arXiv:2303.16075v1 [math.RT] 28 Mar 2023

持久模的 Harder-Narasimhan滤过

MARC FERSZTAND、EMILE JACQUARD、VIDIT NANDA 和 ULRIKE TILLMANN

摘要。箭图表示的 Harder-Narasimhan类型是一种离散不变量，由定义在箭图顶点上的实值函数（称为中心荷）参数化。本文研究了持久模研究中出现的若干类箭图表示的 Harder-Narasimhan 类型的能力与局限。我们引入摩天楼不变量，它将支撑于单个顶点的中心荷对应的 HN 类型汇总起来，并将多参数持久模的秩不变量推广到任意箭图表示。我们的四项主要结果如下：（1）我们证明，在完全一般的情形下，摩天楼不变量严格细于秩不变量；（2）我们刻画了锯齿（因而也包括普通）持久模的完备中心荷集合；（3）我们将上述刻画推广到任意维数的矩形可分解多参数持久性模块；最后，（4）我们证明，尽管无嵌套梯形持久化模不存在单个完备中心荷，但存在一个有限的完备中心荷集合。

1. 引言

六十多年前，Mumford引入了半稳定性这一概念， [32,33]旨在为约化群作用于代数簇所产生的商空间构造良好性质。随后，Harder和Narasimhan描述了复曲线上有限秩向量丛模空间的一种分层，目的是计算其上同调群[17]。顶层由半稳定向量丛组成，而每个处于较低层的向量丛都具有一个有限长度的典范滤过，其关联的分次分量均为半稳定的，并且斜率严格递减（即次数与秩之比）。这一*Harder-Narasimhan*滤过在涉及向量丛和相干层的模空间问题中继续发挥着重要作用 [2, 20]；Rudakov更一般地证明了它对某些阿贝尔范畴中的对象的存在性与唯一性， [37]Bridgeland将其推广到三角范畴， [6] Haiden等人则将其推广到模格 [15]。King[23] 和Reineke [36] 的工作将Harder-Narasimhan形式体系扩展到了箭图表示范畴。

我们在此所做的努力，源于希望运用 Harder-Narasimhan 理论为多参数持久模构建同构不变量。一般而言，此类模是野型箭图的表示，因此不可能获得完备的[1] 离散不变量。尽管如此，寻找具有区分能力的不变量一直是

[1]如果两个持久模的“不变量”相等时它们必然同构，则称该不变量是完备的。1

拓扑数据分析中的核心主题。Carlsson 和 Zomorodian 最早开展了这方面的研究 [9], , 并提出了 秩不变量。此后，对多参数持久模的研究借助了来自众多不同领域的各种工具，包括层理论 [29, 22], 交换代数与同调代数 [31, 18, 26],格论 [30, 19, 5] 等等 [28]。

结果概述与摘要。 固定一个有限箭图Q ，并令$\mathbf{Rep}(Q)$ 表示取值于向量空间的有限维表示Q 的范畴。所谓中心荷，是指定义在顶点集合Q_0 上的任意实值函数 α [2]。考虑一个非平凡表示$V \in \mathbf{Rep}(Q)$，它将向量空间V_x 赋予顶点$x \in Q_0$。V 的 α-斜率为以下比值

$$\mu_\alpha(V) = \frac{\sum_{x\in Q_0} \alpha(x) \cdot \dim V_x}{\sum_{x\in Q_0} \dim V_x},$$

若对每个非平凡子表示$V' \subset V$，不等式 $\mu_\alpha(V) \geqslant \mu_\alpha(V')$ α成立，则称V 为 α-半稳定。

一旦固定Q上的中心荷 α ，每个非零表示V 都存在唯一的有限长度*Harder-Narasimhan*滤过 [36, 16]

$$0 = \mathbf{HN}^0_\alpha(V) \subsetneq \mathbf{HN}^1_\alpha(V) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{HN}^{n-1}_\alpha(V) \subsetneq \mathbf{HN}^n_\alpha(V) = V$$

其连续商$S^i := \mathbf{HN}^i_\alpha(V)/\mathbf{HN}^{i-1}_\alpha(V)$ 均为 α-半稳定，并且对所有i均满足 $\mu_\alpha(S^i) > \mu_\alpha(S^{i-1})$ 。因此，Harder-Narasimhan滤过提供了一种规范方法，可由 α-半稳定表示构造任意箭图表示。表示V沿 α 的**HN 型**是由函数组成的n元组

$$\mathbf{T}[V;\alpha] = (\underline{\dim}_{S^1}, \underline{\dim}_{S^2} \ldots, \underline{\dim}_{S^n}),$$

其中 $\underline{\dim}_{S^i}\colon Q_0 \to \mathbb{N}$ 为每个顶点 $x \in$ 指定自然数 $\dim S^i_x\, Q_0$.

在我们的论文中，生成的 子表示在顶点 x 处发挥着重要作用——它在同构意义下定义为包含 V_x的最小子表示 $\langle V_x\rangle \subset V$。函数 $\rho_V\colon Q_0 \times Q_0 \to \mathbb{N}$ 将每个 $(x、y)$ 映射到$\langle V_x\rangle_y$ 的维数，它极大地推广了 Carlsson 和 Zomorodian 的秩不变量。对于每个顶点 x，考虑中心荷 $\delta_x\colon Q_0 \to \mathbb{R}$ ，其将 x 映射为 1，并将所有其他顶点映射为 0。摩天楼不变量 δ_V 定义在 $\mathbf{Rep}(Q)$ 上，是由 HN 型 $\mathbf{T}[V;\delta_x]$ 组成的集合，并由 Q的顶点进行索引。

我们的第一个主要结果在第 3节中给出，可表述如下。

定理 （**A**）。 对于任意有限箭图 Q，在 $\mathbf{Rep}(Q)$ 上，摩天楼不变量比秩不变量更精细。

完整表述可参见定理3.5，其中我们给出了一个精确公式，用于根据 $\mathbf{T}[V$恢复 $\rho_V(x、y)$； $\delta_x]$。在后续工作中，我们将讨论摩天楼不变量的可计算性及其稳定性（相对于交错距离 [27]）。

[2]这是 阿贝尔群同态的虚部$K(\mathbf{表示}(Q)) \to \mathbb{C}$；参见第 2.2节。

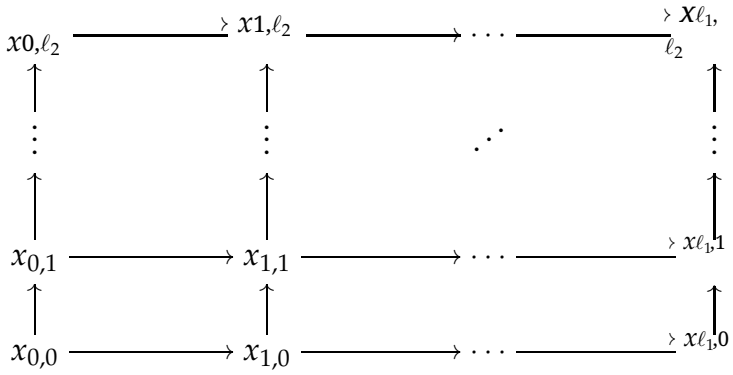
然后，我们在第 4 节专门讨论之字形持久模的情形——它们是任意（但有限）长度的 $\mathbb{A}$ 箭图的有限维表示 $\ell \geqslant 0$:

$$x_0 \overset{e_1}{\longrightarrow} x_1 \overset{e_2}{\longrightarrow} \cdots \overset{e_{\ell-1}}{\longrightarrow} x_{\ell-1} \overset{e_\ell}{\longrightarrow} x_\ell.$$

此处每条边 e_i 要么指向前方 $x_{i-1} \to x_i$ ，要么指向后方 $x_{i-1} \leftarrow x_i$；普通持久化模对应于所有 e_i 均指向前方的等向情形。根据 Gabriel定理，我们知道 任意一个此类箭图的表示 V 都能唯一分解为若干 区间表示的直和，这些表示支撑在子区间 $[a,b] \subset [0,\ell]$上。以非零重数出现的区间构成 条形码 ，对应于 V ——参见 [8]。我们利用对这些不可分解对象的了解，以及 Kinser 最近的一些工作 [24] ，证明以下结果，即下文中的定理 4.3。

定理 (**B**)。 之字形持久模范畴上的所有完备中心荷都可以分类；对于普通持久化模这一特殊情形，中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$是完备的，当且仅当 $\alpha(x_i) > \alpha(x_{i+1})$ 对所有 i 均成立。

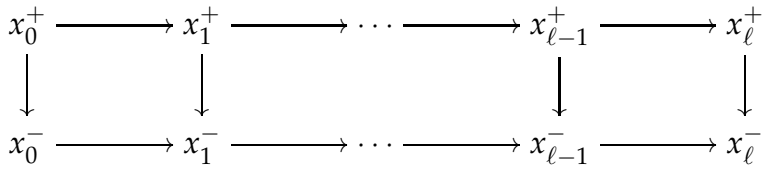
普通持久化模的自然d维类比（对于$d > 1$）是网格箭图的某些表示，其顶点由乘积 $[0,\ell_1] \times [0,\ell_2] \times \cdots \times [0,\ell_d]$ 中的整数点参数化，其中每个 $\ell_i \geqslant 1$。下面展示$d = 2$ 情形:



我们所关注的表示，是指其中所涉及的每个矩形都作为向量空间图表交换。不同于 $d = 1$ 情形，这些箭图属于野表示型；如上文所述，人们投入了大量精力，致力于为多参数持久模寻找良好的离散不变量。一个更易处理的子范畴由 可分解为矩形的表示构成；这类表示可以直和分解为显然的 d 维区间模类比。在此，我们确立如下结果，其中包括推论 5.4和定理 5.10。

定理(**C**)。 在多参数持久模范畴中，摩天楼不变量严格细化了秩不变量。此外，对于矩形可分解模构成的子范畴，位于映射空间 $Q_0 \to \mathbb{R}$ 中某个超平面排列之外的完备中心荷可被分类。

在第 6 节中，我们聚焦于由长度为 梯形箭图 的表示导出的二参数持久化模这一特殊情形 $\ell \geqslant 1$:



再次，每个矩形都要求交换。此类梯形持久模由（普通）持久模的态射产生。已知梯形箭图仅在 [12, 7] 时才具有有限表示型 $\ell \leqslant 3$。我们将研究范围限定于由这样一些表示张成的子范畴：将其顶行和底行视为普通持久模时，其条形码分解中不存在一对严格嵌套区间[3]。文献 [21, 第 5] 节证明了，对于所有 ℓ，该子范畴均为表示有限。本文针对这类 6.3命题和定理 6.6）中的无嵌套梯形持久模，得出如下结果。

定理 (D)。长度为 $\ell \geqslant 4$ 的无嵌套梯形持久模范畴上不存在完备中心荷；然而，对于所有 ℓ，都存在一个有限集 $A = A(\ell)$，其中包含的中心荷在该范畴上是完备的。

集合 $A(\ell)$ 在定义 6.10中有明确描述，其基数随 ℓ呈立方增长；该集合的每个元素都是至多两个摩天楼中心荷的 $\mathbb{R}$-线性组合。

致谢。 作者是拓扑数据分析中心的成员，该中心由英国工程与物理科学研究委员会资助，资助编号为 EP/R018472/1。VN 部分受到美国空军科学研究办公室资助，资助编号为 FA9550-22-1-0462，并感谢 Fabian Haiden 和 Frances Kirwan 提供了多次有益的讨论。作者感谢 Veronica Phan 提供了 [35] 引理 5.8 背后的关键思想。

2. 箭图表示的 HN 类型

本节中，我们确立记号，并回顾箭图表示及其 Harder-Narasimhan滤过的相关方面 [25, 38], ， 以及相应的 Harder-Narasimhan型 [36, 16]。

2.1. 箭图表示。箭图 Q 由以下数据构成：集合 Q_0，其元素称为顶点；集合 Q_1，其元素称为边；以及一对函数 $s, t : Q_1 \to Q_0$，分别称为源点映射和目标映射。通常将每条边 $e \in Q_1$ 描绘为一支从 $s(e) \longrightarrow$ 指向 $t(e)$ 的箭头。箭图 $Q = (s, t : Q_1 \to Q_0)$ 中的路径，是满足对所有 i 均有 $t(e_i) = s(e_{i+1})$ 的任意有限边序列 $p = (e_1, \ldots, e_k)$；若 Q 不存在满足 $s(e_1) = t(e_k)$ 的此类路径，则称 Q 为无环箭图。本文假设所有箭图都只有有限个顶点和边，并且我们主要关注无环箭图。

[3]若两个区间 $[i,j]$ 和 $[i\prime,j\prime]$ 满足 $i < i\prime$ 且 $j\prime < j$，则称它们严格嵌套。

我们在一个域 $\mathbb{F}$ 上工作，该域在全文中保持固定（因此在记号中省略），所以此后遇到的所有向量空间都定义在 $\mathbb{F}$ 上。回顾一下，Q 的一个表示 V 是指：为顶点 $x \in Q_0$指定向量空间 V_x，并为边 $e \in Q_1$指定线性映射 $V_e : V^{s(e)} \to V^{t(e)}$。本文所考虑的所有表示都是有限维的，即对每个顶点 $x \in Q_0$，均有 $\dim V_x < \infty$；任意此类 V 的维数向量是函数 $\dim V : Q_0 \to \mathbb{N}$，其将 $x \mapsto$ 映为 $\dim V_x$。所有有限维 Q 表示构成的集合 Rep(Q) 可自然地升级为一个范畴，定义如下。态射 $\phi : V \to W$ 由线性映射 $\{\phi_x : V_x \to W_x \mid x \in Q_0\}$ 组成；对于每条边 $e \in Q_1$，这些映射使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} V_{s(e)} & \xrightarrow{\phi_{s(e)}} & W_{s(e)} \\ {\scriptstyle V_e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W_e} \\ V_{t(e)} & \xrightarrow[\phi_{t(e)}]{} & W_{t(e)} \end{array}$$

我们称 ϕ 为（满、同构、单）态射，若每个 ϕ_x 都是满射、双射或单射；V 称为子表示，W的子表示，记作$V \subset W$，当且仅当存在单态射 $\phi : V \to W$。范畴$\mathbf{Rep}(Q)$ 已知是阿贝尔范畴，其复合、（余）核和（余）积均按顶点定义 [38, 第 1 节。3]。

若一个表示不允许在Q 中作任何非平凡的直和分解，则称其为**不可分解对象**。已知 [38, 定理 1.2] 对于有限箭图Q的每个有限维表示V，都存在唯一的集合 $\mathrm{Ind}_Q(V)$，其中包含不可分解对象的同构类；并且存在唯一的重数函数$d_V : \mathrm{Ind}_Q(V) \to \mathbb{Z}_{>0}$，使得存在一个同构

$$V \simeq \bigoplus_I I^{d_V(I)}, \tag{1}$$

其中 I 取遍 $\mathrm{Ind}_Q(V)$。Gabriel [14] 的开创性工作证明，对于固定的维数向量，$\mathbf{Rep}(Q)$ 中的不可分解对象集合是有限的，当且仅当与Q 相关联的无向图是有限个单边 Dynkin图的并集。

2.2. 阿贝尔范畴中的 Harder-Narasimhan滤过。 阿贝尔范畴的 *Grothendieck*群 $\mathscr{C}$ 是阿贝尔群$K(\mathscr{C})$，它由对象$V \in \mathscr{C}$的同构类$[V]$ 自由生成，并满足如下关系：$[V] = [U] + [W]$，其中每个短正合列 $0 \to U \to V \to W \to 0$均属于 $\mathscr{C}$。令$(\mathbb{C}, +)$ 表示复数加法构成的阿贝尔群；回顾一下，[4] [6] 上的一个**稳定条件**[4] [6] 是任意群同态

$$Z : K(\mathscr{C}) \to (\mathbb{C}, +)$$

它将非零对象映射到开半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$。对象$V \neq 0$ 的Z-**斜率** 是实数

$$\mu_Z(V) := \frac{\mathrm{Im}\, Z(V)}{\mathrm{Re}\, Z(V)}.$$

[4]这样的 同态有时也称为线性稳定性函数 [24] 或中心荷 [6]。

如果对于每个非零子对象$U \subset V$，不等式 $\mu_Z(U) \leqslant \mu_Z(V)$ 都成立，我们就称V 是Z-**半稳定**的。如果对于所有子对象$U \notin \{0、V\}$，该不等式都是严格的，那么称V 是Z-**稳定**的。

下面的结果直接由 [6, 命题 2。4]我们回顾一下：如果子对象的每个序列 $\cdots \subset a_1 \subset a_0$（相应地，商对象的每个序列 $b_0 \twoheadrightarrow b_1 \twoheadrightarrow \cdots$）最终都在同构意义下稳定，则称阿贝尔范畴满足诺特条件（相应地，阿廷条件）。

定理 2.1。 设 $\mathscr{C}$ 为满足诺特条件和阿廷条件的任意阿贝尔范畴。在 $\mathscr{C}$上固定一个稳定条件 Z。$\mathscr{C}$ 中的每个非零对象 V 都存在唯一的有限长度 $n \geqslant 1$滤过 $V^\bullet$：

$$0 = V^0 \subsetneq V^1 \subsetneq \cdots \subsetneq V^n = V, \tag{2}$$

其连续商 $S^i := V^i/V^{i-1}$ 均为 Z-半稳定对象，并且具有严格递减的斜率：

$$\mu_Z(S^1) > \mu_Z(S^2) > \cdots > \mu_Z(S^n).$$

这个 $V^\bullet$ 称为 V 沿 Z 的***Harder-Narasimhan*** （或***HN***）滤过。

关键在于，有限箭图的有限维表示范畴满足上述结果的假设。由唯一性可知，Z-半稳定对象V 的 HN 滤子始终具有一个长度，即 $0 \subsetneq V$。

2.3. 箭图表示的 HN 类型。 令$Q = (s,t : Q_1 \to Q_0)$ 为在本小节中始终固定的箭图。赋值$V \mapsto \dim V$ 定义了从$\mathbf{Rep}(Q)$ 的 Grothendieck群到从Q_0到 $\mathbb{Z}$的函数群的群同态：

$$\underline{\dim} : K(\mathbf{Rep}(Q)) \longrightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}$$

（对于无环Q，这是一个同构 [25, 定理 1.15]）。我们注意到，$\mathbf{Rep}(Q)$ 上因子分解通过 dim 的任意稳定性条件Z，都相当于选择两个映射 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$和 $\beta : Q_0 \to \mathbb{R}_{>0}$。明确地，对于非零 $V \in \mathbf{Rep}(Q)$，我们有

$$Z(V) = \sum_{x \in Q_0} \left(\beta(x) + \sqrt{-1} \cdot \alpha(x)\right) \cdot \dim V_x,$$

相应的斜率是这个比值

$$\mu_Z(V) = \frac{\sum_{x \in Q_0} \alpha(x) \cdot \dim V_x}{\sum_{x \in Q_0} \beta(x) \cdot \dim V_x}.$$

本文中，我们只讨论经过 dim 的稳定条件 Z。此外，按照 [36, 16], ，我们进一步将讨论范围限制为满足以下条件的稳定条件：β 是一个常值映射，将所有顶点映射到 1。这些称为标准稳定条件；任何这样的稳定条件Z 都仅依赖于一个函数 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$，我们今后将其称为**Z**的中心荷。鉴于这些简化，我们将任意非零V 的斜率记为

$$\mu_\alpha(V) = \frac{\sum_{x \in Q_0} \alpha(x) \cdot \dim V_x}{\sum_{x \in Q_0} \dim V_x}. \tag{3}$$

类似地，任意非零 $V \in \mathbf{Rep}(Q)$ 沿着 Z 的 Harder-Narasimhan滤过记为$\mathbf{HN}_\alpha^\bullet(V)$。以下跷跷板引理见于[36, 引理 2。2]；为使论述完备，我们在此给出证明。

引理 2.2. 设 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$ 是 Q 的一个中心荷。给定三个非零对象，它们构成如下短正合列，且属于 $\mathbf{Rep}(Q)$：

$$0 \to U \to V \to W \to 0,$$

它们的 α-斜率必满足下列某一组不等式（或等式）链。具体而言，

(1) $\mu_\alpha(U) > \mu_\alpha(V) > \mu_\alpha(W)$，或

(2) $\mu_\alpha(U) = \mu_\alpha(V) = \mu_\alpha(W)$，或

(3) $\mu_\alpha(U) < \mu_\alpha(V) < \mu_\alpha(W)$。

在情形（*2*）中，V 是 α-半稳定的，当且仅当 U 和 W 都是 α-半稳定的。

证明。由于 $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ 是严格单调递增函数，只需证明复合函数 $\theta := \arctan \circ \mu_\alpha$ 满足所需的不等式，而无需直接对 μ_α证明。根据定义，由 α 诱导的（标准）稳定条件 Z 是群同态 $K(\mathrm{Rep}(Q)) \to (\mathbb{C}, +)$，因此有 $Z(U) + Z(W) = Z(V)$。所需结论现可通过考察 $\mathbb{C}$ 中的平行四边形得出：该平行四边形由原点、Z(U) 和 Z(W) 确定，其第四个顶点必为 Z(V)。角 θ(V) 位于角 θ(U) 和 θ(W) 之间；只有在退化情形下，即 Z(U) 是 Z(W) 的$\mathbb{R}$倍数时，这三个角才会相等。

现在考虑情形（2），其中 U、V 和 W 具有共同的 α-斜率 μ。如果 U 不是 α-半稳定的，那么它存在一个子表示 U′，满足 $\mu_\alpha(U') > \mu$；但任何这样的 U′都会自动成为 V 的子表示，从而违背 V 的 α-半稳定性。同样，W 的任何商对象 W′，若满足 $\mu_\alpha(W') < \mu$，也会违背 V 的半稳定性。因此，V 的半稳定性迫使 U 和 W 都是半稳定的。反过来，假设 U 和 W 都是 α-半稳定的，并将短正合列中的映射标记为 $\iota : U \to V$ 以及 $\pi : V \to W$。对于任意子表示 $V' \subset V$，我们都有一个短正合列

$$0 \to \iota^{-1}(V') \to V' \to \pi(V') \to 0.$$

在非平凡情形下，$\iota^{-1}(V')$ 和 $\pi(V')$ 分别是 U 和W 的非零子表示，因此根据半稳定性，它们的 α-斜率都不大于 μ。由此，根据本引理的第一部分，我们得到 $\mu_\alpha(V') \leqslant \mu$，这证明了 V 的 α-半稳定性。□

这是前述结果的一个直接（但重要）推论。

推论 2.3. 如果 U 和 W 是 $\mathbf{Rep}(Q)$ 中的 α-半稳定对象，且具有相同的 α斜率 μ，那么它们的直和 $U \oplus W$ 也是斜率为 μ 的 α-半稳定对象。

定义2.4. 表示$\mathbf{V} \neq 0$在$\mathbf{Rep}(Q)$ 中沿中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$ 的**Harder-Narasimhan类型**，或（**HN 型**），记作$\mathbf{T}[V;\alpha]$，定义如下。设n 为Harder-Narasimhan滤过$\mathbf{HN}_\alpha^\bullet(V)$的长度，且$\mathbf{HN}_\alpha^i(V)/\mathbf{HN}_\alpha^{i-1}(V)$表示其对 $1 \leqslant i \leqslant n$的连续商。于是，

$$\mathbf{T}[V;\alpha] := \left(\underline{\dim}_{S^1}, \underline{\dim}_{S^2}, \ldots, \underline{\dim}_{S^n} \right).$$

在上述定义的语境中，通常将$\mathbf{T}[V;\alpha]$ 视为一个函数$\mathbb{R} \to \mathbb{N}^{Q_0}$，如下所示：

$$\mathbf{T}[V;\alpha](\lambda) = \begin{cases} \underline{\dim}_{S^i} & \text{if } \lambda = \mu_\alpha(S^i) \text{ for some } i, \\ (0,0,\ldots,0) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

由于根据定理 S^i，连续商的斜率严格递减，因此该函数是良定义的2.1。该定理所保证的唯一性进一步确保 $\mathbf{T}[\bullet;\ \alpha]$在 $\mathbf{Rep}(Q)$ 中的同构下保持不变。根据定义 2.4 显然，该不变量是离散的，因为它只产生由有限个（非负）整数值组成的序列。此外，该不变量关于直和具有可加性；以下这一民间结果的证明可见于 [**13**, 命题 2。5]。

命题 2.5。 设 V 和 W 是箭图 Q 的两个表示，并设 $\alpha:\ Q_0 \to \mathbb{R}$ 是一个中心荷。采用(4)中的记号，我们有

$$\mathbf{T}[V \oplus W;\alpha] = \mathbf{T}[V;\alpha] + \mathbf{T}[W;\alpha]$$

作为函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^{Q_0}$。

2.4. 完备中心荷。 本文的主题是衡量在中心荷的各种选择下，HN 型作为某些箭图表示不变量的效力。下面的定义对应于最佳情形。

定义 2.6. 设 $Q = (s,t: Q_1 \to Q_0)$ 为一个无环箭图，并且 $\mathscr{C}$是$\mathbf{Rep}(Q)$的任意子范畴。若中心荷族 A 满足：对于 $\mathscr{C}$中的任意$\mathbf{T}[V;\alpha] = \mathbf{T}[W;\ \alpha]$，若 $\alpha \in A$，则V 与W 在 $\mathscr{C}$中同构，那么称其在 $\mathscr{C}$上完备。

如果中心荷族 A 在整个$\mathbf{Rep}(Q)$上完备，那么我们简化术语，称A 对于Q是完备的。对于最简单的箭图，人们希望找到一个完备中心荷；在寻找这样的中心荷时，我们将频繁地用到以下结果。

引理 2.7. 若 $\alpha: Q_0 \to \mathbb{R}$ 是无环箭图 Q 的一个完备中心荷，那么$\mathbf{Rep}(Q)$ 中的每个不可分解对象表示都是 α-稳定的。

证明。假设 α 是一个完备中心荷，并考虑I在$\mathbf{Rep}(Q)$中的一个不可分解对象。如果I 不是 α-半稳定的，那么它的 HN滤子

$$0 \subsetneq \mathbf{HN}^1_\alpha(I) \subsetneq \mathbf{HN}^2_\alpha(I) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{HN}^n_\alpha(I) = I$$

长度为$n > 1$。将$I^i := \mathbf{HN}^i_\alpha(I)$简记为，特别地，我们有$I^1 \subsetneq I$。现在考虑$I^1 \oplus (I/I^1)$ 的滤过，其定义如下：

$$0 \subsetneq I^1 \subsetneq I^1 \oplus (I^2/I^1) \subsetneq \cdots \subsetneq I^1 \oplus (I^n/I^1).$$

由于该滤过的连续商与 $\mathrm{T}[\mathrm{I};\alpha]$ 的连续商相同，因此（由唯一性可知）这个新滤过恰好是$\mathrm{HN}^\bullet_\alpha(\mathrm{I}^1 \oplus (\mathrm{I}/\mathrm{I}^1))$。此外，由于 Harder-Narasimhan 类型仅取决于这些连续商，我们有 $\mathrm{T}[\mathrm{I};\ \alpha] = \mathrm{T}[\mathrm{I}^1 \oplus (\mathrm{I}/\mathrm{I}^1);\alpha]$。但由于 I 是不可分解对象，对于 $\mathrm{I}^1 \neq \mathrm{I}$，I 不可能与 $\mathrm{I}^1 \oplus (\mathrm{I}/\mathrm{I}^1)$ 同构，因此 α 的完备性迫使 I 具有 α-半稳定性。

给定这种 α-半稳定性，如果 I 不是 α-稳定的，那么就存在一个非零子表示 J $\subsetneq$ I，使得 μ_α(J) $=$ μ_α(I)。利用正合列 $0 \to$ J $\to$ I $\to$ I/J $\to 0$ 以及引理2.2，我们知道 J 和 I/J 都是斜率为 μ_α(I) 的 α-半稳定对象。再次应用同一引理可知，直和 J $\oplus$(I/J) 也具有 α-半稳定性，且斜率为 μ_α(I)。根据维数，T[I; α] 等于 T[J $\oplus$(I/J); α]。但同样，由于 I 是不可分解对象，对于 J $\neq$ I，I 并不同构于 J $\oplus$(I/J)。因此，如果 I 不是 α-稳定的，那么 α 就不是 Q 的完备中心荷。□

3. 摩天楼不变量与秩不变量

我们研究由Q的顶点上的δ函数定义的不变量，即所谓的摩天楼不变量，并证明它们比我们在此处为任意Q的表示定义的秩不变量提供更精细的不变量。

3.1. 摩天楼不变量。 设 $Q = (s, t: Q_1 \to Q_0)$ 是一个任意的（即有限但不一定无圈的）箭图。在缺乏关于 Q 或其不可分解表示的具体结构知识时，如何识别 Q `类似于定理 4.2的有趣中心荷类别，并不是显而易见的。在任意箭图上都可以定义的最简单的非平凡中心荷之一，就是支撑在单个顶点上的中心荷。

定义3.1. 顶点$x \in Q_0$ 处的**摩天楼** 中心荷是映射 $\delta_x: Q_0 \to \mathbb{R}$，其定义为

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } y = x, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，**摩天楼不变量** $\delta_\bullet$ 在 $\mathbf{Rep}(Q)$ 上为每个表示 V 赋予由所有顶点处的尖点中心荷确定的 HN 类型集合 $\delta_V = \{\mathbf{T}[V; \delta_x] \mid x \in Q_0\}$。

定义3.2. 设 $S \subset Q_0$ 为顶点的非空子集。$\mathbf{V}$ 在 S处的生成子表示，记为 $\langle V_S \rangle$，是所有子表示 $W \subset V$ 的交，其中当W_x 中的 x 属于 S时，W_x 同构于 V_x。

当S 为单元素集合 $\{x\}$时，我们简记为 $\langle V_x \rangle$。单元素集合处的生成表示决定了沿尖点中心荷的Harder–Narasimhan滤过。

命题 3.3. 给定 Q 的一个顶点 x，设 $0 = V^0 \subsetneq \cdots \subsetneq V^n = V$ 为 V 沿 δ_x 的 *HN*滤子。若 j 是满足 V_x^j 等于 V_x 的最小指标，则：

（1）要么 $j = n$，要么 $j = n - 1$; （2）

对于每个 $1 \leqslant k \leqslant j$，都有 $V^k = \langle V_x^k \rangle$。

证明。我们注意到，非零表示 W 的 Q 的 δ_x-斜率为

$$\mu_{\delta_x}(W) = \frac{\dim W_x}{\sum_{y \in Q_0} \dim W_y}, \tag{5}$$

显然，该值非负。假设对某个 $j\in\{0,\dots,n\}$，$V_x^j = V_x$ 成立，则对所有 $k \geqslant j$，都有 $V_x^k = V_x$，因此连续商 $S^k := V^k/V^{k-1}$ 对所有 $k > j$ 都满足 $S_x^k = 0$。由 (5)，可得斜率相等：

$$0 = \mu_{\delta_x}(S^{j+1}) = \mu_{\delta_x}(S^{j+2}) = \cdots = \mu_{\delta_x}(S^{n-1}) = \mu_{\delta_x}(S^n).$$

由于这些斜率在 HN滤子 中必须严格递减，因此只有两种可能性。要么 $j = n-1$，在这种情况下只有最后一个斜率为 0；要么 $j = n$，在这种情况下所有斜率都非零。由此，我们已经证明了断言 (1)。现在我们通过对 $k \in \{1,\dots,j\}$ 进行归纳来证明断言 (2)。

基例： 由于 V^1 是 δ_x-半稳定的，且 $\langle V_x^1\rangle$ 是它的子表示，因此必有$\mu_{\delta_x}(V^1) \geqslant \mu_{\delta_x}(\langle V_x^1\rangle)$，于是

$$\frac{\dim V_x^1}{\sum_{y\in Q_0}\dim V_y^1} \geqslant \frac{\dim V_x^1}{\sum_{y\in Q_0}\dim \langle V_x^1\rangle_y}.$$

如果 $\dim V_x^1 = 0$，则无需检查，因此我们假设这个维数非零。由于每个 $\langle V_x^1\rangle_y$ 都是相应 V_y^1 的子空间，对于 $y \in Q_0$，我们得到 $V^1 = \langle V_x^1\rangle$。

归纳步骤：假设对于某个 $k < j$，$V^k = \langle V_x^k\rangle$ 成立。根据 HN 滤过的定义，S^{k+1} 是 δ_x-半稳定的；而由证明断言 (1) 的论证可知，它的 δ_x-斜率严格为正。因此，我们有 $\dim S_x^{k+1} > 0$；将基例应用于 S^{k+1} 而非 V^1，可得 $S^{k+1} = \langle S_x^{k+1}\rangle$。于是，对于任意顶点 $y \geqslant x$ 和向量$\eta \in V_y^{k+1}$，都存在一个向量 $\xi \in V_x^{k+1}$，使得差 $\eta' := V^{x\leqslant y}(\xi) - \eta$ 属于 V_y^k。根据归纳假设，这个 η'必定等于某个 $\xi' \in V_x^k$对应的 $V^{x\leqslant y}(\xi')$。因此，我们有 $V^{x\leqslant y}(\xi - \xi') = \eta$，从而 V^{k+1} 等于 $\langle V_x^{k+1}\rangle$，证毕。□

3.2. 秩不变量。 下面的概念构成了对秩不变量的实质性推广，该不变量由 [9] 针对多参数持久性模引入。

定义 3.4。$\mathbf{V} \in \mathbf{Rep}(Q)$ 的**秩不变量** 是映射 $\rho_V\colon Q_0\times Q_0 \to \mathbb{N}$，定义如下：

$$\rho_V(x,y) := \dim\langle V_x\rangle_y.$$

由上述定义可知，$\rho_\bullet$ 是$\mathbf{Rep}(Q)$的一个离散同构不变量。下面的结果给出了用摩天楼不变量 $\delta_\bullet$ 表示秩不变量的公式 —— 事实上，我们证明，对于任意顶点 x，秩 $\rho_V(x,y)$ 都可以由单个 Harder-Narasimhan类型$\mathbf{T}[V;\delta_x]$恢复。

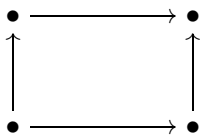
定理 3.5。设 Q 为有限箭图。就以下意义而言，在$\mathbf{Rep}(Q)$ 上，摩天楼不变量的判别能力严格强于秩不变量。

(1) 考虑 $V \in \mathbf{Rep}(Q)$ 以及 Q_0中的任意顶点 x。若 $0 = V^0 \subsetneq \cdots \subsetneq V^n = V$ 是 V 沿 δ_x 的 *HN*滤子，则对于 Q 中满足 $y \geqslant x$ 的任意顶点 y，我们有

$$\rho_V(x,y) = \sum_{k=1}^{j}\dim S_y^k,$$

其中，$S^k := V^k/V^{k-1}$，且 j 是满足 V_x^j 等于 V_x的最小指标。

(2) 存在该箭图的两个表示 W 和 W'



对于 $\rho_W = \rho_{W'}$，而 $\delta_W \neq \delta_{W'}$。

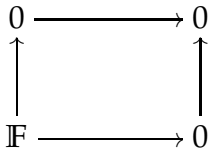
证明。由命题 3.3，我们有 $j \in \{n、n-1\}$ 以及 $V^j = \langle V_x \rangle$。因此，根据定义 3.4，$\rho_V(x、y)$ 的值等于 $\dim V_{jy}$。由于 $S^\bullet$ 是 HN 滤过 $V^\bullet$ 的连续商，我们有

$$\dim V_y^j = \sum_{k=1}^{j} \dim S_y^k,$$

这就证明了第一个断言。现在转向第二个断言，考虑下图所示的表示 W（左）和 W'（右）：



显然，二者具有相同的秩不变量。设 x 为该箭图的 $\leqslant$-极小顶点（即左下角的顶点）。通过考察子表示（的斜率），可以直接验证 W 是 δ_x-半稳定的，因此其 HN 滤过就是平凡的 $0 \subsetneq W$。另一方面，W' 具有一个两步 HN 滤过 $0 \subset U \subset W'$,，其中 U 由下式给出



由于 W 和 W' 沿着 δ_x 具有不同的 HN 类型，因此摩天楼不变量 δ_W 和 $\delta_{W'}$ 如上所述彼此不同。□

4. 之字形持久模的 HN 类型

本节旨在刻画类型为 $\mathbb{A}_\ell$ 的箭图的完备中心荷。

4.1. 之字形持久模。固定一个整数 $\ell \geqslant 0$。若箭图 Q 的底层无向图具有以下形式，则称其为**类型** $\mathbb{A}_\ell$

$$x_0 \xrightarrow{\ e_1\ } x_1 \xrightarrow{\ e_2\ } \cdots \xrightarrow{\ e_{\ell-1}\ } x_{\ell-1} \xrightarrow{\ e_\ell\ } x_\ell.$$

我们用长度为 ℓ 的布尔串 τ 描述边的方向，称为 Q 的定向：其第 i 项 τ_i 表示边$_i$ 是从边$_{i-1}$ 到边$_i$ 正向（1）还是反向（0）

从边$_i$ 到边$_{i-1}$。例如，当 $\ell = 3$ 时，序列 $\tau = 100$ 表示如下箭图：

$$x_0 \xrightarrow{e_1} x_1 \xleftarrow{e_2} x_2 \xleftarrow{e_3} x_3.$$

我们称Q 为等向的，如果每个 τ_i 都等于 1（即所有边都向前）。我们的目标是描述箭图类型为 $\mathbb{A}_\ell$ 的表示的所有完备中心荷 α 。

箭图类型为 $\mathbb{A}_\ell$ 的表示称为之字形持久模[8]，，在等向情形下，它们特化为普通持久化模 [34]。由 Gabriel定理 [14] 可知，当Q 属于类型 $\mathbb{A}_\ell$时，非零$V \in \mathbf{Rep}(Q)$ 的分解（1）中出现的不可分解直和项具有特别简单的形式。每个这样的不可分解对象都对应于一个端点为整数的子区间 $[a、b] \subset [0,\ell]$ 。回忆一下， $\mathbb{F}$ 是定义我们所有向量空间所用的基域；与 $[a、b]$ 相关联的不可分解对象$\mathbf{I}_\tau[a、b] \in \mathbf{Rep}(Q)$ 具有如下形式

$$0 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow 0 \longleftrightarrow \mathbb{F} \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow \mathbb{F} \longleftrightarrow 0 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow 0. \tag{6}$$

这里，各箭头按照 τ Q 的定向指向；连续的 $\mathbb{F}$ 跨越顶点指标 $\{a、a+1、\ldots\ldots、b-1、b\}$；所有源点和目标点为 $\mathbb{F}$ 的映射都是恒等映射，而所有其他向量空间都是平凡的。这些不可分解对象通常称为区间 模。

明确地说，如果 Q 是定向为 τ 的 $\mathbb{A}_\ell$ 型箭图，那么对于每个表示 $V \in \mathbf{Rep}(Q)$ ，存在唯一的有限集合 $\mathbf{Bar}(V)$ ，该集合由子区间 $[a、b] \subset [0,\ell]$ 组成，其中 $a \leqslant b$ 为整数；并且存在唯一函数 $\mathbf{Bar}(V) \to \mathbb{N}$，将每个 $[a、b]$ 映射到其重数 d_{ab}，使得存在一个同构

$$V \simeq \bigoplus_{[a,b]} (\mathbf{I}_\tau[a,b])^{d_{ab}}. \tag{7}$$

这里，直和遍历 $[a、b] \in \mathbf{Bar}(V)$。因此，中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$ 对 Q 而言按照定义 2.6 是完备的，当且仅当每个 $V \in \mathbf{Rep}(Q)$ 的重数函数 $[a、b] \mapsto d_{ab}$ 都可以从 HN 型 $\mathbf{T}[V$ 中恢复； $\alpha]$。

4.2. 刻画完备中心荷。我们描述 Q 的所有完备中心荷的第一步，是证明引理2.7的逆命题。下文中，我们固定一个类型为 $\mathbb{A}_\ell$ 的箭图$Q = (s,t : Q_1 \to Q_0)$ ，并将其定向记为 τ。

命题 4.1。若对于 $\mathbf{Rep}(Q)$ 中的每个不可分解对象$\mathbf{I}_\tau[a,b]$ 都是 α-稳定的，则中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$ 对于 Q 是完备的。

证明。设 $V \in \mathbf{Rep}(Q)$ 具有分解式（7）；我们希望证明，出现在该分解中的重数 d_{ab} 可以从 $\mathbf{T}[V$中恢复出来$\alpha]$。为此，令 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ 为集合中包含的所有斜率的集合

$$\{\mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a,b]) \mid [a,b] \in \mathbf{Bar}(V)\}.$$

对于 $\{1$ 中的每个i， $\ldots$， $k\}$， 我们将由所有满足 $\mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a,b]) \geqslant \lambda_i$ 的 $[a,b]$ 组成的子集记为$B_i \subset \mathbf{Bar}(V)$。考虑由下式给出的$V^\bullet$ 对V 的滤过

$$V^i := \bigoplus_{[a,b] \in B_i} \mathbf{I}_\tau[a,b]^{d_{ab}}.$$

按照构造，商对象 V^i/V^{i-1} 是稳定表示的直和，且其 α-斜率等于 λ_i。现在，推论 2.3 以及唯一性（定理 2.1 中所述）保证 $V^\bullet$ 是 V 沿着 α的 HN滤子。

对于每个 $\mathrm{b} \in \{0, \text{定义 } \phi_b\colon \{0, \ldots, \mathrm{b}\} \to \mathbb{R} \text{ 为 } \phi_b(\mathrm{a}) := \mu_\alpha(\mathrm{I}_\tau[\mathrm{a}, \mathrm{b}])$。我们声称这些映射是单射：给定 $\mathrm{a}' < \mathrm{a}$，需要根据 $\mathrm{e}_a \in \mathrm{Q}_1$ 的定向（或等价地，根据 $\tau_a \in \{0,1\}$ 的取值）考虑两种情况。如果 $\mathrm{t}(\mathrm{e}_a) = \mathrm{x}_a$，则存在一个单态射 $\mathrm{I}_\tau[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathrm{I}_\tau[\mathrm{a}', \mathrm{b}]$，而后一个表示的稳定性保证 $\phi_b(\mathrm{a}) < \phi_b(\mathrm{a}')$。另一方面，如果 $\mathrm{t}(\mathrm{e}_a) = \mathrm{x}_{a-1}$，那么 $\mathrm{I}_\tau[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ 是 $\mathrm{I}_\tau[\mathrm{a}', \mathrm{b}]$的一个商对象：在 Rep(Q) 中，我们有如下形式的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbf{I}_\tau[a', a-1] \longrightarrow \mathbf{I}_\tau[a', b] \longrightarrow \mathbf{I}_\tau[a, b] \longrightarrow 0.$$

应用引理 2.2 以及 α-稳定性，可得 $\mathbf{I}_\tau[a', b]$ 给出 $\phi_b(a) > \phi_b(a')$。在两种情况下，我们都得到 $\phi_b(a) \neq \phi_b(a')$ 对于 $a' < a$成立，从而如所声称的，ϕ_b 是单射的。

由此单射性可知，对于每个固定的 i，我们可以将 B_i 中的元素排列为

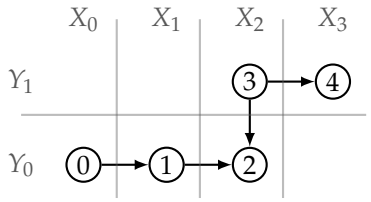
$$B_i = \{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]\},$$

其中 $b_1 > \cdots > b_n$。现在，重数 $d_{a_1 b_1}$ 恰好等于在任意顶点 $x^j \in Q_0$ 处 V^i/V^{i-1} 的维数，其中 $b_2 < j \leqslant b_1$。通过归纳，我们同样可以恢复所有 $1 < k \leqslant n$对应的重数 $d_{a_k b_k}$。□

前面的结果结合引理2.7表明，对于Q，中心荷 α 完备，当且仅当每个不可分解对象 $\mathbf{I}_\tau[a,b] \in \alpha$-稳定。[24] 的主要结果是用两个函数完全刻画这类中心荷：令 $\chi, \eta\colon \{0, 1, \ldots, \ell\} \mapsto \mathbb{N}$ 按如下方式递归定义。以 $\chi(0) = 0$ 和$\eta(0) = 0$为初始值，对于每个$i > 0$，令

$$\chi(i+1) = \begin{cases} \chi(i) + 1 & \text{if } \tau_i = 1 \\ \chi(i) & \text{if } \tau_i = 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad \eta(i+1) = \begin{cases} \eta(i) + 1 & \text{if } \tau_i = 0 \\ \eta(i) & \text{if } \tau_i = 1 \end{cases}$$

例如，当 $\tau = 1101$ 时，函数 χ 的取值为（0, 1, 2, 2, 3），而函数η 在输入（0, 1, 2, 3, 4）时的取值为（0, 0, 0, 1, 1）：



对每个 $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$，我们都有水平集 $\mathrm{X}_k := \{\mathrm{i} \mid \chi(\mathrm{i}) = \mathrm{k}\}$ 和 $\mathrm{Y}_k := \{\mathrm{i} \mid \eta(\mathrm{i}) = \mathrm{k}\}$，二者都是 $\{0, \ldots, \ell\}$ 的子区间，因为 χ 和 η 是单调的。对每个 k，记 $\mathrm{X}_k = [\mathrm{a}_k, \mathrm{b}_k]$ 和 $\mathrm{Y}_k = [\mathrm{a}'_k, \mathrm{b}'_k]$，由此可以陈述 [24, 定理 1.13]。

THEOREM 4.2. 所有不可分解对象 $\mathbf{I}_\tau[a,b]$ 属于 $\mathbf{Rep}(Q)$，对于给定的中心荷α： $Q_0 \to \mathbb{R}$ 而言，都是 α-稳定的，当且仅当以下不等式成立：

$$\mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a_0,b_0]) > \mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a_1,b_1]) > \cdots > \mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a_{\chi(\ell)},b_{\chi(\ell)}]),$$
$$\mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a'_0,b'_0]) < \mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a'_1,b'_1]) < \cdots < \mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[a'_{\eta(\ell)},b'_{\eta(\ell)}]).$$

文中还证明了 [24] 对于每一种可能的定向 τ，（**a**）这是一个极小的不等式集合，用于刻画沿其所有不可分解对象都稳定的中心荷，并且（**b**）所有此类中心荷构成了 $\mathbb{R}^{Q_0}$中与 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{Q_1}_{>0}$线性等价的一个非空开子集。这些结果与我们的命题4.1 和引理2.7结合起来，就完全描述了所有完备的中心荷，适用于 $\mathbb{A}_\ell$ 箭图。

定理 4.3。 给定一个整数 $\ell \geqslant 0$，设 Q 是一个 $\mathbb{A}_\ell$ 型且具有定向 τ的箭图。Q 的完备中心荷集合非空，并且恰好由满足定理4.2中的不等式的那些 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$ 组成。

我们在此指出，在Q 是等向的情形下，完备中心荷集合具有一种特别简洁的描述。

推论 4.4. 对于普通持久化模，中心荷 α 是完备的，当且仅当对所有 $i \in \{0,1,\ldots,\ell-1\}$，不等式 $\alpha(x_i) > \alpha(x_{i+1})$ 成立。

证明。若 $\tau = 11\ldots1$，则函数 $\chi\colon \{0,1,\ldots,\ell\} \to \mathbb{N}$ 由 $\chi(i) = i$ 给出，而函数 η 恒为零。因此，我们要寻找任意满足以下条件的 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$： $\mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[i,i]) > \mu_\alpha(\mathbf{I}_\tau[i+1,i+1])$，对所有 i 均成立。由 (3) 和 (6)，这一串不等式可化简为

$$\alpha(x_0) > \alpha(x_1) > \cdots > \alpha(x_{\ell-1}) > \alpha(x_\ell), \tag{8}$$

如所需。 □

5. 多参数持久模的 HN 类型

为多参数持久模寻找良好的不变量，是拓扑数据分析中的一项核心挑战。本节将证明推论 4.4 在多参数情形下的推广。

5.1. 多参数持久模作为等化表示。设 $Q = (s,t : Q_1 \to Q_0)$ 是一个无环箭图。其源点和目标映射可从边扩展到路径 $\gamma = (e_1,\ldots,e_k)$，方法是令 $s(\gamma) := s(e_1)$ 和 $t(\gamma) := t(e_k)$。给定一个表示 $V \in \mathrm{Rep}(Q)$，存在一个由复合映射诱导的特殊线性映射 $V_\gamma : V_{s(\gamma)} \to V_{t(\gamma)}$

$$V_\gamma := V_{e_k} \circ V_{e_{k-1}} \circ \cdots \circ V_{e_2} \circ V_{e_1}.$$

定义 5.1. 我们称$V \in \mathbf{Rep}(Q)$ 是**等化的**，如果满足以下性质：对于任意一对顶点x、$y \in Q_0$ 以及任意一对具有共同源点x 和共同目标点y的路径 γ、γ'，复合映射V_γ 和$V_{\gamma'}$ 相同。令$\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q) \subset \mathbf{Rep}(Q)$ 为由等化表示张成的满子范畴。

例 5.2. 研究胞腔层[11]时，会遇到一大类有趣的等化表示。正则 CW 复形 X 上的每个此类层 $\mathscr{F}$ 都是从胞腔的按面关系排序的偏序集 $(X, \prec)$ 到向量空间范畴 $\mathrm{Vec}(\mathbb{F})$ 的函子，其中向量空间是 $\mathbb{F}$上的。X 的哈斯图是箭图 Q(X)，其顶点与 X 的胞腔一一对应；当且仅当 σ 是 τ 的余维一面时，二者之间有一条唯一的边 $\sigma \to \tau$。X 上任意给定的层 $\mathscr{F}\colon (X, \prec) \to \mathrm{Vec}(\mathbb{F})$ 都会按如下方式诱导出 Q(X) 的一个表示 $V(\mathscr{F})$：每个顶点 σ 都关联向量空间 $\mathscr{F}(\sigma)$，每条边 $\sigma \to \tau$ 都关联线性映射$\mathscr{F}(\sigma \prec \tau)$。由 $\mathscr{F}$ 是函子这一事实可直接推出 $V(\mathscr{F})$ 是等化的。

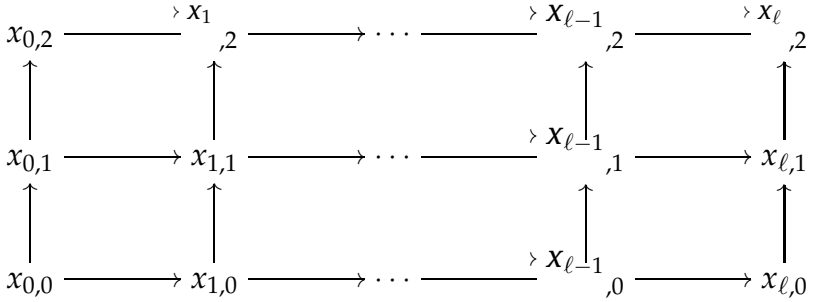
定义 5.3。无环箭图 Q 的顶点上的**流偏序**Q_0 定义如下：给定x 和y，其中Q_0，，若$x = y$，或者存在一条路径 γ，使其在Q中的$s(\gamma) =$ 为x 且$t(\gamma) =$ 为y，则记$x \leqslant y$。

给定$V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$，以及$Q_0$，中的一对顶点$x \leqslant y$，我们用$V^{x\leqslant y} : V_x \to V^y$ 表示由从x 到y的任意路径 γ 所定义的映射，并约定当$y = x$时，该映射为恒等映射。由于V 是等化的，这一定义良好；由此可知$V^{x\leqslant y}$ 的像同构于 $\langle V_x \rangle_y$（参见定义 3.2）。因此，当V 是等化表示时，$\rho_V(x, y)$ 的值恰好是$V^{x\leqslant y}$ 的秩。秩不变量这一术语便由此而来；该术语在 [9] 中引入，用于研究下文所述的网格箭图的某些等化表示。

固定一个由 $L = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$ 给出的向量，其中各分量都是 $d \geqslant 2$ 整数，并且每个 $\ell_i \geqslant 1$。这里考虑 $Q = (s,t : Q_1 \to Q_0)$，即形状为 L 的 d 维 网格箭图，定义如下。其顶点 x^p 由所有位于该乘积中的 p 进行索引

$$\Lambda(L) := \prod_{i=1}^{d} \{0, 1, \ldots, \ell_i\},$$

并且当 $q - p$ 是 $\mathbb{R}^d$的一个标准基向量时，存在唯一一条边 $x^p \to x^q$。例如，对于任意 $\ell \geqslant 1$，形状为 $L = (\ell, 2)$ 的箭图如下：



d维网格箭图的等化表示也称为d参数持久模[9]。我们注意到，每个网格箭图Q 都包含形状为$L = (1,1)$的网格箭图的一个嵌入副本，并且在定理W 和W' 3.5 的证明中出现的表示都是等化的。因此，我们得到以下推论。

推论 5.4。给定任意整数 $d \geqslant 2$，令 Q 为对应于某个整数向量 $L = (\ell_1, \ldots\ldots, \ell_d)$ 的网格箭图，其中每个 $\ell_i \geqslant 1$。

（1）V 的摩天楼不变量 $\delta_V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 确定其秩不变量（通过定理3.5）。（2）存在表示 W 和 W'，它们属于 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$，具有相同的秩不变量，并且满足$\delta_W \neq \delta_{W'}$。

5.2. 矩形可分解表示。一般而言，网格箭图属于野表示类型，因此不能期待获得 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 中所有不可分解对象的可处理分类。不过，可以通过取 矩形可分解表示的子集，施加（7）的高维类比，下面将对此进行描述。

如前所述，令 $Q = (s、t\colon Q_1 \to Q_0)$ 为形状为 $L = (\ell_1、\ell_2、\ldots\ldots、\ell_d)$ 的网格箭图，其中$d \geqslant 2$ 且对所有 $\ell_i \geqslant 1$均成立。给定任意子集 $P \subset \Lambda(L)$，我们用 $\mathbf{I}[P]$ 表示将向量空间赋给Q 的表示

$$\mathbf{I}[P]_{x_p} = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{if } p \in P, \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

当源点和目标点处的空间均为 $\mathbb{F}$ 时，与每条边关联的线性映射就是恒等映射；否则，它必然等于零。我们称 $\mathrm{I}[\mathrm{R}]$, 为矩形表示，其中 $\mathrm{R}\colon = [\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1] \times \cdots \times [\mathrm{a}_d、\mathrm{b}_d]$，且对某些 $[\mathrm{a}_i、\mathrm{b}_i] \subset [0, \ell_i]$ 而言，R 是 Λ(L) 内的一个矩形。注意，当 R 为矩形时，$\mathrm{I}[\mathrm{R}]$ 总是等化的。对于由 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{eq}}(\mathrm{Q})$ 中同构于矩形表示直和的对象所张成的满子范畴，我们记作 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{rec}}(\mathrm{Q})$。将秩不变量限制在此子范畴上时，它是完备的 [4, 10]；根据推论 5.4，摩天楼不变量也同样如此。

本小节的目标是证明一个更强的结果——我们将推论4.4推广到任意维数 d 的矩形可分解表示范畴，方法是对完备中心荷的集合进行分类。为此，必须从中心荷的向量空间中排除有限个超平面的并集：

$$\mathscr{H} := \bigcup_{R \neq R'} \left\{ \alpha : Q_0 \to \mathbb{R} \mid \mu_\alpha(\mathbf{I}[R]) = \mu_\alpha(\mathbf{I}[R']) \right\}, \tag{9}$$

其中，R 和R' 取遍 $\Lambda(L)$中的不同矩形。以下结果说明了排除这些超平面的合理性。

命题 5.5. 若 $\alpha \notin \mathscr{H}$是一个中心荷，并且每个矩形表示$\mathbf{I}[R] \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 均为 α-稳定的，则$\mathbf{T}[\bullet; \alpha]$ 在$\mathbf{Rep}^{\mathrm{rec}}(Q)$上是完备的。

证明。给定$V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{rec}}(Q)$，考虑其分解

$$V \simeq \bigoplus_R \mathbf{I}[R]^{m_R},$$

其中，直和以所有子矩形为指标，$R \subset \Lambda(L)$，其中只有有限多个具有重数 $m_R > 0$。只需根据V 沿着 α的 HN 型恢复这些重数。根据命题 2.5，对每个实数 $c \in \mathbb{R}$，有

$$\mathbf{T}[V; \alpha](c) = \sum_{\mu_\alpha(R) = c} m_R \cdot \underline{\dim}_{\mathbf{I}[R]}$$

由于 $\alpha \notin \mathscr{H}$ 根据假设，任意矩形 R' 的重数 $m_{R'}$ 都可以通过令 $c = \mu_\alpha(R')$ 得到，因此该和简化为 $\mathbf{T}[V;\alpha](c) = m_{R'} \cdot$ 维$\mathbf{I}^{[R']}$。□

下面是推论 4.4 的多参数推广。

定理 5.6. 设 Q 是形状为 $L = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$ 的网格箭图，其中任意 $\ell_i \geqslant 1$。中心荷 $\alpha \notin \mathscr{H}$ 在 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 上是完备的，当且仅当它对每条边 $e \in Q_1$ 都满足不等式 $\alpha \circ s(e) > \alpha \circ t(e)$。

本节余下部分将用于证明。

我们首先在格论中建立一个技术性结果。回顾定义 5.3 中 Q_0 上的流偏序。顶点的子集 $U \subset Q_0$ 称为上闭的，如果 $x \in U$ 且$y \geqslant x$，则$y \in U$。给定任意非空子集 $A \subset Q_0$,，我们用 A^+ 表示包含A的Q_0 的最小上闭子集。偏序集 $(Q0, \leqslant)$ 具有有限格结构，其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 分别通过逐坐标取最小值和最大值得到。容易验证该格是分配格（分配律在每个坐标中都成立），因此它满足以下标准不等式 [1,推论 6.1。3]

命题 5.7. 设$(L, \wedge, \vee)$ 是一个有限分配格。对于任意子集 X，$Y \subset L$，都有不等式

$$|X| \cdot |Y| \leqslant |X \wedge Y| \cdot |X \vee Y|, \text{ where:}$$

(1) $|\bullet|$ 表示基数；*(2)* $X \vee Y := \{x \vee y \mid x \in X$ 且 $y \in Y\}$；*(3)* $X \wedge Y := \{x \wedge y \mid x \in X$ 且 $y \in Y\}$。

我们将利用这个组合不等式来证明关于Q_0的上闭子集的以下结果。

引理 5.8. 设 $U \subset Q_0$ 是一个上闭子集，其补集为 $D := Q_0 \backslash U$。于是，对于 D 的所有子集 $A \subset D$，都有

$$|A| \cdot |U| \leqslant |D| \cdot |U \cap A^+|$$

其中 $|\bullet|$ 表示基数。

证明。由于$(A^+ \cap D)^+ = A^+$，只需将较大的集合 $A^+ \cap D$代替A，证明所需的不等式即可。由于$A^+ \cap D$ 等于$A^+ \backslash (U \cap A^+)$，该不等式变为

$$\left(|A^+| - |U \cap A^+|\right) \cdot |U| \leqslant (|Q_0| - |U|) \cdot |U \cap A^+|,$$

这等价于

$$|A^+| \cdot |U| \leqslant |Q_0| \cdot |U \cap A^+|.$$

由于 U 和 A^+ 是上闭的，因此有 $U \cap A^+ = U \vee A^+$。应用命题 5.7，取子集 $X = U$ 和$Y = A^+$ 中的 $L = Q_0$, 可得

$$|A^+| \cdot |U| \leqslant |U \wedge A^+| \cdot |U \vee A^+| \leqslant |Q_0| \cdot |U \cap A^+|,$$

正如所愿。□

我们推广推论 4.4 到 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{rec}}(Q)$ 的证明中，主要工具是以下 **最大流最小割定理** [3,第三章.1]。

定理 5.9. 设 $\Phi = (\sigma, \tau\colon \Phi_1 \to \Phi_0)$ 是一个箭图，其顶点集包含一个指定的源点 $s_* \notin \tau(\Phi_1)$ 和目标点 $t_* \notin \sigma(\Phi_1)$，并设 $\kappa\colon \Phi_1 \to [0,\infty]$ 是定义在边上的函数。κ-流所能达到的最大值等于分离 s_* 与 t_*的割的最小 κ-容量。

回忆一下，Φ 上的 κ-流是一个映射 $f\colon \Phi_1 \to [0,\infty]$，满足两个约束：

(1) 对所有 $\epsilon \in \Phi_1$，$f(\epsilon) \leqslant \kappa(\epsilon)$；以及 (2) 对所有 $x \in \Phi_0 \setminus \{s_*,\ t_*\}$，$\sum_{\sigma(\epsilon)=x} f(\epsilon) = \sum_{\tau(\epsilon)=x} f(\epsilon)$。

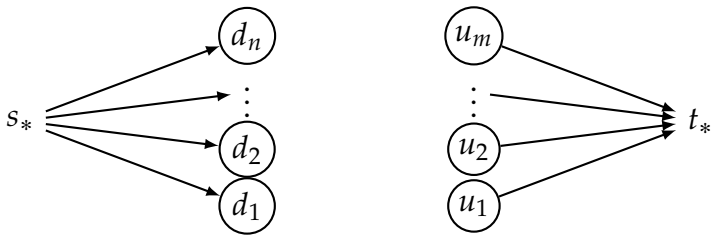
f 的值为总和 $\nu(\mathrm{f}) := \sum_{\sigma(\epsilon)=\mathrm{s}_*} \mathrm{f}(\epsilon)$；根据上述第二个约束，$\nu(\mathrm{f})$ 也等于 $\sum_{\tau(\epsilon)=\mathrm{t}_*} \mathrm{f}(\epsilon)$。另一方面，$(\mathrm{s}_*, \mathrm{t}_*)$-割是指任意子集 $\mathrm{E} \subset \Phi_1$，其移除会使 s_* 与 t_*断开；此类割的 κ-容量为 $\mathrm{c}(\mathrm{E}) := \sum_{\epsilon\in\mathrm{E}} \kappa(\epsilon)$。现在，我们能够刻画不属于式 (9) 中超平面 $\mathscr{H}$并集的 Q 的完备中心荷。

定理 5.10. 设 Q 是形状为 $L = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_d)$ 的网格箭图，其中任意 $\ell_i \geqslant 1$。中心荷 $\alpha \notin \mathscr{H}$ 在 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 上是完备的，当且仅当它对每条边 $e \in Q_1$都满足不等式 $\alpha \circ s(e) > \alpha \circ t(e)$。

证明。若对某条边 e，不等式 $\alpha \circ \mathrm{s(e)} \leqslant \alpha \circ \mathrm{t(e)}$ 成立，则可得到 $\mu_\alpha(\mathrm{I}[\{\mathrm{t(e)}\}]) \leqslant \mu_\alpha(\mathrm{I}[\{\mathrm{s(e)}, \mathrm{t(e)}\}])$。由引理 2.7 可知，$\alpha$ 限制在 $\mathbb{A}_2$ 箭图 $\mathrm{s(e)} \to \mathrm{t(e)}$ 上并不完备。由此可以直接确认，α 在 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{rec}}(\mathrm{Q})$ 上也不完备。论证的其余部分将致力于证明逆命题 —— 假设对所有 $\mathrm{e} \in \mathrm{Q}_1$，均有 $\alpha \circ \mathrm{s(e)} > \alpha \circ \mathrm{t(e)}$ 成立，我们将证明 α 是完备的。

根据命题 5.5，只需证明每个矩形表示都是 α-稳定的。转而考虑由位于任意此类矩形内的顶点所诱导的子箭图后，不妨假设当前的矩形表示为 $\mathrm{V} = \mathrm{I}[\Lambda(\mathrm{L})]$。考虑一个子表示 $\mathrm{V}' \subsetneq \mathrm{I}[\Lambda(\mathrm{L})]$；它赋予各顶点维数至多为 1 的向量空间，且所有非平凡映射都是同构。因此，V' 具有 $\mathrm{I}[\mathrm{U}]$ 的形式，其中 $\mathrm{U} \subsetneq \mathrm{Q}_0$ 是一个上闭真子集。设 $\{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots\ldots、\mathrm{u}_m\}$ 是位于 U 中的顶点；类似地，设 $\{\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots\ldots、\mathrm{d}_n\}$ 是位于其补集 $\mathrm{D} := \mathrm{Q}_0 \setminus \mathrm{U}$ 中的顶点。

构造一个新的箭图 $\Phi = (\sigma, \tau\colon \Phi_1 \to \Phi_0)$ 如下：其顶点集 Φ_0 由Q_0 以及另外两个顶点 s_* 和 t_*组成。边集 Φ_1 分两个阶段构造：首先，从s_* 向D中的每个顶点各添加一条唯一的边；同样，从U 中的每个顶点向t_*各添加一条唯一的边，如下图所示：



第二步中，当$d_i \leqslant u_j$ 在Q_0中成立时，添加一条唯一的边$d_i \to u_j$ 。定义$\kappa : \Phi_1 \to [0,\infty]$ 如下：

$$\kappa(\epsilon) = \begin{cases} 1/n & \text{if } \sigma(\epsilon) = s_* \\ 1/m & \text{if } \tau(\epsilon) = t_* \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

断言： 每个(s_*,t_*)-割$E \subset \Phi_1$ 的容量为 $\kappa c(E) \geqslant 1$。
给定这样一个割，令S 和T 分别表示移除E 中的边后，分别位于s_* 和t_* 所在连通分量中的顶点。我们可以放心地假设E 不包含形如$d_i \to u_j$ 的边，因为那会立即导致$c(E) = \infty$。因此，记$A := S \cap D$ 和$B := T \cap U$，我们知道$A^+ \cap B$ 为空，因为移除E 必须将s_* 与t_*分隔开。因此，我们有

$$c(E) = \frac{|D\backslash A|}{|D|} + \frac{|U\backslash B|}{|U|}.$$

利用$U\backslash B$ 包含 $A^+ \cap U$ 这一事实，再结合引理 5.8，可得

$$\frac{|U\backslash B|}{|U|} \geqslant \frac{|U \cap A^+|}{|U|} \geqslant \frac{|A|}{|D|} = 1 - \frac{|D\backslash A|}{|D|}.$$

利用 将上述表达式中$c(E)$ 的值代入该界，即可证明这一断言 .

回到主要论证，根据定理 5.9 ， Φ 具有一个值为 $\nu(f) \geqslant 1$ 的 κ-流$f : \Phi_1 \to [0,\infty]$。任取这样的$f$，注意到它必须在每条边 $s_* \to d_i$ 上取值 $1/n$，并在每条边 $u_j \to t_*$ 上取值 $1/m$，因此其值 $\nu(f)$ 恰好为 1。定义 $F : D \times U \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 为

$$F(d_i,u_j) = \begin{cases} f(d_i \to u_j) & \text{if } d_i \leqslant u_j \text{ holds in } Q_0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

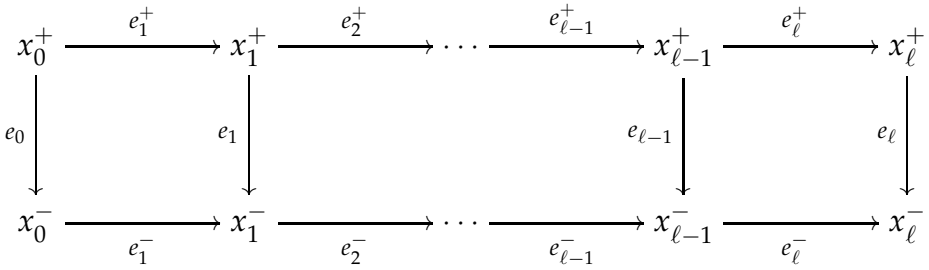
由于对每条边 $e \in Q_1$, 都有 $\alpha \circ s(e) > \alpha \circ t(e)$ 成立，并且 F 在至少某些 (d_i,u_j) 对上取严格正值，因此我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(d_i,u_j)\cdot\alpha(d_i) > \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(d_i,u_j)\cdot\alpha(u_j).$$

利用 f 是一个 κ-流这一事实，对于每个 i，我们有 $\sum_{j=1}^{m} F(d_i, u_j) = 1/n$；类似地，对于每个 j，我们有 $\sum^{n} i=1 F(d_i, u_j) = 1/m$。因此，上述不等式为 $\phi_\alpha(I[D]) > \phi_\alpha(I[U])$。最后，将引理2.2应用于短正合列 $0 \to V' \to V \to I[D] \to 0$，即可得到所需的不等式 $\phi_\alpha(V') < \phi_\alpha(V)$。□

6. 无嵌套梯形持久化模的 HN 类型

固定一个整数 $\ell \geqslant 1$。这里我们将讨论以下长度为 ℓ 的梯子箭图$Q = (s,t : Q_1 \to Q_0)$ 的某些等化表示：



这类箭图的等化表示有时称为 梯形持久模；它们恰好是形状为 $L = (\ell,1)$的二参数持久化模，不过通常用向下而非向上的竖直箭头来表示。特别是，在研究普通持久化模的态射时会出现这类模。的作者证明了，对于，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 是有限型的，并通过 Auslander-Reiten理论完全刻画了其不可分解对象。相比之下，最后三位作者在第5]节研究了$\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 的一个满子范畴；无论ℓ为何，该子范畴都是表示有限的。这些就是无嵌套表示。

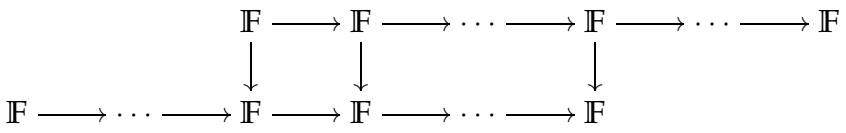
6.1. 无嵌套表示。给定 $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$，令 V^+ 和 V^- 分别表示其在 Q 的顶行和底行上的限制。由于这两个 $V^{\pm}$ 都是（等向的） $\mathbb{A}_\ell$ 箭图的表示，它们都可以分解为区间模的直和，如（7）所述。若存在 $[a, b]$ 和 $[c, d]$，属于 $\mathrm{Bar}(W)$ 且满足 $a < c \leqslant d < b$，我们就称这样的 $\mathbb{A}_\ell$ 表示 W 含有一对严格嵌套区间；换言之，区间 $[c, d]$ 位于区间 $[a, b]$的内部。

定义 6.1. 表示 $V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 称为**无嵌套的**，如果 V^+ 和V^- 均不含一对严格嵌套区间。

我们将考察由无嵌套表示生成的 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 的满子范畴，以下简称为$\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$。其不可分解对象已在 [21, 定理 5.3], 中得到完整分类，下面将对此作概述。

定理 6.2. 在同构意义下，$\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$ 的不可分解对象具有以下三种可能形式之一：

(1) 给定子区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$，其中 $[0,\ell]$ 的端点满足 $c \leqslant a \leqslant d \leqslant b$，令 $\mathbf{R}^a, {}_b\mathbf{C}_d$ 表示如下的表示 V：其中 V^+ 是区间模 $\mathbf{I}[a, b]$，而 V^- 是区间模 $\mathbf{I}[c, d]$,；所有垂直映射在可能的情况下均为 $1's$，否则为 0：



(2) 给定一个区间 $[a,\ b] \subset [0, \ell]$，令 $\mathbf{R}^{a,\ b}$ 表示如下的梯形表示 V：V^+ 等于$\mathbf{I}[a,\ b]$，而 V^- 是平凡的，所有垂直映射必然都是 0：

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \\ \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(3) 最后，给定一个区间 $[c,\ d] \subset [0, \ell]$，令 $\mathbf{R}_{c,\ d}$ 为表示 V，其中 V^+ 是平凡的，而 V^- 是 $\mathbf{I}[c,\ d],$，因此又一次所有垂直映射都是 0：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & & & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{F} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \\ \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

接下来将会很方 便通过采用以下约定来统一记号

$$\mathbf{R}^{a,b}_{\infty,\infty} := \mathbf{R}^{a,b} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{R}^{\infty,\infty}_{c,d} := \mathbf{R}_{c,d}, \tag{10}$$

这样，对于每个 $V \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$，都存在重数 $r^{a,b}_{c,d} \in \mathbb{N}$，满足：

$$V \simeq \bigoplus_{a,b,c,d} \left(\mathbf{R}^{a,b}_{c,d}\right)^{r^{a,b}_{c,d}}, \tag{11}$$

其中 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 取遍 $\{0,\ 1,\ \ldots,\ \ell,\ \infty\}^4$ 如（10）所述。在本节余下部分，我们的目标是量化这些重数能够从 HN 类型中恢复到何种程度。关于这一点的第一个结果是否定的：对于 $\ell \geqslant 4$，不存在完备中心荷 $\alpha\colon\ Q_0 \to \mathbb{R}$。

命题 6.3. 若 Q 的长度为 $\ell \geqslant 4$，则对于每个中心荷 $\alpha\colon\ Q_0 \to \mathbb{R}$，$\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$ 中至少存在一个不可分解对象，它不是 α-稳定的。

证明。 只需考虑 $\ell = 4$，它嵌入到所有更大的梯形箭图中 s:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0^+ & \longrightarrow & x_1^+ & \longrightarrow & x_2^+ & \longrightarrow & x_3^+ & \longrightarrow & x_4^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_0^- & \longrightarrow & x_1^- & \longrightarrow & x_2^- & \longrightarrow & x_3^- & \longrightarrow & x_4^- \end{array}$$

令 $\alpha^{\pm}{}_j$ 为给定中心荷 α 赋予顶点 $x^{\pm}{}_j$ 的值，其中 $0 \leqslant j \leqslant 4$。为导出矛盾，假设 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$中的所有不可分解对象都是 α-稳定的。考虑由以下不可分解对象的包含关系所产生的斜率不等式：

不可分解对象：

$$\begin{aligned}
3(\alpha_1^- + \alpha_1^+) &< 2(\alpha_0^- + \alpha_1^- + \alpha_1^+) && \mathbf{R}^{1,1}_{1,1} \subset \mathbf{R}^{1,1}_{0,1} \\
3(\alpha_0^- + \alpha_1^-) &< (\alpha_0^- + \alpha_1^- + \alpha_1^+ + \alpha_2^+ + \alpha_3^+ + \alpha_4^+) && \mathbf{R}^{1,4}_{0,\ 1} \subset \mathbf{R}^{3,4}_{0,1} \\
4(\alpha_3^- + \alpha_3^+ + \alpha_4^+) &< 3(\alpha_2^- + \alpha_3^- + \alpha_3^+ + \alpha_4^+) && \mathbf{R}^{3,4}_{3,3} \subset \mathbf{R}^{2,3}_{2,3} \\
4(\alpha_2^- + \alpha_2^+ + \alpha_3^+) &< 3(\alpha_1^- + \alpha_2^- + \alpha_2^+ + \alpha_3^+) && \mathbf{R}^{2,3}_{2,2} \subset \mathbf{R}^{2,3}_{1,2} \\
4\alpha_4^+ &< (\alpha_2^- + \alpha_3^- + \alpha_3^+ + \alpha_4^+) && \mathbf{R}^{4,\ 4}_{2,3} \subset \mathbf{R}^{3,4}_{2,3}
\end{aligned}$$

分别将这五个不等式标记为(a)、(b)、……、(e)，我们得到

$$4(a) + 4(b) + (c) + 4(d) + (e) \text{ holds if and only if } 0 < 0,$$

这便得到了所需的矛盾。 □

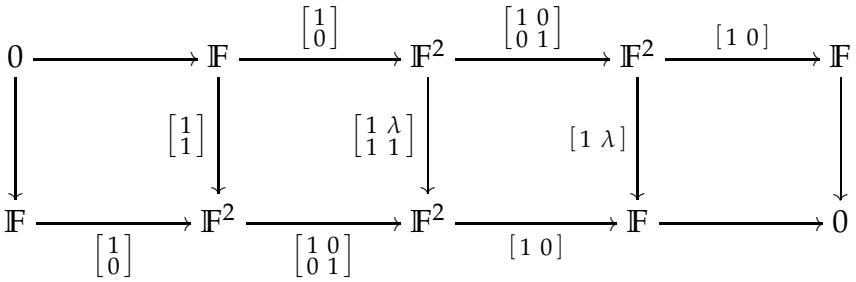
注意，引理 2.7将 $\mathbf{Rep}(Q)$ 替换为 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$ 时仍然成立，因为其证明中涉及的所有表示对于不可分解对象 I仍保持无嵌套。结合该引理，命题 6.3 中的计算得出以下推论。

推论 6.4. 对于 $\ell \geqslant 4$，不存在一个中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$，使其在$\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$上完备。

在通过考虑更大的中心荷族来弥补这一缺陷之前，我们先描述另一个否定性结果，它凸显了将研究范围限制在无嵌套表示上的必要性。

命题 6.5. 设 $\mathbb{F}$ 是除 $\mathbb{Z}/2$ 以外的任意域，并考虑一个长度为 $\ell \geqslant 4$ 的梯形箭图 Q。存在不同构表示 $V \ncong W$，属于 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$，使得对每个中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$，都有 $\mathbf{T}[V;\alpha] = \mathbf{T}[W;\alpha]$。

证明。对于每个标量 λ in $\mathbb{F}$，考虑由下式给出的 $V(\lambda) \in \mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$



（另见 [7, 定义 4(2)]。）我们注意到，无论选择何种 λ，上排 $\mathrm{V}(\lambda)^+$均为 $\mathrm{I}[1,4] \oplus \mathrm{I}[2,3]$，而下排 $\mathrm{V}(\lambda)^-$ 均为 $\mathrm{I}[0,3] \oplus \mathrm{I}[1,2]$,，因此二者的条形码中都包含嵌套区间。由于我们假设 $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}/2$，存在互不相同的非零标量 $\lambda \neq \mu$ in $\mathbb{F}$；令 $\mathrm{V} := \mathrm{V}(\lambda)$，$\mathrm{W} := \mathrm{V}(\mu)$。任意同构 $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ 都必须限制为自同构 $\phi^{\pm} : \mathrm{V}^{\pm} \to \mathrm{W}^{\pm}$，分别作用于顶行和底行。根据[21, 定理 4.4],，在所选基下，二者都必然是平凡的，即在每个顶点上都由单位矩阵表示。沿中间的竖直边直接检验可知，这组单位矩阵并不构成 Rep(Q) 中从 V $\to$ W 的态射，因此 V 和 W

在子范畴 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{eq}}(Q)$ 中不同构。另一方面，V 的子表示与 W 的子表示之间显然存在一个保持维数向量的双射，因此，对于任意选择的中心荷 $\alpha : Q_0 \to \mathbb{R}$，也保持 α-半稳定性。这就得到$\mathbf{T}[V;\ \alpha] = \mathbf{T}[W;\ \alpha]$，正如所声称的那样。□

6.2. 中心荷的完备集合。固定一个长度为 $\ell \geqslant 1$ 的梯形箭图 Q。本小节的目标是证明以下结果。

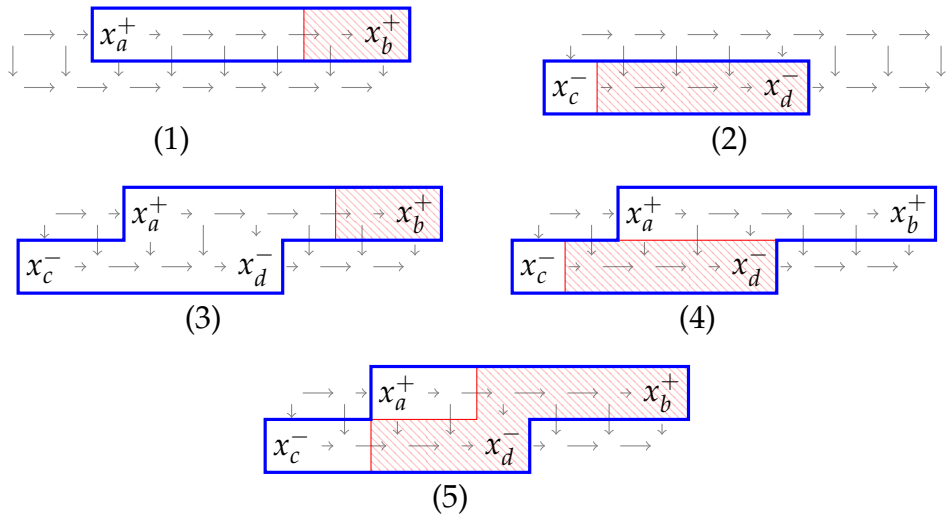
定理6.6. 存在一个有限的中心荷族 A，使得 HN 型 $\mathbf{T}[\bullet; A]$ 在 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$ 上完备。

我们用 $\mathscr{I}$ 表示定理 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$6.2 中不可分解对象的（同构类）集合；我们也采用约定（10），将这些不可分解对象表示为 $\mathbf{R}^{a,b}_{c,d}$，其中 a、b、c、d 属于集合 $[\ell]_\infty := \{0, 1, \ldots, \ell, \infty\}$。

注 6.7. 以下是 $\mathscr{I}$ 中所有可能的严格包含 $I' \subsetneq I$：

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \mathbf{R}^{a',b}_{\infty,\infty} \subsetneq \mathbf{R}^{a,b}_{\infty,\infty} && \text{if } a < a'\\
&(2)\quad \mathbf{R}^{\infty,\infty}_{c',d} \subsetneq \mathbf{R}^{\infty,\infty}_{c,d} && \text{if } c < c'\\
&(3)\quad \mathbf{R}^{a',b}_{\infty,\infty} \subsetneq \mathbf{R}^{a,b}_{c,d} && \text{if } d < a'\\
&(4)\quad \mathbf{R}^{\infty,\infty}_{c',d} \subsetneq \mathbf{R}^{a,b}_{c,d} && \text{if } c \leqslant c'\\
&(5)\quad \mathbf{R}^{a',b}_{c',d} \subsetneq \mathbf{R}^{a,b}_{c,d} && \text{if } a \leqslant a' \text{ and } c \leqslant c.
\end{aligned}
$$

不可分解对象 $I \in \mathscr{I}$ 的支撑是子集 $\mathrm{supp}(I) \subset Q_0$，由所有满足向量空间 I_x 非平凡的顶点 x 组成（或者等价地说，由那些 $\dim I(x)$ 非零的顶点 x 组成）。由于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{nf}}(Q)$ 的不可~~分解~~对象可以通过其支撑唯一确定，我们通过描绘 I'（红色阴影）和 I（蓝色轮廓）的支撑，来展示注 6.7 中的这五个包含关系 $I' \subsetneq I$。



令 $\leqslant$ 为定义 5.3 中 Q_0 上的流偏序。对每个不可分解对象 $I \in \mathscr{I}$，我们用 $\min(I)$ 表示子偏序集 $(\mathrm{supp}(I), \leqslant)$ 中极小顶点的集合。

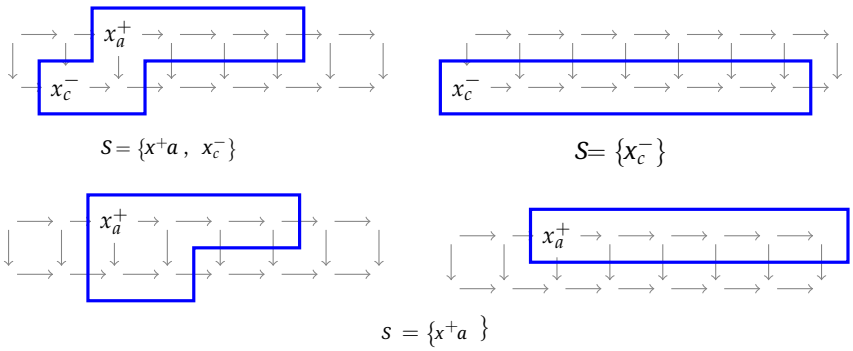
De定义 6.8. 对于每个整数 $k \geqslant 0$和子集 $S \subset Q_0$，，定义集合

$$\mathscr{I}_S^k := \left\{ I \in \mathscr{I} \mid \sum_{x \in Q_0} \dim I_x = k \text{ and } \min(I) = S \right\}.$$

存在一个划分 $\mathscr{I} = \coprod_{k、\ S} \mathscr{I}_S^k$，其中$k$ 遍历 $\mathbb{Z}_{>0}$，而S 遍历Q_0的子集。除非S 具有以下两种形式之一，否则相应部分 $\mathscr{I}_S^k$为空：

- $\{x\}$ 对于任意顶点$x = x_a^+$或$x = x_c^-$，
- $\{x_a^+、\ x_c^-\}$，其中 $0 \leqslant c < a \leqslant \ell$。

以下是某些$I \in \mathscr{I}_S^6$在$S \subset Q_0$取非平凡值时的支撑：



Lemma 6.9. 给定任意整数 $k > 0$ 和顶点子集 $S \subset Q_0$，维数向量集合 $\left\{\text{维数}_I \mid I \in \mathscr{I}_{kS}\right\}$ 在线性映射向量空间 $Q_0 \to \mathbb{R}$中线性无关。

证明。只需考虑$|\mathscr{I}_{\mathrm{kS}}| > 1$的非平凡情形，这种情形仅在以下两种情况下发生：$\mathrm{S} = \{\mathrm{x}^+\,\mathrm{i}\ \}$ 对某个 i，或 $\mathrm{S} = \{\mathrm{x}^+\,\mathrm{i},\ \mathrm{x}^-\,\mathrm{j}\ \}$ 对某些 $\mathrm{i} > \mathrm{j}$。我们断言，每个不可分解对象 $\mathrm{R}^{a}{}_{,b}\,\mathrm{c,d} \in \mathscr{I}_S^k$ 都由 b 唯一确定。为验证这一断言，首先注意，如果 $\mathrm{S} = \{\mathrm{x}^+\mathrm{i}\ \}$ 对某个 $\mathrm{i} \in \{0,\ 1\ldots,\ \ell\}$，那么必有 $\mathrm{a} = \mathrm{i}$ 且 $\mathrm{c} \in \{\mathrm{i}, \infty\}$；其中 $\mathrm{c} = \infty$ 出现当且仅当 $\mathrm{b} = \mathrm{i} + \mathrm{k} - 1$。否则，如果对于 $\mathrm{i} > \mathrm{j}$，有 $\mathrm{S} = \{\mathrm{x}^+\mathrm{i},\ \mathrm{x}^-\mathrm{j}\ \}$，则 $\mathrm{a} = \mathrm{i}$ 且 $\mathrm{c} = \mathrm{j}$。在这两种情况下，d 都由以下公式确定

$$k = (b - a) + (d - c) + 2.$$

因此，将$\mathbf{R}^{a}{}_{,b\ c,d}$ 中的每个元素映射到b 的映射 $\iota\colon\ \mathscr{I}_S^k \to [\ell]_\infty$ 是单射，正如上文所述。现在考虑如下形式的一个 $\mathbb{R}$-线性组合

$$v := \sum_{I \in \mathscr{I}_S^k} r_I \underline{\dim}_I .$$

简要考察位于 $\mathscr{I}_S^k$中的不可分解对象的支撑可知，值$v(x^+{}_j\ )$ 仅取决于满足 $\iota(I)\ \geqslant j$的那些I。因此，可以通过对 $\iota(I)$进行反向归纳，恢复实数r_I。□

固定一组无理数$t_{p,q}\}$，它们由整数对 $0 \leqslant q < p$索引，并满足以下不等式：

$$\frac{q}{p-q} < t_{p,q} < \frac{q+1}{p-(q+1)}. \tag{12}$$

定义6.10. 对于每个整数$k > 0$ 以及使得 $\mathscr{I}_S^k$ 非空的子集$S \subset Q_0$，定义中心荷 α_S^k： $Q_0 \to \mathbb{R}$ 如下：

$$\alpha_S^k := \begin{cases} \delta_x & \text{if } S = \{x\}. \\ \delta_{x_a^+} + t_{k,a-c} \cdot \delta_{x_c^-} & \text{if } S = \{x_a^+, x_c^-\}. \end{cases}$$

此处 δ_x 表示顶点 x 处的尖点中心荷（见定义 3.1），而 $t_\bullet$, $\bullet$ 是选取来满足（12）的无理数。

现在，我们计算沿这些中心荷的每个不可分解对象 $I \in \mathscr{I}$ 的 HN 型。下述计算关键地用到了张成子表示 $\langle I_S \rangle$，它们是在定义 3.2 中引入的。

LEMMA 6.11. 任取 $k > 0$，以及满足 $\mathscr{I}_S^k$ 非空的 $S \subset Q_0$，并定义

$$\lambda_S^k := \begin{cases} 1/k & if\, |S| = 1, \\ (1 + t_{k,a-c})/k & if\, S = \{x_a^+, x_c^-\}. \end{cases}$$

对于每个不可分解对象 $I \in \mathscr{I}k'S'$，以下断言等价：

(1) I 的 α_S^k-斜率等于 λ_S^k。*(2)*

$k = k'$ 和 $S \subset S'$ 均成立。

如果其中任一断言成立，那么我们还有：当且仅当 $S = S'$ 时，I 是 α_S^k-半稳定的。

证明。我们将 α_S^k 简记为 α，将 λ_S^k 简记为 λ。回顾定义 6.8，或者 $S = \{x\}$，或者 $S = \{x_a^+, x_c^-\}$ 满足 某个 $> c$。在第一种情形下，通过计算即可得到所需的等价关系

$$\mu_\alpha(I) = \begin{cases} 1/k' & \text{if } x \in \operatorname{supp}(I) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{13}$$

在 $S = \{x_a^+, x_c^-\}$ 满足 某个 $> c$ 的情形下，同理可得：

$$\mu_\alpha(I) = \begin{cases} 1/k' & \text{if } S \cap \operatorname{supp}(I) = \{x_a^+\}, \\ t_{k,a-c}/k' & \text{if } S \cap \operatorname{supp}(I) = \{x_c^-\}, \\ (1 + t_{k,a-c})/k' & \text{if } S \subset \operatorname{supp}(I), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{14}$$

由于 $t_{k,a-c}$ 由假设是无理数，$\mu_\alpha(I)$ 确定了 $S \cap \operatorname{supp}(I)$，正如所需 d.

现在假设 I 是 α-半稳定的（此外还满足 $\mu_\alpha(\mathrm{I}) = \lambda$），并试图证明 S $=$ S′。由于 $\langle \mathrm{I}_S \rangle$ 是 I 的一个子表示，且 $\mu_\alpha(\langle \mathrm{I}_S \rangle) \geqslant \lambda$，我们必有 I $= \langle \mathrm{I}_S \rangle$。这迫使 I 属于 $\mathscr{I}$kS，从而如所需地保证 S′ $=$ S。反过来，若 S $=$ S′，则 I 属于 $\mathscr{I}$kS。根据引理2.2，只需证明不可分解子表示 I′ $\subsetneq$ I 的 α-斜率小于 I 的斜率。容易验证，任意子表示 I′ $\subset$ I 都必定是等化且无嵌套的，因此只需考虑注 6.7 中列出的那些 I′。其中，具有非零 α-斜率的 I′ 都具有如下形式：$\langle \mathrm{I}_{S'} \rangle$，其中 S′ $\subsetneq$ S。当 $|\mathrm{S}| = 1$时，没有这样的 I′ 需要考虑；而当 S $= \{\mathrm{x}_a^+, \mathrm{x}_c^-\}$ 对于某个 $>$ c 时，唯一的

相关的I'是$\langle I_{x_a^+}\rangle$和$\langle I_{x_c^-}\rangle$。因此，要使I达到所需的半稳定性，只需验证以下两个不等式：

$$\frac{1}{|\{x \geqslant x_a^+\} \cap \operatorname{supp}(I)|} \leqslant \frac{1 + t_{k,a-c}}{k} \geqslant \frac{t_{k,a-c}}{|\{x \geqslant x_c^-\} \cap \operatorname{supp}(I)|}.$$

两者均由施加于$t_{k、a-c}$在（12）中的约束所保证。 □

我们回顾（4中的结论：给定一个中心荷 $\alpha\colon\ Q_0 \to \mathbb{R}$，任意$\mathbf{T}[V;\alpha]$的 HN 型$V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{nf}}(Q)$ 都可视为一个函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{N}^{Q_0}$。以下结果描述了每个中心荷 α_S^k 在定义 6.10中所关联的函数在引理 λ_S^k 6.11中的相应斜率处的取值。

命题 6.12。 任取满足 $\mathscr{I}kS$ 非空的（k，S），并令$I \in \mathscr{I}$。那么对于$\alpha\colon = \alpha_S^k$ 以及 $\lambda\colon = \lambda_S^k$，有

$$\mathbf{T}[I;\alpha](\lambda) = \begin{cases} \underline{\dim}_{\langle I_S\rangle} & \text{if } \langle I_S\rangle \in \mathscr{I}_S^k \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{15}$$

证明。令 令$I^\bullet$为 HN 滤子 $\mathbf{HN}_\alpha^\bullet(I)$，我们考虑三种可能的情形：

情形1：$I \in \mathscr{I}_{kS}$。在这种情况下，$I = \langle I_S\rangle$并且由引理 6.11 可知，I是 α-半稳定的，其 α-斜率为 λ。因此，$I^\bullet$是平凡的，且 (15) 两边都等于 $\dim I$。

情形2：$I \notin \mathscr{I}kS$ 且 $S \nmid \operatorname{supp}(I)$。特别地，$\langle I_S\rangle$不包含于 $\mathscr{I}_S^k$，因此 (15) 的右端为 0。这里，对所有 i，都有 $S \nmid \operatorname{supp}(I^i/I^{i-1})$。若 $S = \{x\}$，则 $S \cap \operatorname{supp}(I) = \varnothing$，因此由定义6.10，$\mu_\alpha(I^i/I^{i-1}) = 0 \neq \lambda$，对滤过的任意一步 i 均成立，故 $T[I;\alpha](\lambda) = 0$。另一方面，若 $S = \{x_a^+, x_c^-\}$，，则 $S \cap \operatorname{supp}(I)$ 可以是 $\varnothing$、$\{x_a^+\}$ 或 $\{x_c^-\}$。由定义6.10可知，斜率 $\mu_\alpha(I^i/I^{i-1})$ 要么属于 $\mathbb{Q}$，要么属于 $t_{k,a-c}\cdot\mathbb{Q}$；这两者都不包含 $\lambda = (1 + t_{k,a-c})/k$，因此 $T[I;\alpha](\lambda) = 0$。

情形 3：$I \notin \mathscr{I}_S^k$ 且 $S \subset \operatorname{supp}(I)$。在此情形下，我们断言 $I^\bullet$ 是单步滤子$0 \subsetneq \langle I_S\rangle \subsetneq I$。根据HN 滤子的唯一性，只需证明 $\langle I_S\rangle$ 和 $I/\langle I_S\rangle$ 是 α-半稳定的，且 $\mu_\alpha(\langle I_S\rangle) > \mu_\alpha(I/\langle I_S\rangle)$。由引理6.11可知，$\langle I_S\rangle$是 α-半稳定的，且斜率严格为正。由于根据构造，$S \cap \operatorname{supp}(I/\langle I_S\rangle)$ 为空，$I/\langle I_S\rangle$ 的所有子表示的 α-斜率均为 0。因此，我们得到所需结果：当 $\langle I_S\rangle$属于 $\mathscr{I}$ kS 时，$\underline{T[V;\alpha]}$等于 $\dim_{\langle I_S\rangle}$，否则为平凡的。□

为完成定理 6.6 的证明，回顾定义6.10中的中心荷族 $A = \{\alpha_S^k\}$，并考虑某个 $V \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{nf}}(Q)$，其分解为 $V \simeq \bigoplus_{I\in\mathscr{I}} I^{r_I}$。我们通过关于注 6.7 中的偏序 $\subset$ 进行下降强归纳，证明可以从 $T[V;A]$ 中恢复重数 $(r_I)_{I\in\mathscr{I}}$。为此，注意到对于不可分解对象 $I \in \mathscr{I}kS$ 和 $J \in \mathscr{I}$，有 $\langle J_S\rangle = I$ 当且仅当 I 是 J 的子表示。结合命题 2.5 和 6.12，我们得到

$$\mathbf{T}[V;\alpha_S^k](\lambda_S^k) = \sum_{I\in\mathscr{I}_S^k} r_I^+ \cdot \underline{\dim}_I,$$

其中，对于 $\mathscr{I}$ 中满足 $J \supseteq I$ 的表示，$r_I^+ := \sum_J r_J$。由引理6.9，整数 r_I^+ 可由 $\mathbf{T}[V$ 得到；对于每个 $I \in \mathscr{I}_{kS}$，$A]$。最后，假设根据

归纳假设，对于 $\mathscr{I}$ 中所有 $J \supsetneq I$，r_J 已知。现在，r_I 可由$\mathbf{T}[V$ 恢复；$A]$ 等于差值$r_I = r_I^+ - \sum_{J \supsetneq I} r_J$。

评注 6.13. 根据定义 6.10，完备中心荷的集合 A的基数为

$$c(\ell) := \frac{2\ell^3 + 3\ell^2 + 13\ell + 12}{6},$$

因此，随着底层梯形箭图长度 ℓ 的增加，其基数呈立方增长。此外，可以选取 (12) 中不同的无理数 $t_{p,q}$，从而生成不可数多个基数相同的其他完备集合 $c(\ell)$。对于较大的 ℓ，我们不清楚梯形箭图的无嵌套表示的所有 中心荷完备集合是否都能以这种方式得到；也不清楚 $c(\ell)$ 是否是此类完备集合的最小基数。

参考文献

[1] N. Alon 和 J. H. Spencer。概率方法。John Wiley & Sons，第 3 版，2008 年。[2] M. F. Atiyah 和 R. Bott。黎曼曲面上的杨–米尔斯方程。英国皇家学会哲学汇刊 *A* 辑，308(1505):523–615，1982 年。[3] B. Bollob´as。现代图论。数学研究生教材第 184 卷。Springer，1998 年。[4] M. B. Botnan、V. Lebovici 和 S. Oudot。关于可分解为矩形的二参数持久性模。离散与计算几何，第 1–24 页，2022 年。[5] M. B. Botnan、S. Oppermann 和 S. Oudot。通过秩分解获得多参数持久性的带符号条形码。载于第 *38* 届国际计算几何研讨会（*SoCG 2022*），信息学 Leibniz 国际会议论文集（LIPIcs）第 224 卷，第 19:1–19:18 页。Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心，2022 年。[6] T. Bridgeland。三角范畴上的稳定条件。数学年刊，第 317–345 页，2007 年。[7] M. Buchet 和 E. Escolar。任意大维不可分解持久模的实现。计算几何杂志，13(1):298–326，2022 年。[8] G. Carlsson 和 V. de Silva。之字形持久性。计算数学基础，10(4):367–405，2010 年 8 月。[9] G. Carlsson 和 A. Zomorodian。多维持久性的理论。离散与计算几何，42:71–93，2007 年 6 月。[10]N. Clause、W. Kim 和 F. Memoli。广义秩不变量的判别能力。*arXiv:2207.11591*，2022 年。[11] J. M. Curry。层、余层及其应用。宾夕法尼亚大学，2014 年。[12] E. G. Escolar 和 Y. Hiraoka。有限型交换梯形上的持久模。离散与计算几何，55:100–157，2016 年。[13] M. Fersztand、V. Nanda 和 U. Tillmann。Harder-Narasimhan滤过与之字形持久性。*arXiv:2211.07553*，2022 年。[14] P. Gabriel。不可分解表示 I。数学手稿，6:71–104，1972 年。[15] F. Haiden、L. Katzarkov、M. Kontsevich 和 P. Pandit。半稳定性、模格与迭代对数。微分几何杂志，即将出版。[16] M. Harada 和 G. Wilkin。箭图表示的动量映射 Morse 理论。几何学专题，150:307–353，2011 年。[17] G. Harder 和 M. S. Narasimhan。曲线上向量丛模空间的上同调群。数学年鉴，212:215–248，1975 年。[18] H. Harrington、N. Otter、H. Schenck 和 U. Tillmann。分层多参数持久同调。*SIAM* 应用代数与几何杂志，3(3):439–471，2019 年。

[19] G. Henselman-Petrusek 和 R. Ghrist。世俗持久性。arXiv:2112.*04927 [*math.CT*],* 2021。[20] D. Huybrechts 和 M. Lehn。层模空间的几何。剑桥大学出版社，2010 年。[21] E. Jacquard、V. Nanda 和 U. Tillmann。持久模的条形码基空间。《应用与计算拓扑杂志》，7:1–30，2023 年。[22] M. Kashiwara 和 P. Schapira。持久同调与微局部层理论。《应用与计算拓扑杂志》，2:83–113，2018 年。[23] A. D. King。有限维代数表示的模空间。《数学季刊》，45(4):515–530，1994 年。[24] R. Kinser。 A 箭图类型的全稳定函数。《代数与表示理论》，25:835–845，2022 年。[25] A. Kirillov Jr.。箭图表示与箭图簇，数学研究生教材第 174 卷。美国数学学会，2016 年。[26] K. P. Knudson。多维持久性的一个细化。《同调、同伦与应用》，10(1):259–281，2008 年。[27] M. Lesnick。多维持久模上交错距离的理论。《计算数学基础》，15:614–650，2015 年。[28] M. Lesnick 和 M. Wright。二维持久模的交互式可视化。arXiv:1512.00180，2015 年。[29] R. MacPherson 和 A. Patel。持久局部系统。《数学进展》，386:107795，2021 年。[30] A. McCleary 和 A. Patel。格上的编辑距离与持久图。《SIAM 应用代数与几何杂志》，6(2):134–155，2022 年。[31] E. Miller。偏序集上模的同调代数。arXiv:2008.*00063 [*math.AT*],* 2020。[32] D. Mumford。射影结构的射影不变量及其应用。国际数学家大会论文集（斯德哥尔摩，1962），第 526–530 页，1963 年。[33] D. Mumford、J. Fogarty 和 F. Kirwan。几何不变理论。Springer，1994 年。[34] S. Oudot。持久性理论：从箭图表示到数据分析，数学调查与专著第 209 卷。美国数学学会，2015 年。[35]V. Phan。具有上闭子集基数界的偏序集。MathOverflow。https://mathoverflow.net/q/442239（版本：2023-03-07）。[36] M. Reineke。量子群中的Harder-Narasimhan系统与箭图模空间的上同调。《数学发明》，152(2):349–368，2003 年。[37] A. Rudakov。阿贝尔范畴的稳定性。《代数杂志》，197(1):231–245，1997 年。[38] R. Schiffler。箭图表示。CMS 数学丛书。Springer 国际出版公司，2014 年。