齐次多项式所成的空间。用 SM_n 表示对称 $(n \times n)$-矩阵所成的空间。若令 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 通过 $(g, A) \mapsto (g^T)^{-1} A g^{-1}$ 的方式作用于 SM_n，其中 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$、$A \in SM_n$，那么 SM_n 作为一个

GL($n,\mathbb{C}$)-模同构于 $\mathbb{C}^n$ 上对称双线性型所成的空间。更确切地说，我们将 $A \in SM_n$ 与 $\mathbb{C}^n$ 上的双线性型 $(z,w) \mapsto z^T Aw$ 对应起来。用 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{P}^k(SM_n)$ 表示由 $(k \times k)$-子式张成的空间。这是一个 GL($n,\mathbb{C}$)-不变子空间。我们需要以下结果。

引理 6.3. $\mathcal{M}_k$ 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的不可约表示。

证明. 众所周知， SM_n 上的所有多项式所构成的空间是 GL($n,\mathbb{C}$) 的无重表示，参见例如 [24, 定理 5.7.1]。注意， $\mathcal{M}_k$ 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的有理表示，因此可分解为不可约表示的直和。这种表示由其最高权向量唯一确定，并且容易看出，第 k 个主子式是一个最高权向量，参见例如 [24,定理 5.7.3] 的证明。利用置换矩阵可知，第 k 个主子式的轨道张成 $\mathcal{M}_k$。因此， $\mathcal{M}_k$ 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的不可约表示。

□

下述 结果众所周知，但为方便读者，我们仍给出证明 .

引理 6.4. 理想 $I_k \subset \mathcal{P}(SM_n)$（由所有在秩严格小于 k 的矩阵上取值为零的多项式构成）是素理想，且由 $\mathcal{M}_k$ 生成。

证明。注意， I_k 是 $\mathcal{P}(SM_n)$ 的 GL($n,\mathbb{C}$)-不变子空间。由于 $\mathcal{P}(SM_n)$ 是一个有理表示， I_k 分解为不可约子空间的直和，而这些不可约子空间分别由其最高权向量的轨道生成。这些向量由主子式的乘积给出，参见 [24, 定理 5.7 的证明3]。因此，与 I_k 的不可约分量相对应的最高权向量都可被一个大小为 $l \times l$ 的主子式整除，其中 $l \geq k$。由于任意 $(l \times l)$-子式 $l > k$ 都包含于由 $(k \times k)$- 子式生成的理想中， I_k 中的所有最高权向量都属于由 $\mathcal{M}_k$ 生成的理想，因此，由它们的轨道张成的空间也具有相同性质，而该空间就是 I_k。

为了证明 I_k 是素理想，假设 p、 $q \in \mathcal{P}(SM_n) \setminus I_k$ 满足 $pq \in I_k$。那么存在秩至多为 $k-1$ 的 A、 $B \in SM_n$，使得 $p(A) \neq 0$ 且 $q(B) \neq 0$。我们可以写成

$$A = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i \cdot a_i^T, \qquad B = \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i b_i \cdot b_i^T$$

对于 λ_i、 $\eta_i \in \mathbb{C}$、 a_i、 $b_i \in \mathbb{C}^n$、 $1 \leq i \leq k-1$。对于 $t \in \mathbb{C}$ 集合

$$C(t) := \sum_{i=1}^{k-1} (t\lambda_i + (1-t)\eta_i)(ta_i + (1-t)b_i) \cdot (ta_i + (1-t)b_i).$$

那么， $p(C(t))$ 和 $q(C(t))$ 是关于 t 的不恒为零的多项式。因此，存在 $t_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $p(C(t_0))$ $q(C(t_0)) \neq 0$，这与 $C(t)$ 的秩至多为 $k-1$ 矛盾。因此， $p \in I_k$ 或 $q \in I_k$。

□

对于 $Q \in SM_n$，我们令 $Q(z) := \frac{1}{2} z^T Q z$ 表示由相应二次型在 $\mathbb{C}^n$ 上得到的二次多项式。特别地，我们得到一个映射

$$\begin{aligned} F_Q : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* \\ z &\mapsto (z, \partial Q(z)), \end{aligned}$$

其中 $\partial Q(z)$ 表示 $Q(z)$ 的全纯微分。换言之， $F_Q(z) = (z, z^T Q)$。我们将 $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 的坐标记为 (z, w)。由于 $\partial Q(z)$ 关于 z 是复线性的， $F_Q^* dw_i$ 又是一个常微分形式。这便推出以下结果。

引理 6.5。对于每个 $\tau \in P\Lambda^{n-k,k}$ ，都存在唯一的多项式 $P_\tau \in \mathcal{P}^k(SM_n)$，使得

$$F_Q^* \tau = P_\tau(Q) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

注意， P_τ 在秩小于 k 的对称矩阵上为零：任意这样的矩阵都可写成 $Q = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j e_j \cdot e_j^T$，其中 $e_1, \ldots, e_{k-1} \in \mathbb{C}^n$ 和 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{C}$。于是容易看出，对于所有 $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$，都有 $F_Q^*(dw_{i_1} \wedge \cdots \wedge dw_{i_k}) = 0$，从而推出 $F_Q^* \tau = 0$。

如果 $Q \in SM_n$ 是一个实矩阵，那么 $F_Q^* \tau$ 可以理解为微分形式 τ 在多项式 $Q(x) = \frac{1}{2} x^T Q x$, $x \in \mathbb{R}^n$ 的微分 $dQ(x)$ 的图像上的限制。注意，该图像的切空间都是各向同性的，也就是说， ω_s 在这些子空间上的限制为零。下面证明，多项式 P_τ 唯一确定了 τ。我们需要以下结果。

引理 6.6（Bernig-Br¨ocker [8] 引理 1.4）。设 $\beta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*)$ 是本原的， $k \leq n$。如果 β 在所有各向同性的 k 维线性子空间上消失，则 $\beta = 0$。

引理 6.7。映射

$$\begin{aligned} P : P\Lambda^{n-k,k} &\to \mathcal{P}^k(SM_n) \\ \tau &\mapsto P_\tau \end{aligned}$$

是单射，并且在以下意义下具有 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-等变性：对于 $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 和 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\, k}$，

$$P_{g \cdot \tau} = \det(g)^{-1} \, (g \cdot P_\tau) \, .$$

特别地， P 的像是 $\mathcal{P}^k(SM_n)$ 的 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-不变子空间。

证明。设 $P_\tau = 0$。根据引理 6.6，只需证明 τ 在 $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 的所有 n 维各向同性子空间上消失。

考虑投影 $\pi : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ 到第一因子。若一个拉格朗日子空间 $E \subset \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 满足 $\pi|_E$ 是单射，则称其为正则的。容易看出，如果 τ 在所有正则的 n 维拉格朗日子空间上消失，那么它就在所有 n 维拉格朗日子空间上消失。设 E 是这样一个正则空间。由于 $\pi|_E$ 是单射，因此存在唯一的线性映射 $T : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$， $(x, T(x)) \in E$。由于 E 是拉格朗日的，

$$0 = \omega_s((x_1, T(x_1)), (x_2, T(x_2))) = \langle x_1, T(x_2) \rangle - \langle x_2, T(x_1) \rangle$$

对所有 x_1、 $x_2 \in \mathbb{R}^n$，因此 $T : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ 是对称的。于是我们可以选择 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 e_1、……、 e_n，使得对于某个 $\lambda_i \in \mathbb{R}$，对所有 $1 \leq i \leq n$ 都有 $T(e_i) = \lambda_i e_i$。换言之， E 由向量 $(e_1, \lambda_1 e_1)$、……、$(e_n, \lambda_n e_n)$ 张成。相对于 $\mathbb{R}^n$ 的基 e_1、……、 e_n，定义 $Q \in SM_n$ 为 $Q(x) := \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{x_i^2}{2}$。于是， $x \mapsto dQ(x)$ 的图像在 $(x, dQ(x))$ 中的切空间为 E，因此 τ 在 E 上的限制为零，因为

$$F_Q^* \tau = P_\tau(Q) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0.$$

由于这对 $\mathbb{R}^n \times(\mathbb{R}^n)$ 中的所有正则拉格朗日子空间 E 都成立，且 τ 是本原的，引理 6.6 蕴含 $\tau = 0$。

下面证明， P 在上述意义下是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-等变的。对于 $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$，令 $G_g\colon \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* \to \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 表示对角作用 $(z,w) \mapsto (gz,(g^{-1})^* w)$。于是

$$\begin{aligned} G_g \circ F_Q(z) =& (gz, \partial Q(z) \circ g^{-1}) = (gz, z^T Q g^{-1}) = (gz, (gz)^T (g^{-1})^T Q g^{-1}) = (gz, \partial (g \cdot Q)(gz)) \\ =& F_{g\cdot Q}(gz). \end{aligned}$$

若 $G_g\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $g \in\ n\ \mathbb{C}$ $G_g \circ F_Q =$: 表示与 $\mathrm{GL}(\,,\,)$ 的乘法，则有 $F_{g\cdot Q} \circ \tilde{G}_g$ $\tau \in P\Lambda^{n-k\,k}$。对于，这意味着

$$\begin{aligned} P_{G_g^* \tau} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n =& F_Q^*(G_g^* \tau) = \tilde{G}_g^* \left(F_{g\cdot Q}^*\right) = P_\tau(g \cdot Q) \tilde{G}_g^* (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) \\ =& P_\tau(g \cdot Q) \det(g) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n. \end{aligned}$$

由于 $\tilde{G}_g = (g^{-1})^{\#}$，

$$P_{g\cdot\tau}(Q) = P_\tau(g^{-1} \cdot Q) \det(g)^{-1} = \det(g)^{-1} \left(g \cdot P_\tau\right)(Q).$$

□

命题 6.8. P 的像与 $\mathcal{M}_k$ 重合。

证明。首先证明， P 的像包含于由 $(k \times k)$-子式张成的空间中。首先，考虑理想 I_k，它由 SM_n 上的所有多项式构成，这些多项式在秩至多为 $k-1$ 的 SM_n 元素处取值为零。该素理想由 $(k \times k)$-子式生成，参见引理 6.4。显然，对于 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}$，有 $P_\tau \in I_k$。由于 P_τ 是一个次数为 k 的多项式，因此我们可以将 P_τ 表示为 $(k \times k)$-子式的 $\mathbb{C}$-线性组合。

接下来，注意到根据引理 6.3， $\mathcal{M}_k$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的不可约表示。根据引理 6.7， P 的像是 $\mathcal{M}_k$ 中一个非平凡的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-子模，因此这两个空间相同。 □

结合这一结果与引理 6.3，我们得到以下结论。

推论 6.9. $P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的不可约表示。

现在我们转而讨论第二类由 $P\Lambda^{n-k,\,k}$ 中的元素得到的多项式。记 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上的标准坐标为 (x,y)。

定义 6.10. 若 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}$，则我们定义 Q_τ 上的一个复多项式 $\mathbb{C}^n)^k$，如下：

$$Q_\tau(w_1, \ldots, w_k) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \mathcal{L}_{X_1} \ldots \mathcal{L}_{X_k} \tau, \tag{4}$$

其中， X_j 表示 $x \mapsto -\frac{1}{2}\langle w_j, x\rangle^2$ 的辛向量场，即在 $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上具有复系数且满足 $i_{X_j}\omega_s = -\frac{1}{2} d\langle w_j, x\rangle^2$ 的唯一向量场。

这里， $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ 表示李导数的复线性延拓。注意， X_j 由下式给出

$$X_j = \langle w_j, x\rangle \sum_{l=1}^{n} w_{j,l} \frac{\partial}{\partial y_l},$$

因此，(4) 的右侧定义了一个多项式。不难看出，该定义与下面的刻画一致：

~对于 $w_1,\dots,w_k \in \mathbb{C}^n$，令 X_j 表示定义在 $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上的唯一复系数向量场，使得

$$i_{\tilde{X}_j}\omega_s = d\left(\exp\left(i\langle w_j, x\rangle\right)\right).$$

若我们记 $w_j = (w_{j,1}, \dots, w_{j,n}) \in \mathbb{C}^n$，则

$$\tilde{X}_j = -i\exp\left(i\langle w_j, x\rangle\right)\sum_{l=1}^{n} w_{j,l}\frac{\partial}{\partial y_l},$$

且 Q_τ 由下式刻画

$$\exp\left(i\left\langle\sum_{j=1}^{k} w_j, x\right\rangle\right) Q_\tau(w_1,\dots,w_k)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n = \mathcal{L}_{\tilde{X}_1}\dots\mathcal{L}_{\tilde{X}_k}\tau. \tag{5}$$

引理 6.11. Q_τ 对任意 $\tau \in P\Lambda^{n-k,k}$ 都是对称的。

证明. 向量场 X_j 彼此对易。 □

命题 6.12. 令

$$\Phi : (\mathbb{C}^n)^k \to SM_n$$
$$(w_1,\dots,w_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot w_i^T.$$

那么对于所有 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}$

$$\Phi^* P_\tau = \frac{1}{k!}Q_\tau.$$

证明。固定 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}$。对于 $(w_1,\dots,w_k) \in (\mathbb{C}^n)^k$，令 $Q_i(z) := \frac{1}{2}\langle w_i, z\rangle^2$。对于 $\lambda_i \in \mathbb{C}$，我们定义$G_{Q_i}^{\lambda_i}$： $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^* \to \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$，$(z,w) \mapsto (z, w + \lambda_i \partial Q_i(z))$。于是

$$F_{\sum_i \lambda_i Q_i} = G_{Q_k}^{\lambda_k} \circ \cdots \circ G_{Q_1}^{\lambda_1} \circ F_0.$$

接下来，由定义可知，$(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \mapsto (F_{\sum_i \lambda_i Q_i})^*\tau$ 是一个次数为 k 的齐次多项式。如果我们考虑该多项式中不对应于包含 λ_j 的单项式的某个系数，那么这个系数出现在多项式中

$$(F_{\sum_{i\neq j}\lambda_i Q_i})^*\tau.$$

但 $\sum_{i\neq j}\lambda_i Q_i$ 的秩至多为 $k-1$，因此该表达式恒等于零。换言之，这个多项式唯一的非零系数是属于 $\lambda_1\dots\lambda_k$ 的系数。因此

$$\begin{aligned}(F_{\Phi(w_1,\dots,w_k)})^*\tau =& (F_{\sum_i \lambda_i Q_i})^*\tau|_{\lambda_1,\dots,\lambda_k=1} = \left(\lambda_1\dots\lambda_k \frac{1}{k!}\frac{\lambda^k}{\partial\lambda_1\dots\partial\lambda_k}\Big|_0 (F_{\sum_i \lambda_i Q_i})^*\tau\right)\Big|_{\lambda_1,\dots,\lambda_k=1}\\ =& \frac{1}{k!}\frac{\lambda^k}{\partial\lambda_1\dots\partial\lambda_k}\Big|_0 F_0^*\left((G_{Q_1}^{\lambda_1})^*\dots(G_{Q_k}^{\lambda_k})^*\tau\right)\\ =& \frac{1}{k!}F_0^*\left(\mathcal{L}_{X_1'}\dots\mathcal{L}_{X_k'}\tau\right),\end{aligned}$$

其中 $X_i' := \frac{d}{d\lambda}|_0 G_{Q_i}^\lambda$。令 $\alpha = \sum_{i=1}^n w_i dz_i$ 表示定义在 $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ 上的自然1-形式向 $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 的全纯延拓。注意，根据定义，$(G_{Q_i}^\lambda)^*\alpha = \alpha + \lambda \partial Q_i(z)$。由于 $\pi \circ G_{Q_i}^\lambda = Id_{\mathbb{C}^n}$，我们还有 $i_{X_i'}\alpha|_{(z,w)} = \langle w, d\pi(X_i')\rangle = 0$，因此

$$\partial Q_j(z) = \mathcal{L}_{X_j'}\alpha = i_{X_j'} d\alpha = -i_{X_j'}\omega_s.$$

特别地，$X_j' = X_j$。因此我们得到

$$\begin{aligned} P_\tau(\Phi(w_1,\dots,w_k))dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n &= \left(F_{\Phi(w_1,\dots,w_k)}\right)^*\tau = \frac{1}{k!}F_0^*\left(\mathcal{L}_{X_1}\dots\mathcal{L}_{X_k}\tau\right) \\ &= \frac{1}{k!}Q_\tau(w_1,\dots,w_k)F_0^*(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n) \\ &= \frac{1}{k!}Q_\tau(w_1,\dots,w_k)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n. \end{aligned}$$

□

令 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 作用于 $(\mathbb{C}^n)^k$，作用方式为 $g\cdot(w_1,\dots,w_k) := ((g^{-1})^T w_1,\dots,(g^{-1})^T w_k)$；也就是说，我们利用 $\mathbb{C}^n$ 上的标准双线性配对来考虑 $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C}^n)^*$。根据 Φ 的定义，我们直接得到以下结论。

引理 6.13. $\Phi : (\mathbb{C}^n)^k \to SM_n$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-等变的。

推论 6.14. $Q_\tau = 0$ 当且仅当 $\tau = 0$。

证明。根据命题 6.12，只需证明 $\Phi^* P_\tau = 0$ 蕴含 $P_\tau = 0$。由于根据命题 6.8，$P_\tau \in \mathcal{M}_k$ 是一个由引理 6.3 所述的不可约子空间，因此由以下事实可得出结论：Φ，从而 Φ^* 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-等变的，所以 Φ^* 到 $\mathcal{M}_k$ 的限制要么是单射，要么恒为零。显然它并非恒为零，因此 Φ^* 到该空间的限制是单射。

□

令 $\mathcal{M}_k^2 \subset \mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^k)$ 表示由 $(k\times k)$ 阶子式的二次乘积张成的子空间，其中这些子式来自 $(\mathbb{C}^n)^k$ 中的一个矩阵。容易看出，这是 $\mathcal{P}^{2k}((\mathbb{C}^n)^k)$ 的一个 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$- 不变子空间。我们称 $\mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^k)$ 中的一个多项式为次数为 $(a_1,\dots,a_k) \in \mathbb{N}^k$的齐次多项式，如果它关于第 i 个自变量的 a_i 是齐次的。

命题 6.15. Q 的像与 $\mathcal{M}_k^2$ 重合。

证明。令 Δ_α 表示 $(k\times k)$ 阶子式族，这些子式来自 $(\mathbb{C}^n)^k$中的元素。我们首先证明 Q的像包含于 $\mathcal{M}_k^2$中。根据命题 6.12，我们需要证明$\Phi^* p \in \mathcal{M}_k^2$ 对每个 $p \in \mathcal{M}_k$都成立。首先注意到，$\Phi^* p$ 在 $(k\times k)$ 阶子式 Δ_α的公共零点集上消失：若 w_1，…，$w_k \in \mathbb{C}^n$ 线性相关，则矩阵 $\sum_{i=1}^k w_i \cdot w_i^T$的秩至多为 $k-1$，因此 p 在该矩阵上消失。因此，$\Phi^* p$ 属于 $(\mathbb{C}^n)^k$ 上所有在秩至多为 $k-1$的矩阵上消失的多项式构成的理想。这是由 $(k\times k)$ 阶子式生成的素理想，参见 [46, 第 16] 节。根据构造，$\Phi^* p$是 $(\mathbb{C}^n)^k$上的对称齐次多项式，其次数为 $(2,\dots,2)$。如果我们将

$$\Phi^* p = \sum_\alpha h_\alpha \cdot \Delta_\alpha$$

表示为 $(\mathbb{C}^n)^k$ 上 $(k \times k)$ 阶子式 Δ_α的一个 $\mathcal{P}$ 线性组合，那么我们可以假设 $h_\alpha \in \mathcal{P}^k((\mathbb{C}^n)^k)$ 对每个自变量都是 1 次齐次的，因此是多重线性的。由于 Δ_α 是关于自变量 $z_1, \ldots, z_k$的置换的斜对称多项式，而 $\Phi^* p$ 是对称的，我们还可以进一步假设 h_α 是斜对称的。但此时 h_α 是多重线性斜对称多项式，因此是 $(k \times k)$ 阶子式 Δ_α的线性组合。

因此， Q 的像是一个维数为 $\dim P\Lambda^{n-k,k} = \binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{n-k-1}$的子空间。由于 Grassmann-Plücker 关系（例如参见 [46,第 14]节），由这些（$k \times k$）-子式的二次乘积所张成的空间的维数至多为 $\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k-1}\binom{n}{n-k-1}$，故该断言成立。

□

6.2 与由微分循环获得的测度值赋值的关系

对于 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$， $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，定义 $\Psi[\phi] \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n)$ 如下

$$\Psi[\phi](f) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\Psi(f).$$

我们对这些多项式的兴趣源于以下观察：

命题 6.16. 若 $\tau \in P\Lambda^{n-k,k}$，则 $\Psi_\tau(f)[B] = D(f)[1_{\pi^{-1}(B)}\tau]$ 满足

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi_\tau[\phi]))[z_1, \ldots, z_k] = \frac{(-1)^k}{k!} Q_\tau(z_1, \ldots, z_k)\mathcal{F}(\phi)\left[\sum_{i=1}^k z_i\right]$$

对所有 $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^n$。

证明. 只需对 $z_1 = ix_1 \ldots, z_k = ix_k$ for $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$证明该等式。令$\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$。则 $\Psi_\tau[\phi] \in \mathrm{VConv}_k(\mathbb{R}^n)$ 是一个连续赋值，我们计算得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi_\tau[\phi]))[ix_1, \ldots, ix_k] &= \mathrm{GW}(\Psi_\tau[\phi])[\exp(-\langle x_1, \cdot\rangle) \otimes \cdots \otimes \exp(-\langle x_1, \cdot\rangle)] \\
&= \overline{\Psi_\tau[\phi]}(\exp(-\langle x_1, \cdot\rangle), \ldots, \exp(-\langle x_1, \cdot\rangle)) \\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k}\Big|_0 \Psi_\tau[\phi]\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \exp(-\langle x_i, \cdot\rangle)\right),
\end{aligned}$$

这里我们使用了定理 3.3 中 Goodey-Weil 分布的定义性质以及极化 $\overline{\Psi_\tau[\phi]}$的定义。令 $h_i := \exp(-\langle x_i, \cdot\rangle)$。由于 $\Psi_\tau[\phi](f) = D(f)[\pi^*\phi \wedge \tau]$，我们可以应用命题 2.3 得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k}\Big|_0 \Psi_\tau[\phi]\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i \exp(-\langle x_i, \cdot\rangle)\right) &= \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k}\Big|_0 D\left(0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i h_i\right)[\pi^*\phi \wedge \tau] \\
&= \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_k}\Big|_0 D(0)\left[\pi^*\phi \wedge G^*_{\lambda_1 h_1} \ldots G^*_{\lambda_1 h_1}\tau\right] \\
&= \frac{1}{k!} D(0)\left[\pi^*\phi \wedge \mathcal{L}_{X_{h_1}} \ldots \mathcal{L}_{X_{h_k}}\tau\right],
\end{aligned}$$

其中 $X_{h_j} := \frac{d}{dt}|_0 G_{th_j}$。与命题 6.12 的证明中一样， $G^*_{th_j}\alpha = \alpha + t dh_j$，因此我们得到

$$dh_j = \mathcal{L}_{X_{h_j}}\alpha = -i_{X_{h_j}}\omega_s.$$

注意

$$dh_j = d\exp(-\langle x_j, \cdot\rangle) = d\exp(i\langle ix_j, \cdot\rangle).$$

Q_τ 在（5）中的刻画意味着

$$\mathcal{L}_{X_{h_1}} \dots \mathcal{L}_{X_{h_k}} \tau = (-1)^k \exp\left(i \left\langle \sum_{j=1}^k ix_j, \cdot \right\rangle \right) Q_\tau(ix_1, \dots, ix_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi_\tau[\phi]))[ix_1, \dots, x_k] \\
=&\frac{(-1)^k}{k!} Q_\tau(ix_1, \dots, ix_k) D(0) \left[\pi^*\phi \cdot \pi^* \exp\left(i \left\langle \sum_{j=1}^k ix_j, \cdot \right\rangle \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \right] \\
=&\frac{(-1)^k}{k!} Q_\tau(ix_1, \dots, ix_k) \mathcal{F}(\phi) \left[\sum_{j=1}^k ix_k \right],
\end{aligned}$$

由于 $D(0)$ 由对 $\{(x, 0) \in T^*\mathbb{R}^n$ 的积分给出： $x \in \mathbb{R}^n\}$。 □

命题 6.17。对于 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}$映射 $\Psi_\tau(f)[B] = D(f)[1_{\pi^{-1}(B)}\tau]$ 对于 $f \in$凸函数$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\Psi_\tau(f)[B] = \int_B P_\tau(D^2 f(x)) d\,\mathrm{vol}_n(x) \quad \textit{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n.$$

证明。考虑映射

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \\
x &\mapsto (x, df(x)).
\end{aligned}$$

对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，通过 $Q_{x_0}(x) := \frac{1}{2}\langle D^2 f(x_0)x, x\rangle$ 定义 $Q_{x_0} \in$对称$^2(\mathbb{R}^n)$。注意

$$\tilde{G}_f^* dy_i|_{x_0} = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)\Big|_{x_0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) dx_j = G_{Q_{x_0}}^* dy_i.$$

Thus

$$\tilde{G}_f^* \tau|_{x_0} = G_{Q_{x_0}}^* \tau|_{x_0} = P_\tau(Q_{x_0}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = P_\tau(D^2 f(x_0)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

这意味着

$$\Psi_\tau(f)[B] = D(f)[1_{\pi^{-1}(B)}\tau] = \int_B \tilde{G}_f^* \tau = \int_B P_\tau(D^2(f(x)) d\,\mathrm{vol}_n(x).$$

□

6.3 分类结果

定理 6.18. 对于每个 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，都存在唯一的齐次对称多项式 $Q[\Psi]$ on $(\mathbb{C}^n)^k$，其次数为 $(2,\dots,2)$，使得

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi]))[z_1,\dots,z_k] = \frac{(-1)^k}{k!} Q[\Psi](z_1,\dots,z_k)\mathcal{F}(\phi)\left[\sum_{j=1}^k z_j\right].$$

特别地，当且仅当 $Q[\Psi]=0$ 时，$\Psi = 0$。

证明。由于 $\mathcal{F}\circ\mathrm{GW}$ 是单射，因此显然，只要表示（从而多项式$Q[\Psi]$）存在，它就是唯一的。

若 $y_1,\dots,y_k \in E$ 对于 $E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 成立，则由命题 5.2

$$\Psi[\phi]\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \exp\langle y_j, x\rangle\right) = \mathrm{Kl}_\Psi(E)\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)d\left(\mathrm{MA}_E\left(\sum_{j=1}^k \lambda_j \exp\langle y_j,x\rangle\right)\otimes \mathrm{vol}_{E^\perp}\right),$$

so

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GW}(\Psi[\phi])[\exp(\langle y_1,\cdot\rangle)\otimes\cdots\otimes\exp(\langle y_k,\cdot\rangle)]\\
&= \mathrm{Kl}_\Psi(E)\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_1\dots\partial\lambda_k}\Big|_0\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)d\left(\mathrm{MA}_E\left(\sum_{j=1}^k\lambda_j\exp\langle y_j,x\rangle\right)\otimes\mathrm{vol}_{E^\perp}\right)\\
&= \mathrm{Kl}_\Psi(E)\frac{1}{k!}\det(\langle y_i,y_j\rangle)_{i,j=1}^k\mathcal{F}(\phi)\left[-i\sum_{j=1}^k y_j\right].
\end{aligned}$$

取 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得 $\mathcal{F}(\phi)[0]\neq 0$。那么由下式给出的 $Q[\Psi]$

$$Q[\Psi](z_1,\dots,z_k) := (-1)^k k!\frac{\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi]))[z_1,\dots,z_k]}{\mathcal{F}(\phi)\left[\sum_{j=1}^k z_k\right]}$$

在 $0\in(\mathbb{C}^n)^k$ 的某个邻域内定义了一个全纯函数，并且满足：对于 $y_1,\dots,y_k \in E\in\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$，当 $|y_1|,\dots,|y_k|$ 足够小时

$$Q[\Psi](y_1,\dots,y_k) = \mathrm{Kl}_\Psi(E)\det(\langle y_i,y_j\rangle)_{i,j=1}^k. \tag{6}$$

由于全纯函数由其在实子空间$i(\mathbb{R}^n)^k \subset (\mathbb{C}^n)^k$上的限制唯一确定，我们可以看出，$Q[\Psi]$ 的芽不依赖于满足$\mathcal{F}(\phi)[0]\neq 0$的 ϕ 的选取。通过对 ϕ 的自变量进行缩放，并利用傅里叶-拉普拉斯变换的等变性，我们由此可知，$Q[\Psi]$ 在$(\mathbb{C}^n)^k$ 上定义了一个整函数，使得 (6) 成立。特别地，

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi]))[z_1,\dots,z_k] = \frac{(-1)^k}{k!}Q[\Psi](z_1,\dots,z_k)\mathcal{F}(\phi)\left[\sum_{j=1}^k z_j\right] \tag{7}$$

对于所有满足 $\mathcal{F}(\phi)[0] \neq 0$的 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$。如果 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$满足 $\mathcal{F}(\phi)[0] = 0$，我们可以用 $\phi + \epsilon\phi_0$替换 ϕ，其中 $\mathcal{F}(\phi_0)[0] \neq 0$，并令 ϵ 趋于零。因此，(7) 对所有 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$都成立。剩下要证明的是，$Q[\Psi]$ 是次数为 $2k$的齐次多项式。

注意，对于 $y_1,\dots,y_k \in E \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 和 $t_1,\dots,t_k \in \mathbb{R}$

$$Q[\Psi](t_1 i y_1,\dots,t_k i y_k) = \mathrm{Kl}(E)\det(\langle t_i y_i, t_j y_j\rangle)_{i,j=1}^k = Q[\Psi](i y_1,\dots,i y_k)\prod_{j=1}^k t_j^2,$$

因此，由恒等定理，对所有 $z_1,\dots,z_k \in \mathbb{C}^n$，都有 $Q[\Psi](t_1 z_1,\dots,t_k z_k) = Q[\Psi](z_1,\dots,z_k)\prod_{j=1}^k t_j^2$。特别地，

$$|Q[\Psi](z_1,\dots,z_k)| \leq \prod_{j=1}^k |z_j|^2 \sup_{|w_1|\leq 1,\dots,|w_k|\leq 1} |Q[\Psi](w_1,\dots,w_k)|.$$

因此，$Q[\Psi]$ 是一个整函数，其绝对值由次数为 $2k$ 的多项式所控制，故其本身也是次数至多为 $2k$ 的多项式。由 (6) 可推得，$Q[\Psi]$ 实际上是次数为 (2, . . . , 2) 的多项式，且 $Q[\Psi]$ 是对称的。

对于最后一个结论，注意到 $Q[\Psi] = 0$ 意味着对于所有 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，都有 $\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi])) = 0$。由于 $\mathcal{F}\circ\mathrm{GW}$ 是单射，因此对于所有 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，都有 $\Psi[\phi] = 0$，这意味着 $\Psi = 0$。 □

推论 6.19. 对于 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，多项式 $Q[\Psi]$ 属于 $\mathcal{M}_k^2$。

证明. 令 Δ_α 表示由 $(k \times k)$-子式张成的空间的一组基。我们首先证明，$Q[\Psi]$ 包含于 $(k \times k)$-子式在 $(\mathbb{C}^n)^k$上生成的理想中。这个理想与所有在任意线性相关的 $(z_1,\dots,z_k) \in (\mathbb{C}^n)^k$ 上消失的多项式所构成的理想一致。由于

$$Q[\Psi](z_1,\dots,z_k) = (-1)^k k!\frac{\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi])[z_1,\dots,z_k]}{\mathcal{F}(\phi)\left[\sum_{i=1}^k z_i\right]}$$

根据定理 6.18，对于所有满足 $\mathcal{F}(\phi)\left[\sum_{i=1}^k z_i\right] \neq 0$的 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$，结论成立，因为由引理 3.7，$\mathrm{GW}(\Psi[\phi])[z_1,\dots,z_k]$ 在所有线性相关的向量上都消失。

因此，我们得到 $h_\alpha \in \mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$，使得

$$Q[\Psi](z_1,\dots,z_n) = \sum_\alpha h_\alpha \cdot \Delta_\alpha.$$

由于根据定理 4.5，$Q[\Psi]$ 是次数为 (2, . . . , 2) 的齐次多项式，我们可以假设h_α 是次数为 (1, . . . , 1) 的齐次多项式。由于 Δ_α 关于自变量的置换是反对称的，且根据定理 6.18，$Q[\Psi]$ 是对称的，我们还可以假设 h_α 是反对称的。但这样一来，h_α 就是定义在 $(\mathbb{C}^n)^k$ 上的交替多重线性泛函，因此是 $(k \times k)$-子式的线性组合，这就证明了所述结论。 □

定理 6.20。对于每个 $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，都存在唯一的原始微分形式$_{\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}}$使得 $\Psi = \Psi_\tau$。

证明。根据定理 6.18， $\Psi \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 由多项式 $Q[\Psi]$ 唯一确定。由于推论 6.19，该多项式包含在由 $(k \times k)$-子式的平方张成的空间中。因此，命题 6.15 表明，存在一个微分形式 $\tau \in P\Lambda^{n-k,\,k}$ 使得$Q_\tau = Q[\Psi]$。如果我们考虑 $\Psi_\tau \in \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，那么命题 6.16 以及定理 6.18 中 $Q[\Psi]$的定义表明

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi])) = \mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi_\tau[\phi])$$

对所有 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 均成立。因此 $\Psi = \Psi_\tau$。 □

请注意，前面的论证归结为以下结论。

推论 6.21。映射

$$\begin{aligned} \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{M}_k^2 \\ \Psi &\mapsto Q[\Psi] \end{aligned}$$

是双射。

证明。根据推论 6.19，该映射定义良好；根据命题 6.15 和命题 6.16，该映射是满射；根据定理 6.18，该映射是单射。 □

定理 1.4 的证明。注意，映射

$$\begin{aligned} P\Lambda^{n-k,k} &\to \mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n) \\ \tau &\mapsto \Psi_\tau \end{aligned}$$

由于推论 4.11，它是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-等变的（差一个符号），并且根据定理 6.20 是双射的。由于 $P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的有限维表示，因此只需证明$P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的不可约表示。回顾一下，我们将$P\Lambda^{n-k,\,k}$中的元素扩展为 $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n)^*$ 上的常值全纯形式，其方式是通过 $\mathbb{C}$-线性，并且根据推论 6.9，在此同一关系下， $P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的不可约有理表示。众所周知，这意味着 $P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的不可约表示。事实上，设 $W \subset P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是一个非平凡的 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-不变子空间。由于 $P\Lambda^{n-k,\,k}$ 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 的有理表示，该集合

$$\{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : g \cdot \tau \in W \text{ for all } \tau \in W\} \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

是 Zariski 闭集。根据假设，它包含 Zariski 稠密子集 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$，因此与 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 重合。换言之， W 是$P\Lambda^{n-k,k}$的一个非平凡 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$-不变子空间，因此这两个空间重合。因此， $P\Lambda^{n-k,\,k}$是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的不可约表示。 □

现在我们可以证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。显然，次数为 k 的二次型混合 Monge-Amp`ere 算子的线性组合张成 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 的一个非平凡 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-不变子空间，因此由定理 1.4 可知，该空间与 $\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 重合。类似地，由 Ψ_τ（其中 $\tau \in \Lambda^{n-k,\,k}$）张成的空间根据推论 4.11 是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$-不变的，因此与

$\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$ 重合。最后，对于任意由 $(k\times k)$-子式构成的线性组合 P，根据命题 6.8，存在一个微分形式 $\tau\in P\Lambda^{n-k,\,k}$，使得 $P=P_\tau$。根据命题 6.17，Ψ_τ 满足

$$\Psi_\tau(f)[B]=\int_B P(D^2(x))d\,\mathrm{vol}_n(x)\quad \text{for bounded Borel sets } B$$

对于 $f\in$ 凸函数$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\cap C^2(\mathbb{R}^n)$。另一方面，根据命题 6.17，这种表示对每个微分形式 $\tau\in P\Lambda^{n-k,\,k}$ 都成立，因此由前面的讨论可得结论。

□

7 非负赋值锥

引理 7.1. 对于 $\Psi_\tau\in\mathrm{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，$\tau\in P\Lambda^{n-k,\,k}$，以下条件等价：

1. Ψ_τ 是非负的。2. $Q[\Psi_\tau]=Q_\tau\in\mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^k)$ 在 $(\mathbb{R}^n)^k$ 上是非负的。3. $\mathrm{Kl}_{\Psi_\tau}\geq 0$ 在 $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 上。4. $P_\tau\in\mathcal{P}(SM_n)$ 在实半正定矩阵子空间上是非负的。

证明。1. $\Rightarrow$ 2.：对于 $w_1,\dots,w_k\in\mathbb{R}^n$，命题 6.16 蕴含

$$\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi]))[iw_1,\dots,iw_k]=\frac{1}{k!}Q[\Psi](w_1,\dots,w_k)\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\exp\left(-\left\langle\sum_{j=1}^k w_k,x\right\rangle\right)dx.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Psi[\phi]\left(\sum_{k=j}^k\exp(-\langle w_i,\cdot\rangle)\right)=&k!\overline{\Psi[\phi]}(\exp(-\langle w_1,\cdot\rangle),\dots,\exp(-\langle w_k,\cdot\rangle))\\=&k!\,\mathrm{GW}(\Psi[\phi])[\exp(-\langle w_1,\cdot\rangle)\otimes\cdots\otimes\exp(-\langle w_k,\cdot\rangle)]\\=&k!\mathcal{F}(\mathrm{GW}(\Psi[\phi]))[iw_1,\dots,iw_k]\end{aligned}$$

因为极化在函数 $\exp(-\langle w_i,\cdot\rangle)$、$1\leq i\leq k$ 的其他组合上均为零。如果Ψ 是非负赋值，我们可以选取一个非负函数 $\phi\in C_c(\mathbb{R}^n)$，从而看出$Q[\Psi]$在 $(\mathbb{R}^n)^k$ 上是非负的。

2. $\Leftrightarrow$ 3.：这直接由 (6) 得出。

¯2. $\Rightarrow$ 4.：考虑 P_τ P_τ的极化即可得到：若 $S\in SM_n$ 是一个实半正定矩阵，则存在 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交归一基 e_1、……、e_n 以及 λ_1、……、$\lambda_n\geq 0$，使得 $S=\sum_{i=1}^n\lambda_i e_i\cdot e_i^T$。极化的多重线性以及 P_τ 为零这一事实

在秩小于 k 的矩阵上意味着

$$\begin{aligned} P_\tau(S) &= \sum_{|\alpha|=k} \lambda^\alpha \binom{k}{\alpha} \bar{P}_\tau(e_{\alpha_1} \cdot e_{\alpha_1}^T, \dots, e_{\alpha_k} \cdot e_{\alpha_k}^T) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \lambda^\alpha \binom{k}{\alpha} P_\tau \left(\sum_{i=1}^k e_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}^T \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{k!} \lambda^\alpha \binom{k}{\alpha} \frac{1}{k!} Q_\tau(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_k}) \geq 0 \end{aligned}$$

这里我们用到了命题 6.12 中 P_τ 与 Q_τ 之间的关系，以及 $Q_\tau = Q[\Psi]$是非负的这一事实。

4. $\Rightarrow$ 1.：命题 6.17 表明，对于 $f \in \mathsf{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$

$$\Psi_\tau(f)[B] = \int_B P_\tau(D^2 f(x)) d\,\mathrm{vol}(x) \quad \text{for all bounded Borel sets } B \subset \mathbb{R}^n.$$

如果 P_τ在半正定矩阵空间上非负，那么对于所有 $f \in \mathsf{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$， $\Psi_\tau(f)$都是非负测度；由连续性可知，对于 $\mathsf{Conv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 中的所有元素也成立。

□

推论 7.2. 每个 $\Psi \in \mathsf{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$都可以写成非负赋值的线性组合。

证明。根据推论 6.19， $Q[\Psi] \in \mathcal{M}_k^2$，也就是说， $Q[\Psi]$ 是 $(k \times k)$-子式的二次乘积的线性组合。若 Δ_α、 Δ_β 是其中两个子式，则

$$\Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta = \frac{1}{2}(\Delta_\alpha + \Delta_\beta)^2 - \frac{1}{2}(\Delta_\alpha - \Delta_\beta)^2$$

是 $(k \times k)$-子式的和的平方的线性组合。因此， $Q[\Psi]$ 可以写成 $(k \times k)$-子式的和的平方的线性组合。考虑与这些 $(k \times k)$-子式的和的平方之一对应的元素$\tilde{}\Psi \in \mathsf{MAVal}_k(\mathbb{R}^n)$，根据推论 6.21，这些元素$\tilde{}$存在。于是， $Q[\Psi]$ 是 $(k \times k)$-子式的和的平方，因此在 $(\mathbb{R}^n)^k$上非负。特别地，根据引理 7.1， $\tilde{\Psi}$ 是一个非负赋值。因此， Ψ 可以写成非负赋值的线性组合。

□

命题 7.3. $\Psi \in \mathsf{MAVal}(\mathbb{R}^n)$ 非负，当且仅当其齐次分量均非负。

证明. 将 $\Psi = \sum_{k=0}^n \Psi_k$ 分解为齐次分量。如果齐次分量 Ψ_k 非负，那么 Ψ显然非负。反过来，首先注意到 Ψ_0 是常数，且

$$\Psi_0(0) = \Psi(0)$$

是一个非负测度。对于 $1 \leq k \leq n$，根据引理 7.1，只需证明 Kl^{Ψ_k} 是非负的。命题 5.2 表明，Kl^{Ψ_k} 是非负的，当且仅当 Ψ_k 在定义于 k 维子空间 $E \in \mathsf{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 上的函数的所有拉回上均为非负。对于

$f \in$ 凸函数$(E, \mathbb{R})$,

$$\Psi(\pi_E^* f) = \sum_{i=0}^{k} \Psi_i(\pi_E^* f),$$

因为 $\Psi_l, k+1 \leq l \leq n$ 在定义于维数小于 l 的子空间上的函数的拉回上为零。根据假设，对于所有 $t > 0$， $\Psi(t\pi_E^* f)$ 都是非负测度，因此对于所有有界博雷尔集 $B \subset \mathbb{R}^n$

$$0 \leq \frac{1}{t^k}\Psi(t\pi_E^* f)[B] = \Psi_k(\pi_E^* f)[B] + \frac{1}{t^k}\sum_{i=0}^{k-1} t^i \Psi_i(\pi_E^* f)[B] \quad \text{for } t > 0,$$

通过取极限 $t \to \infty$，可推出 $\Psi_k(\pi_E^* f)[\phi] \geq 0$。因此， $\Psi_k(\pi_E^* f)$ 是一个非负测度。

□

参考文献

[1] Semyon Alesker. 凸集上平移不变赋值的描述及 P. McMullen 猜想的解答. Geom. Funct. Anal., 11(2):244–272, 2001.[2] Semyon Alesker. 凸集上的赋值、非交换行列式与多重势理论. Adv. Math., 195(2):561–595, 2005.[3] Semyon Alesker. 凸函数和凸集上的赋值与 Monge-Amp`ere 算子. Adv. Geom., 19(3):313–322, 2019.[4] Semyon Alesker, Andreas Bernig, and Franz E. Schuster. 平移不变赋值的调和分析. Geom. Funct. Anal., 21(4):751–773, 2011.[5] Semyon Alesker and Dmitry Faifman. 洛伦兹群不变的凸赋值. J. Differential Geom., 98(2):183–236, 2014.[6] Semyon Alesker and Joseph H. G. Fu. 流形上的赋值理论. III. 一般情形下的乘法结构. Trans. Amer. Math. Soc., 360(4):1951–1981, 2008.[7] Yuliy Baryshnikov, Robert Ghrist, and Matthew Wright. 可定义函数的 Hadwiger定理. Adv. Math., 245:573–586, 2013.[8] Andreas Bernig and Ludwig Br¨ ocker. 流形上的赋值与 Rumin上同调. J. Differential Geom., 75(3):433–457, 2007.[9] Andreas Bernig and Joseph H. G. Fu. 厄米积分几何. Ann. of Math. (2), 173(2):907–945, 2011.[10] Andreas Bernig, Joseph H. G. Fu, and Gil Solanes. 复空间形式的积分几何. Geom. Funct. Anal., 24(2):403–492, 2014.[11] K´aroly J. B¨or¨oczky and Monika Ludwig. 格多面体上的 Minkowski赋值. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 21(1):163–197, 2019.

[12] Andrea Colesanti and Daniel Hug. 半凸函数的 Steiner 型公式与奇异性的加权测度. Trans. Amer. Math. Soc., 352(7):3239–3263, 2000.[13] Andrea Colesanti and Daniel Hug. 凸函数的 Hessian 测度及其在面积测度中的应用. J. London Math. Soc. (2), 71(1):221–235, 2005.[14] Andrea Colesanti, Monika Ludwig, and Fabian Mussnig. 凸函数上的 Hadwiger 定理. I. arXiv:2009.03702, 2020.[15] Andrea Colesanti, Monika Ludwig, and Fabian Mussnig. 凸函数上赋值的齐次分解定理. 《泛函分析杂志》, 279(5):108573, 25, 2020.[16] Andrea Colesanti, Monika Ludwig, and Fabian Mussnig. 凸函数上的 Hadwiger 定理. II. arXiv:2109.09434, 2021.[17] Andrea Colesanti, Monika Ludwig, and Fabian Mussnig. 凸函数上的 Hadwiger 定理，III：Steiner 公式与混合 Monge-Amp`ere 测度. Calc. Var. Partial Differential Equations, 61(5):Paper No. 181, 37, 2022.[18] Andrea Colesanti, Monika Ludwig, and Fabian Mussnig. 凸函数上的 Hadwiger 定理，IV：Klain 方法. Adv. Math., 413:Paper No. 108832, 2023.[19] Andrea Colesanti, Daniele Pagnini, Pedro Tradacete, and Ignacio Villanueva. Lip(S^{n-1}) 上的一类不变赋值. Adv. Math., 366:107069, 37, 2020.[20] Andrea Colesanti, Daniele Pagnini, Pedro Tradacete, and Ignacio Villanueva. 球面上 Lipschitz 函数空间的连续赋值. 《泛函分析杂志》, 280(4):Paper No. 108873, 43, 2021.[21] Alessio Figalli. 关于 Monge-Amp`ere 方程. Ast ´erisque, (414, S´eminaire Bourbaki. Vol. 2017/2018. Expos´es 1136–1150):Exp. No. 1148, 477–503, 2019.[22] Joseph H. G. Fu. Monge-Amp`ere 函数. I, II. Indiana Univ. Math. J., 38(3):745–771, 773–789, 1989.[23] Paul Goodey and Wolfgang Weil. 分布与赋值. 《伦敦数学会会报》 (3), 49(3):504–516, 1984.[24] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. 对称性、表示与不变量，数学研究生教材第255卷. Springer, Dordrecht, 2009.[25] Christoph Haberl and Lukas Parapatits. 矩与赋值. 《美国数学杂志》, 138(6):1575–1603, 2016.[26] Christoph Haberl and Lukas Parapatits. 中心仿射张量赋值. Adv. Math., 316:806–865, 2017.[27] Hugo Hadwiger. 关于内容、表面积与等周问题的讲义. Springer-Verlag, 柏林-G ¨ottingen-Heidelberg, 1957.[28] Georg C. Hofst¨atter and Jo nas Knoerr. 凸函数的等变自同态. 《泛函分析杂志》, 285(1):109922, 2023.

[29] Daniel Huybrechts. 复几何. Universitext. Springer-Verlag, 柏林, 2005.[30] Robert L. Jerrard. 与Monge-Amp`ere函数相关的一些刚性结果. 加拿大数学杂志, 62(2):320–354, 2010.[31] B. Ja. Kazarnovskiĭ. 指数和的零点. 苏联科学院通报, 257(4):804– 808, 1981.[32] B. Ya. Kazarnovskiĭ. 牛顿多面体与指数和系统的根. Funk- tsional. Anal. i Prilozhen., 18(4):40–49, 96, 1984.[33] Daniel A. Klain. Hadwiger 刻画定理的一个简短证明. Mathematika, 42(2):329–339, 1995.[34] Jonas Knoerr. 凸函数上的光滑赋值. 即将发表于 J. Differential Geom., arXiv:2006.12933, 2020.[35] Jonas Knoerr. 对偶上图平移不变赋值在凸函数上的支集. 《泛函分析杂志》, 281(5):Paper No. 109059, 52, 2021.[36] Jonas Knoerr. 凸函数上的酉不变赋值. arXiv:2112.14658, 2021.[37]Jonas Knoerr. 凸函数上的奇异赋值与 Hadwiger 定理. arXiv:2209.05158, 2022.[38] Jonas Knoerr and Jacopo Ulivelli. 从凸体上的赋值到凸函数. arXiv:2301.10049, 2023.[39] Monika Ludwig. 椭球与矩阵值赋值. 《杜克数学杂志》, 119(1):159–188, 2003.[40]Monika Ludwig. 费歇尔信息与矩阵值赋值. Adv. Math., 226(3):2700–2711, 2011.[41] Monika Ludwig. Sobolev 空间上的赋值. 《美国数学杂志》, 134(3):827–842, 2012.[42] Monika Ludwig. 协方差矩阵与赋值. Adv. in Appl. Math., 51(3):359–366, 2013.[43] Monika Ludwig and Matthias Reitzner. S[43] (n)不变赋值的分类. Ann. of Math. (2), 172(2):1219–1267, 2010.[44] Monika Ludwig and Laura Silverstein. 格多面体上的张量赋值. Adv. Math., 319:76–110, 2017.[45] P. McMullen. 某些类凸多面体上的赋值与欧拉型关系. 《伦敦数学会会报》 (3), 35(1):113–135, 1977.[46] Ezra Miller and Bernd Sturmfels. 组合交换代数, 数学研究生教材第227卷. Springer-Verlag, 纽约, 2005.[47] Fabian Mussnig. 凸函数的体积、极体积和欧拉示性数. Adv. Math., 344:340–373, 2019.

[48] R. Tyrrell Rockafellar. 凸分析. 普林斯顿数学经典. 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿，新泽西州, 1997. 1970年原版重印，普林斯顿平装书系列.[49]R. Tyrrell Rockafellar and Roger J.-B. Wets. 变分分析，数学科学基础丛书第317卷 *[*数学科学基本原理*]*. Springer-Verlag, 柏林, 1998.[50] Rolf Schneider. 凸体：Brunn-Minkowski理论，数学及其应用百科全书第151卷. 剑桥大学出版社, 剑桥, 扩充版, 2014.[51] Pedro Tradacete and Ignacio Villanueva. Banach格上的赋值. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2020(1):287–319, 2020.[52] Neil S. Trudinger and Xu-Jia Wang. Hessian 测度. I. Topol. Methods Nonlinear Anal., 10(2):225–239, 1997.[53] Neil S. Trudinger and Xu-Jia Wang. Hessian 测度. II. Ann. of Math. (2), 150(2):579– 604, 1999.[54] Neil S. Trudinger and Xu-Jia Wang. Monge-Amp`ere方程及其几何应用. 载于《几何分析手册》第1卷，第7卷《Adv. Lect. Math. (ALM)》，第467–524页. Int. Press, Somerville, MA, 2008.[55] Andy Tsang. L^p 空间上的Minkowski赋值. Trans. Amer. Math. Soc., 364(12):6159– 6186, 2012.[56] Thomas Wannerer. 酉面积测度的积分几何. Adv. Math., 263:1–44, 2014.[57] Thomas Wannerer. 酉不变面积测度的模. J. Differential Geom., 96(1):141–182, 2014.[58] Shing Tung Yau. 关于紧致K¨ahler流形的Ricci曲率及复Monge-Amp`ere方程. I. Comm. Pure Appl. Math., 31(3):339–411, 1978.

Jonas Knoerr, Institute of Discrete Mathematics and Geometry, TU Wien, Wiedner Haupt-strasse 8-10, 1040 Wien, Austria*E-mail address*: jonas.knoerr@tuwien.ac.at