arXiv:2303.16057v1 [math.FA] 28 Mar 2023

K-b希尔伯特空间框架与 b伴随算子

Chaimae MEZZAT[(1)]，Samir KABBAJ[(2)] 和Abdelkarim BOUROUIHIA[3](1) chaimae.mezzat7@gmail.com。摩洛哥凯尼特拉，伊本·图费尔大学数学系，邮政信箱133。(2) samkabbaj@yahoo.fr。摩洛哥凯尼特拉，伊本·图费尔大学数学系，邮政信箱133。(3) ab1221@nova.edu。美国佛罗里达州劳德代尔堡，诺瓦东南大学数学系，学院大道3301号。

偏微分方程、代数与谱几何实验室。摩洛哥凯尼特拉伊本·图费尔大学理学院。

摘要

本文将通过 K-b框架推广 b框架这一希尔伯特空间框架的新概念。其思路是取一个来自巴拿赫空间的序列，并考察它如何成为希尔伯特空间的框架。我们将使用一种称为 b对偶积的新乘积来取代内积，该乘积由双线性映射构造而成。我们将介绍关于这种乘积、 b框架以及K-b框架的新结果，并给出此前从未出现过的 b框架和 K-b框架的若干例子。我们将给出希尔伯特空间元素的重构公式表达式。我们还将研究 b框架和 K-b框架的稳定性与保持性；为此，我们将给出相对于 b对偶积的伴随算子的对应概念。

关键词— b-框架， K-b-框架， b-框架算子，K-b-框架算子，巴拿赫空间，希尔伯特空间，半双线性型。

学科分类

*2020*年数学学科分类。46B15, 46A35, 42C15, 47B02, 47A07。

目录

1 预备知识 **3**

2 主要结果 **7**

2.1 ♭-框架及若干例.7 2.2 K-♭-框架及若干例.9 2.3 ♭-伴随算子.17 2.4 稳定性与保持.22

引言

框架理论始于1952年，当时Duffin和Schaeffer引入了这一理论，以解决一些非调和傅里叶级数问题 [7]。框架是解决许多领域中诸多问题的关键，例如物理学、自然科学和工程学。框架应用于信号与图像处理、加工、编码、系统建模以及许多其他有趣的领域（见 [4], [5] 和 [1]）。众所周知，D.Gabor早在1946年就提出了“Les Gaborettes”，它们是框架的一种特殊情形，但提出它们是出于物理学方面的目的。

1986年，I.Daubechies、A.Grossmann和Y.Meyer通过揭示冗余性质，革新了框架理论。人们希望利用框架找到重构公式，以满足众多领域中许多问题的需求。

2012年，L.Gavruta引入了一种更一般的框架情形，即 K–框架，并在 [8] 中证明了其存在性；他还将许多已有结果推广到这一情形，并在 [12]中给出了一些新的有趣结果。关于 K-框架的更多结果，请参见（[11] 和 [10]）。

为了推广希尔伯特空间中的框架，M.Ismailov、F.Guliyeva 和 Y.Nasibov 提出了 b-框架的概念。该概念允许我们通过双线性映射b： $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{B} \to \mathcal{H}_2$生成希尔伯特框架，其中 $\mathcal{H}_1$、$\mathcal{H}_2$ 是两个希尔伯特空间，而 $\mathcal{B}$ 是一个巴拿赫空间。借助这一双线性映射，我们构造一种新的乘积，称为 b–对偶乘积，用以定义希尔伯特空间的新框架；但这一次，框架并非来自希尔伯特空间本身，而是来自巴拿赫空间 $\mathcal{B}$。

此外，M.Ismailov、F.Guliyeva 和 Y.Nasibov 将经典情形下框架理论中的一些著名且重要的结果推广到了这一更一般的情形（见 [9]）。然而，该定义并不完备，且没有给出任何例子。此外，稳定性和保持性质也尚未得到研究。

本文将详细定义 b-框架，并通过给出 K-b-框架的定义来推广这一概念，同时给出二者的一些例子。此外，我们将介绍关于 b-框架和 K-b-框架的一些新结果，并详细解释用于定义这一新框架概念的 b–对偶乘积。我们将给出 b-框架和K-b-框架的重构公式。我们将引入 b-伴随算子，以便运用 b-对偶乘积研究 b-框架和 K-b-框架的稳定性与保持性。

记号：

1. 我们用 $\mathcal{C}(I)$表示从区间 $I \subset$C映射到C的连续函数集合。2. 我们用 $\mathcal{C}_n(I)$表示从 $I \subset$C到C的分段连续函数集合。3. 如果 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是两个赋范空间，则 $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{Z})$表示从$\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{Z}$的有界线性算子集合。4. 如果 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{Z})$，则 $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Z},\mathcal{H})$是 T的伴随算子，并且对所有 $x \in \mathcal{H}$ 和 $y \in \mathcal{Z}$，它满足 $\langle Tx、\ y\rangle_{\mathcal{Z}} = \langle x、 T^*y\rangle_{\mathcal{H}}$。5. $Id_{\mathcal{Z}}$ 表示 $\mathcal{Z}$上的恒等算子。6. $\mathcal{R}(T)$表示 T的值域。7. ker(T)表示 T的核。8. 设 $\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，且设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，使得 $\mathcal{R}(T)$是闭的。 $T^\dagger$ 表示 T的伪逆（或Moore-Penrose逆），满足 $TT^\dagger h = h、\quad \forall h \in \mathcal{R}(T)$。

1 预备知识

定理 1.1. *[6].* 设 $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 为希尔伯特空间，且 $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H})$ 和 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H})$。以下陈述等价：

i) $\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(T)$；*ii)* $SS^* \leq \lambda^2 TT^*$, 对某个 $\lambda > 0$；*iii)* 存在 $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ 使得 $S = TU$。

定理 1.2. *[9].* 设 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{Z})$，其中 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{Z}$ 是两个希尔伯特空间。那么，

i) $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Z},\mathcal{H})$，且 $\|T^*\| = \|T\|$;

ii) $\mathcal{R}$（T）闭集当且仅当 $\mathcal{R}$（T^*）闭集；

iii) T 是满射当且仅当 $\exists c > 0$，使得 $\|T^*z\|_{\mathcal{Z}} \geq c\|z\|_{\mathcal{Z}}$，$\forall z \in \mathcal{Z}$；

设 $\mathcal{H}$、$\mathcal{Z}$ 为两个希尔伯特空间，$\langle .、\ .\rangle_{\mathcal{H}}$、$\langle .、\ .\rangle_{\mathcal{Z}}$ 分别为它们对应的内积。我们用 $\|.\|_{\mathcal{H}}$（分别用 $\|.\|_{\mathcal{Z}}$）表示 $\mathcal{H}$（分别表示 $\mathcal{Z}$）的范数。设 $\mathcal{B}$ 为赋范为 $\|.\|$的巴拿赫空间。现在考虑双线性映射 $\flat$：$\mathcal{H} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{Z}$，满足以下条件

$$\exists M > 0 :\ \|\flat(h,x)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant M\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\|, \qquad \forall h \in \mathcal{H},\ x \in \mathcal{B}. \tag{1}$$

注意，不等式 (1) 意味着映射 $\flat$ 是有界且连续的。固定 $z \in \mathcal{Z}$ 和 $x \in \mathcal{B}$，并考虑线性泛函 $\phi_{z,\ x}$： $\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$，其定义为$\phi_{z,\ x}(h) = \langle \flat(h,x)\ z\rangle_{\mathcal{Z}}$。显然，$\phi_{z,\ x}$ 是线性的；此外，由 (1) 可知，对于所有 $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} |\phi_{z,x}(h)| = |\langle \flat(h,x), z\rangle_{\mathcal{Z}}| &\leqslant \|\flat(h,x)\|_{\mathcal{Z}}\|z\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leqslant M\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\|\|z\|_{\mathcal{Z}}. \end{aligned}$$

因此，$\|\phi_{z,\ x}\| \leqslant M\|x\|\|z\|_{\mathcal{Z}}$。根据里斯表示定理，可知存在唯一的元素 $v \in \mathcal{H}$，使得$\phi_{z,\ x}(h) = \langle h, v\rangle_{\mathcal{H}}$，该元素称为 z 和 x 的 $\flat$-对偶积，记作 $\langle z/x\rangle$。接下来我们将研究这一乘积的性质。令

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{Z} \times \mathcal{B} &\to \mathcal{H} \\ (z,x) &\mapsto \langle z/x\rangle \end{aligned}$$

命题1.1。 映射 ξ 具有以下性质：

1) ξ 是半双线性的。

2) ξ 是有界且连续的。

3) 假设$\overline{\mathcal{R}}(\flat) = \mathcal{Z}$。若对于每个 $x \in \mathcal{B}$，$\langle z/x\rangle = 0$，则 $z = 0$。我们称 ξ 关于 z是非退化的。

4) 假设存在 $m > 0$，使得

$$m\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\| \leqslant \|\flat(h,x)\|_{\mathcal{Z}}\|z\|_{\mathcal{Z}}, \quad \forall x \in \mathcal{B}, \forall h \in \mathcal{H}.$$

If 对任意 $z \in \mathcal{Z}$、$\langle z/x\rangle = 0$，则有 $x = 0$。我们称 ξ 关于 x 是非退化的。

证明。 1) 令 $z \in \mathcal{Z}$、x_1、$x_2 \in \mathcal{B}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \langle h, \langle z/\lambda x_1 + x_2\rangle\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \flat(h, \lambda x_1 + x_2), z\rangle_{\mathcal{Z}} &= \langle \lambda\flat(h,x_1), z\rangle_{\mathcal{Z}} + \langle \flat(h,x_2), z\rangle_{\mathcal{Z}} \\ &= \lambda\langle h, \langle z/x_1\rangle\rangle_{\mathcal{H}} + \langle h, \langle z/x_2\rangle\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle h, \bar{\lambda}\langle z/x_1\rangle\rangle_{\mathcal{H}} + \langle h, \langle z/x_2\rangle\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

则 ξ 关于第二个变量是反线性的。同理，我们证明 ξ 关于第一个变量是线性的。

2) $\|\langle z/x\rangle\|_{\mathcal{H}} = \|\phi_{z,\ x}\| \leqslant M\|x\|\|z\|_{\mathcal{Z}}$, $\forall(z,x) \in \mathcal{Z}\times\mathcal{B}$，则 ξ在 $\mathcal{Z}\times\mathcal{B}$ 的积拓扑下有界且连续。

3) 假设 $\overline{\mathcal{R}}(\flat) = \mathcal{Z}$，并且对于所有 $x \in \mathcal{B}$ $\langle z/x\rangle = 0$，这意味着，

$$\langle h, \langle z/x\rangle\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H},\ \forall x \in \mathcal{B}.$$

$\Rightarrow$

$$\langle \flat(h,x), z\rangle_{\mathcal{Z}} = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H},\ \forall x \in \mathcal{B}.$$

因此

$$z = 0.$$

4)

$$\begin{aligned}
\langle z/x\rangle = 0, \forall z \in \mathcal{Z} &\Rightarrow \langle h, \langle z/x\rangle\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \forall z \in \mathcal{Z} \\
&\Rightarrow \langle \flat(h,x), z\rangle_{\mathcal{Z}} = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \forall z \in \mathcal{Z} \\
&\Rightarrow \flat(h,x) = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \\
&\Rightarrow m\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\| = 0, \quad \forall h \in \mathcal{H} \\
&\Rightarrow x = 0.
\end{aligned}$$

■

现在设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 为一个向量序列，我们首先给出一些必要定义：

定义 1.1。 *[9]*。 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中称为 $\flat$-正交归一，当且仅当

$$\langle \flat(h, x_i)/x_j\rangle = \delta_i^j h, \quad \forall h \in \mathcal{H},\ i,j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

定义 1.2。 *[9]*。如果对于每个 $z \in \mathcal{Z}$，都存在唯一的序列 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，其中 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 属于 $\mathcal{H}$，使得：则称 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 $\flat$-基。

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, x_i).$$

如果此外 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\flat$-正交归一的，那么 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为 $\mathcal{Z}$ 中的 $\flat$-标准正交基。

定义 1.3. *[9]*。设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$。 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 称为 $\mathcal{Z}$ 中的 $\flat$-完备，当且仅当 f

$$\langle z/x_i\rangle = 0,\ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow z = 0. \tag{3}$$

注记 1.1. 若除 *(1)* 外，双线性映射 $\flat$ 还满足

$$\exists m>0;\quad m\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\|\leqslant\|\flat(h,x)\|_{\mathcal{Z}},\quad \forall h\in\mathcal{H},\forall x\in\mathcal{B}. \tag{4}$$

以及 $\overline{Span}^{\mathcal{B}}\{x_i/i\in\mathbb{N}\}=\mathcal{B}$。则 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是 $\flat$-完备的，当且仅当 $\mathcal{R}\ \cancel{(\flat)}^{\mathcal{Z}}=\mathcal{Z}$。

命题 1.2。 *[9]*。令 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$，我们有以下等价关系：

$$[\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ is\ a\ \flat\text{-}orthonormal\ basis\ in\ \mathcal{Z}]\Leftrightarrow[\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\ is\ \flat\text{-}complete\ in\ \mathcal{Z}].$$

例 1。 令 $-\infty<a<b$，并令 ω： $[a,b[\to\mathbb{R}_+^*$ 为连续权函数，
（即 $\forall n\in\mathbb{N}$； $\int_a^b|x|^n\omega\ (x)\ dx<+\infty$）。

我们考虑希尔伯特空间

$$H_\omega=\left\{h\in\mathcal{C}([a,b[)/\int_a^b|h(t)|^2\omega(t)dt<\infty\right\}.$$

以及空间

$$H'_\omega=\left\{h\in\mathcal{C}_m([a,b[)/\int_a^b|h(t)|^2\omega(t)dt<\infty\right\}.$$

注意，由于 $\overline{H'_\omega}^{\|\cdot\|_\infty}=H_\omega\ \mathbb{C}m(\cancel{[a,b[)=\mathbb{C}}([a,b[)$ 处处成立。赋予 H'_ω 如下的内积和范数

$$\langle h,g\rangle_\omega=\int_a^b h(t)\bar{g(t)}\omega(t)dt,\ and\quad \|h\|_\omega=\left(\int_a^b|h(t)|^2\omega(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Let

$$b:H'_\omega\times L^\infty([a,b[)\cap\mathcal{C}_m([a,b[)\to\overline{L^2([a,b[)\cap\mathcal{C}_m([a,b[)}^2$$
$$(h,g)\mapsto hg\sqrt{\omega}.$$

我们有

$$\|b(h,g)\|_2=\left(\int_a^b|h(t)|^2|g(t)|^2\omega(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq\sup_{t\in[a,b[}|g(t)|\left(\int_a^b|h(t)|^2\omega(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}\leq\|h\|_\omega\|g\|_\infty.$$

And

$$\langle b(h,g),f\rangle_2=\int_a^b b(h,g)(t)\bar{f(t)}dt=\int_a^b hg\sqrt{\omega}(t)\bar{f(t)}d(t)=\int_a^b h\overline{\bar{g}(t)f(t)}\omega^{-\frac{1}{2}}(t)\omega(t)dt=\langle h,\bar{g}f\omega^{-\frac{1}{2}}\rangle_\omega.$$

因此我们有 $\langle f/g\rangle(t)=\bar{g}(t)f(t)\omega^{-\frac{1}{2}}(t)\ \forall t\in[a,b[$。

令 $\Delta=\{a=a_0,..,a_k=a+k\frac{b-a}{m},..,a_m=b\}$ 为 $[a,b[$, 的一个划分，并考虑 b-正交

序列 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $g_i(t) = \omega^{-\frac{1}{4}}(t)\mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1}[}(t)$；事实上，我们有 $\langle b(h, g_i/g_j\rangle = \delta_i^j h$。此外，若假设对所有 $i \in N$ 都有 $\langle f/g_i\rangle = 0$，则有 $\omega^{-\frac{3}{4}}(t)\mathbb{1}_{[a_i,a_{i+1}[}(t)f(t) = 0$，这意味着 $f \equiv 0$ 在 $[a, b[$ 的每个划分 $[a_i, a_{i+1}[$ 上，因此 $f \equiv 0$ 在 $[a, b[$ 上成立，所以 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $L^2([a, b[) \cap \mathcal{C}_m([a, b[)^2$ 中是 b-完备的。

例 2. （有限维情形）

设 $\mathcal{H} = \mathbb{R}^4$ 的基为 $\{e_i\}_{1\leq i\leq 4}$，$\mathcal{Z} = \mathbb{R}^3$ 的基为 $\{v_1, v_2, v_3\}$，且 $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$ 的基为 $\{f_1, f_2\}$。令b：$\mathcal{H} \times \mathcal{B} \to \mathcal{Z}$ 如下：

$$b(e_1, f_1) = u_1, \quad b(e_2, f_1) = u_3, \quad b(e_3, f_1) = 0, \quad b(e_4, f_1) = 0$$
$$b(e_1, f_2) = u_2, \quad b(e_2, f_2) = 0, \quad b(e_3, f_2) = 0, \quad ; b(e_4, f_2) = 0.$$

对每个 $h = \sum_{i=1}^4 h_i e_i \in \mathcal{H}$ 和 $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 \in \mathcal{B}$，我们有 $b(h, x) = h_1x_1u_1 + h_1x_2u_2 + h_2x_1u_3$, 以及 $\|b(h, x)\|_{\mathcal{Z}}^2 = \|h_1x_1u_1 + h_1x_2u_2 + h_2x_1u_3\|_{\mathcal{Z}}^2 = h_1^2x_1^2 + h_1^2x_2^2 + h_2^2x_1^2 = (h_1^2 + h_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - (h_2x_2)^2$ 因此

$$\|b(h, x)\|_{\mathcal{Z}} \leq \beta\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\|.$$

其中 $\beta = 1$。通过简单计算，我们得到每个 $z \in \mathcal{Z}$ 的 b-对偶乘积，以及每个 $x \in \mathcal{B}$,$\langle z/x\rangle = (x_1z_1 + x_2z_2)e_1 + x_1z_3e_2$.

选取 $\{X_1, X_2\} \subset \mathcal{B}$ 使得 $X_1 = f_1 - f_2$ 且 $X_2 = f_1 + f_2$，我们有

$$\begin{cases} \langle z/X_1\rangle &= 0 \\ \langle z/X_2\rangle &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 &= 0 \\ z_1 + z_2 &= 0 \\ z_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$$

那么，$\{X_1, X_2\}$ 是 $\mathcal{Z}$中的一个 $\flat$-正交归一基。

2 主要结果

2.1 $\flat$-框架及一些例子

本节将对 b-框架给出更详细的定义；该概念在 [9], 中已有介绍。我们还将给出一些文献中从未出现过的例子，以展示这一概念的作用。

定义 2.1. 序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 称为 $\mathcal{Z}$ 的一个 $\flat$-框架，如果存在常数 $0 < A \leq B < \infty$ 使得

$$A\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \| \langle z/x_i\rangle \|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \tag{5}$$

常数 A 和 B 称为 $\flat$-框架的界。当式 (5) 右侧成立时，我们称

序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是具有界 B的 $\flat$-贝塞尔序列。
若 $A=B$, 则 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$的紧 $\flat$-框架。
若 $A=B=1$, 则 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$的 Parseval $\flat$-框架。

例3. 选取 $\mathcal{H}=\mathbb{R}^3$、 $\mathcal{B}=\mathbb{R}^2$,和 $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^4$, 使得$(e_1,e_2,e_3),(f_1,f_2)$ $and(u_1,u_2,u_3,u_4)$ 分别是它们的标准基。定义双线性映射 b： $\mathcal{H}\times\mathcal{B}\to\mathcal{Z}$ 如下

$$\begin{aligned} &b(e_1,f_1)=u_1, \quad b(e_2,f_1)=u_3, \quad b(e_3,f_1)=u_1,\\ &b(e_1,f_2)=u_2, \quad b(e_2,f_2)=u_4, \quad b(e_3,f_2)=u_2. \end{aligned}$$

对于每个 $h=\sum_{i=1}^{3}h_ie_i$, 和 $x=\sum_{i=1}^{2}x_if_i$, 我们得到

$$b(h,x)=(h_1+h_3)x_1u_1+(h_1+h_3)x_2u_2+h_2x_1u_3+h_2x_2u_4,$$

因此

$$\|b(h,x)\|_{\mathcal{Z}}^2=(h_1^2+h_2^2+h_3^2)(x_1^2+x_2^2)+2h_1h_3(x_1^2+x_2^2)\leqslant 2\|h\|^2\|x\|^2.$$

对于 $z\in\mathcal{Z}$, 我们有

$$\langle b(h,x),z\rangle=\langle h,\langle z/x\rangle\rangle=h_1(x_1z_1+x_2z_2)+h_2(x_1z_3+x_2z_4)+h_3(x_1z_1+x_2z_2).$$

$\Rightarrow \quad \langle z/x\rangle=(x_1z_1+x_2z_2)e_1+(x_1z_3+x_2z_4)e_2+(x_1z_1+x_2z_2)e_3.$
在 $\mathcal{B}$ 中选择 $y_1=f_1+f_2,\ \ y_2=f_1-f_2$。我们有

$$\|\langle z/y_1\rangle\|_{\mathcal{H}}^2=2z_1^2+2z_2^2+z_3^2+z_4^2+4|z_1z_2|+2|z_3z_4|.$$

and

$$\|\langle z/y_2\rangle\|_{\mathcal{H}}^2=2z_1^2+2z_2^2+z_3^2+z_4^2-4|z_1z_2|-2|z_3z_4|.$$

我们得到, $\forall z\in\mathcal{Z}$:

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2\leqslant\|\langle z/y_1\rangle\|_{\mathcal{H}}^2+\|\langle z/y_2\rangle\|_{\mathcal{H}}^2=4z_1^2+4z_2^2+2z_3^2+2z_4^2\leqslant 4\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

那么, $\{y_1,y_2\}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 b-框架，其界为 $A=1$ 和 $B=4$。

例4. 考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H}=\mathcal{Z}=L^2(\mathbb{C})$ 和巴拿赫空间 $\mathcal{B}=L^\infty(\mathbb{C})$，并考虑双线性映射

$$\begin{aligned} b:\mathcal{H}\times\mathcal{B}&\to\mathcal{Z}\\ (h,g)&\mapsto hg \end{aligned}$$

b 定义良好，并满足 *(1)*，事实上

$$\|b(h,g)\|_{\mathcal{Z}} = \|hg\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{C}} |h(t)g(t)|^2 dt} \leqslant \|g\|_\infty \sqrt{\int_{\mathbb{C}} |h(t)|^2 dt} \leqslant \|h\|_2 \ \|g\|_\infty < \infty.$$

现在令 $f \in \mathcal{Z}$，我们有

$$\langle b(h,g), f\rangle_{\mathcal{Z}} = \int_{\mathbb{C}} h(t)g(t)\bar{f}(t)dt = \int_{\mathbb{C}} h(t)\overline{\bar{g}(t)f(t)}dt = \langle h, \langle f/g\rangle\rangle_{\mathcal{H}}.$$

因此 $\langle f/g\rangle = \bar{g}f, \quad \forall f \in \mathcal{Z}, \ \forall g \in \mathcal{B}$。设 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$，使得 $g_i(t) = \frac{1}{i+1}, \forall i \in \mathbb{N} \ \forall t \in \mathbb{C}$。
于是有

$$\|\langle f/g_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = \|g_i\bar{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{C}} \left|\frac{1}{i+1}\bar{f}(t)\right|^2 dt = \frac{1}{(i+1)^2}\int_{\mathbb{C}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{(i+1)^2}\|f\|_2^2,$$

于是，

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\langle f/g_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{\pi^2}{6}\|f\|_2^2.$$

因此 $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的紧 b-框架，其界为 $A = B = \frac{\pi^2}{6}$。

2.2 K-♭-框架及若干例子

本节将采用与 Gavruta 将希尔伯特空间上的框架推广为希尔伯特空间上的 K-框架相同的思路，对 b-框架的概念进行推广。首先回顾 Gavruta 给出的定义。

定义 2.2。 *[8]* 设 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$，且 K^* 为其伴随算子。当且仅当存在常数 $0 < A < B < \infty$，使得序列 $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}$ 是$\mathcal{Z}$ 的 K-框架时，

$$A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle z, z_i\rangle_{\mathcal{Z}}|^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \tag{6}$$

常数 A 和 B 分别称为下框架界和上框架界。

若 $K \equiv Id_{\mathcal{Z}}$，则 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$的框架。现在设 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$，且 K^* 为其伴随算子，我们如下定义K-♭-框架:

定义 2.3。 序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 称为 $\mathcal{Z}$ 的 K-♭-框架，如果存在常数$0 < A \leq B < \infty$ 使得

$$A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \| \langle z/x_i\rangle \|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{Z}. \tag{7}$$

常数 A （分别为 B）称为 K-♭-框架的左（分别为右）界。当仅满足（7）的右不等式时，序列 $\{x_i\}_{i\in N}$ 称为 $\mathcal{Z}$ 中的 K-♭-Bessel 序列，其界为 B。

如果 $A=B$，则 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$中的紧 K-$\flat$-框架。
若 $A=B=1$，则 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$的 Parseval K-$\flat$-框架。

注记 2.1. 注意， $\flat$-框架是满足 $K\equiv Id_{\mathcal{Z}}$的 K-$\flat$-框架。

例 5. 设 $\mathcal{H}_1$， $\mathcal{H}_2$， $\mathcal{Z}_1$， $\mathcal{Z}_2$ 为希尔伯特空间。设 $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_1\oplus\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$，且 $\mathcal{B}=\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{Z}_1)\oplus\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,\mathcal{Z}_2)$ 为巴拿赫空间。

考虑双线性映射 $\flat$： $\mathcal{H}\times\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{Z}$，使得 $\flat((h_1\oplus h_2),(t_1\oplus t_2))=t_1(h_1)\oplus t_2(h_2)$。设 $z_1\oplus z_2\in\mathcal{Z}$，我们有

$$\langle\flat((h_1\oplus h_2),(t_1\oplus t_2)),z_1\oplus z_2\rangle_{\mathcal{Z}}=\langle t_1(h_1)\oplus t_2(h_2),z_1\oplus z_2\rangle_{\mathcal{Z}}=\langle h_1\oplus h_2,t_1^*(z_1)\oplus t_2^*(z_2)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

我们断言

$$\langle z_1\oplus z_2/t_1\oplus t_2\rangle=t_1^*(z_1)\oplus t_2^*(z_2)=\langle z_1/t_1\rangle\oplus\langle z_2/t_2\rangle.$$

现在假设 $(t_1^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}_1$ 的 $\flat$-框架，即存在常数 $0<A_1\leq B_1<\infty$，使得

$$A_1\|z_1\|_{\mathcal{Z}_1}^2\leqslant\sum_{i\in\mathbb{N}}\|t_1^{i*}(z_1)\|_{\mathcal{H}_1}^2\leqslant B_1\|z_1\|_{\mathcal{Z}_1}^2,\quad\forall z_1\in\mathcal{Z}_1.\tag{8}$$

如果我们假设 $(t_2^i)_{i\in\mathbb{N}}\cong\ominus$ （即算子 t_2^i 均为零），那么 $(t_1^i\oplus t_2^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 不是 $\flat$-框架，但如果我们令 K： $\mathcal{Z}\longrightarrow\mathcal{Z}$ 满足对每个 $z=(z_1\oplus z_2)\in\mathcal{Z}$都有， $K(z_1\oplus z_2)=z_1$。那么我们有$\|K^*(z)\|_{\mathcal{Z}}^2=\|z_1\|_{\mathcal{Z}_1}^2$，因为 K 是自伴的。

因此，对于每个 $z_1\in\mathcal{Z}_1$， $z_2\in\mathcal{Z}_2$ 我们有，

$$\begin{aligned}A_1\|K^*(z_1\oplus z_2)\|_{\mathcal{Z}}^2\leqslant\sum_{i\in\mathbb{N}}\|t_1^{i*}(z_1)\|_{\mathcal{Z}}^2=\sum_{i\in\mathbb{N}}\|t_1^{i*}\oplus t_2^{i*}(z_1\oplus z_2)\|_{\mathcal{Z}}^2=\sum_{i\in\mathbb{N}}\|\langle z_1\oplus z_2/t_1\oplus t_2\rangle\|_{\mathcal{H}}^2\\ \leqslant B_1\|z_1\|_{\mathcal{Z}_1}^2\leq B_1\|z_1\oplus z_2\|_{\mathcal{Z}}^2.\end{aligned}$$

这表明 $\{t_1^i\oplus t_2^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个 K-$\flat$-框架，其界为 $\mathcal{Z}$ A_1 和 B_1。

例 6。 取 $\mathcal{H}=\mathbb{R}^3$、 $\mathcal{B}=\mathbb{R}^2$,和 $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^4$，使得 $(e_1$、 e_2、 $e_3)$、$(f_1$、 $f_2)$ $and(u_1$、 u_2、 u_3、 $u_4)$ 分别是它们的标准基。定义双线性形式 b： $\mathcal{H}\times\mathcal{B}\to\mathcal{Z}$ 如下

$$\begin{aligned}&b(e_1,f_1)=u_1-u_2,\quad b(e_2,f_1)=u_1+u_2,\quad b(e_3,f_1)=u_3,\\&b(e_1,f_2)=u_1+u_2,\quad b(e_2,f_2)=-u_1+u_2,\quad b(e_3,f_2)=u_4.\end{aligned}$$

对于 $h=\sum_{i=1}^3h_ie_i$ 和 $x=x_1f_1+x_2f_2$，我们有

$$b(h,x)=[h_1(x_1+x_2)+h_2(x_1-x_2)]u_1+[h_1(-x_1+x_2)+h_2(x_1+x_2)]u_2+h_3x_1u_3+h_3x_2u_4.$$

and,

$$\|b(h,x)\|_{\mathcal{Z}}^2 = 2(h_1^2+h_2^2)(x_1^2+x_2^2)+h_3^2(x_1^2+x_2^2).$$

因此

$$\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\| \leqslant \|b(h,x)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \sqrt{2}\|h\|_{\mathcal{H}}\|x\|.$$

另一方面 $\mathcal{R}(b)=\mathbb{R}^4=\mathcal{Z}$。
令 $z=\sum_{i=1}^4 z_i u_i \in \mathcal{Z}$，则

$$\langle b(h,x),z\rangle_{\mathcal{Z}} = \langle h,\langle z/x\rangle\rangle_{\mathcal{H}}.$$

并且

$$\langle b(h,x),z\rangle_{\mathcal{Z}} = h_1[(x_1+x_2)z_1+(-x_1+x_2)z_2]+h_2[(x_1-x_2)z_1+(x_1+x_2)z_2]+h_3[x_1z_3+x_2z_4].$$

由此可得,

$$\langle z/x\rangle = [(x_1+x_2)z_1+(-x_1+x_2)z_2]e_1+[(x_1-x_2)z_1+(x_1+x_2)z_2]e_2+[x_1z_3+x_2z_4]e_3.$$

取 $x=f_1+f_2$，得到

$$\langle z/x\rangle = 2z_1e_1+2z_2e_2+(z_3+z_4)e_3.$$

因此

$$\|\langle z/x\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = 4z_1^2+4z_2^2+z_3^2+z_4^2+|z_3z_4| \leqslant 4\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z\in\mathcal{Z}.$$

那么，我们可以说 $\{x=f_1+f_2\}$ 是 *b-Bessel* 序列，属于 $\mathcal{Z}=\mathbb{C}^4$。现在考虑 $\mathbb{C}u_1\oplus\mathbb{C}u_2$上的线性正交投影：

$$K:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$$

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)\mapsto(z_1,z_2)$$

于是我们很容易得到

$$\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \|\langle z/x\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant 4\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

而 $\{x=f_1+f_2\}$ 成为 $\mathcal{Z}$ 上的 K-b-框架，其界为 $A=1$ 和 $B=4$。

引理2.1。若 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\flat$-正交归一基，且 $z\in\mathcal{Z}$，使得 $z=\sum\flat(h_i,x_i)$，$_{i\in\mathbb{N}}h_i\in\mathcal{H}$，$\forall i\in\mathbb{N}$，则

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

证明。 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 $\flat$-正交归一的，因此对于任意 i， $j\in$N，我们有 $\langle\flat(h_i,x_i)$ $/x_i\rangle=\delta_i^j h_{i\circ}$ 因此

$$\left\langle\sum_{i\in\mathbb{N}}\flat(h_i,x_i)/x_j\right\rangle=\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i^j h_i.$$

并且由于 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 $\mathcal{Z}$的 $\flat$-基，因此每个 $z\in\mathcal{Z}$都可以唯一表示为 $z=\sum\flat(h_i,x_i)$。这$_{i\in\mathbb{N}}$意味着 $\langle z/x\rangle=\sum$

对于 $i=j$，我们有 $\overset{i\in\mathbb{N}}{\langle z/x_j\rangle}=h_{j\circ}$ 因此

$$\langle h_j,\langle z/x_j\rangle\rangle_{\mathcal{H}}=\|h_j\|_{\mathcal{H}}^2,$$

$\Rightarrow$

$$\langle\flat(h_j,x_j),z\rangle_{\mathcal{Z}}=\|h_j\|_{\mathcal{H}}^2,$$

$\Rightarrow$

$$\left\langle\sum_{j\in\mathbb{N}}\flat(h_j,x_j),z\right\rangle_{\mathcal{Z}}=\sum_{j\in\mathbb{N}}\|h_j\|_{\mathcal{H}}^2=\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

■

定理 **2.1.** 序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是 K-$\flat$-*Bessel* 序列，当且仅当算子 r

$$\begin{aligned}T:l_2(\mathcal{H})&\to\mathcal{Z}\\\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}&\mapsto\sum_{i\in\mathbb{N}}\flat(h_i,x_i)\end{aligned}$$

定义良好、有界、具有闭值域，并且$\|T\|\leq\sqrt{B}$.此外，其伴随算子 $T^*\colon\mathcal{Z}\longrightarrow l_2(\mathcal{H})$由 $T^*(z)$ $=\{\langle z/x_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$确定。

证明。设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是 K-$\flat$-Besselian，界为 B。级数$\sum_{i\in\mathbb{N}}\flat(h_i,x_i)$ 对每个$\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in l_2(\mathcal{H})$ 都收敛。设 $n,m\in$N，并令 $z_n=\sum_{i=1}^n\flat(h_i,x_i)$，则有

$$\begin{aligned}\|z_m-z_n\|_{\mathcal{Z}}&=\sup_{\|z\|=1}\left|\left\langle\sum_{i=n+1}^m\flat(h_i,x_i),z\right\rangle_{\mathcal{Z}}\right|\\&=\sup_{\|z\|=1}\left|\sum_{i=n+1}^m\langle h_i,\langle z/x_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}}\right|\\&\leqslant\sup_{\|z\|=1}\sum_{i=n+1}^m\|h_i\|_{\mathcal{H}}\|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}\\&\leqslant\sup_{\|z\|=1}\left(\sum_{i=n+1}^m\|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=n+1}^m\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{B}\left(\sum_{i=n+1}^m\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

注意，当 n 趋于 ∞ 时，$\left(\sum_{i=n+1}^{m}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 趋于 0，因此 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足柯西判别准则，故其收敛。我们断言算子 T 定义良好，并且 $\|T\|\leq\sqrt{B}$。

反过来，假设 T 定义良好，并且 $\|T\|\leq\sqrt{B}$。令 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset l_2(\mathcal{H})$ 和 $z\in\mathcal{Z}$，我们有

$$\begin{aligned}\langle T(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}),z\rangle_{\mathcal{Z}}&=\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle\flat(h_i,x_i),z\rangle_{\mathcal{Z}}\\&=\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle h_i,\langle z/x_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}}\\&=\langle\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}},\{\langle z/x_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle_2.\end{aligned}$$

这给出了伴随算子的表达式

$$T^*(z)=\{\langle z/x_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}},\quad\forall z\in\mathcal{Z}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}}\|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2=\|T^*(z)\|_2^2&\leq\|T^*\|^2\|z\|_{\mathcal{Z}}^2\\&=\|T\|^2\|z\|_{\mathcal{Z}}^2\leq B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.\end{aligned}$$

因此，$\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 K-$\flat$-Bessel族。 ■

T 称为 K-$\flat$-合成算子，而 T^* 称为 K-$\flat$-分析算子。

定义 2.4。假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 K-$\flat$-框架，界为 A 和 B，则由下式定义的算子S：$\mathcal{Z}\longrightarrow\mathcal{Z}$：

$$S(z)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\flat\left(\langle z/x_i\rangle,x_i\right),\quad\forall z\in\mathcal{Z}.\tag{9}$$

称为 K-$\flat$-框架算子，对应于 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，且 $S=TT^*$。

定理 2.2。设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$ 是 K-$\flat$-框架，其 $\mathcal{Z}$ 的界为 A，B 且其 K-$\flat$-框架算子为 S。则 S 在 $\mathcal{Z}$ 中是有界、正且自伴的。

证明。对所有 $z\in\mathcal{Z}$,

$$\langle Sz,z\rangle_{\mathcal{Z}}=\left\langle\sum_{i\in\mathbb{N}}\flat\left(\langle z/x_i\rangle,x_i\right),z\right\rangle_{\mathcal{Z}}=\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle\flat\left(\langle z/x_i\rangle,x_i\right),z\rangle_{\mathcal{Z}}=\sum_{i\in\mathbb{N}}\|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2;\tag{10}$$

这意味着 S 是正的，并且由于 $S=TT^*$，$S^*=(TT^*)^*=TT^*$，所以 S 是自伴的。
最后，将（7）和（10）合并可得，$\exists 0<A\leq B<\infty$，因此

$$A\langle K^*z,K^*z\rangle_{\mathcal{Z}}=A\langle KK^*z,z\rangle_{\mathcal{Z}}\leq\langle Sz,z\rangle_{\mathcal{Z}}\leq B\langle z,z\rangle_{\mathcal{Z}},\quad\forall z\in\mathcal{R}(K),$$

因此

$$AKK^* \leq S \leq BI_{\mathcal{Z}}.$$

■

命题 2.1. 设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 K-♭-框架，界为 A 和 B。若 $\mathcal{R}(K)$ 是闭的，则S 在 $\mathcal{R}(K)$上可逆，而且

$$B^{-1} \leq \|S^{-1}\| \leqslant A^{-1}\|K^\dagger\|^2.$$

证明。 假设 $\mathcal{R}(K)$ 是闭的，则存在 $K^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ 使得

$$KK^\dagger z = z, \quad \forall z \in \mathcal{R}(K),$$

由 (10) 可得

$$\langle Sz, z\rangle_{\mathcal{Z}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \geq A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

并且 $\langle Sz, z\rangle_{\mathcal{Z}} \leq \|Sz\|_{\mathcal{Z}}\|z\|_{\mathcal{Z}}$，因此 $A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leq \|Sz\|_{\mathcal{Z}}\|z\|_{\mathcal{Z}}$。
另一方面，有

$$\|z\|_{\mathcal{Z}} = \|KK^\dagger z\|_{\mathcal{Z}} = \|(K^\dagger)^*K^*z\|_{\mathcal{Z}}, \ \ (since\ (KK^\dagger)^* = Id_{\mathcal{R}(K)}).$$

于是，对于所有 $z \in \mathcal{R}(K)$，我们得到

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leq \|(K^\dagger)^*\|^2\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 = \|K^\dagger\|^2\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2,$$

⇒

$$A\|K^\dagger\|^{-2}\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leq A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leq \|Sz\|_{\mathcal{Z}}\|z\|_{\mathcal{Z}},$$

⇒

$$A\|K^\dagger\|^{-2}\|z\|_{\mathcal{Z}} \leq \|Sz\|_{\mathcal{Z}}.$$

因此，根据定理 1.2 的 iii)， S^* 是满射， S 是单射；但由于 S 是自伴的，故 S 在 $\mathcal{R}(K)$上可逆。我们还有

$$\|SS^{-1}z\|_{\mathcal{Z}} = \|z\|_{\mathcal{Z}} \leqslant B\|S^{-1}z\|_{\mathcal{Z}} \leqslant B\|S^{-1}\|\|z\|_{\mathcal{Z}} \Rightarrow \|S^{-1}\| \geq B^{-1}.$$

最后，我们证明了

$$A\|K^\dagger\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{-2}\|z\|_{\mathcal{Z}} \leq \|Sz\|_{\mathcal{Z}},$$

因此

$$A\|K^{\dagger}\|^{-2}\|S^{-1}z\|_{\mathcal{Z}} \leq \|SS^{-1}z\|_{\mathcal{Z}}.$$

我们得出

$$\|S^{-1}\| \leqslant A^{-1}\|K^{\dagger}\|^{2}, \quad \forall z \in \mathcal{R}(K).$$

■

备注 2.2. 当 S 在 $\mathcal{R}(K)$上可逆时，我们有

$$SS^{-1}(z) = S^{-1}S(z) = z, \quad (\forall z \in \mathcal{R}(K)).$$

⇔

$$z = \sum_{i\in\mathbb{N}} \flat\left(\left\langle S^{-1}(z)/x_i\right\rangle, x_i\right), \quad (\forall z \in \mathcal{R}(K)).$$

⇔

$$z = \sum_{i\in\mathbb{N}} S^{-1}\left(\flat(\langle z/x_i\rangle, x_i\right), \quad (\forall z \in \mathcal{R}(K)).$$

若 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个 $\flat$-框架，则

$$z = \sum_{i\in\mathbb{N}} \flat\left(\left\langle S^{-1}(z)/x_i\right\rangle, x_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} S^{-1}\left(\flat(\langle z/x_i\rangle, x_i\right), \quad (\forall z \in \mathcal{Z}).$$

定理 2.3. 设 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ 具有闭值域。序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 构成 K-$\flat$-框架，当且仅当算子对于 $\mathcal{R}(K)$而言，

$$\begin{aligned} T : l_2(\mathcal{H}) &\to \mathcal{Z} \\ \{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} &\mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \flat(h_i, x_i) \end{aligned}$$

在 $\mathcal{R}(K)$上定义良好、有界且满射。

证明。设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$的一个 K-$\flat$-框架，则它在 $\mathcal{Z}$中是 K-$\flat$-Bessel 序列。因此，根据定理 2. 1 T 定义良好。设 $S = TT^{*}$ 为相应的 K-$\flat$-框架算子，我们已证明 S在 $\mathcal{R}(K)$上满射，因此 T 在 $\mathcal{R}(K)$ 上也满射。

反过来，su 假设 T 有定义且为满射，则根据定理 2.1 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 K-$\flat$-Besselian，并且

且 T 也是满射，则对每个 $z \in \mathcal{R}(K)$，存在 $\exists\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset l_2(\mathcal{H})$，使得 $T(\{y_i\}) = z$，并令 $T^\dagger z = \{y_i\}$

$$\begin{aligned}
\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^4 = |\langle K^*z, K^*z\rangle_{\mathcal{Z}}|^2 = |\langle z, KK^*z\rangle_{\mathcal{Z}}|^2 = |\langle T(\{y_i\})\ KK^*z\rangle_{\mathcal{Z}}|^2 \\
&= \left|\left\langle \sum_{i=1}^{\infty} b(y_i, x_i), KK^*z \right\rangle_{\mathcal{Z}}\right|^2 \\
&\leqslant \|K\|^4 \left|\sum_{i=1}^{\infty} \langle y_i, \langle z/x_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}}\right|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leqslant \|K\|^4 \left|\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|_{\mathcal{H}} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}\right|^2 \\
&\leqslant \|K\|^4 \|T^\dagger z\|_{\ell^2(\mathcal{H})}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leqslant \|K\|^4 \|T^\dagger\|^2 \|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leqslant \|K\|^4 \|T^\dagger\|^2 \|K^\dagger\|^2 \|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall z \in \mathcal{R}(K).
\end{aligned}$$

因此

$$\|K\|^{-4}\|T^\dagger\|^{-2}\|K^\dagger\|^{-2}\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{R}(K). \tag{11}$$

因此证明成立。 ■

定理 2.4。设 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$，使得 $\mathcal{R}(K)$ 是闭的。序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是$\mathcal{R}(K)$ 的 K-♭-框架，具有界 A 和 B，当且仅当满足以下两个条件：

1) $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{R}(K)$中是 ♭-完备的。

2) K-♭-合成算子定义良好，并且

$$\frac{A}{\|K^\dagger\|^2} \sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \|T(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}})\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant B \sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}. \tag{12}$$

证明。($\Rightarrow$) 假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{R}(K)$ 的 K-♭-框架，其界为 A 和 B。并且假设对于$\langle z/x_i\rangle = 0$、$\forall i \in \mathbb{N}$，我们有

$$A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{R}(K).$$

这意味着 $K^*z = 0$。 $\mathcal{R}(K)$ 是闭的，因此存在 $K^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$，使得 $KK^\dagger z = z$, $\forall z \in \mathcal{R}(K)$。我们有

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 = |\langle z, z\rangle_{\mathcal{Z}}| = |\langle KK^\dagger z, z\rangle_{\mathcal{Z}}| = |\langle K^\dagger z, K^*z\rangle_{\mathcal{Z}}| = |\langle K^\dagger z, 0\rangle_{\mathcal{Z}}| = 0.$$

因此 $z=0$，这意味着 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{R}(K)$ 上是 $\flat$-完备的。此外，我们声称，对于每个$z\in\mathcal{R}(K)$，都存在唯一的 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$，使得 $z=\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}b(h_i,x_i)=T(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}})$，只要 T 是满射，并且根据引理2.1，我们有

$$\frac{A}{\|K^{\dagger}\|^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}^{\infty}\|\langle\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}b(h_i,x_i)/x_j\rangle\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant B\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2,\quad\forall\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}$$

因此

$$\frac{A}{\|K^{\dagger}\|^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_j\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant B\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2,\quad\forall\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{A}{\|K^{\dagger}\|^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\|z\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant B\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{Z}}^2,\quad\forall\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{A}{\|K^{\dagger}\|^2}\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}^{\infty}\|T(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}})\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant B\sum_{i\in\mathbb{N}}^{\infty}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2,\quad\forall\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{H}.$$

($\Leftarrow$) 反之，假设 1) 和 2) 成立，根据定理 2.3，我们只需证明 T 在 $\mathcal{R}(K)$ 上是满射。假设 $T^*(z)=0$，则 $\|T^*(z)\|_{\mathcal{H}}=\sum\|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2=0$，$\forall i\in\mathbf{N}$。这意味着 $_{i\in\mathbb{N}}\|z\|_{\mathcal{R}(K)}=0\Rightarrow z=0$，我们得出 T^* 是单射，这意味着 T 在 $\mathcal{R}(K)$ 上是满射。

■

2.3 The $\flat$-伴随算子

在希尔伯特空间的研究中，算子理论占据了重要地位，其中有界算子发挥了重要作用。更具体地说，是伴随算子，也称为厄米共轭。现在，我们希望根据命题 1.1 中定义的 $\flat$-对偶乘积，对这一概念进行推广，从而给出一些关于保持 b-框架的结果。换言之，对于巴拿赫空间 $\mathcal{B}$ 上的有界线性算子 U，我们希望确定在什么条件下存在唯一的有界算子 V，其作用于希尔伯特空间 $\mathcal{Z}$ 并满足

$$\langle z/Ux\rangle=\langle Vz/x\rangle,\quad\forall x\in\mathcal{B},\ \forall z\in\mathcal{Z}.$$

从现在起，我们假设 $\mathcal{H}$ 是可分的，$\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是其标准正交基，双线性映射 $\flat$ 的值域稠密，并且 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 中的一个 $\flat$-正交归一基，使得

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\|<\infty.$$

将满足以下条件的 $\mathcal{B}$ 子空间记为 $\mathcal{X}$：

$$\mathcal{X} = \overline{span\{x_i / i \in \mathbb{N}\}}.$$

命题 2.2. 设 $U: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个有界线性算子，设 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$，并设 $V: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 是一个算子，使得对于每个 $z = \sum b(h_i, x_i) \in \mathcal{Z}_{,i\in\mathbb{N}}$

$$V^*(z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} = \mathfrak{b}(h_i, Ux_i),$$

则 V^* 定义良好、有界且线性。

证明。 V^* 在 $\mathcal{Z}$ 上定义良好，因为 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathfrak{b}$中的一个 -正交归一基， $\mathcal{Z}$ 并且它是线性的，事实上：对于每个 $z = \sum \mathfrak{b}(h_i, x_i),$ 以及 $z' = \sum \mathfrak{b}(h'_i, x_i) \in \mathcal{Z}$并令 $\gamma \in \mathbb{C}$，我们有$_{i\in\mathbb{N}\, i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} V^*(\gamma z + z') &= V^*\left(\gamma \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{b}(h_i, x_i) + \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{b}(h'_i, x_i)\right) \\ &= V^*\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{b}(\gamma h_i + h'i, x_i)\right) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{b}(\gamma h_i + h'i, Ux_i) \\ &= \gamma V^*(z) + V^*(z') \end{aligned}$$

V^* 也有界，事实上，对于所有 $z = \sum \mathfrak{b}(h_i, x_i) \in \mathcal{Z}_{,i\in\mathbb{N}}$，我们都有

$$\begin{aligned} \|V^* z\|_{\mathcal{Z}} = \left\| V^*\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{b}(h_i, x_i)\right)\right\|_{\mathcal{Z}} &= \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} V^*(\mathfrak{b}(h_i, x_i))\right\|_{\mathcal{Z}} \\ &= \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{b}(h_i, Ux_i)\right\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\mathfrak{b}(h_i, Ux_i)\|_{\mathcal{Z}} \\ &\leqslant \beta\|U\| \sum_{i\in\mathbb{N}} \|h_i\|_{\mathcal{H}} \|x_i\| \\ &\leqslant \beta\|U\| \sup_{i\in\mathbb{N}} \|h_i\|_{\mathcal{H}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| \end{aligned}$$

我们已经证明，对于所有 $z=\sum \flat(h_i,x_i)\in \mathcal{Z}_{,i\in\mathbb{N}}$，都有

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2=\sum_{i\in\mathbb{N}}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2,$$

因此 $\|z\|_{\mathcal{Z}}^2\geqslant$ 上确界$_{i\in\mathbb{N}}\|h_i\|_{\mathcal{H}}^2=$ （上确界$_{i\in\mathbb{N}}\|h_i\|_{\mathcal{H}}$）^{2}, 这意味着 $\|z\|_{\mathcal{Z}}\geqslant$ 上确界$_{i\in\mathbb{N}}\|h_i\|_{\mathcal{H}}$。因此我们有

$$\|V^*z\|_{\mathcal{Z}}\leqslant\beta\|U\|\sum_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\|\|z\|_{\mathcal{Z}}<\infty.$$

■

定理 2.5。设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 中的一个 $\flat$–标准正交基。设 $U:\ \mathcal{X}\to\mathcal{X}$ 是一个有界线性算子，则存在唯一的算子 $V\in\mathcal{L}$（$\mathcal{Z}$），使得 $\forall z\in\mathcal{Z}$,

$$\langle Vz/x_i\rangle=\langle z/Ux_i\rangle,\quad \forall i\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

证明。设 $\mathcal{H}$ 的标准正交基为 $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，并令$h=\sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_je_j\in\mathcal{H}$，注意，如果$z_k=\sum_{j\in\mathbb{N}}\flat(h_j,x_j)$，且当 $j\neq k$ 和 $h_k=h$时有 $h_j=0$，那么 z_k 也可以写成 $z_k=\flat(h,x_k)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j\flat(e_j,x_k)$。令 V 为 V^* 在 $\mathcal{Z}$ 上的伴随算子。令 $z\in\mathcal{Z}$，我们有

$$\langle V^*(\flat(h,x_i)),z\rangle_{\mathcal{Z}}=\langle\flat(h,Ux_i),z\rangle_{\mathcal{Z}}=\langle h,\langle z/Ux_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{14}$$

另一方面

$$\langle V^*(\flat(h,x_i)),z\rangle_{\mathcal{Z}}=\langle\flat(h,x_i),Vz\rangle_{\mathcal{Z}}=\langle h,\langle Vz/x_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{15}$$

由（14）和（15），对所有 $h\in\mathcal{H}$，我们得到

$$\langle h,\langle z/Ux_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}}=\langle h,\langle Vz/x_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}},$$

$\Rightarrow$

$$\forall i\in\mathbb{N},\ \ \langle z/Ux_i\rangle=\langle Vz/x_i\rangle.$$

现在假设还存在一个 W 也满足（16），则有

$$\langle z/Ux_i\rangle=\langle Vz/x_i\rangle=\langle Wz/x_i\rangle,\ \ \forall i\in\mathbb{N},$$

$\Rightarrow$

$$\langle(V-W)z/x_i\rangle=0,\ \ \forall i\in\mathbb{N},$$

$\Rightarrow$

$$V = W, \text{ on } \mathcal{X}.$$

因此， V 是唯一的。 ■

推论 2.1。 设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 中的一个 $\flat$–标准正交基。设 $U:\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个有界线性算子，则存在唯一的算子 $V \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ 使得，

$$\langle Vz/x\rangle = \langle z/Ux\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall z \in \mathcal{Z}. \tag{16}$$

我们称在 $\mathcal{Z}$ 上满足（16）的唯一算子为 U 的 $\flat$-伴随算子，并记为 $U^\flat$。

例 7。 回到例（2），考虑有界线性算子 $U:\ \mathcal{B} \to \mathcal{B}$，使得 $U(f_1) = f_1 + f_2$ 且 $U(f_2) = 0$。我们有

$$\langle b(h, Ux), z\rangle = \langle b(h, x_1f_1 + x_1f_2), z\rangle = h_1x_1z_1 + h_2x_1z_3.$$

因此， $\langle z/Ux\rangle = x_1z_1e_1 + x_1z_3e_2$.

设 $V:\ \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 满足 $\langle Vz/x\rangle = x_1z_1e_1 + x_1z_3e_2$，我们可以将 V 写成

$$Vz = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^1 z_i u_1 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 z_i u_2 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^3 z_i u_3.$$

回顾一下， $\langle z/x\rangle = (x_1z_1 + x_2z_2)\, e_1 + x_1z_3e_2$，因此

$$\langle Vz/x\rangle = \left(x_1 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^1 z_i + x_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 z_i \right) e_1 + x_1 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^3 z_i e_2.$$

Then

$$\left(x_1 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^1 z_i + x_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2 z_i \right) e_1 + x_1 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^3 z_i e_2 = x_1z_1e_1 + x_1z_3e_2.$$

通过简单计算，我们得到 U 的 b-伴随算子，

$$U^b = V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此， $U^bz = z_1u_1 + z_3u_3, \quad \forall z \in \mathcal{Z}$.

例8. 设 $\mathcal{H}=\ell^2(\mathbb{C})\cap\ell^1(\mathbb{C})\ell^2(\mathbb{C})$, $\mathcal{Z}=\ell^2(\mathbb{C})$, 和 $\mathcal{B}=\ell^\infty(\mathbb{C})$。并设

$$U:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$$
$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

我们有 $\|U\|=1$，并考虑双线性映射

$$\phi:\mathcal{H}\times\mathcal{B}\to\mathcal{Z}$$
$$(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})\mapsto\{h_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

显然: $\|\phi(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})\|_2\le\|\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\mathcal{H}}\|\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$.
并且对于每个 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{Z}$，我们有

$$\langle\phi\left(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right),\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle_2=\{h_nb_n\bar{z_n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{h_n\overline{b_n}\overline{z_n}\}_{n\in\mathbb{N}}=\langle\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{\overline{b_n}z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

因此，对于每个 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{Z}$ 和每个 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{B}$，我们有，$\langle\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}},\ \{b_n\}\rangle_{\mathcal{H}}=\{b_nz_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 由此

$$\begin{aligned}\langle\phi\left(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},U(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}})\right),\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle_2&=\langle\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{\overline{b_{n+1}}z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle_{\mathcal{H}}\\&=\langle\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\rangle_{\mathcal{H}}\\&=\langle\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}},\langle V(\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}})/\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle\rangle_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

其中 $\sigma_k=b_kz_{k-1}$，对于 $k>0$ 和 $\sigma_0=0$，并且

$$V:\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$$
$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\mapsto\{0,z_0,z_1,...,z_n,..)$$

$V=U^\flat$ 是 U 在 $\ell^2(\mathbb{C})$ 上的 $\flat$-伴随算子。（注意，U 在 $\ell^2(\mathbb{C})$ 中的 b-伴随算子与 U 在 $\ell^\infty(\mathbb{C})$ 上的伴随算子一致。）

注2.3. 推论 *2.1* 的逆命题并不成立；事实上，对于有界线性算子 V: $\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$，我们并不总能找到有界线性算子 U: $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$，使得

$$\langle Vz/x\rangle=\langle z/Ux\rangle,\quad\forall z\in\mathcal{Z},\forall x\in\mathcal{B}.$$

我们可以通过下面这个简单的例子来说明:

例9。 设 $\mathcal{H}=\mathbb{R}^3$、$\mathcal{B}=\mathbb{R}^2$, 和 $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^4$,，并设 (e_1,e_2,e_3)、(f_1,f_2) 以及 (u_1,u_2,u_3,u_4) 分别为它们的

标准基。考虑满足下列条件的双线性映射 b： $\mathcal{H}\times\mathcal{B}\to\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} b(e_1,f_1)&=u_1, \quad & b(e_2,f_1)&=u_3, \quad & b(e_3,f_1)&=u_1-u_2,\\ b(e_1,f_2)&=u_2, \quad & b(e_2,f_2)&=u_4, \quad & b(e_3,f_2)&=u_1+u_2. \end{aligned}$$

令 $h=\sum_{i=1}^{3}h_ie_i\in\mathcal{H}$ 和 $x=x_1f_1+x_2f_2\in\mathcal{B}$，我们有

$$b(h,x)=[(h_1+h_3)x_1+h_3x_2]u_1+[(h_1+h_3)x_2-h_3x_1]u_2+h_2x_1u_3+h_2x_2u_4,$$

对于每个 $z=\sum_{i=1}^{4}z_iu_i\in\mathcal{Z}$，我们有

$$\langle b(h,x),z\rangle=h_1(x_1z_1+x_2z_2)+h_2(x_1z_3+x_2z_4)+h_3[(x_1+x_2)z_1+(x_2-x_1)z_2],$$

因此我们断言

$$\langle z/x\rangle=(x_1z_1+x_2z_2)e_1+(x_1z_3+x_2z_4)e_2+[(x_1+x_2)z_1+(x_2-x_1)z_2]e_3,\quad \forall z\in\mathcal{Z},\forall x\in\mathcal{B}.$$

现在考虑有界线性算子 V： $\mathcal{Z}\to\mathcal{Z}$，其定义为 $V(u_1)=u_2$ 和 $V(u_2)=V(u_3)=V(u_4)=0$。我们有 $\langle Vz/x\rangle=x_2z_1e_1+(x_2-x_1)z_1e_3$。假设存在一个有界线性算子 U： $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$，使得 $\langle Vz/x\rangle=\langle z/Ux\rangle$。 U 将满足 $U(x_1)=\alpha x_1+\beta x_2$ 和 $U(x_2)=\gamma x_1+\delta x_2$。于是我们有

$$\begin{aligned}\langle z/Ux\rangle=&[(\alpha x_1+\beta x_2)z_1+(\gamma x_1+\delta x_2)z_2]e_1+[(\alpha x_1+\beta x_2)z_3+(\gamma x_1+\delta x_2)z_4]e_2\\ &+([(\alpha+\gamma)x_1+(\beta+\delta)x_2]z_1+[(\alpha-\gamma)x_1+(\beta-\delta)x_2]z_2)\,e_3.\end{aligned}$$

我们得到 $\alpha=\delta=\gamma=0$和 $\beta=1$，这与事实矛盾；因为否则将有$\beta x_2z_3e_2\neq 0$， $\forall x_2\in\mathcal{B}$, $\forall z_3\in\mathcal{Z}$，这并不成立。因此我们无法找到 U。

2.4 稳定性与保持

设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$、 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{B}$中的两个序列，并假设双线性映射 $\flat$ 具有稠密值域。我们有如下结果：

命题2.3。（求和稳定性）。

若 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$和 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 $\flat$−的 $\mathcal{Z}$框架，且 $T_x(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}})=\sum\flat(h_i,x_i)$，以及 $T_y(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}})=\sum_{i\in\mathbb{N}}\flat(h_i,\ y_i)$，分别是它们对应的 $\flat$-合成算子，作用于 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\ell^2(\mathcal{H})$。$_{i\in\mathbb{N}}$

那么 $\{x_i + y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的 $\flat$–框架，其 $\flat$-合成算子由下式给出

$$T_{x+y}(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = T_x(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) + T_y(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}),\ \forall\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathcal{H}).$$

此外

$$\|T_{x+y}\| \leq \sqrt{B_x} + \sqrt{B_y}.$$

证明。假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的 $\flat$–框架，其上界分别为 B_x 和 B_y。设 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathcal{H})$，我们有

$$\begin{aligned} T_{x+y}(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = T_x(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) + T_y(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, x_i + y_i). \end{aligned}$$

T_{x+y} 定义良好，因为我们有

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, x_i + y_i) \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, x_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \flat(h_i, y_i) \right\|.$$

显然，$\|T_{x+y}\| \leq \|T_x\| + \|T_y\| \leq \sqrt{B_x} + \sqrt{B_y} < \infty$。
现在设 $z \in \mathcal{Z}$，

$$\langle T_{x+y}(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}), z\rangle_{\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \flat(h_i, x_i + y_i), z\rangle_{\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h_i, \langle z/x_i + y_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\langle z/x_i + y_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

因此，$\flat$-分析算子 T^* 由 $T^*(z) = \{\langle z/x_i + y_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$给出，$\forall z \in \mathcal{Z}$.现在设 $z, z' \in \mathcal{Z}$，使得 $T^*(z) = T^*(z')$，这意味着

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \langle z/x_i + y_i\rangle = \langle z'/x_i + y_i\rangle,$$

$\Rightarrow$

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathbb{N},\ \langle b(h, x_i + y_i), z\rangle_{\mathcal{Z}} = \langle b(h, x_i + y_i), z'\rangle_{\mathcal{Z}},$$

$\Rightarrow$

$$\forall h \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathbb{N},\ \langle b(h, x_i + y_i), z - z'\rangle_{\mathcal{Z}} = 0.$$

由于 $\mathcal{R}(\flat)$ 稠密，因此 $\mathcal{Z} = \overline{\mathcal{R}(\flat)} \oplus \ker(\flat) \Rightarrow \ker(\flat) = \{0\}$，所以必然有 $z = z'$。这意味着 T 是满射；于是根据 [9] $\{x_i + y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的定理 12，$\flat-$ 是 $\mathcal{Z}$ 的框架。 ■

推论 2.2. 若 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$和 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 K-$\flat$-框架，适用于 $\mathcal{Z}$，且若 $T_x(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum \flat(h_i, x_i)$，且$_{i\in\mathbb{N}}$

$T_y(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = \sum \flat(h_i,\ y_i)$，分别是它们对应的 K-$\flat$-合成算子，适用于 $\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset_{i\in\mathbb{N}} \ell^2(\mathcal{H})$。那么 $\{x_i + y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 K-$\flat$-框架，适用于 $\mathcal{R}(K)$，其 K-$\flat$-合成算子为

$$T_{x+y}(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = T_x(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}) + T_y(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}),\ \forall \{h_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathcal{H})$$

而且 $\|T_{x+y}\| \leq \sqrt{B_x} + \sqrt{B_y}$。

证明。 证明与命题2.3的证明类似，唯一不同的是，在这种情况下，除非 K 具有闭值域，否则 K-$\flat$-合成算子无法满射，而且该结果在 $\mathcal{R}(K)$ 之外不成立。■

命题 2.4。 设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$的一个 K-$\flat$-框架，并设 $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ 满足 $\mathcal{R}(Q) \subseteq \mathcal{R}(K)$。那么 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 也是 $\mathcal{Z}$的一个 Q-$\flat$-框架。

证明。 假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$的一个 K-$\flat$-框架，则存在 $0 < A \leq B < \infty$，使得

$$A\|K^*z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \| \langle z/x_i \rangle \|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{R}(K).$$

设 $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，满足 $\mathcal{R}(Q) \subseteq \mathcal{R}(K)$，则根据定理 1.1，存在 $\lambda > 0$ 使得 $TT^* \leq \lambda^2 KK^*$，于是 $\forall z \in \mathcal{R}(Q)$，对于 $\lambda > 0$, $\langle QQ^*z, z\rangle_{\mathcal{Z}} \leq \langle \lambda^2 KK^*z, z\rangle_{\mathcal{Z}}$，我们有，这意味着

$$\begin{aligned}
\langle QQ^*z, z\rangle_{\mathcal{Z}} \leq \lambda^2 \langle KK^*z, z\rangle_{\mathcal{Z}} &\Rightarrow \langle Q^*z, Q^*z\rangle_{\mathcal{Z}} \leq \lambda^2 \langle K^*z, k^*z\rangle_{\mathcal{Z}} \\
&\Rightarrow \|Q^*z\|^2 \leq \lambda^2 \|K^*z\|^2 \\
&\Rightarrow \frac{A}{\lambda^2}\|Q^*z\|^2 \leq \|K^*z\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \| \langle z/x_i \rangle \|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.
\end{aligned}$$

因此， $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个具有界 $\frac{A}{\lambda^2}$ 和 B 的 Q-$\flat$-框架。 ■

定理 2.6。 设 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 中的一个 $\flat$-正交归一基，并且设 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ 具有闭值域，则当且仅当存在一个有界满射算子$\Omega : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 使得， $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 构成 $\mathcal{R}(K)$ 的 K-$\flat$-框架:

$$\Omega(\flat(h, y_i)) = \flat(h, x_i), \quad \forall h \in \mathcal{H},\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

证明。 ($\Rightarrow$) 设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$，并设 $\Omega : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ 是一个有界满射算子，使得 $\Omega(\flat(h, y_i)) = \flat(h, x_i)$ $\forall h \in \mathcal{H}$, $\forall i \in \mathbb{N}$。设 $z \in \mathcal{Z}$，显然 $\langle z/x_i\rangle = \langle \Omega^* z/y_i\rangle$. 这意味着

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle \Omega^* z/y_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \langle \Omega^* z/y_i\rangle, \langle \Omega^* z/y_i\rangle\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \flat(\langle \Omega^* z/y_i\rangle, y_i), \Omega^* z\rangle_{\mathcal{Z}} = \|\Omega^* z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

首先，我们有 $\|\Omega^* z\|_{\mathcal{Z}} \leq \|\Omega\| \|z\|_{\mathcal{Z}}$。另一方面，$\Omega$ 是满射，因此根据定理 1.2 的 iii），

存在 $A>0$ 使得 $\|\Omega^* z\| \geq A\|z\|_{\mathcal{Z}} \geqslant \dfrac{A}{\|K^*\|}\|K^* z\|$。

(⇐) 反之，假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{R}(K)$ 的 K-$\flat$-框架，则由定理 2.3 可知，合成算子

$$T\left(\{h_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \flat(h_i, x_i), \quad \forall h_i \in \mathcal{H}.$$

在 $\mathcal{R}(K)$ 上定义良好且为满射。现在定义 $\tau\colon \mathcal{R}(K) \to \ell^2(\mathcal{B})$，使得 $\tau(z) = \{\langle z/y_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}, \forall z \in \mathcal{R}(K)$。我们有 $\tau(\flat(h, y_j)) = \{\langle \flat(h, y_j)/y_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\delta_{ij} h\}_{i\in\mathbb{N}}$。现在考虑算子 $\Omega\colon \mathcal{R}(K) \to \mathcal{R}(K)$，使得 $\Omega = T\tau$。容易验证 Ω 有界且为满射，并且

$$\Omega(\flat(h, y_i)) = T(\{\delta_{ij} h\}_{i\in\mathbb{N}}) = \flat(h, x_i), \quad \forall h \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

■

定理 2.7。假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的 $\flat$-标准正交基，并设 $U\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个连续有界线性算子。若 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 $\mathcal{Z}$ 的一个 $\flat$-框架，框架界为 A，且 B，则 $\{Ux_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是一个 $(U^{\flat *})$-$\flat$-框架，框架界为 $A' = A$和 $B' = B\|U^{\flat}\|^2$.。其中 $U^{\flat *}$表示 $U^{\flat}$ 在 $\mathcal{Z}$ 上的伴随算子。

证明。 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$的 $\flat$-框架，因此对所有 $z \in \mathcal{Z}$,

$$A\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

根据定理 2.5，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/Ux_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle U^{\flat} z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2$$

因此

$$A\|U^z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/Ux_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|U^{\flat} z\|_{\mathcal{Z}}^2. \tag{17}$$

这意味着

$$A\|(U^{\flat})^* z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/Ux_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|U^{\flat}\|\|z\|_{\mathcal{Z}}^2, \quad \forall z \in \mathcal{Z}.$$

■

推论 2.3。设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{Z}$ 中是 $\flat$-完备的，并令 $U\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 为一个连续有界线性算子。令 $U^{\flat}$ 为 U 在 $\mathcal{Z}$ 中的 $\flat$-伴随算子，并设其具有闭值域。若 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 $\flat$-框架，其界为 A 和 B，则 $\{Ux_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 也是 $\mathcal{Z}$ 的一个 $\flat$-框架，其界为 $A' = \|U^{\flat\dagger}\|^{-2}$ 和 $B' = B\|U^{\flat}\|^2$。其中，$U^{\flat\dagger}$ 是 $U^{\flat}$ 在 $\mathcal{R}(U^{\flat})$ 上的伪逆。

证明。 设 $\mathcal{R}(U^\flat)$ 是闭的，则

$$\exists U^{\flat\dagger} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}); \quad U^\flat U^{\flat\dagger} z = z, \ \ \forall z \in \mathcal{R}(U^\flat),$$

因此 $\|z\|_{\mathcal{Z}} = \|U^\flat U^{\flat\dagger} z\|_{\mathcal{Z}}$，于是对所有 $z \in \mathcal{R}(U^\flat)$，有：

$$\|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \|U^\flat z\|_{\mathcal{Z}}^2 \|U^{\flat\dagger} z\|^2 \Rightarrow \|U^{\flat\dagger} z\|^{-2} \|z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \|U^\flat z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

利用 (17)，我们证明该结果。 ■

定理 2.8。 设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 中的 $\flat$-正交归一基，且设 $U: \ \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 是一个连续有界线性算子，并设 $K \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$。假设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 K-$\flat$-框架，其界为 A 和 B，则 $\{Ux_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 $(U^{\flat *}K)$-$\flat$-框架，其界为 $A' = A$ 和 $B' = B\|U^\flat\|^2.$，其中 $U^{\flat *}$ 表示 $U^\flat$ 在 $\mathcal{Z}$ 中的伴随算子。

证明。 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个 K-$\flat$-框架，其界为 A 和 B，则

$$A\|K^* z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

根据定理 2.5

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/Ux_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle U^\flat z/x_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2$$

因此

$$A\|K^*(U^\flat z)\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/Ux_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|U^\flat z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

这意味着

$$A\|(U^{\flat *}K)^* z\|_{\mathcal{Z}}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|\langle z/Ux_i\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant B\|U^b\|\|z\|_{\mathcal{Z}}^2.$$

■

声明

披露声明：作者声明，他们未获得任何经济支持，也不存在利益冲突。

致谢： 作者谨此感谢并诚挚感谢审稿人提出的意见，这些意见将有助于提高稿件的质量。

数据可用性声明： 本文没有相关数据集。

参考文献

[1] R. Balan。傅里叶框架和小波 Riesz 基的稳定性定理，《傅里叶分析与应用杂志》，第 3 卷，第 5 期，第 499–504 页，1997 年。

[2] P. G. Casazza 和 O. Christensen。逆框架算子的逼近及其在 Gabor 框架中的应用，《逼近理论杂志》，第 103 卷，第 2 期，第 338–356 页，2000 年。

[3] O.Christensen，《框架与 Riesz 基导论》，Brikhouser，2016年。

[4] I.Daubechies、A.Grossmann 和 Y.Meyer，《无痛非正交展开》，《数学物理学杂志》，第 27 卷，第 5 期，第 1271–1283 页，1986年。

[5] I.Daubechies，《小波十讲》，SIAM，美国宾夕法尼亚州费城，1992年。

[6] R.G. Douglas，《关于希尔伯特空间上算子的主序、因子分解和值域包含》，《美国数学会会刊》17（2）（1966年），413–415。

[7] R.J.Duffin 和 A.C.Schaeffer，《一类非调和傅里叶级数》，《美国数学会汇刊》，第 72 卷，第 341–366 页，1952年。

[8] L.Gavruta。《算子框架》，《应用与计算调和分析》32（2012年），139–144

[9] [M.Ismailov、F.Guliyeva、Y.Nasibov. 关于双线性映射生成的希尔伯特框架的一种推广，Hindawi Publishing Corporation，《函数空间杂志》；2016年，第9516839号文章。]b-框架

[10] S.Kabbaj、M.Rossafi， $*$-K-g-希尔伯特 $\mathcal{A}$-模上的框架，《线性拓扑代数杂志》7（2018），63-71。
[11] S.Kabbaj、M.Rossafi， $*$-K-算子框架，适用于$End^{*}_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$，Asian-Eur. J. Math. 13（2020），2050060。[12] X.Xiao、Y.Zhu 和 L.Gavruta，希尔伯特空间中 K-框架的一些性质，Results Math. 63（2013），1243-1255。