利用复频率合成波克服超透镜损耗

Fuxin Guan[1], Kebo Zeng[1], Zhaoyu Nie[2], Xiangdong Guo[3], Shaojie Ma[1], Qing Dai[3], JohnPendry[4],*, Xiang Zhang[1],5,* 和 Shuang Zhang[1],6,*

[1]中国香港香港大学物理系[2]美国加利福尼亚州伯克利加州大学伯克利分校机械工程系，邮编 94720[3]中国科学院大学材料科学与光电工程中心，中国北京 100049[4]英国伦敦帝国理工学院物理系布莱克特实验室，伦敦 SW7 2AZ[5]中国香港香港大学理学院与工程学院[6]中国香港香港大学电气与电子工程系*通讯作者：j.pendry@imperial.ac.uk、president@hku.edu、shuzhang@hku.hk

由等离激元材料和超材料制成的超透镜已被用于对亚衍射尺度的特征进行成像。然而，其本征损耗严重限制了成像分辨率，这是长期以来阻碍超透镜广泛应用的问题。有人提出利用呈现时间衰减行为的复频率光波，通过虚拟增益抵消超透镜中的本征损耗，但由于难以制备具有时间衰减的照明，实验实现一直未能实现。在此，我们采用多频测量，成功实现了复频率合成光波，并通过实验观测到由虚拟增益实现的深亚波长

超成像图样。我们的工作为克服等离激元系统在成像和传感应用中的本征损耗提供了一种实用方法。

由于缺失由倏逝波携带的亚波长信息，阿贝衍射将传统光学成像的分辨率限制在大于半个波长的范围内。为克服这一限制，有人提出负折射率透镜，以显著增强倏逝波，从而恢复深亚波长成像分辨率 [1,2]。随后，人们提出了超透镜：它们或由具有负介电常数的天然材料制成 [3–6]，，或由沿不同方向具有符号相反的介电常数的双曲材料制成 [7,8]，，以实现亚衍射极限成像。然而，具有负参数的材料中不可忽略的损耗 [9–11]，会显著削弱超透镜中的深亚波长信息，并严重影响成像分辨率 [12–14]。为补偿损耗，有人提出将增益材料引入超材料设计或等离激元学中 [15–22],，但这种设置极其复杂，而且增益不可避免地会给系统引入不稳定性和噪声 [23–25]。近期，具有时间增长或衰减行为的复频率波被视为虚拟吸收波或增益波 [26]。一些理论方案提出，通过激发具有时间衰减的复频波（CFW），可以恢复由表面等离激元携带的深亚波长信息 [27,28]。然而，从实际角度来看，在光学系统中合成复频波是一项重大挑战，利用复频波实现的超成像尚未通过实验实现。

在此，为应对这一挑战，我们采用多频方法合成复频波（CFW）信号。我们利用这样一个事实：截断的复频波可以通过傅里叶变换表示为频域中遵循洛伦兹线型的多个频率分量的组合。作为概念验证，我们采用体块双曲超材料作为工作于微波频率的成像透镜。我们表明，尽管真实频率下的成像空间分辨率较低，这是由系统中不可避免的材料损耗造成的，但通过使用多个频率分量合成复频率，可以实现超高分辨率成像。

我们从一个金属材料损耗补偿的示例开始，该材料描述为

Drude模型描述的金属材料为例，$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2(\omega^2 + i\omega\gamma)/$，其中$\gamma$是非零的欧姆损耗项。在等离子体频率$\omega_p$以下，介电常数变为负值，使其适合作为等离激元材料，或用于构建双曲介质，以支持具有非常大波矢的表面波或体波，从而实现亚衍射成像。由于损耗项的存在，负介电常数通常伴随着显著的虚部（图1(a)左图），这严重限制了成像性能。有趣的是，从数学角度来看，通过将频率转换为合适的复数值$\omega \to \omega - i\gamma/2$，介电常数将变为纯实数值$\varepsilon(\omega - i\gamma/2) = 1 - \omega_p^2(\omega^2 + \gamma^2/4)/$。

虚部为负的复频波对应于具有时间衰减的波。复频波的数学表达式为$E(t) \sim e^{-i\tilde{\omega}t}$，其中$t$表示时间，$\tilde{\omega} = \omega - i\tau/2$，$\tau > 0$为时间衰减因子。尽管理想的复频波在数学上存在，但它并不具有物理意义，因为这意味着当t趋于负无穷时，能量将发散。因此，需要在时间起点处实施截断，以使复频波具有物理合理性，即$E_T(t) \sim E_0 e^{-i\tilde{\omega}t}\theta(t)$，其中$\theta(t) = 0$适用于$t < 0$，而$\theta(t) = 1$适用于$t \geq 0$。截断复频波作用下色散介质的本构方程，即$D(t) = \int \varepsilon(t - t')E_T(t')dt'$，可表示为：

$$D(t) = \int \varepsilon(\omega')f(\tilde{\omega}, \omega')e^{-i\omega' t}d\omega'/2\pi \quad (1)$$

其中，ω'表示实频率，而$f(\tilde{\omega}, \omega') = -i(/\ \tilde{\omega} - \omega'\ )$具有洛伦兹线型。假设时间持续足够长，则根据留数定理，式（1）可进一步简化为：$D(t) = \varepsilon(\tilde{\omega})E_0 e^{-i\tilde{\omega}t}$。该公式的严格证明见补充材料。根据式（1），系统在复频率下的任意响应$F(\tilde{\omega})$，均可通过对实频率响应$F(\omega')$的积分得到，$F(\tilde{\omega}) \approx \int F(\omega')f(\tilde{\omega}, \omega')e^{-i\omega' t + i\omega \sim t}d\omega'/2\pi$。在实际应用中，只需按照奈奎斯特-香农采样定理，以一定的频率间隔$\Delta\omega$选取若干离散频率点来合成信号。此外，基于压缩感知理论[29–31],，可利用有限频谱范围内的信息合成复频波

如果频谱范围足够宽，不同谐波之间干涉产生的噪声便会受到抑制。合成复频波下的响应可离散化为：

$$F(\tilde{\omega}) \approx \sum_i F(\omega_i')f(\tilde{\omega},\omega_i')e^{-i\omega_i' t+i\tilde{\omega}t}\Delta\omega'/2\pi \quad (2)$$

由于频率是离散化的，信号具有整体的 $2\pi/\Delta\omega'$ 时间周期性。将多个频率处的介电常数（图1(a)左图中的黑色和灰色圆点）代入公式（2），即可获得复频率的合成介电常数，如图1(a)右图 $\tau=\gamma$ 所示。图中清楚显示，由于虚拟增益，Drude模型的损耗可以得到大幅补偿。需要注意的是，如果复频波的虚拟增益大于实际材料损耗 $\tau>\gamma$，就会出现振荡行为，从而导致整个系统处于不稳定状态。

我们使用合成复频波研究等离激元金属/介质多层透镜的成像性能。该透镜共有15层，如图1(b)所示，可充当一种II型双曲介质，其介电常数张量元素沿不同方向具有异号特性[32]。图1(b)左图示意性地展示了从平面双曲材料底部两个彼此靠近的狭缝发出的场。由于较大的面内波矢，传播至上界面的波会经历全内反射，并在空气一侧形成带有倏逝波 $E,_{bj}(\omega,r)$的电场分布 $E,_{bj}(\omega,k)$。相应的动量空间分布可通过傅里叶变换导出，此处k为面内波矢。受已在声学及其他波动系统中得到验证的时间反转成像技术[33–39],启发，我们采用后处理来模拟相位共轭操作，以恢复物体的图像。首先对动量空间分布 $E,_{bj}(\omega,k)$执行复共轭操作 $\rightarrow E,^{*}{}_{bj}(\omega,k)$，然后将其与传递函数相乘，以获得傅里叶空间中的图像，即，

$$E_{imag}(\omega,k)=E_{obj}^{*}(\omega,k)t(\omega,k) \quad (3)$$

In 上述方程中，传递函数是通过对点扩散函数进行傅里叶变换得到的

点扩散函数 $t(\omega,k) = \mathrm{F}(E_{PSF}(\omega,r))$，其中 $E_{PSF}(\omega,r)$ 是从双曲 slab 一侧的点源发出、传播至另一侧表面的场，如图1(b)右图所示。最后，可通过对式（3）进行逆傅里叶变换，得到实空间图像图样 $E_{imag}(\omega,r)$。

我们使用有限元仿真对 $E^{*}_{obj}(\omega,k)$ 和 $t(\omega,k)$ 进行数值计算，结果分别显示在图1(c)的左、右面板中。根据式（3）计算得到的图像图样在 $f = 6.68\ GHz$ 处由图1(e)中的红线表示，与物体（以虚线表示）显著偏离。相比之下，通过在复频域中进行相位共轭 [40–42]，，即使用式（2）和 $\tau = \gamma$ 分别构造 $E^{*}_{obj}(\tilde{\omega},k)$ 和 $t(\tilde{\omega},k)$，可以恢复较大的波矢分量，如图1(d)所示。复频率成像图样与原始图样高度吻合，如图1(e)中的蓝线所示，验证了多频方法合成复频波以提高分辨率的能力。

式（2）和式（3）要求获得场的振幅和相位分布，这可以通过为所设计的平面双曲超材料透镜配置微波表征装置而轻松实现。超材料的单元由螺旋金属线/介电层构成，$4mm \times 4mm \times 1.5mm$ 形成 II 型双曲超材料，其两个面内介电常数相同且为负值，面外介电常数为正值，如图 2(a) 所示。螺旋结构可显著降低等离子体频率，使布里渊区内可达的波矢远大于自由空间中的波矢。如全波仿真结果图 2(b) 所示，通过全波仿真获得了不同频率下相应的等频线，等频线的频率沿箭头所示方向递增。在较高频率下，忽略损耗的影响时，等频线可延伸至水平布里渊区边界，从而提供较大的面内波矢，这对于实现亚衍射成像分辨率至关重要。图 2(c) 展示了实验装置，其中体超材料透镜由 80×80 个面内单元和垂直方向上的 25 层构成。偶极源置于样品底部，且一个

探针天线在顶表面进行光栅扫描，以测量近场分布。

首先，我们在样品上方扫描一条一维线，以测量单个偶极源在 5GHz 至 7.5GHz 范围内的 251 个离散频率点发出的场分布，如图2(d)所示。随后通过傅里叶变换获得色散，如图2(e)所示。色散图中间有两条明亮的线，代表光锥，其余明亮的线则对应双曲模式。受系统阻尼限制，测得的动量空间傅里叶分量远未达到布里渊区边界。基于实验场分布，可以通过反演方法得到相应的有效电磁参数，包括阻尼项[43], ，详情见补充材料。由于白色虚线标记的频率（f=6.5GHz）具有较大的波矢，因此选作信号合成的中心频率。中心频率下动量空间中的二维场分布如图2(f)所示，其他频率下的分布见补充材料。利用公式(2)，我们使用 251 个频率点合成复频率的色散，并在时间周期结束时截取时间快照，如图2(g)所示。值得注意的是，复频率激励下的合成结果恢复了布里渊区较大范围内的场分量，其空间分辨率远高于图2(f)所示的实频率结果。请注意，图2(f)和图2(g)所示的傅里叶空间分布分别对应公式(3)中实频率和复频率情形下的 $t(\omega, k)$和 $t(\tilde{\omega}, k)$。

接下来，我们展示利用合成复频率对亚波长图案进行超分辨成像。所需图案通过依次将单个发射偶极天线放置在不同位置来形成，并在偶极源的每个位置测量顶表面的场分布。随后将测得的场分布线性叠加，并进行傅里叶变换，以获得傅里叶图案 $E,^{*}{}_{bj}(\omega, k)$ 和 $E,^{*}{}_{bj}(\tilde{\omega}, k)$。三个

不同图案（字母“H”“K”和“U”）的真实值如图 2(h) 所示；利用式（3）获得的相应成像结果分别见图 2(i)、2(j) 和 2(k)。每个子图的左上方显示采用合成复频率激励得到的傅里叶图案，该图案占据了布里渊区的很大一部分；每个子图左下方则显示亚波长字母的图像。相比之下，三个案例中中心频率对应的成像结果均显示在右侧子图中，且原始图案在每种情况下都无法辨认，从而证实多频方法显著提升了超成像效果。

最后，我们研究了用于合成复频率响应的频率点数量对超成像性能的影响，结果如图3所示。图中左上方的小图显示了物体，该物体由一个 5×5 阵列的偶极天线组成。水平和垂直晶格常数分别为中心波长的1/4和1/6。我们逐步将用于构建合成成像图案的频率点数量从251个减少到1个，频率步长固定为0.01GHz，相应的合成时域信号显示在插图中。研究表明，将频率点数量减少到51个对图像质量的影响可以忽略不计。然而，随着频率点数量继续减少，成像分辨率显著下降，导致偶极子的图像合并成垂直线。当频率点数量降至17个以下时，这些线在水平方向上变得更宽。这凸显了使用足够频率点以保持良好空间分辨率并避免图像退化的重要性。

我们提出了一种新颖的方法，通过多频方法合成复频率激励，从而补偿双曲超材料超成像系统中的本征损耗，并显著提升成像分辨率，突破系统阻尼所施加的限制。我们的方法在高分辨率显微术方面具有巨大潜力。此外，所合成的复频率方法还可扩展到光学的其他领域，例如等离激元传感应用。通过利用等离激元结构增强的品质因数，我们的方法

有望显著提高传感应用中的灵敏度。此外，该方法可以针对不同的系统和几何结构进行调整，为提升光学性能提供一种灵活且多用途的工具。

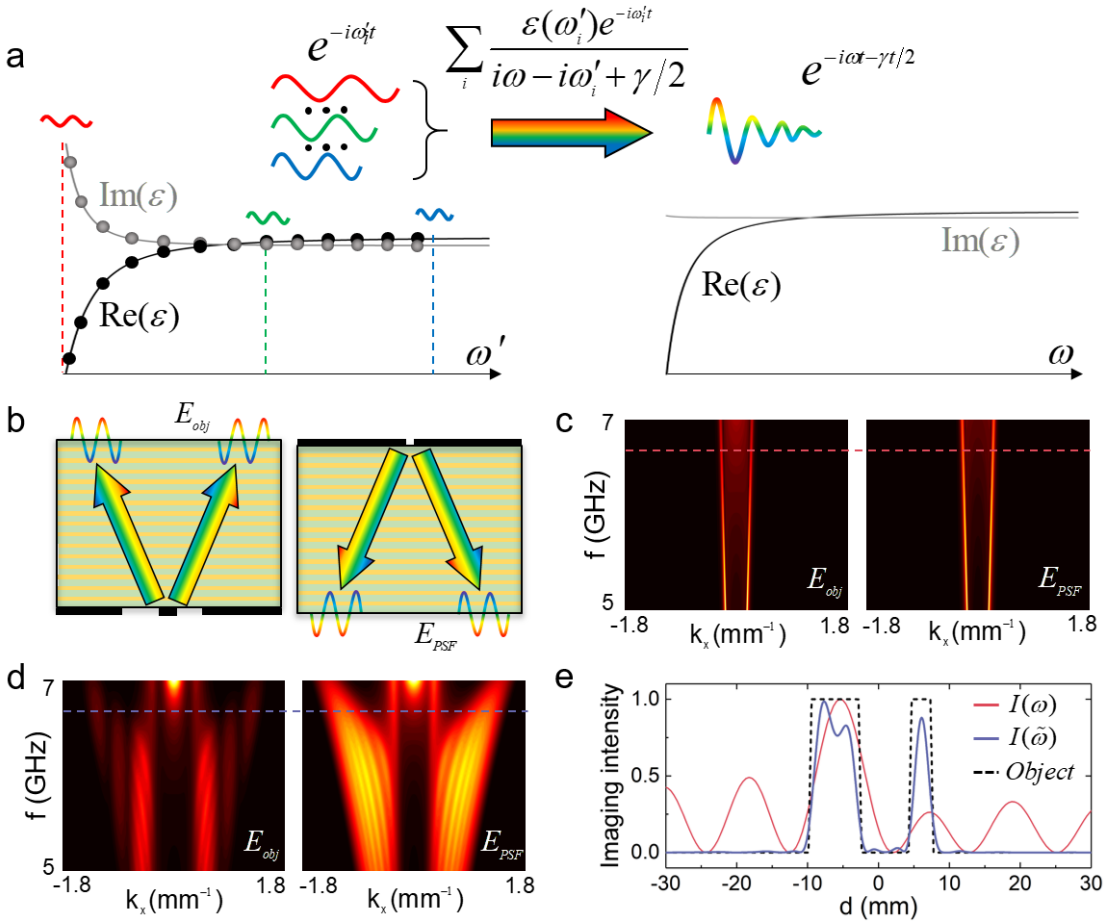
参考文献与注释

[1] V. G. Veselago，具有同时为负的 *ϵ* 和 μ 值的物质的电动力学，苏联物理学进展 **10**，509（1968）。[2] J. B. Pendry，负折射造就完美透镜，《物理评论快报》**85**，3966（2000）。[3] N. Fang、H. Lee、C. Sun 和 X. Zhang，利用银超透镜实现亚衍射极限光学成像，Science (80-.). **308**，534（2005）。[4] D. O. S. Melville 和 R. J. Blaikie，通过平面银层实现超分辨成像，《光学快报》**13**，2127（2005）。[5] X. Zhang 和 Z. Liu，超透镜突破衍射极限，《自然·材料》**7**，435（2008）。[6] T. Taubner、D. Korobkin、Y. Urzhumov、G. Shvets 和 R. Hillenbrand，通过碳化硅超透镜进行近场显微成像，Science (80-.). **313**，1595（2006）。[7] Z. Liu、H. Lee、Y. Xiong、C. Sun 和 X. Zhang，远场光学超透镜放大亚衍射极限物体，Science (80-.). **315**，1686（2007）。[8] I. I. Smolyaninov、Y. J. Hung 和 C. C. Davis，可见频率范围内的放大超透镜，Opt. InfoBase Conf. Pap. **315**，1699（2007）。[9] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz，连续介质电动力学——理论物理学第 *8* 卷。[10] M. I. Stockman，基于因果性原理的低光学损耗负折射判据，《物理评论快报》**98**，1（2007）。[11] P. Kinsler 和 M. W. McCall，使用基于因果性的负折射率判据时必须谨慎，《物理评论快报》**101**，1（2008）。[12] D. R. Smith、D. Schurig、M. Rosenbluth、S. Schultz、S. A. Ramakrishna 和 J.

B. Pendry，负折射率薄板亚衍射成像的局限性，应用物理快报 **82**，1506（2003）。[13] R. Merlin，近乎完美透镜问题的解析解，应用物理快报 **84**，1290 （2004）。[14] I. A. Larkin 和 M. I. Stockman，不完美的完美透镜，纳米快报 **5**，339（2005）。[15] S. Anantha Ramakrishna 和 J. B. Pendry，通过光学增益消除近场透镜中的吸收并提高分辨率，Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. **67**，1（2003）。[16] A. Fang、T. Koschny、M. Wegener 和 C. M. Soukoulis，含增益超材料的自洽计算，Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. **79**，8（2009）。[17] S. Xiao、V. P. Drachev、A. V. Kildishev、X. Ni、U. K. Chettiar、H. K. Yuan 和 V. M. Shalaev，无损有源光学负折射率超材料，《自然》**466**，735（2010）。[18] A. Fang、T. Koschny 和 C. M. Soukoulis，损耗补偿鱼网超材料的自洽计算，Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. **82**，28（2010）。[19] J. M. Hamm、S. Wuestner、K. L. Tsakmakidis 和 O. Hess，有源鱼网超材料中的光放大理论，《物理评论快报》**107**，1（2011）。[20] J. Grgić、J. R. Ott、F. Wang、O. Sigmund、A. P. Jauho、J. Mørk 和 N. A. Mortensen，周期介质和波导中增益增强的基本限制，《物理评论快报》**108**，1（2012）。[21] R. S. Savelev、I. V. Shadrivov、P. A. Belov、N. N. Rosanov、S. V. Fedorov、A. A. Sukhorukov 和 Y. S. Kivshar，金属-介质层状超材料中的损耗补偿，Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. **87**，1（2013）。[22] M. Sadatgol、Ş. K. Özdemir、L. Yang 和 D. O. Güney，通过等离激元注入补偿和控制负折射率超材料中的损耗，《物理评论快报》**115**，1（2015）。

[23] M. I. Stockman, 具有增益的等离激元系统中的等离激元激射器作用、损耗补偿与稳定性, Phys. Rev. Lett. **106**, 1 (2011).[24] S. Wuestner, A. Pusch, K. L. Tsakmakidis, J. M. Hamm, and O. Hess,关于“具有增益的等离激元系统中的等离激元激射器作用、损耗补偿与稳定性”的评论 Phys. Rev. Lett. **107**, 259701 (2011).[25] J. B. Pendry and S. A. Maier, 关于“具有增益的等离激元系统中的等离激元激射器作用、损耗补偿与稳定性”的评论 Phys. Rev. Lett. **107**, 259703 (2011).[26] H. Li, A. Mekawy, A. Krasnok, and A. Alù, 虚拟宇称-时间对称性, Phys. Rev. Lett. **124**, 193901 (2020).[27] A. Archambault, M. Besbes, and J. J. Greffet, 时域中的超透镜, Phys. Rev. Lett. **109**, 1 (2012).[28] H. S. Tetikol and M. I. Aksun, 利用时间衰减源提升等离激元器件的分辨率和传播长度, Plasmonics **15**, 2137 (2020).[29] D. L. Donoho, M. Vetterli, R. A. Devore, and I. Daubechies, 数据压缩与调和分析, IEEE Trans. Inf. Theory **44**, 2435 (1998).[30] M. Taghouti, 压缩感知 , IEEE Trans. Inf. Theory **52**, 1289 (2006).[31] P. Zheng, J. Li, Z. Li, M. Ge, S. Zhang, G. Zheng, and H. C. Liu, 基于秘密共享超表面的压缩成像加密, Adv. Opt. Mater. **10**, 1 (2022).[32] D. R. Smith and J. B. Pendry, 通过场平均实现超材料均匀化（特邀论文）, J. Opt. Soc. Am. B **23**, 391 (2006).[33] D. R. Jackson and D. R. Dowling, 水下声学中的相位共轭, J. Acoust. Soc. Am. **89**, 171 (1991).[34] D. Cassereau and M. Fink, 超声场时间反演——第三部分：封闭时间反演腔理论, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control **39**, 579 (1992).[35] M. Fink, 时间反演声学, Phys. Today **50**, 34 (1997).

[36] C. Day, 时间反演超声突破衍射极限, Phys. Today**55**, 22 (2002).[37] G. Lerosey, J. De Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink,电磁波的时间反演, Phys. Rev. Lett. **92**, 19 (2004).[38] S. Maslovski and S. Tretyakov, 相位共轭与完美透镜成像, J. Appl. Phys. **94**, 4241 (2003).[39] J. B. Pendry, 时间反演与负折射, Science (80-.). **322**, 71 (2008).[40] T. Zhu, 衰减介质中声波传播的时间反演建模, Geophys. J. Int. **197**, 483 (2014).[41] B. E. Treeby, J. G. Laufer, E. Z. Zhang, F. C. Norris, M. F. Lythgoe, P. C. Beard, and B. T. Cox, 光声断层成像中的声衰减补偿：用于小鼠血管网络高分辨率三维成像, Photons Plus Ultrasound Imaging Sens. 2011 **7899**, 78992Y (2011).[42] K. Wapenaar, J. Brackenhoff, and J. Thorbecke, 格林定理在时间反演声学、反向传播和震源—接收器重定位中的应用：教程, 第81届EAGE会议暨展览 2019 (2019).[43] D. R. Smith, S. Schultz, P. Markoš, and C. M. Soukoulis, 根据反射系数和透射系数确定超材料的有效介电常数和磁导率, Phys. Rev. B - Condens. Matter Mater. Phys. **65**, 1 (2002).



Fi图 1. 使用合成复频率波补偿超成像透镜损耗的示意图 **c**

复频率波。(a) 使用由多个频率下的介电常数合成的复频率波进行损耗补偿前（左图）和补偿后（右图），含有限阻尼项的 Drude模型介电常数。实心圆表示用于合成复频率介电常数的频率。(b) 左图示意光从底部两个相距很近的狭缝穿过等离激元金属/介电质多层透镜，金属厚度为 $d_m = 0.7mm$ ，介电层厚度为 $d_d = 1.76mm$ 。金属的介电常数由 Drude模型描述，其中$\omega_p = 34\pi$GHz、$\gamma = 6.8\pi GHz$，介电层的介电常数为 $\varepsilon_d = 2.2$。 $E,\ _{bj}$ 表示顶表面的场分布。右图显示点源产生的场图样 E_{PSF} 。(c) 通过对不同频率下的 $E,\ _{bj}$ 和E_{PSF} 进行傅里叶变换得到的色散图。(d) 根据式 (2) 合成 (c) 中的色散后得到的复频率色散图。(e) 对应的成像

（c）和（d）中虚线位置处的强度。

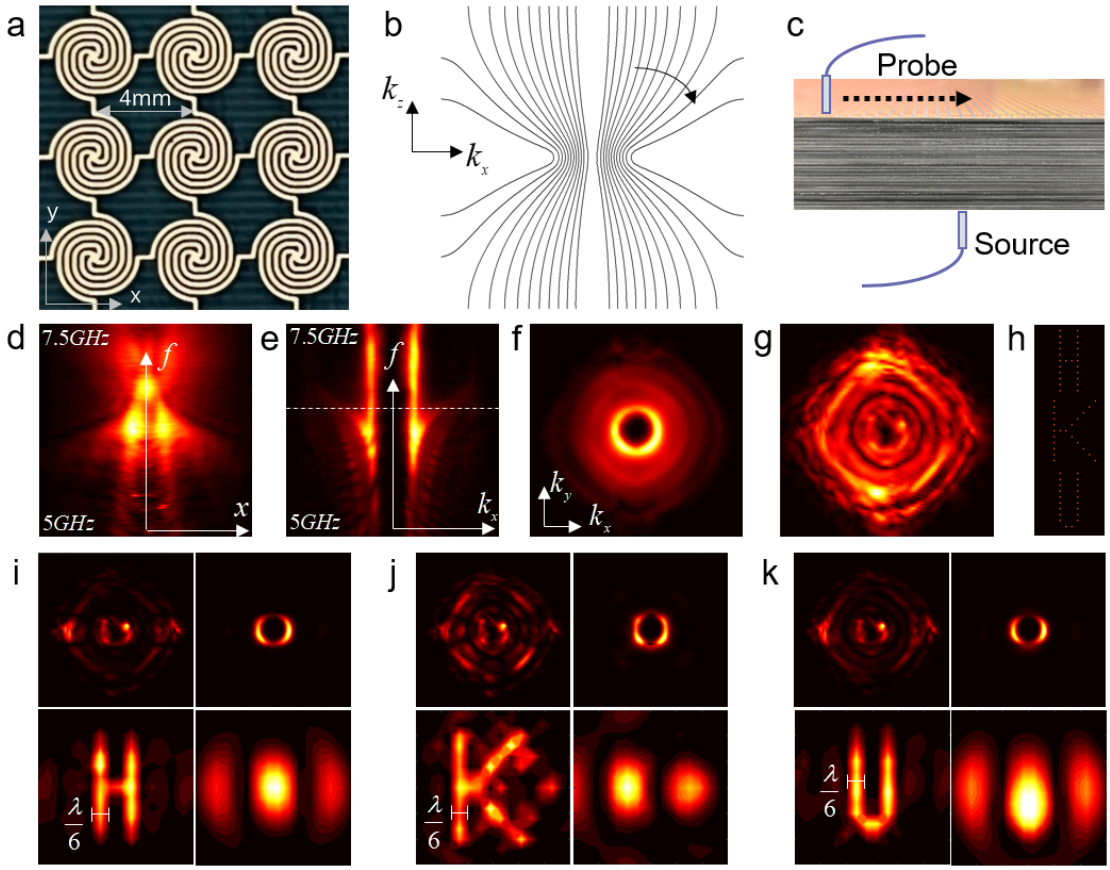
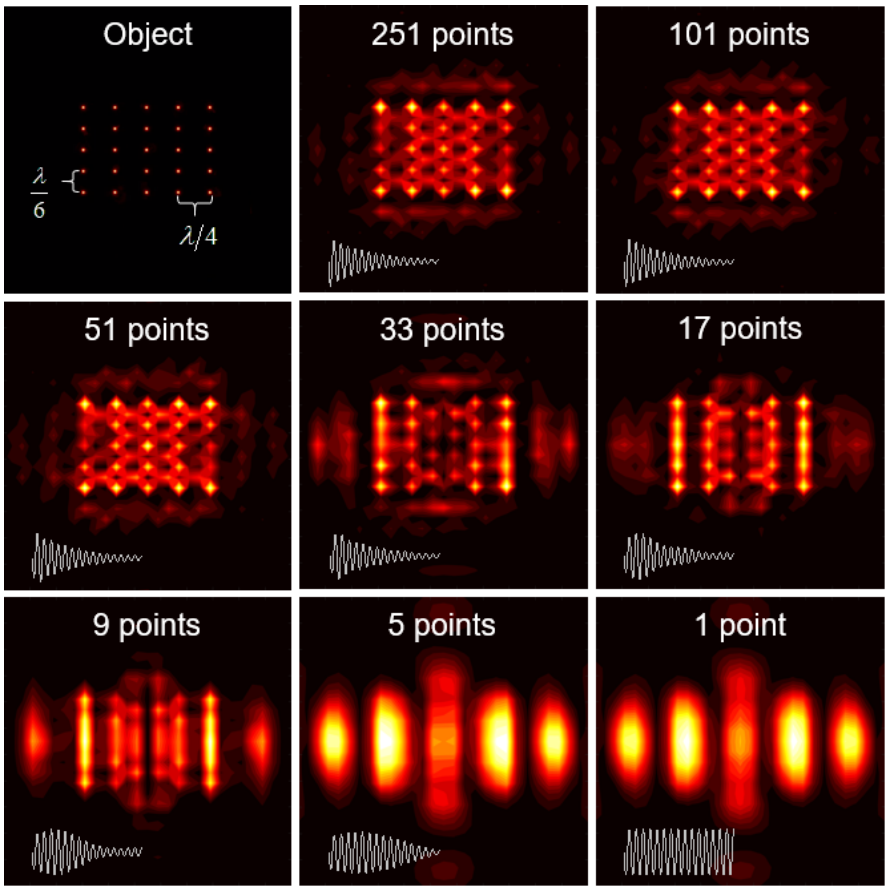


图 2. **利用……实现超成像损耗补偿的实验演示**

微波频率下的双曲透镜。 (a) 双曲超材料照片：宽度为 0.2 mm 的金属螺旋导线印制在厚度为 1.5 mm 的特氟龙板上。(b) 展示了不同频率下布里渊区中的等频线。箭头表示等频线频率增大的方向。(c) 实验装置示意图：两根偶极天线分别置于样品的顶部和底部界面附近，底部和顶部的天线分别作为源和探测器。(d) 沿顶部界面一条线测得的电场分布，频率步长为 0.01 GHz；该线与源天线位于同一 y-z 平面内。(e) 对 (d) 中所示的实空间场分布进行空间傅里叶变换后得到的色散图。(f) 频率为 6.5 GHz 时动量空间中的二维电场分布，可作为传递函数。(g) 根据多个频率下的测量结果合成的复频波在动量空间中的二维电场分布。(h) 字母“H”、“K”和“U”的真实值。(i)、(j) 和 (k) 偶极源排列成三个字母形状时的成像结果

。上、下子图分别对应傅里叶空间和实空间中的结果，左、右子图则分别展示复频率和实频率下的结果。



Fig。3. 成像质量随数量的变化研究 of 频率点。真实值显示在左上方，由 5×5 天线阵列组成，其中沿 x 方向和 y 方向的晶格常数分别为 $\lambda/4$ 和$\lambda/6$。其他子图展示了在中心频率固定为 6.5GHz、频率步长固定为 0.01GHz 时，使用不同数量频率点获得的图像。每个子图的插图中显示了相应的合成时域信号。