arXiv:2303.16032v1 [math.AT] 28 Mar 2023

范畴关系的 Dowker 对偶

Morten Brun[1], Marius G˚ardsmann Fosse[1], 和 LarsM. Salbu[11]数学系，卑尔根大学。

2023年3月

摘要

我们提出关系的 Dowker对偶定理的一种范畴化。Dowker定理指出，集合 X 和 Y之间某个关系$R \subseteq X \times Y$的 Dowker复形，与其转置关系 $R^T \subseteq Y \times X$的 Dowker复形同伦等价。给定小范畴 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$之间的关系 R，即一个形如 $R\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$的函子，我们定义 $bisimplicial\ rectangle\ nerve\ ER$ 和 $Dowker\ nerve\ DR$。双单纯集合 ER 的对角线 $d(ER)$通过自然投影 $d(\pi_R)\colon d(ER) \to DR$映射到单纯集合 DR。

我们提出一个关于范畴关系的判据，以确保从双单纯矩形神经的对角线到 Dowker 神经的投影是弱等价。满足该判据的关系称为 $Dowker\ relations$。如果范畴关系 R 及其转置关系 R^T 都是 Dowker 关系，那么 Dowker 神经 DR和 DR^T 是弱等价的单纯集合。

为了论证我们的范畴化所引入的抽象概念，我们给出两个应用。第一个应用是说明，Quillen 定理 A 可以被视为 Dowker 对偶的一个实例。在第二个应用中，我们考察一个具有顶点集 V 的单纯复形 K，并证明 K 的几何实现与这样一个单纯集合的几何实现自然同伦等价：该单纯集合的 n-单纯形集由满足其像为 K 的单纯形的函数 $\{0, 1, \ldots, n\} \to V$ 给出。

1 引言

在1952年的论文《关系的同调群》[6] 中，C.H. Dowker 将一个抽象单纯复形 $D(R)$ 与从集合 X 到集合 Y的一个关系 $R \subseteq X \times Y$ 联系起来。$D(R)$ 的顶点集是集合 X，并且 σ 的X 的一个子集是 $D(R)$ 中的单纯形，当且仅当存在一个元素 $y \in Y$ 使得$\sigma \times \{y\} \subseteq R$。Dowker定理 [6,（定理1a，第 89] 页）指出，Dowker复形 $D(R)$ 的同调群与转置关系 $R^T \subseteq Y \times X$ 的 Dowker复形 $D(R^T)$ 的同调群同构；该转置关系由满足 $(x, y) \in R$的有序对 (y, x) 组成。

在介绍我们对 Dowker对偶定理的范畴化之前，我们先简要回顾其历史。在 [1, 定理10.9] Bj¨orner 通过构造一个显式的同伦等价 φ_R: $|D(R)| \to |D(R^T)|$，证明了单纯复形 $D(R)$ 和 $D(R^T)$ 具有同伦等价的几何实现。给定从 X 到 Y的关系的一个包含 $R \subseteq S$，Chowdhury 和 M´emoli [4, 定理 3] 表明，图表

$$\begin{array}{ccc} |D(R)| & \xrightarrow{\varphi_R} & |D(R^T)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |D(S)| & \xrightarrow{\varphi_S} & |D(S^T)| \end{array}$$

在同伦意义下交换，从而得到函子性Dowker定理。在 [10, 定理 5.2] 中，Virk 将这一结果扩展到了关系 $R \subseteq X \times Y$和 $R' \subseteq X' \times Y'$的态射 f: $R \to R'$，该态射由一对函数 f_1: $X \to X'$和f_2: $Y \to Y'$给出，其中函数 $f_1 \times f_2$: $X \times Y \to X' \times Y'$ 将 R的像包含于 R'中。Brun 和 Salbu 在 [2] 中通过引入关系 $R \subseteq X \times Y$的矩形复形 $E(R)$，给出了函子性Dowker定理的另一种证明。赋值 $R \mapsto E(R)$是一个函子，它将具有上述形式态射的关系范畴映至单纯复形范畴。投影 $X \times Y \to X$ 诱导出自然映射 $E(R) \to D(R)$，而投影 $X \times Y \to Y$诱导出自然映射 $E(R) \to D(R^T)$。函子性Dowker定理的证明是通过说明这些映射的几何实现是同伦等价来完成的。

本文考察从小范畴 $\mathcal{C}$ 到小范畴 $\mathcal{D}$的关系 R，也就是说，形如 R: $\mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$的函子。这类函子通常称为跨度，但受 Dowker 的工作启发，我们称之为范畴关系。本文旨在为这类关系提出一个版本的 Dowker定理。

给定一个关系 R: $\mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$，我们引入双单纯矩形神经 ER。它是一个双单纯集合，其集合 $ER_{m,\,n}$ 中的（m,n）-单纯形由形如 r: $[m] \times [n] \to \mathcal{R}$ 的函子构成，并满足存在函子 a: $[m] \to \mathcal{C}$和 b: $[n] \to \mathcal{D}$使得 $R \circ r = a \times b$。这里，$[m]$是视为范畴的全序集 $\{0 < 1 < \cdots < m\}$。若这类函子 a 和 b 存在，则它们唯一确定。这意味着存在一个映射 π_R: $ER_{m,\,n} \to N\mathcal{C}_m$，将其映入 m的神经的 m-单纯形 $N\mathcal{C}_m$中，并将上述 r 映为 $\pi_R(r) = a$。在此背景下，Dowker 神经 DR 是 $N\mathcal{C}$ 的单纯子集，其 m-单纯形由映射π_R: $ER_{m,\,0} \to N\mathcal{C}_m$的像给出。双单纯矩形神经是我们对 [2]的矩形复形所作的范畴化。我们在第 4 节证明主要结果。为陈述这些结果，我们需要该节中的两个定义。

定义 4.1. 给定 $a \in N\mathcal{C}_m$，即函子 a: $[m] \to \mathcal{C}$，π_R^a在 π_R 下的纤维是单纯集合$[n] \mapsto ER_{m,\,n}$ 的单纯子集，由满足存在函子 b: $[n] \to \mathcal{D}$使得$R \circ r = a \times b$ 的函子 r: $[m] \times [n] \to \mathcal{R}$组成。

定义 4.2. Dowker 关系是一个关系 R: $\mathcal{R} \to \mathcal{C}\times\mathcal{D}$，具有如下性质：对于每个 $a \in N\mathcal{C}_m$， π_R^a 在 π_R 下的纤维 a 是可缩的或为空。

关系 R: $\mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 的转置关系 R^T 是 R 与交换同构 tw : $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$ 的复合 tw $\circ R$: $\mathcal{R} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$。存在一个同构 tw* : $ER_{m,\,n} \to ER^T_{n,\,m}$，它将 r: $[m]\times[n] \to \mathcal{R}$ 映至 tw 与 tw : $[n]\times[m] \to [m]\times[n]$ 和 r 的复合 $r\circ$。 ER 的对角单纯集合$d(ER)$ 是一个单纯集合，其 n-单纯形由集合 $d(ER)_n = ER_{n,\,n}$ 给出。

定理 4.5（Dowker 等价）。若 R 是 Dowker 关系，则投影映射

$$\pi_R \colon ER_{m,n} \to DR_m$$

诱导出单纯集合的一个弱等价 $d(\pi_R)$: $d(ER) \to DR$。

在第 2 节中，我们引入关系态射。以下是道克对偶定理的一个版本：

定理 4.6（Dowker 对偶）。给定一个范畴关系的态射 f： $R \to R'$，存在如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} DR & \xleftarrow{d(\pi_R)} & d(ER) & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R^T})} & DR^T \\ {\scriptstyle Df}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d(Ef)} & & \downarrow{\scriptstyle d(Ef^T)} & & \downarrow{\scriptstyle Df^T} \\ DR' & \xleftarrow{d(\pi_{R'})} & d(ER') & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER'^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R'^T})} & DR'^T. \end{array}$$

如果关系 R、 R^T、 R' 和 R'^T 都是 Dowker 关系，那么该图中的所有水平映射都是单纯集合的弱等价。

我们以范畴关系的两个应用结束本文。给定形如 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ 和 G: $\mathcal{D} \to \mathcal{A}$ 的函子，投影 R: $F \downarrow G \to \mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 将逗号范畴 $F \downarrow G$ 的一个对象（c， d， f）映射到（c， d），它是一个关系。我们证明，如果对于 $\mathcal{D}$ 的每个对象 d，范畴 $F \downarrow d$ 的神经都是可缩的，那么 R 是一个 Dowker 关系。利用这一点，我们基本上重新得到了 Quillen 对其定理 A [9, 定理 A] 的原始证明。

作为第二个应用，我们证明，单纯复形 K 的几何实现与奇异复形 Sing(K) 的几何实现自然同伦等价；Sing(K) 是按如下方式定义的单纯集合：设 K 的顶点集为 V。Sing(K) 的 m-单纯形集合是所有函数 $\{0, 1, \ldots, m\} \to V$ 的集合，其中其像是 K 中的一个单纯形。

赋值 $K \mapsto$ Sing(K) 是一个从单纯复形范畴到单纯集合范畴的函子。Sing(K) 的几何实现远大于 K 的几何实现。还有其他更小的单纯集合，可以捕捉 K 的几何实现的同伦类型。一个例子是范畴 $K_\subseteq$ 的神经 $N(K_\subseteq)$，其中该范畴由 K 给出，并将其视为关于包含关系的偏序集。赋值 $K \mapsto N(K_\subseteq)$ 也是一个函子，并具有这样一个便利性质：其几何

实现 K 与 $N(K_{\subseteq})$ 自然同胚。这个函子既没有左伴随函子，也没有右伴随函子。相比之下，奇异复形 $K \mapsto$Sing(K) 具有一个左伴随函子。

K 与 Sing(K) 的几何实现同伦等价，这一事实在拓扑学中广为人知，但据我们所知，迄今尚未发表在同行评审论文中。Omar Antol´ın Camarena [3], 在其个人网页上发表了这一事实的两种证明，但同伦等价的自然性有所欠缺，因为两种证明都使用了 K的顶点集上的一个选定次序。

本文组织如下：第 2 节给出关于（双）单纯集合的预备定义，并引入范畴关系。第 3 节定义双单纯矩形神经；在第 4 节中，我们利用它证明 Dowker 等价和 Dowker 对偶定理。第 5 节讨论 Dowker 神经的同伦，最后在第 6 节介绍前两节中所述主要结果的两个应用。

2 双单纯集合与范畴关系

本节回顾单纯集合和双单纯集合的定义（详情请参阅 [7]），并引入范畴关系的概念。

令 $[n]$ 为一个范畴，其对象集为 $\{0, 1, ..., n\}$，且当 $i \leq j$时存在唯一态射 $i \to j$。注意，函子 $[m] \to [n]$ 等同于从集合 $\{0, 1, ..., m\}$ 到集合 $\{0, 1, ..., n\}$ 的保序映射。单纯形范畴 Δ 的对象集由范畴 $[n]$（ $n \geq 0$）组成。 Δ中的态射是这些范畴之间的函子。

将区间 $[0, 1]$ 视为 $\mathbb{R}$的子空间。给定整数 $n \geq 0$，几何 n-单纯形是 $[0, 1]^{n+1}$ 的子空间 Δ^n ，由坐标和为 1 的元组$t = (t_0, \ldots, t_n)$组成。用$e_0, \ldots, e_n$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$的标准基，我们可以写作 $t = t_0 e_0 + \cdots + t_n e_n$。令 Top 表示拓扑空间范畴。存在一个函子 $\Delta \to$ Top, $[n] \mapsto \Delta^n$ ，它将保序映射 $f\colon [m] \to [n]$ 映为仿射映射 $f_*\colon \Delta^m \to \Delta^n$ ，满足 $f_*(e_i) = e_{f(i)}$，其中 $i = 0, 1, \ldots, m$。

单纯集合是一个函子 $Y\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to$ Set，它从单纯形范畴的对偶范畴映射到集合范畴，并将 $[n]$ 映射为由 n 个单纯形组成的集合 Y_n 。单纯集合范畴中的态射称为单纯映射，它们是函子 $\Delta^{\mathrm{op}} \to$Set 之间的自然变换。我们用 $\mathcal{S}$ 表示由单纯集合和单纯映射构成的范畴。

单纯集合 Y 的几何实现 $|Y|$ 是由余等化子图表给出的拓扑空间

$$\coprod_{[m],[n]} Y_n \times \Delta([m], [n]) \times \Delta^m \rightrightarrows \coprod_{[n]} Y_n \times \Delta^n \to |Y|,$$

其中，两个平行的水平映射分别将 $(y, f, t) \in Y_n \times \Delta([m], [n]) \times \Delta^m$ 映射到 $(Y(f)y, t)$ 和 $(y, f_*(t))$。单纯映射 $\phi\colon Y \to Y'$ 称为

若诱导映射 $|\phi|\colon |Y| \to |Y'|$ 在几何实现上（见 [7, I.2]）是同伦等价，则称其为弱等价。

双单纯集合是一个函子 $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$，将元组 $([m],[n])$ 映到集合 $X_{m,\,n}$ 其中的元素是 (m,n)-单纯形。与单纯集合一样，双单纯映射 $\phi : X \to X'$ 是自然变换。我们用 $\mathcal{S}^2$ 表示双单纯集合及双单纯映射所构成的范畴。

从小范畴 $\mathcal{C}$ 到小范畴 $\mathcal{D}$ 的（范畴）关系是一个形如 $R\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 的函子。范畴关系态射 $f\colon R \to R'$，从 $R\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 到 $R'\colon \mathcal{R}' \to \mathcal{C}' \times \mathcal{D}'$，由函子 $f_0\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$、$f_1\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 和 $f_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 组成，使得 $(f_1 \times f_2) \circ R = R' \circ f_0$。我们用 $\mathbf{Rel}$ 表示范畴关系范畴。

给定两个范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，交换同构

$$\mathrm{tw}\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$$

是将对象 (c,d) 映射为 (d,c)、将态射 (γ,δ) 映射为 (δ,γ) 的函子。对于一个范畴关系 $R\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$，其转置关系 $R^T\colon \mathcal{R} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$是 R 与交换同构 tw 的复合 $R^T = R \circ \mathrm{tw}$。转置函子 $T\colon \mathbf{Rel} \to \mathbf{Rel}$ 是函子 $R \mapsto R^T$。

3 双单纯矩形神经

本节介绍关系的双单纯矩形神经。这是一个在某种意义上关于转置对称的双单纯集合。

定义 3.1。设 $R\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 是一个关系。双单纯矩形神经 ER 是这样一个双单纯集合：其 (m,n)-单纯形是函子 $r\colon [m] \times [n] \to \mathcal{R}$，并且存在一对必然唯一的函子 $(a\colon [m] \to \mathcal{C}, b\colon [n] \to \mathcal{D})$，使得 $a \times b = R \circ r$，也就是说，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} [m]\times[n] & & \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \searrow^{a\times b} & \\ \mathcal{R} & \xrightarrow{R} & \mathcal{C}\times\mathcal{D}. \end{array}$$

如果 $\alpha\colon [m'] \to [m]$ 和 $\beta\colon [n'] \to [n]$ 是保序映射，那么 $ER(\alpha,\beta)\colon ER_{m,\,n} \to ER_{m',\,n'}$ 将 (m,n)-单纯形 r 映射为 (m',n')-单纯形 $r\circ(\alpha\times\beta)$。

双单纯矩形神经中的单纯形 $r\colon [m] \times [n] \to \mathcal{R}$ 随后可以被视为从 $a \times b\colon [m] \times [n] \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 到 $\mathcal{R}$的矩形映射的提升。这就是“双单纯矩形神经”这一名称的由来。

令 $f\colon R \to R'$ 为由关系 $R\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 和 $R'\colon \mathcal{R}' \to \mathcal{C}' \times \mathcal{D}'$，以及函子 $f_0\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$、$f_1\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 和 $f_2\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 给出的关系态射。存在一个双单纯映射 $Ef\colon ER \to ER'$，将 ER 的一个 (m,n)-单纯形 r 映射到 ER' 的 (m,n)-单纯形 $f_0 \circ r$。直接检查可知，赋值 $f \mapsto Ef$ 给出了一个函子 $E\colon \mathbf{Rel} \to \mathcal{S}^2$。

与扭转同构 tw: $\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}}$ 进行前合成给出一个函子 $\tau : \mathcal{S}^2 \to \mathcal{S}^2$。具体而言，对于 $X \in \mathcal{S}^2$，双单纯集合 τX 是复合函子

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{tw}} \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathtt{Set},$$

和 $\tau X_{m,n} = X_{n,m}$。

若 R 是一个关系，则 $r : [m] \times [n] \to \mathcal{R}$ 是 $ER_{m,n} = \tau ER_{n,m}$中的一个单纯形，当且仅当复合

$$[n] \times [m] \xrightarrow{\mathrm{tw}} [m] \times [n] \xrightarrow{r} \mathcal{R}$$

属于 $ER^T_{n,m}$。这些映射给出一个双射双单纯映射 $\mathrm{tw}^* : \tau ER \to ER^T$，它将 $r \in ER_{m,n}$ 映至 $r \circ \mathrm{tw}$。它具有自然性：给定一个态射$f : R \to R'$，有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \tau ER & \xrightarrow{\mathrm{tw}^*} & ER^T \\ \downarrow{\scriptstyle \tau Ef} & & \downarrow{\scriptstyle Ef^T} \\ \tau ER' & \xrightarrow{\mathrm{tw}^*} & ER'^T. \end{array}$$

我们将上述讨论总结为以下引理：

引理 3.2。映射 $\mathrm{tw}^* : \tau E \to ET$是一个自然同构。 □

接下来，我们考虑对角函子

$$\mathrm{diag} : \Delta^{\mathrm{op}} \to \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}}$$

其中，$\mathrm{diag}([n])$ 在对象上为 $= ([n], [n])$，在态射上为 $\mathrm{diag}(\alpha) = (\alpha, \alpha)$ [7,p.197]。通过与 diag 预复合，可得到函子 $d : \mathcal{S}^2 \to \mathcal{S}$，它将双单纯集合 X 映射为其对角单纯集合 $d(X) := X \circ \mathrm{diag}$，其 n-单纯形$d(X)_n$ 为$X_{n,\,n}$。

注意，该图表

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathrm{diag}} & \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \\ & \searrow^{\mathrm{diag}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{tw}} \\ & & \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \end{array}$$

是交换的。由于对角函子 d 和函子 τ 分别由与 diag 和 tw 预复合定义，因此我们有：

引理 3.3。若 R 是范畴关系，则 $d(ER) = d(\tau ER)$。 □

结合引理 3.3 和引理 3.2，可得：

引理 3.4。映射 $\mathrm{tw}^* : \tau E \to ET$ 诱导出一个自然同构 $d(\mathrm{tw}^*) : dE \to dET$。

4 函子性的 Dowker 对偶定理

在本节中，我们终于引入范畴关系的 Dowker 神经，并陈述函子性的 Dowker 对偶定理的版本。我们已将双单纯矩形神经定义为

$$ER_{m,n} = \{r\colon [m]\times[n]\to\mathcal{R} \mid R\circ r \text{ is of the form } a\times b\colon [m]\times[n]\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}\}\,.$$

小范畴 $\mathcal{C}$ 的神经是单纯集合 $N\mathcal{C}$，其 m-单纯形是从 $[m]$ 到 $\mathcal{C}$的函子，即 $N\mathcal{C}_m = \mathsf{Cat}([m],\mathcal{C})$。

注意，给定 $r\in ER_{m,\,n}$ 满足 $R\circ r = a\times b\colon\ [m]\times[n]\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$，函子 $a\colon [m]\to\mathcal{C}$ 和 $b\colon\ [n]\to\mathcal{D}$ 由积的泛性质唯一确定。特别地，存在一个函数 $\pi_R\colon ER_{m,\,n}\to N\mathcal{C}_m$其定义为 $\pi_R(r) = a$，其中 $a\in N\mathcal{C}_m$ 满足 $R\circ r = a\times b\colon\ [m]\times[n]\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$。

定义 4.1. 给定 $a\in N\mathcal{C}_m$，即函子 $a\colon\ [m]\to\mathcal{C}$，$\pi_R^a$在 π_R 下的 a 的纤维是单纯集合 $[n]\mapsto ER_{m,\,n}$ 的单纯子集，由满足存在函子 $b\colon\ [n]\to\mathcal{D}$ 且满足 $R\circ r = a\times b$的函子 $r\colon\ [m]\times[n]\to\mathcal{R}$ 组成。

为了陈述 Dowker 对偶的版本，我们引入 Dowker 关系的概念。

定义 4.2。Dowker 关系是一个关系 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$，具有如下性质：对于每个 $a\in N\mathcal{C}_m$，π_R 下 a 的纤维 π_R^a 都是可缩的或为空。

在第 6 节中，我们考察具体的 Dowker 关系，其中一类见推论 6.4。

定义 4.3。关系 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 的 Dowker 神经是单纯集合 DR，其 m-单纯形的集合 DR_m 是映射 $\pi_R\colon ER_{m,\,0}\to N\mathcal{C}_m$ 的像。

设 $f\colon\ R\to R'$ 是由关系 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 和 $R'\colon\ \mathcal{R}'\to\mathcal{C}'\times\mathcal{D}'$，以及函子 $f_0\colon \mathcal{R}\to\mathcal{R}'$、$f_1\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ 和 $f_2\colon\ \mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ 给出的关系态射。赋值 $a\mapsto Df(a) = f_1\circ a$ 定义了一个单纯映射 $Df\colon\ DR\to DR'$，因此我们得到一个函子 $D\colon\ \mathsf{Rel}\to\mathcal{S}$。

注记 4.4。m-单纯形 DR_m 包含 π_R的像：$ER_{m,\,n}\to N\mathcal{C}_m$对所有 $n\geq 0$均成立。对于映射 π_R，若其陪域取为 DR_m而非 $N\mathcal{C}_m$，我们也记作 $\pi_R\colon ER_{m,\,n}\to DR_m$。固定 m 后，我们得到单纯集合 X 和 Y，其中 $X_n := ER_{m,\,n}$，而 $Y_n := DR_m$ 是一个常值单纯集合。由于常值单纯集合的连通分支[1] 由零单纯形的退化单纯形给出，关系 R 是 Dowker 关系，当且仅当单纯映射 $\pi\colon X\to Y$是弱等价；该映射在 n-单纯形上的作用为 $\pi_R\colon ER_{m,\,n}\to DR_m$。

[1]单纯集合 X 的连通分支就是多重图 $X_1\rightrightarrows X_0$的图分支。

定理 4.5（Dowker 等价）。若 R 是一个 Dowker 关系，则投影映射

$$\pi_R \colon ER_{m,n} \to DR_m$$

诱导出单纯集合的弱等价 $d(\pi_R)\colon\ d(ER) \to DR$。

证明。固定 $m \geq 0$，令 A 为满足 $A_n = ER_{m,\ n}$ 的单纯集合，并将 DR_m 视为常值单纯集合。根据我们对 R 的假设，单纯映射 $A \to DR_m$ 是弱等价；它在 n-单纯形上的映射为 $\pi_R\colon ER_{m,\ n} \to DR_m$。令 B 为双单纯集合 $B_{m,\ n}$，它在一个方向上是常值的，并将 $\pi_R\colon ER_{m,\ n} \to DR_m$ 视为双单纯映射 $\pi_R\colon\ ER \to B$。根据归于 Tornehave 的 [7, 命题 IV.1.7], ，投影映射 π_R 诱导出对角线的弱等价。也就是说，映射 $d(\pi_R)\colon\ d(ER) \to d(B) = DR$ 是弱等价。□

现在我们利用定理 4.5，证明一个关于范畴关系的函子性的 Dowker 对偶定理。考虑左投影函子

$$\mathrm{P} \colon \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \to \Delta^{\mathrm{op}}$$

将对象（$[m]$，$[n]$）映射到 $[m]$，并将态射（α，β）映射到 α。我们考虑函子 $\mathrm{p}\colon\ \mathcal{S} \to \mathcal{S}^2$，它将单纯集合 $Y\colon\ \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathtt{Set}$ 映射到复合函子

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \mathrm{P}\ } \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ Y\ } \mathtt{Set}.$$

注意，P∘diag 是恒等映射，因此我们有 $d(\mathrm{p}(Y)) = Y$。

存在一个自然变换 $\pi\colon\ E \to \mathrm{p}D$，使得 $\pi_R\colon\ ER \to \mathrm{p}DR$ 将 $r\colon [m] \times [n] \to \mathcal{R}$（满足 $R \circ r = a \times b$）映射到 a。这意味着，对于每个关系态射 $f\colon R \to R'$，都有一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} ER & \xrightarrow{\ \pi_R\ } & \mathrm{p}DR \\ {\scriptstyle Ef}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{p}Df} \\ ER' & \xrightarrow{\ \pi_{R'}\ } & \mathrm{p}DR'. \end{array} \tag{1}$$

对于转置态射 $f^T\colon\ R^T \to R'^T$，我们得到一个交换方形

$$\begin{array}{ccc} ER^T & \xrightarrow{\ \pi_{R^T}\ } & \mathrm{p}DR^T \\ {\scriptstyle Ef^T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{p}Df^T} \\ ER'^T & \xrightarrow{\ \pi_{R'^T}\ } & \mathrm{p}DR'^T. \end{array} \tag{2}$$

这样，我们也可以将 π 视为一个自然变换 $\pi\colon\ ET \to \mathrm{p}DT$。

定理 4.6（Dowker 对偶）。给定一个范畴关系的态射 $f\colon\ R \to R'$，存在如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} DR & \xleftarrow{d(\pi_R)} & d(ER) & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R^T})} & DR^T \\ {\scriptstyle Df}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d(Ef)} & & \downarrow{\scriptstyle d(Ef^T)} & & \downarrow{\scriptstyle Df^T} \\ DR' & \xleftarrow{d(\pi_{R'})} & d(ER') & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER'^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R'^T})} & DR'^T. \end{array}$$

如果关系 R、R^T、R' 和 R'^T 都是 Dowker 关系，那么图中的所有水平映射都是单纯集合的弱等价。

证明。将对角线 d 应用于交换方形 (1) 和 (2)，并结合引理 3.4，可知该图交换。由引理 3.4，标记为 d(tw*) 的映射是同构。关于弱等价的结论现在是定理 4.5 的直接推论。 □

5 Dowker 神经与同伦

我们考察在取 Dowker 神经时会诱导同伦的范畴关系的态射。

为了讨论同伦，我们需要定义关系的积。设$R\colon\ \mathcal{R}\ \to\ \mathcal{C}\ \times\ \mathcal{D}$ 和 $R'\colon\ \mathcal{R}'\ \to\ \mathcal{C}'\ \times\ \mathcal{D}'$ 是范畴关系。我们有投影 $\pi_{\mathcal{C}}\colon\ \mathcal{C}\ \times\ \mathcal{D}\ \to\ \mathcal{C}$ 和 $\pi_{\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{C}\ \times\ \mathcal{D}\ \to\ \mathcal{D}$。Rel 中的积$R\times R'$ 是关系 $\mathcal{R}\times\mathcal{R}'\to(\mathcal{C}\times\mathcal{C}')\times(\mathcal{D}\times\mathcal{D}')$，它将 (x,x') 映射为 $((\pi_{\mathcal{C}}R(x)\ \pi_{\mathcal{C}'}R'(x')),(\pi_{\mathcal{D}}R(x)\ \pi_{\mathcal{D}'}R'(x')))$。到第一因子和第二因子的投影给出了该积的两个结构映射。

引理 5.1. 函子 $D\colon\ \mathit{Rel}\to\mathcal{S}$ 保持积，因此给定范畴的两个关系 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 和 $R'\colon\ \mathcal{R}'\to\mathcal{C}'\times\mathcal{D}'$，到$R$ 和 R' 上的投影诱导出一个同构 $D(R\times R')\ \xrightarrow{\cong} D(R)\times D(R')$。

证明。一个单纯形 $r\in DR_m$ 是一个映射 $r\colon\ [m]\times[0]\to\mathcal{R}$，具有如下性质：存在 $a\colon\ [m]\to\mathcal{C}$ 和 $b\colon\ [0]\to\mathcal{D}$，使得 $R\circ r=a\times b$。它由一个映射 $\tilde{r}\colon\ [m]\to\mathcal{R}$ 唯一确定，使得复合

$$[m]\xrightarrow{\tilde{r}}\mathcal{R}\xrightarrow{R}\mathcal{C}\times\mathcal{D}\xrightarrow{\pi_{\mathcal{D}}}\mathcal{D}$$

为常值。明确地，给定 r、a 和 b，我们通过 $\tilde{r}$ 定义 $\tilde{r}(i)=r(i,0)$。反过来，给定 $\tilde{r}$，映射 r、a 和 b 由令 $r(i,0)=\tilde{r}(i)$、$a=\pi_{\mathcal{C}}\circ R\circ\tilde{r}$ 以及 $b(0)=\pi_{\mathcal{D}}\circ R\circ\tilde{r}(i)$ 给出。

$D(R\times R')_m$ 中的一个单纯形由映射 $(\tilde{r},\tilde{r}')\colon\ [m]\ \to\mathcal{R}\times\mathcal{R}'$ 唯一确定，其中 $\pi_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}'}\circ(R\times R')\circ(\tilde{r},\tilde{r}')$ 是常值的，这等价于 $\pi_{\mathcal{D}}\circ R\circ\tilde{r}$ 和 $\pi_{\mathcal{D}'}\circ R'\circ\tilde{r}'$ 都是常值的。因此，在同构 $\mathsf{Cat}([m],\mathcal{R}\times\mathcal{R}')\ \xrightarrow{\cong}\mathsf{Cat}([m],\mathcal{R})\times\mathsf{Cat}([m],\mathcal{R}')$ 下，$D(R\times R')$ 的 m-单纯形双射地对应于 $D(R)\times D(R')$ 的 m-单纯形。 □

以下事实是如下结论：形如 $\mathbb{I}^{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 的关系的 Dowker 神经等于范畴 $\mathcal{C}$ 的神经。

引理 **5 2** $n\geq 0$ $[n]\times[0]$ n $\Delta[n]$ $\mathbb{I}^{[n]\times[0]}$ $[n]\times[0]\to$。给定，关系：的 □
Dowker 神经是单纯形 -单纯形。

对于 $i=0$，1，我们有关系态射 $d^i\colon\ \mathbb{I}^{[0]\times[0]}\ \to\ \mathbb{I}^{[1]\times[0]}$，其中映射 $d_0^i\colon\ [0]\times[0]\to[1]\times[0]$ 不命中（i，0），映射 $d_1^i\colon\ [0]\to[1]$ 不命中 i 和 $d_2^i=$ $\mathbb{I}^{[0]}$。

定义 5.3。给定两个关系态射 f^0、f^1：$R \to R'$，从 f^1 到 f^0 的变换 H 是一个关系态射 H：$\mathbb{I}^{[1]\times[0]} \times R \to R'$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}^{[0]\times[0]} \times R & \xrightarrow{d^i \times_{\mathbb{I}^R}} & \mathbb{I}^{[1]\times[0]} \times R \\ \cong\uparrow & & \downarrow H \\ R & \xrightarrow{\quad f^i \quad} & R' \end{array} \tag{3}$$

对 $i = 0, 1$ 可交换。

命题 5.4. 给定两个关系态射 f^0, f^1：$R \to R'$，以及一个从 f^1 到 f^0 的变换 H，映射 Df^0, Df^1：$DR \to DR'$ 同伦。

证明。利用引理 5.1 和引理 5.2 对图表 (3) 取 Dowker 神经，对于 $i = 0, 1$，我们得到如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccc} \Delta[0] \times DR & \xrightarrow{d_i \times_{\mathbb{I}^{DR}}} & \Delta[1] \times DR \\ \cong\uparrow & & \downarrow \widehat{DH} \\ DR & \xrightarrow{\quad Df^i \quad} & DR'. \end{array}$$

$\widehat{\ }$映射 DH 即为所需的同伦。 □

6 应用

为了论证我们对 Dowker 定理的范畴化是合理的，我们将说明它与 Quillen 定理 A 以及单纯复形的奇异单纯集合的不同版本之间的关系。

6.1 Quillen 定理 A

我们首先应用定理 4.5 来证明 Quillen 定理 A。给定函子F：$\mathcal{C} \to \mathcal{A}$和 G：$\mathcal{D} \to \mathcal{A}$，逗号范畴 $F \downarrow G$ 的对象由三元组（c，d，f）给出，其中 $c \in \mathcal{C}$、$d \in \mathcal{D}$，且 f是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射 f：$Fc \to Gd$。$F \downarrow G$中的一个态射，形式为（c，d，f）$\to$（c'，d'，f'），由态射α_L：$c \to c'$和 α_R：$d \to d'$组成，并满足下图交换：

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{f} & Gd \\ \downarrow F\alpha_L & & \downarrow G\alpha_R \\ Fc' & \xrightarrow{f'} & Gd'. \end{array}$$

投影 R：$F \downarrow G \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$将 (c, d, f) 映射到 (c, d)，是一个关系。设 r：$[m] \times [n] \to F \downarrow G$是 ER的一个 (m, n)-单纯形，满足 a：$[m] \to \mathcal{C}$，并且

b: $[n] \to \mathcal{D}$满足方程 $R \circ r = a \times b$。给定 $(i, j) \in [m] \times [n]$，我们将 $r(i, j) = (a(i)\ b(j)\ f_{ij}\colon Fa(i) \to Gb(j))$ 记作。注意 $f_{ij} = f_{mj} \circ Fa(i \to m)$，且 $f_{mj} = Gb(0 \to j) \circ f_{m0}$，因此态射 $f_{ij}\colon Fai \to Gbj$ 等于以下复合

$$Fa(i) \xrightarrow{Fa(i \to m)} Fa(m) \xrightarrow{f_{m0}} Gb(0) \xrightarrow{Gb(0 \to j)} Gb(j).$$

这意味着，r 由 a、b 和 f_{m0} 唯一确定：$Fa(m) \to Gb(0)$。由此可知，$a \in DR_m$ 在 $\pi_R : ER_{m,n} \to DR_m$ 下的纤维，同构于逗号范畴 $Fa(m) \downarrow G$ 的神经 $N(Fa(m) \downarrow G)$，该逗号范畴对应于函子 $Fa(m)\colon * \to \mathcal{D}$ 和 G。类似地，$b \in DR_n^T$ 在 $ER_{m,n} \to DR_n^T$ 下的纤维，同构于逗号范畴 $F \downarrow Gb(0)$ 的神经 $N(F \downarrow Gb(0))$；该逗号范畴对应于函子 F 和 $Gb(0) : * \to \mathcal{C}$。

将其特化到 $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ 和 $G = \mathbb{I}_{\mathcal{D}}$，即可证明以下结论：

推论 6.1（Quillen 定理 A [9]）。设有函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。若对每个对象 $d \in \mathcal{D}$，$N(F \downarrow d)$ 都可缩，则映射 $NF\colon N\mathcal{C} \to N\mathcal{D}$ 是弱等价。

证明。考虑逗号范畴 $F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}}$。注意，范畴 $Fa\ m\ \downarrow_{\mathbb{I}_{\mathcal{D}}} * \ Fa\ m\ _{\mathbb{I}_{Fa\ m}}$ 有始对象 $(\ ,\ (\ )\ (\ ))$，因此神经 $N\ Fa\ m\ \downarrow_{\mathbb{I}_{\mathcal{D}}}(\ )\ (\ ))$ 是可缩的，这意味着投影 $R\colon F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ 是一个 Dowker 关系。此外，根据前面的讨论，如果所有 $N(F \downarrow d)$ 都是可缩的，那么转置 R^T 也是一个 Dowker 关系。由于 $r \in ER_m$，0 由 $a\colon [m] \to \mathcal{C}$，$d \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ 和 $f\colon Fa(m) \to d$ 唯一确定，神经 DR 的 m-单纯形集合由函子 $a\colon [m] \to \mathcal{C}$ 构成，这些函子满足存在一个对象 d 属于 $\mathcal{D}$，以及一个态射 $f\colon Fa(m) \to d$。我们总可以选取 $d = Fa(m)$ 和 $f = \mathbb{I}_{Fa(m)}$，因此 $DR = N\mathcal{C}$。类似地，DR_n^T 中的单纯形是函子 $b\colon [n] \to \mathcal{D}$，满足存在一个对象 c 属于 $\mathcal{C}$，以及一个函子 $f\colon Fc \to b(0)$；但这样的三元组 $(c, *, f)$ 是 $F \downarrow b(0)$ 中的一个对象，而根据假设，$N(F \downarrow b(0))$ 可缩，因此该范畴非空。由此可得 $DR^T = N\mathcal{D}$ 和 $N\mathcal{C} \simeq N\mathcal{D}$。我们仍需证明 NF 是一个弱等价。

考虑投影 $\pi_{\mathcal{C}}\colon F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{C}$ 和 $\pi_{\mathcal{D}}\colon F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$，它们分别将 (c, d, f) 发送到 c 和 d。我们有交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & d(ER) & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER^T) \\ & \overset{d(\pi_R)}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{diag}^*} & & \downarrow{\scriptstyle d(\pi_{R^T})} \\ N\mathcal{C} & \xleftarrow[N\pi_{\mathcal{C}}]{} & N(F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}}) & \xrightarrow[N\pi_{\mathcal{D}}]{} & N\mathcal{D}, \end{array} \tag{4}$$

其中 $\mathrm{diag}^*\colon d(ER)_m = ER_{m,\ m} \to N(F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}})_m$ 是与对角函子 $\mathrm{diag} : [m] \to [m] \times [m]$ 作预复合。此外，存在一个自然映射 $\eta\colon F \circ \pi_{\mathcal{C}} \to \pi_{\mathcal{D}}$，其在 $F \downarrow \mathbb{I}_{\mathcal{D}}$ 中的对象 (c, d, f) 上的分量为 $\eta_{(c,d,f)} = f\colon Fc \to d$。这在神经上诱导出一个同伦 $NF \circ N\pi_{\mathcal{C}} \simeq N\pi_{\mathcal{D}}$。利用图 (4)，我们得到 $NF \circ d(\pi_R) \simeq d(\pi_{R^T}) \circ d(\mathrm{tw}^*)$。映射 $d(\mathrm{tw}^*)$ 是一个同构。由于 R 是一个 Dowker 关系，映射 $d(\pi_R)$ 和 $d(\pi_{R^T})$ 都是弱等价，因此 NF 也是弱等价。 □

上述论证与 [9] 中的证明非常接近。可以说，[9] 中的证明比这里给出的证明更为优雅。我们想指出的是，Quillen 定理 A 与定理 4.6 的 Dowker 对偶密切相关。

6.2 从单纯复形构造单纯集合

在本小节中，我们考察将单纯复形转换为类似于拓扑空间的奇异复形的单纯集合的两种方式。我们利用定理 4.6 的 Dowker 对偶，证明其中一种奇异复形构造是函子的，并且具有正确的同伦类型。我们首先研究由满子范畴的包含所给出的关系。

定义 6.2. 设 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 是一个关系，其中 R 是满子范畴的包含。给定 $a\in N\mathcal{C}_m$，令 $\mathcal{D}_R^a\subseteq\mathcal{D}$ 为由所有满足 $(a(i)\ d)\in\mathcal{R}$（对于 $i=0$，1，...，m）的对象 $d\in\mathcal{D}$ 所组成的满子范畴。

引理 6.3. 设 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 是一个关系，其中 R 是满子范畴的包含。给定 $a\in N\mathcal{C}_m$，投影 $\pi_R^a\to N\mathcal{D}$ 将 $r\colon\ [m]\times[n]\to\mathcal{R}$ 映射到唯一确定的 $b\colon\ [n]\to\mathcal{D}$，使得 $R\circ r=a\times b$ 诱导出单纯集合的一个双射$\pi_R^a\to N\mathcal{D}_R^a$。

证明。根据构造，给定如陈述中的 a 和 r，唯一确定的 $b\colon\ [n]\to\mathcal{D}$ 取值于 $\mathcal{D}_R^a$。因此，我们得到单纯集合的一个诱导函数 $\pi_R^a\to N\mathcal{D}_R^a$。由于 R 是一个包含，赋值 $r\mapsto b$是单射。对于满射性，注意到根据构造，给定 $b\in N\mathcal{D}_R^a$，函子 $a\times b\colon\ [m]\times[n]\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 经过 $\mathcal{R}$分解。 □

具有初始对象或终对象的范畴的神经是可缩的[9, p.8], 因此我们得到以下推论。

推论 6.4。设 $R\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ 是一个满子范畴的包含。如果$\mathcal{D}$ 具有这样的性质：所有满子范畴都有初始对象或终对象，那么 R 是一个 Dowker 关系。 □

下面给出这类范畴的两个例子，即作为全序集的范畴和集合的平移范畴。

单纯复形（K，V）是 V的有限子集组成的集合 V和集合 K，满足：若 $\sigma\in K$ 且 $\tau\subseteq\sigma$，则 $\tau\in K$。我们沿用标准术语，称 K 为单纯复形，并将顶点集 V 省略不提。注意，包含 $\subseteq$ 是 K 上的偏序，使其成为偏序集 $K_{\subseteq}$。

考虑拓扑空间 $[0,1]^S$，其元素是从集合 S 到区间 $[0,1]\subseteq\mathbb{R}$的函数。若 S 是有限的，则赋予 $[0,1]^S=\prod_S[0,1]$ 积拓扑。若 S 是无限的，则赋予 $[0,1]^S$ 如下拓扑：$U\subseteq[0,1]^S$ 是开集，当且仅当对于 S 的每个有限子集 W，集合$U\cap[0,1]^W$是 $[0,1]^W$中的开集。函数 $S\to[0,1]$ 的支撑是 S 的子集，由所有使给定函数取非零值的元素组成。

单纯复形（K，V）的几何实现 $|K|$ 是 $[0,1]^V$的子空间，由满足以下两个条件的函数 α组成：首先，其支撑是 K 中的一个单纯形；其次，其值的总和等于 1，即$\sum_{v\in V}\alpha(v)=1$。

我们考虑从单纯复形 (K,V) 构造单纯集合的两种方法。K 上的奇异复形是单纯集合 Sing(K)，其 m-单形的集合为

$$\mathrm{Sing}(K)_m=\{a:\{0,1,\dots,m\}\to V\mid\{a(0),a(1),\dots,a(m)\}\in K\}.$$

Sing(K)上的单纯结构由余单纯集合 $[m]\mapsto\{0,\dots,m\}$ 诱导而来，该余单纯集合通过遗忘 $[m]$上的次序给出。

假设单纯复形 (K,V) 在 V上具有全序 $\leq$。K 上的有序奇异复形是单纯集合 Sing≤(K)，其 m-单形的集合由保序映射给出，即

$$\mathrm{Sing}_{\leq}(K)_m=\{a:[m]\to V_{\leq}\mid a([m])\in K\}.$$

这个单纯集合是范畴 $V_{\leq}$的神经的一个单纯子集。

注 6.5。从单纯复形到单纯集合的函子 $K\mapsto$ Sing(K) 是函子 $X\mapsto MX$ 的右伴随。这里，MX 是顶点集为 X_0 的单纯复形，其单纯形由单纯集合 X 中各单纯形的顶点集给出。注意，我们所说的 $x\in X_n$ 的顶点集，是指 x的零维面所成的集合。此外，从有序单纯复形到其 0-单形集合带有全序的单纯集合范畴的函子 $K\mapsto$ Sing≤(K) 也有一个右伴随函子。

现在我们解释如何将 Sing≤(K) 和 Sing(K) 视为关系的 Dowker 神经。

1. 假设 V 具有全序 $\leq$，从而成为全序集 $V_{\leq}$。考虑满子范畴 $\mathcal{R}_1\subseteq V_{\leq}\times K_{\subseteq}$，其中 $(v,\sigma)\in$ ob($\mathcal{R}_1$) 当且仅当 $v\in\sigma$。包含 R_1：$\mathcal{R}_1\to V_{\leq}\times K_{\subseteq}$ 是一个关系，并且$DR_1=$Sing≤(K)。2. V 的平移范畴 $\mathcal{V}$ 的对象集为 ob($\mathcal{V}$) $=V$，且任意一对对象 v、$w\in V$之间都有唯一态射 $v\to w$。考虑满子范畴 $\mathcal{R}_2\subseteq\mathcal{V}\times K_{\subseteq}$，其中 $(v,\sigma)\in$ ob($\mathcal{R}_2$) 当且仅当 $v\in\sigma$。包含 R_2：$\mathcal{R}_2\to\mathcal{V}\times K_{\subseteq}$ 是一个关系，并且 $DR_2=$ Sing(K)。

注意，对于单纯复形 (K,V) 的顶点集 V 上的任意序关系 $\leq$，我们都有一个由包含 $V_{\leq}\hookrightarrow\mathcal{V}$ 诱导的单射 Sing≤(K) $\hookrightarrow$ Sing(K)。

我们定义一个映射 φ：|Sing(K)| $\to|K|$。|Sing(K)| 中的每个元素都由一对 $(a,t)\in$ Sing(K)$_m\times\Delta^m$表示。给定这样一对 (a,t)，其中有$t=(t_0,\dots,t_m)$，令 $a_*(t)$：$V\to[0,1]$ 为 $|K|$中的元素，满足 $a_*(t)(v)=\sum_{a(i)=v}t_i$。直接验证可知，$(a,t)\mapsto\varphi(a,t)=a_*(t)$ 定义了

一个自然连续映射 φ: $|\mathrm{Sing}(K)| \to |K|$。给定 K的顶点集 V上的一个全序 $\leq$，我们将由复合给出的映射记为 $\varphi_{\leq}$： $|\mathrm{Sing}_{\leq}(K)| \to |K|$

$$|\mathrm{Sing}_{\leq}(K)| \hookrightarrow |\mathrm{Sing}(K)| \xrightarrow{\varphi} |K|.$$

以下是一个众所周知的结果（由 Milnor 在 [8, 第358] 页提出，Curtis 在 [5,第118]页提出）。

命题6.6. 设 K 是一个单纯复形，其顶点集 V上带有全序 $\leq$。映射 $\varphi_{\leq}$: $|\mathrm{Sing}_{\leq}(K)| \to |K|$ 是一个同胚。

证明。我们先考虑 V 为有限集的情形。若 V 的基数为$m+1$，则 $V_{\leq}$通过一个保序双射γ: $[m] \to V$与序数 $[m]$同构。给定 $|K|$中的一个元素 α: $V \to [0,1]$，复合 $\alpha \circ \gamma$: $[m] \to [0,1]$是 Δ^m中的一个元素，因此有序对 $(\gamma, \gamma \circ \alpha) \in \mathrm{Sing}_{\leq}(K)_m \times \Delta^m$ 表示元素 $\psi(\alpha) \in |\mathrm{Sing}_{\leq}(K)|$。这定义了一个连续映射$\psi$: $|K| \to |\mathrm{Sing}_{\leq}(K)|$。直接验证可得，$\varphi_{\leq}$ 和 ψ 互为逆映射，因此它们是同胚。

如果 V 不是有限的，给定 V 的一个有限子集 W，我们令 $W_{\leq}$ 为由 $V_{\leq}$诱导的全序，并令 K_W 为顶点集 W 上的单纯复形，其由包含于 K中的 W 的子集构成。于是，K 是单纯复形 K_W （其中 W 是 V 的有限子集）的并，以及 $\mathrm{Sing}_{\leq}(K) = \bigcup_{W \subseteq V} \mathrm{Sing}_{\leq}(K_W)$；这里的并是对 V的所有有限子集取的。现在，$\varphi_{\leq}$: $|\mathrm{Sing}_{\leq}(K)| \to |K|$ 是一个同胚，这可由以下事实推出：这两种几何实现都赋予了与并相容的拓扑，并且 $\varphi_{\leq} = \bigcup_{W \subseteq V} \varphi_{\leq}^{W}$（这里的并是对 V的所有有限子集取的），而 $\varphi_{\leq}^{W}$: $|\mathrm{Sing}_{\leq}(K_W)| \to |K_W|$是 $\varphi_{\leq}$在 $|\mathrm{Sing}_{\leq}(K_W)|$上的限制。

□

单纯集合 $\mathrm{Sing}_{\leq}(K)$ 的几何实现与单纯复形 (K,V) 的几何实现同胚，但在 V上选取一个序会破坏函子性。单纯集合 $\mathrm{Sing}(K)$ 关于 (K,V) 是函子性的，但其几何实现与 (K,V) 的几何实现并不同胚。不过，我们接下来将证明它们同伦等价。

考虑满子范畴 $\mathcal{R}_0 \subseteq (\mathcal{V} \times V_{\leq}) \times K_{\subseteq}$，它由满足以下条件的对 $((v,w)\ \sigma)$ 构成： v 和 w 都是单纯形 σ 的顶点。令 R_0: $\mathcal{R}_0 \to (\mathcal{V} \times V_{\leq}) \times K_{\subseteq}$ 为包含关系。投影 $\mathcal{V} \times V_{\leq} \to V_{\leq}$ 和$\mathcal{V} \times V_{\leq} \to \mathcal{V}$ 诱导关系态射 $R_0 \to R_1$ 和 $R_0 \to R_2$，由定理 4.6 得到如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
DR_1 & \xleftarrow{d(\pi_{R_1})} & d(ER_1) & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER_1^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R_1^T})} & DR_1^T \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
DR_0 & \xleftarrow{d(\pi_{R_0})} & d(ER_0) & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER_0^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R_0^T})} & DR_0^T \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
DR_2 & \xleftarrow{d(\pi_{R_2})} & d(ER_2) & \xrightarrow{d(\mathrm{tw}^*)} & d(ER_2^T) & \xrightarrow{d(\pi_{R_2^T})} & DR_2^T.
\end{array} \tag{5}$$

我们证明图 (5) 中出现的所有关系都是 Dowker 关系，从而所有水平映射都是弱等价。范畴 $V_{\leq}$、 $\mathcal{V}$ 和$\mathcal{V}\times V_{\leq}$ 具有这样的性质：每个满子范畴都有一个始对象。因此，根据推论 6.4，我们得出 R_1^T、 R_2^T和 R_0^T都是 Dowker 关系。接下来，设 $a:[m]\to V_{\leq}$ 是一个函子，其像是 K 中的一个单纯形。根据引理 6.3，纤维 $\pi^a_{R_1}$ 同构于范畴 $(K_{\subseteq})^a_{R_1}$ 的神经，该范畴由所有包含 a 像的单纯形构成。单纯形 $a([m])$ 是 $(K_{\subseteq})^a_{R_1}$ 中的始对象，因此纤维是可缩的，且 R_1 是一个 Dowker 关系。类似地，对于每个 $a\in(DR_2)_m$，神经 $N(K_{\subseteq})^a_{R_2}$ 都是可缩的；对于每个 $a\in(DR_0)_m$，神经 $N(K_{\subseteq})^a_{R_0}$ 也都是可缩的，因此 R_2 和 R_0 也都是 Dowker 关系。

图 (5) 中最右侧的垂直映射是恒等映射，因此我们可以得出映射 $\mathrm{Sing}_{\leq}(K)=DR_1\leftarrow DR_0\to DR_2=\mathrm{Sing}(K)$ 是弱等价。最后，考虑以下（非交换）图

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R_2 \\ \downarrow & \nearrow & \\ R_1 & & \end{array} \tag{6}$$

函子 $([1]\times[0])\times\mathcal{R}_0\to\mathcal{R}_2$ 在对象上的定义如下

$$((i,0),((v,w),\sigma))\mapsto\begin{cases}(v,\sigma) & \text{if } i=0\\ (w,\sigma) & \text{if } i=1\end{cases}$$

它诱导出一个变换 $H:{}_{\mathbb{I}^{[1]\times[0]}}\times R_0\to R_2$，将图 (6) 中的上方路径映到下方路径，因此根据命题 5.4，取 Dowker 神经后得到的两条路径是同伦的。特别地，图中的左上三角形

$$\begin{array}{ccc} |DR_0| & \xrightarrow{\simeq} & |\mathrm{Sing}(K)| \\ {\scriptstyle\simeq}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ |\mathrm{Sing}_{\leq}(K)| & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{\leq}} & |K|. \end{array}$$

在同伦意义下交换。根据构造，右下方的三角形交换，因此我们可以得出以下结论：

推论 6.7. 设 K 是一个单纯复形。映射 φ: $|\mathrm{Sing}(K)|\to|K|$ 是一个同伦等价，并且关于 K 自然。 □

在 [3] 中证明了包含 $|\mathrm{Sing}_{\leq}(K)|\to|\mathrm{Sing}(K)|$ 是同伦等价。然而，$\mathrm{Sing}_{\leq}(K)$ 缺乏函子性，使得 [3] 无法在推论 6.7 中陈述关于自然性的结果。

这一结果与拓扑数据分析有关，因为给定一个过滤单纯复形 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$，我们可以得到一个过滤单纯集 $\{\mathrm{Sing}(K_\alpha)\}_{\alpha\in A}$。对这两个过滤取几何实现所得到的过滤拓扑空间具有相同的同伦类型。具体而言，它们的持久同调同构。

参考文献

[1] A Bj¨orner. 拓扑方法。《组合学手册》，2:1819–1872，1995。

[2]Morten Brun 和 Lars M. Salbu。《关系的矩形复形》。地中海数学杂志，20(1)，2022年。URL：https://doi.org/10.1007/s00009-022-02213-0。

[3] Omar A. Camarena。将单纯复形转换为单纯集合。https://www.matem.unam.mx/~omar/notes/ssets-from-complexes.html 访问日期：2023年2月14日。

[4]Samir Chowdhury 和 Facundo M´emoli。非对称网络的函子性 Dowker 定理与持久同调。应用与计算拓扑学杂志，2：115–175，2018年。URL：https://doi.org/10.1007/s41468-018-0020-6。

[5]Edward B. Curtis。单纯同伦论。《数学进展》，6(2)：107–209，1971年。URL：https://doi.org/10.1016/0001-8708(71)90015-6。

[6] C. H. Dowker。《关系的同调群》。数学年刊，56(1):84–95，1952年。网址：http://www.jstor.org/stable/1969768。

[7]Paul G. Goerss 和 John F. Jardine。《单纯同伦论》。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2009年。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0189-4。

[8]John Milnor。《半单纯复形的几何实现》。数学年刊，65(2):357–362，1957年。网址：https://www.jstor.org/stable/1969967。[9] Daniel Quillen。《高阶代数 K-K理论 I》。载于《代数 K-K理论 I：高阶 K-K理论》（会议论文集，巴特尔纪念研究所，西雅图，华盛顿州，1972年），数学讲义，第341卷，第85–147页。施普林格，柏林，1973年。[10] ˇZiga Virk。《作为神经的 Rips复形与函子性道克-神经图》。地中海数学杂志，18(2)，2021年。网址：http://dx.doi.org/10.1007/s00009-021-01699-4。