arXiv:2303.16176v1 [math.AT] 28 Mar 2023

树的持久同调的纤维

David Beers、Jacob Leygonie

2023年3月29日

摘要

考虑几何树 X 上连续函数构成的空间，其持久同调产生一个有限一般条形码 D。我们证明，该空间的道路连通分支数恰好等于条形码为 D 的合并树的数量。我们发现，每个分支都与一个构形空间同伦等价，该构形空间定义在 X 上，并带有由合并树编码的特殊约束。对于仅含一个或两个区间的条形码 D，我们的方法还可以计算这个函数空间的同伦类型。

1 引言

1.1 动机

持久同调（PH）是拓扑数据分析（TDA）中的一种可计算描述符，用于概括复杂的几何数据。更确切地说，持久性映射记为 PH，其输入是一个拓扑空间 X，该空间配备了一个实值函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 并返回实数线上的区间多重集，称为 条形码，它编码了 f的次水平集之间的拓扑变化。在广泛的情形下，持久同调对输入数据的扰动具有稳健性 [4], ，这也是其成功应用于数据科学问题的关键原因之一，例如神经科学、 [1],材料科学 [11],、形状识别 [18],和机器学习 [3]。

作为补充，一个自然的问题是：PH 在多大程度上能够明确地区分不同的输入函数 f。等价地，我们可以问：哪些函数会产生相同的条形码 $D = \mathrm{PH}(f)$。这个逆问题形式化为研究目标条形码 D上的纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$。$\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的拓扑和几何性质在很大程度上取决于底层空间 X 以及函数 $\mathcal{F}$的空间 $f : X \to \mathbb{R}$ 持久同调定义于该函数空间中。例如，当 X 是单纯复形或 CW复形时，该空间可以是滤波函数的空间（或其某个子空间）；当 X 是光滑流形时，可以是 Morse函数的空间；而当 X 仅仅是一个拓扑空间时，则可以是连续函数的空间。

对于单纯复形上的滤波函数， [17] 中观察到 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 具有有限多面体复形的结构。 [16]利用这一多面体结构设计了一种计算 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 同调群的算法，并通过一系列小型示例展示了该算法。当 $\mathcal{F}$ 是由顶点上的取值确定的滤波函数子空间时，研究表明，若 X 是单位区间 [8], 的单纯分解，则 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的每个连通分支都是可缩的；若 X 是圆 [20]的单纯分解，则这些连通分支同伦等价于圆。

非离散的 X 情形也得到了研究。对于单位区间上的 类 *Morse* 连续函数，$^{-1}$计算了 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的路径连通分支数目，其中考虑的是一般条形码 [6]。对于通过将 $\mathbb{S}^2$ 嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 后再与垂直投影复合而得到的二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上的 Morse函数， [2] 中开发的工具促使人们对 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的连通分支数目提出了猜想。对于任意光滑紧流形上的一般 Morse函数， [17] 证明，同伦于恒等映射的 X 的微分同胚群在 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 上定义了一个作用，并且该作用在每个连通分支上传递。由此得以计算一维和二维定向流形上 Morse函数对应的 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 路径连通分支的同伦类型。

然而，上述文献中提出的方法并不容易适用于非流形拓扑空间 X 上的连续函数。在 [20], 中，研究者观察到，当 X 是星形树，且 D 是只有一个有限区间的特定条形码时，道路连通分支

$\mathrm{PH}^{-1}(D)$是圆的楔和。在这项工作中，我们针对任意几何树上的连续函数，分析任意一般条形码 D情况下的 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$。

树的情形尤其值得关注，因为它经常出现在持久同调应用于神经科学的场景中，例如用于分析神经元形态 [13, 15] 和脑功能 [1]。事实上，针对树上的拓扑描述符，已有研究探讨了其他一些相关的逆问题。例如，拓扑形态描述符（TMD）的统计逆问题和算法逆问题已在 [7, 14]中进行了描述。另一个例子是对树上的函数的条形码实现问题的研究，相关研究见 [12, 19]。

1.2 贡献与内容提纲

在本文中，我们研究 X 为树的几何实现（简称几何树）、 $\mathcal{F}$为 X上的连续函数空间，以及 D 为有限一般条形码的情形。因此，在本引言的其余部分， X 表示任意几何树。我们的分析依赖于以下事实：对于 X上的函数 f ，持久性映射可按以下方式分解：

$$\mathrm{PH} : f \longmapsto^{\mathrm{MT}} T \longmapsto D .$$

这里，中间对象 T 是一个称为 f 的合并树 的拓扑空间，它描述了次水平集 $f^{-1}(-\infty, t]$ 的连通分支如何随着 t 变化而出现并合并。因此，为了刻画此情形下持久同调的纤维，我们可以转而刻画具有给定合并树的函数空间，以及映射到 D 的合并树空间。本工作的主要贡献如下：

- 在定理 8中，我们给出了由拓扑空间上的函数 f 导出的合并树具有胞腔结构的充分条件。

- 在定理 17中，我们证明 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 与 n 个点在 X上的受约束构形空间同伦等价，该空间记作 $\mathrm{Conf}(X, T)$，其中这些点必须满足由 T确定的额外约束。

- 在定理 22中，我们证明当 $X, T)$ 连通时，$\mathrm{Conf}(^{-1}(T)$ 也路径连通。因此，当 X具有分支点时，持久同调纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 中的路径连通分支与具有条形码 D 的非同构合并树之间存在一一对应。

- 我们从上述结果中推导出两个重要结论，适用于 X 至少有一个分支点的情形：(i) 在推论33中，我们给出了 PH 中道路连通分支之间距离的下界$^{-1}(D)$；(ii) 在推论 32中，我们利用已有的合并树研究成果 [6, 14]，计算这类分支的数量。

本文组织如下。

第 2 节正式定义树、几何树和合并树的概念。此外，我们定义胞腔合并树，即配备了适当胞腔结构的合并树。我们还正式定义持久同调，描述函数的局部极小值与其零维条形码之间的关系，并详细说明几何树上的函数的持久性映射如何分解。

第 3节证明：紧致连通空间上的函数具有胞腔合并树，当且仅当它有有限多个局部极小值。随后，我们定义合并树之间的交错距离，并证明它在胞腔合并树的子空间上是一个真正的度量。第4 节旨在给出几何树 X 上的函数具有给定胞腔合并树的充要条件。

在第5 节中，我们定义空间 $\mathrm{Conf}(X, T)$，以及其他几个由 T所确定的规则约束的中间构形空间。通过这些构形空间之间一系列连续的同伦等价，本节最终证明了定理17：$\mathrm{MT}^{-1}(T)$，即具有合并树 T 的 X 上连续函数的空间，与 $\mathrm{Conf}(X, T)$ 同伦等价。

第6 节利用这一同伦等价，推导出一般条形码$^{-1}(T)$ 的 MT 和 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的拓扑性质 D。本节的主要结果——定理 22——指出，$\mathrm{Conf}(X, T)$ 因而 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 在 X 至少有一个分支点时是连通的；也就是说， X 不同胚于一个区间。由此，我们可以给出任意两个路径之间距离的下界

PH 中连通分支$^{-1}(D)$（推论 32），这仅取决于条形码 D。此外，结合定理 22 以及已有的、枚举具有给定条形码的合并树数量的研究[6, 14], ，我们在推论 33 中推导出

$$\#\pi_0(\mathrm{PH}^{-1}(D)) = \prod_{[b,d)\in D} \#\big\{[b',d') \in D \mid [b,d) \subset [b',d')\big\}.$$

最后，我们通过 Conf$^{-1}(D)$ 计算 PHX，T) 的同伦类型，其中 D 具有一个或两个区间。当 D 具有一个区间时，我们推导出 PH$^{-1}(D)$ 是可缩的（推论 34）。当 D 具有两个区间时，推论 35 表明 PH$^{-1}(D)$ 同伦于若干个圆的楔和

$$-1 + \sum_{v\in N(X)} (\eta(v)-1)(\eta(v)-2)$$

圆，其中 $N(X)$ 是 X 的任意三角剖分中的顶点集合，而 $\eta(v)$ 是顶点 v 的度。

2 背景

2.1 树、合并树和胞腔合并树

树是一种有限的连通无环图。如果每个顶点至多是 3 条边的端点，则称其为二叉的。树 T 的几何实现是一个拓扑空间：对 T 中的每条边，取区间 $[0,1]$ 的一个副本；当端点对应于 T 中的同一顶点时，将成对的端点作商。几何树是树的几何实现。

众所周知，树上任意两个点之间都存在唯一一条不自相交的路径。我们将这条路径称为给定两个点之间的最短路径。事实上，连接给定两个点的任何其他路径，其像都包含这条最短路径。当 T 为几何树时，讨论可推广到不相交的非空闭连通子集 A，$B \subseteq T$：存在唯一的最短路径 ShortPath(A, B)将它们连接起来。

由此可知，几何树的子集 $S \subseteq T$ 是路径连通的，当且仅当它是连通的。也就是说，如果 S 不是路径连通的，那么 S 中 a 与 b 之间的最短路径不包含于 S中。取 U_1 和 U_2 为 T 去掉这条最短路径上的一个点、但不在 S中的连通分支，我们便得到 S的一个不相交开覆盖。

我们将一族 $\mathcal{C}$ 闭子集的凸包定义为 Conv($\mathcal{C}$)，即集合 C中各元素之间最短路径上的点的并集。显然，凸包是连通的。

有根树（T，r）是具有一个特殊顶点 r 的树 T。有根树中的叶节点 是一个不等于 r 且恰好与另一个顶点相邻的顶点。分支点 是与三个或更多顶点相邻的顶点。如果根 r 与两个或更多顶点相邻，那么我们也称 r 为分支点。选择一个根会通过以下过程在任意树 T 的边上诱导出一个定向。我们首先将与 r 相邻的 T 的边定向为背离 r。归纳地，如果 v 与 v' 之间的边尚未定向，但与 v 相 incident 的一条边已经定向，那么我们将 v 与 v' 之间的边从 v 定向到 v'。每当存在一条从 v 到 v' 的有向边时，我们就称 v' 是 v 的子节点 。

在有根树中，如果存在一条从 v 到 v' 的有向路径（其中可能有 $v = v'$），则称顶点 v' 是 v 的后代 。对于有根树，我们用 LCA(v, v') 表示 v 和 v' 的最近公共祖先。

接下来，我们介绍合并树。我们将采用文献中两种不同的合并树定义，它们都是赋规空间的实例:

定义 1。 一个赋规空间 是一个拓扑空间 X，并配备一个连续映射 $\pi : X \to \mathbb{R}$.

两个赋规空间 (X_1, π_1) 和 (X_2, π_2) 之间的一个态射 是一个连续映射 $\phi : X_1 \to X_2$，满足 $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$。赋规空间的一个同构 是一个同时也是同胚的态射。

连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 给出一个合并树，其定义见 [21], ，这是赋规空间的一个实例:

定义 2。 对于具有连续函数 f的拓扑空间 X，相应的合并树MT(f) 是该空间的商空间

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\}$$

当 x 和 y 位于 $f^{-1}(-\infty, t]$ 的同一连通分支中时，通过关系 $(x, t) \sim (y, t)$ 建立联系。

由于合并树继承了一个映射 π_f，该映射来自 epi(f) 上的第二坐标投影映射，因此可以自然地将其视为赋规空间。我们在图 1 中示意了合并树的构造。

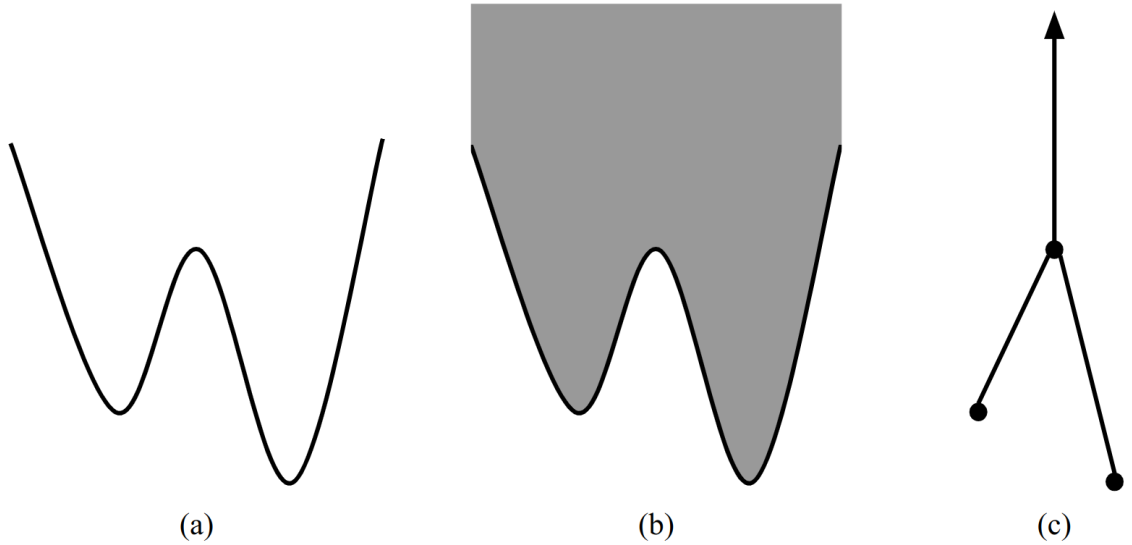

图 1：由函数构造合并树。(a) 区间上的函数 f 的图像。(b) 阴影部分表示 epi(f) 中严格位于 f 的图像上方的内容。(c) 将水平切片的连通分支映射为点，得到 MT(f)。这个合并树恰好具有胞腔结构，不过一般情况下未必如此。

我们将使用的另一种合并树定义见例如 [6]。这里给出一个类似的定义，并引入来自 [10] 的标记概念。

定义 3。 一个胞腔合并树 (T, π) 是几何有根树(T', r)与一个半开区间：

$$T' \sqcup [0,1)/(r \sim 0),$$

配备一个实值映射 π，满足

- π 沿着从根 r 出发、在 T' 中定向的边严格递减。
- π 沿半开区间 $[0,1)$严格递增至无穷大 .

合并树 T 的节点带有偏序 $\preceq$，其中 $v \preceq v'$ 当且仅当 v' 是 v 的后代。

给定一个胞腔合并树 (T, f)，从 $x \in f^{-1}(t)$ 到包含 x 的 $f^{-1}(-\infty, t]$) 的连通分支的映射是一个双射。此外，如果在 T 中存在一条从 x 到 y 的路径，且 f 沿该路径递增，那么对于 $t \leq f(y)$，$f^{-1}(-\infty, t]$) 中包含 x 的连通分支，包含于 $f^{-1}(-\infty, f(y)]$ 中包含 y 的连通分支。由此可得 $T =$ MT(f) 和 $f = \pi_f$。因此，通过连续单射 $(T, f) \mapsto$(MT(f) π_f)，胞腔合并树构成正则合并树的一个子空间。

为方便记号，我们有时将胞腔合并树的半开区间 (0，1) 的子集称为 e_∞。为便于索引，我们通常使用带标记的 胞腔合并树，其中叶节点 $l_1, \cdots, l_n$ 和节点 $v_1, \cdots, v_m$ 的任意排列已被固定。尽管默认情况下我们假设这些排列不允许叶节点和节点重复，但有时我们会明确允许重复，以便使用 [10] 中的更一般定义和结果。例如，下面的定义允许标签重复：

定义 4。 带标记的胞腔合并树 (T, π) 的诱导矩阵 定义为

$$\mathcal{M}(T)_{ij} := \pi(\mathrm{LCA}(l_i, l_j)).$$

为简化记号，在上下文清楚时，给定函数 f，我们将赋规空间 (MT(f) π_f) 记作 MT(f)，类似地，将胞腔合并树 (T, π) 记作 T。

2.2 持久同调

固定一个拓扑空间 X 和一个连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$。函数 f 导出一列拓扑空间 $f^{-1}(-\infty, t]$，它们由包含映射嵌套而成。对这列空间取域 $\mathbb{F}$ 上的同调 i^{th}，会导出一列以 $\mathbb{R}$ 为指标的向量空间。这列向量空间 $\mathbb{V}_i(f)$ 称为 i^{th} 持久模 f。持久模 f 也可以看作从 $(\mathbb{R}, \leq)$ 到向量空间范畴的函子。如果 $\mathbb{V}_i(f)$ 逐点有限维（简称 pfd），即对所有 t，$\dim H_i(f^{-1}(-\infty, t]) < \infty$，那么该 i^{th} 持久模可分解为一族以多重集 D 为指标的模 [5]，

$$\mathbb{V}_i(f) \cong \bigoplus_{I \in D} M_I, \tag{1}$$

其中每个 $I \subseteq \mathbb{R}$ 都是实数线上的一个区间，而 M_I 定义为向量空间序列

$$M_I(t) = \begin{cases} \mathbb{F} & t \in I \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

及其关联映射

$$M_I(s,t) = \begin{cases} id & s,t \in I \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

向量空间序列 M_I 称为区间模。

区间多重集 D 称为 f的维度 i 上的条形码。如果 D 是区间的有限集合，则称其为有限的。若函数 f 的所有持久模 $\mathbb{V}_i(f)$本身都是点有限维，则称函数 f 是点有限维的。在此情况下，与函数 f 相关联的条形码集合 $\{\text{PH}_i(f)\}_{i \geq 0}$（缩写为 $\text{PH}(f)$）是良定义的，并称为其持久同调。

2.3 持久同调与局部极小值

本节将展示零维条形码 $\text{PH}_0(f)$ 与函数 f 的局部极小值数量之间的一些关系。

定义 5. 给定拓扑空间 X 和映射 $f: X \to \mathbb{R}$，若子集 $M \subseteq X$ 满足是 f的局部极小值，即 M 连通，f在 M上为常值，并且任何包含 M的连通 M'也包含一个满足 $f(x) > f(M)$的点 x。

注意，若 f 连续，则其局部极小值均为闭集。因此，若 X 也紧，则 f 的局部极小值是紧的。特别地，当 f 连续且 X 是几何树时，局部极小值是紧的。

引理 6. 设 X 为任意拓扑空间，D 为有限条形码，且 $f: X \to \mathbb{R}$ 满足 $\text{PH}_0(f) = D$。则 f 有有限多个局部极小值。

证明。设 M是 f的一个局部极小值，并且 $m = f(M)$。反设，没有任何区间 D 从 m开始。于是我们可以找到一个范围 $[m-\epsilon, m]$，在其中没有区间 D 开始。利用分解式（1），我们看到内部态射 $\mathbb{V}_0(f)(m-\epsilon) \to \mathbb{V}_0(f)(m)$ 是满射。

注意到 $M \subseteq f^{-1}(-\infty, m]$ 在 X 中是连通的，因此是路径连通子空间的不交并。选取其中一个子空间 M_0。因此，存在 $f^{-1}(-\infty, m-\epsilon]$的一个路径连通分支 $\Omega_{m-\epsilon}$，它与 $f^{-1}(-\infty, m]$中的 M_0 属于同一个路径连通分支。给定一条从 $\Omega_{m-\epsilon}$到 $f^{-1}(-\infty, m]$中 M_0的路径 γ，集合 $M' = M \cup \text{im } \gamma$与 M是局部极小值这一点矛盾。

对局部极小值附近作同样的局部推理可知，D 中以 m 为起点的区间数量至少等于函数值为 m 的局部极小值数量。由于 D 是有限的，这意味着 f 只有有限个局部极小值。

□

以下结果还保证了，在只有有限个局部极小值的树上，连续函数的条形码是良定义的。

引理 7。 设 X 为一棵树，且 $f: X \to \mathbb{R}$ 为一个具有有限个局部极小值的连续函数。则 f 是点有限维的。

证明。设 $t \in \mathbb{R}$。令 Ω 为 $f^{-1}(-\infty, t]$ 的一个路径连通分支。考虑以下两种情况：

1. 要么 f 在 Ω 上取常值。于是 $M := \Omega$ 是 f 的一个局部极小值，因为任意连通的严格超集 M' 都会包含在某个 $f^{-1}(-\infty, t']$ 中，其中有 $t' > t$，但不会包含在 $f^{-1}(-\infty, t]$ 中。2. 要么 f 在一个极大的连通子集 $M \subseteq \Omega$ 上取得最小值 $t' < t$。那么 M 也是整个 X 中 f 的一个局部极小值。

在这两种情况下，我们都可以在 Ω 内找到 f 的一个局部极小值，并且由于 f 只有有限个局部极小值，我们可以推出 $f^{-1}(-\infty, t]$ 具有有限个路径连通分支，即 $\dim H_0(f^{-1}(-\infty, t]) < +\infty$。这是因为几何树的子集是连通的，当且仅当它是路径连通的。

最后，由于 X 是一棵树，其子集的每个连通分支都是可缩的，因此对于所有 $i > 0$，都有 $\dim H_i(f^{-1}(-\infty, t]) = 0$，结论得证。 □

2.4 树上持久同调的纤维

本节假设 X 是一棵树。于是，它的所有子集的每个连通分支都是可缩的，因此对于所有 $i > 0$，其 i^{th} 持久模都是平凡的。因此，我们将 f 的零维条形码简称为 $\mathrm{PH}(f)$，即 f 的持久同调。

本文研究逐点有限维连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 所构成的空间，这些函数对应于一个固定的条形码 D：

$$\mathrm{PH}^{-1}(D) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ pfd continuous} \mid \mathrm{PH}(f) = D \right\}.$$

我们考虑 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 上由连续函数的上确界范数诱导的拓扑。

注记 1. 我们也可以在所有连续函数构成的空间中，通过直接研究持久模层面上的问题，更一般地考虑这个逆问题：研究满足 $\mathbb{V}_0(f) \cong \bigoplus_{I \in D} M_I$ 的连续函数 f： $X \to \mathbb{R}$ 所构成的空间。由于我们将假设 D 是有限的，因此在这种框架下进行分析无需作重大修改。不过，为了使论述简洁，本文假设函数是逐点有限维的，从而其条形码总是有定义的。

正如在 [21], 中所观察到的，(X, f) 的零维持久同调，对于 f： $X \to \mathbb{R}$ 一个点有限维函数，同样也是 $(\mathrm{MT}(f)^{\pi_f})$ 的零维持久同调。事实上， $H_0(f^{-1}(-\infty, t])$ 的维数恰好等于 $f^{-1}(-\infty, t]$ 的路径分支数；而该集合是树的子集，因此这也等于同一集合的连通分支数。这正是 $|\pi_f^{-1}(t)|$。然而，集合 $\pi_f^{-1}(-\infty, t]$ 通过同伦形变收缩到 $\pi_f^{-1}(t)$

$$h_u : (x, s) \longmapsto (x, s(1-u) + tu).$$

因此，对于每个 t，映射 $x \mapsto (x, t)$ 在 $H_0(f^{-1}(-\infty, t])$ 与 $H_0(\pi_f^{-1}(-\infty, t])$ 之间诱导逐点同构。此外，这些同构与由不等式 $s \le t$ 产生的包含映射相交换。因此，(X, f) 的持久模完全由 $\mathrm{MT}(f)$ 决定。换言之，映射 PH 分解为一系列映射的复合

$$\mathrm{PH} : f \longmapsto \overset{\mathrm{MT}}{\longrightarrow} \mathrm{MT}(f) \longmapsto \longrightarrow D.$$

因此，我们将合并树上的持久同调称为这两个映射中的第二个映射，而它在给定合并树 $\mathrm{MT}(f)$ 上的取值称为 $\mathrm{MT}(f)$ 的条形码。

这些观察自然地将计算纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的问题划分为连续的两个步骤：首先研究哪些函数具有给定的合并树，其次研究哪些合并树具有给定的条形码。

3 合并树的树结构与度量

3.1 何时合并树是树

人们很容易假设 $(\mathrm{MT}(f)^{\pi_f})$ 总是胞腔合并树，然而事实并非如此，即使 X 非常简单。

例。 如果 $X=(-\infty、0]$ 和 $f(x)=e^x$，$\mathrm{MT}(f)$ 是一个具有两个开端点的区间，那么它不可能是胞腔合并树，因为胞腔合并树至多有一个开端点。

Th以下结果给出了使 MT(*f*) 确实为胞腔合并树的条件。

定理 8. 设 X 是一个紧致连通空间，且 $f:\ X\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数。当且仅当 f 有有限多个局部极小值时，$(\mathrm{MT}(f)^{\pi_f})$ 才是胞腔合并树。更确切地说，当且仅当满足以下关于 f 的条件时，$(\mathrm{MT}(f)^{\pi_f})$ 与带标记的细胞合并树 (T,π) 同构，其叶节点为 l_1、.....、l_n：

1. T函数 f 有有限多个局部极小值 $X_1,\cdots,X_n$，对应的函数值为 $\pi(l_1)\ \cdots,\pi(l\qquad\quad_n)$.

2. 对任意 $1\le i<j\le n$，令 t_{ij} 表示满足 X_i 与 X_j 位于 $f^{-1}(-\infty,t]$ 的同一连通分支中的 t 值的下确界，即 $t_{ij}=\inf\{t\mid(X_i,t)\sim(X_j,t)\}$。那么

$$t_{ij}=\mathcal{M}(T)_{ij}.$$

我们固定函数 $f:\ X\to\mathbb{R}$ 以及胞腔合并树（T，π）。我们将使用两个引理。

引理 9。 设 （y、t） $\in\mathrm{MT}(f)$。存在 M的一个局部极小值，使得对于 M中的任意 x，（x、t）也是（y、t）的一个代表元。特别地，可以选择 M，使得 f（M） $\le f$（y）。因此，对于任意 t，f^{-1}（$-\infty$、t]的连通分支数量至多与 f的局部极小值数量相同。

证明。 固定 y和 t。令 Ω_y表示 $f^{-1}(-\infty,\ t]$中 y的连通分支。集合 Ω_y是紧致集的闭子集，因此是紧致的。令 $m:=\min f_{|\Omega_y}$，并令 $M\subseteq\Omega_y$为 $f^{-1}(m)\cap\Omega_y$的一个连通分支。我们断言， M是 X中 f的一个局部极小值。

设 $M'\subseteq X$ 是一个包含 M 的连通集合，在该集合上 f 始终不大于 m。由于 $M'\subseteq f^{-1}(-\infty,m]\subseteq f^{-1}(-\infty,t]$，我们有 $M'\subseteq\Omega_y$，因此 $M'\subseteq f^{-1}(m)$，因为 $m=$是 $f_{|\Omega_y}$ 的局部极小值。于是 $M=M'$。由此可知，M 是 f 在 X中的局部极小值。同时，由于 M 在 Ω_y上使 f取最小值，因此必有 $f(M)\le f(y)$。

对于每个连通分支 $\Omega_y\subseteq f^{-1}(-\infty,t]$，我们将其中一个局部极小值 $M\subseteq$ 与 Ω_y 关联起来，引理的最后一部分由此得证。 □

引理 10。 对于任意 $1\le i<j\le n$，局部极小值 X_i 和 X_j 在 $f^{-1}(-\infty,t_{ij}]$ 中连通。

证明。假设结论不成立。令 Ω_i为 $f^{-1}(-\infty,t_{ij}]$中 X_i 的连通分支。由引理 9 可知，$f^{-1}(-\infty,t_{ij}]$中只有有限多个连通分支，因此 Ω_i 既是开集也是闭集。于是 Ω_i和 $\Omega_j:=f^{-1}(-\infty,t_{ij}]-\Omega_i$ 是 X 中互不相交的开闭集。特别地，Ω_j 非空，因为它包含 X_j。由于 Ω_i 和 Ω_j 都是开集， $X-\Omega_i\cup\Omega_j$ 是闭集，因此在 X 中是紧集。如果 $X-\Omega_i\cup\Omega_j$ 为空集，就意味着 $X=\Omega_i\cup\Omega_j$ 不连通，这与定理的假设矛盾。因此 $X-\Omega_i\cup\Omega_j$ 非空，我们可以令 $m:=\min f_{|X-\Omega_i\cup\Omega_j}$。

由于 $f^{-1}(-\infty,\ t_{ij}]$ 包含于 $\Omega_i\cup\Omega_j$，因此 m 大于 t_{ij}。所以 $X=f^{-1}(-\infty,\ t_{ij}]\cup f^{-1}[m,+\infty)$ 不连通，这与定理的假设矛盾。 □

接下来，我们将深入证明的核心，找出合并树 MT(*f*) 的实际树结构。

定理的证明 *8*。 设 $x_1,\ldots,x_n$是 X各个局部极小值处取到相应值 $m_1,\cdots,m_n$的点，其中 f，并令：

$$T:=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\times[m_i,+\infty)\right)/\Big\{(x_i,t)\sim(x_j,t)\mid t\ge t_{ij}\Big\}.$$

因此， T是若干互不相交的 n右开区间 $\{x_i\}\times[m_i,+\infty)$ 的并，且第 i 个区间在阈值 t_{ij}及其以上与第 j 个区间等同。特别地， T 是一棵树。

根据引理 10，我们有一个连续映射 $(x_i,t)\in T\mapsto(x_i,t)\in\mathrm{MT}(f)$，且该映射定义良好。我们还有一个反方向的连续映射，即 $(x,t)\mapsto(x_i,t)$，其中 x_i 由引理 9 给出，以确保 $(x,t)\sim(x_i,t)$ 属于 epi(f)。因此， T与 MT(f) 同构。

□

注记 2. 如果我们使用以下等价关系来定义合并树：$(x,\ t) \sim (y,\ t)$ 当且仅当 x 和 y属于 $f^{-1}(-\infty,\ t]$ 的同一路径分支，而不是同一连通分支时，定理 8便不成立。作为一个反例，请考虑所谓的拓扑学家的正弦曲线

$$S = \{(0,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}.$$

众所周知，S 是闭集且连通，但具有两个路径连通分支。取 B 为覆盖 S和 f：$B \to \mathbb{R}$ 到 S的欧几里得距离，我们看到 $f^{-1}(-\infty,\ 0] = S$不是路径连通的。因此$\mathrm{MT}(f)$ 不可能是胞腔合并树，因为它不是豪斯多夫的：点 p 的任意邻域（其中$\pi_f(p) = 0$）都包含这两个点。

注记 3。 在定理8的条件下，这意味着$\mathrm{MT}(f)$ 是一个胞腔合并树，节点 v是节点 v' 的后代，当且仅当将它们分别视为 $f^{-1}(-\infty,\ \pi(v)]$和 $f^{-1}(-\infty,\ \pi(v')]$ 的连通分支时，v 是 v'的子集。

3.2 胞腔合并树上的交错距离

本节分析合并树上的交错距离（一种伪距离） [21, 引理 1]。我们证明，在胞腔合并树的子空间上，它实际上是真正的距离。

除了映射 π_f之外，合并树还配备了 ϵ-平移映射，对于 $\epsilon \geq 0$:

$$i_f^\epsilon : (x,t) \in \mathrm{MT}(f) \longmapsto (x, t+\epsilon) \in \mathrm{MT}(f).$$

我们通常会省略下标，将 i_f^ϵ 写作 i^ϵ。

定义 11。 设 f 和 g 是定义在 X上的两个连续函数。$\mathrm{MT}(f)$与 $\mathrm{MT}(g)$ 之间的 ϵ-交错是一对连续函数 $\alpha^\epsilon : \mathrm{MT}(f) \to \mathrm{MT}(g)$、$\beta^\epsilon : \mathrm{MT}(g) \to \mathrm{MT}(f)$，满足以下方程

$$\begin{aligned} \beta^\epsilon \circ \alpha^\epsilon &= i^{2\epsilon} \qquad & \pi_g(\alpha^\epsilon(x)) &= \pi_f(x) + \epsilon \\ \alpha^\epsilon \circ \beta^\epsilon &= i^{2\epsilon} \qquad & \pi_f(\beta^\epsilon(y)) &= \pi_g(y) + \epsilon. \end{aligned}$$

交错距离 $d_I(\mathrm{MT}(f),\ \mathrm{MT}(g))$定义为满足$\mathrm{MT}(f)$ 与 $\mathrm{MT}(g)$ 是 ϵ-交错的值 ϵ的下确界。

我们在图 2中展示了两个合并树之间的交错。

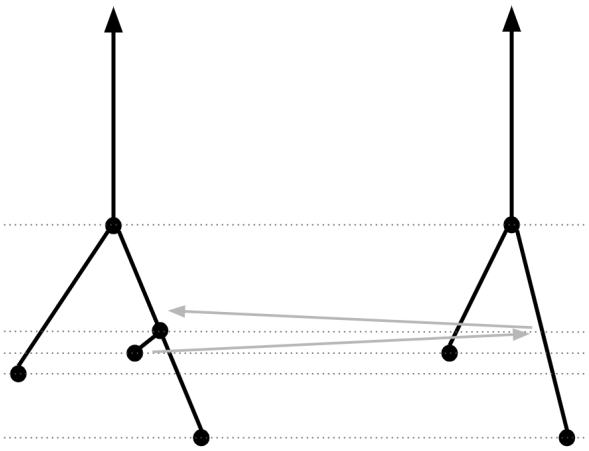

图 2：两个合并树之间的交错。

命题 12。 交错距离是胞腔合并树子空间上的一个度量（在同构意义下）。

证明。 根据 [21, 引理 1]，交错距离是胞腔合并树上的广义伪度量，因此还需证明：在胞腔合并树上，交错距离取实数值；并且如果两个胞腔合并树（T_1，π_1）和（T_2，π_2）之间的交错距离为零，则它们同构。

根据 [10] 的推论 4.4（该推论又依赖于 [22, 定理 1]），存在 T_1 和 T_2 的两个标记（可能包含重复项），它们具有相同数量的叶节点指标，使得：

$$d_I(T_1, T_2) = \min_{1 \le i,j \le N} |\mathcal{M}(T_1)_{ij} - \mathcal{M}(T_2)_{ij}|.$$

因此，d_I 是实值的。此外，根据 [10], 的引理 2.9，如果 $\mathcal{M}(T_1) = \mathcal{M}(T_2)$，则 $T_1 \cong T_2$，因此 d_I 是在同构意义下胞腔合并树上的度量。 □

命题 13。 设 X 为紧致连通拓扑空间，且设 f、g：$X \to \mathbb{R}$ 为具有相同有限条形码 D 的连续点有限维函数，其维数为零。设 δ_L 为 D 中不同区间左端点对之间的最小距离，δ_R 为不同右端点对之间的最小距离。如果

$$\|f - g\|_\infty < \min(\delta_L, \delta_R),$$

则 $\mathrm{MT}(f)$ 与 $\mathrm{MT}(g)$ 同构。

证明。设（T，π）是一个条形码为 D的胞腔合并树。那么对于 T中的任意分支点 v，映射 $H_0(\pi^{-1}(-\infty, \pi(v) - \epsilon]) \to H_0(\pi^{-1}(-\infty, \pi(v)])$ 对所有充分小的 ϵ都必须具有非平凡的核。因此，$\pi(v)$ 必须是 D中某个区间的右端点。类似地，对于 T中的任意叶节点 l，映射 $H_0(\pi^{-1}(-\infty, \pi(l) - \epsilon]) \to H_0(\pi^{-1}(-\infty, \pi(l)])$ 对所有充分小的 ϵ都不具有满像，因此 $\pi(l)$ 必须是 D中某个区间的左端点。

根据引理 6 和定理 8，$\mathrm{MT}(f)$ 和 $\mathrm{MT}(g)$ 都是胞腔合并树。根据 [10] 的推论 4.4（该推论又依赖于 [22, 定理 1]），存在胞腔合并树 $\mathrm{MT}(f)$ 和 $\mathrm{MT}(g)$ 的两个标记（可能包含重复项），使其叶节点指标数量相同，并且：

$$d_I(\mathrm{MT}(f), \mathrm{MT}(g)) = \min_{1 \le i,j \le N} |\mathcal{M}(\mathrm{MT}(f))_{ij} - \mathcal{M}(\mathrm{MT}(g))_{ij}|.$$

$\mathcal{M}(\mathrm{MT}(f))$ 的对角项是 $\mathrm{MT}(f)$ 的叶节点的投影值，非对角项是分支点的投影值。对于 $\mathcal{M}(\mathrm{MT}(g))$，情况类似。然而，根据第一段，$\mathrm{MT}(f)$ 和 $\mathrm{MT}(g)$ 的叶节点与分支点的投影值分别是 D的左、右区间端点的值。因此，若我们假设 $d_I(\mathrm{MT}(f), \mathrm{MT}(g))$ 为正，则实际上，根据上面的等式，

$$d_I(\mathrm{MT}(f), \mathrm{MT}(g)) \ge \min(\delta_L, \delta_R).$$

H因此，交错距离的稳定性定理 [21, 定理 2]给出了 t

$$\min(\delta_L, \delta_R) \le d_I(\mathrm{MT}(f), \mathrm{MT}(g)) \le \|f - g\|_\infty < \min(\delta_L, \delta_R),$$

矛盾。因此 $d_I(\mathrm{MT}(f), \mathrm{MT}(g)) = 0$。由于 $\mathrm{MT}(f)$ 和 $\mathrm{MT}(g)$ 都是胞腔合并树，命题 12表明，$\mathrm{MT}(f)$ 和 $\mathrm{MT}(g)$ 同构。 □

4 树上的函数及其给定的合并树

In 本节研究分支点均为非退化的胞腔合并树 :

定义 14。 胞腔合并树(T, π) 称为一般的，当且仅当它是一棵二叉树（每个内部节点都有两个子节点），且所有叶节点的投影值各不相同。

特别地，如果 (T, π) 有 n 个叶节点，那么它有 $(n-1)$ 个内部节点。在本节其余部分，我们固定一棵一般的带标记的胞腔合并树 T；对于每个内部节点 $v \in T$，我们任意固定其两个子节点的标记 Lv 和 Rv。特别地，$Lv \preceq v$，这里提醒一下，该记号表示 Lv 是 v 的后代，同理 $Rv \preceq v$ 也是如此。对于 $1 \le i \le n$，我们将叶节点的值记为 $m_i := \pi(l_i)$。令 X 为一棵几何树。

命题 15。 设 f：$X \to \mathbb{R}$ 是一个仅有有限个局部极小值的连续函数。当且仅当以下两个条件均满足时，$\mathrm{MT}(f)$ 与 T 同构：

1. 函数 f 有 n 个局部极小值 X_1、$\cdots$、X_n，其函数值分别为 m_1、$\cdots$、m_n。

2. 对任意 $i \neq j$，将 f 限制在 $\mathrm{ShortPath}(X_i, X_j)$ 上的最大值等于 $\mathcal{M}(T)_{ij}$.

证明。根据定理 8，$\mathrm{MT}(f)$ 是一个胞腔合并树，并且当且仅当它同构于 T 时 if:

1. 函数 f 有 n 个局部极小值 $X_1, \cdots, X_n$，其值为 $m_1, \cdots, m_n$。

2. 对任意 $1 \leq i < j \leq n$，记 $t_{ij} = \inf\{t \mid (X_i, t) \sim (X_j, t)\}$，则有 $t_{ij} = \mathcal{M}(T)_{ij}$。

此外，根据引理 10，我们可以在 t_{ij} 的定义中将下确界替换为最小值。由于 X 是一棵几何树，因此显然

$$\min\{t \mid X_i \text{ and } X_j \text{ are connected in } f^{-1}(-\infty, t]\} = \max f_{|\mathrm{ShortPath}(X_i, X_j)} \qquad \square$$

由此我们得到对具有给定合并树的函数最有用的刻画。

命题 16. 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是一个只有有限个局部极小值的连续函数。那么$\mathrm{MT}(f)$ 与 T 同构，当且仅当以下两个条件都成立：

1. 函数 f 有 n 个局部极小值 $X_1, \cdots, X_n$，其函数值分别为 $m_1, \cdots, m_n$。

2. 给定一个节点 v（可能是叶节点），令 $X_f = (X_1, \ldots, X_m)$ 并且

$$\mathrm{Conv}_{X_f}(v) := \mathrm{Conv}\left\{X_i \mid \textit{ leaf } l_i \textit{ is a descendent of } v \textit{ in } \mathrm{MT}(f)\right\} \subseteq X.$$

那么，对于任意 $1 \leq k \leq n-1$，有：

$$\max\left\{f(x) \mid x \in \mathrm{ShortPath}(\mathrm{Conv}_{X_f}(Lv_k), \mathrm{Conv}_{X_f}(Rv_k))\right\} = \pi(v_k), \tag{2}$$

并且最大值在最短路径的唯一一个连通子集 Y_k 上取得。

证明。设 f 满足命题的条件。其中一个条件是命题 15的条件 1；按 T的 π值递增顺序对节点进行归纳，立即可得条件 2，因此 $\mathrm{MT}(f) \sim T$。反过来，命题 15 中的条件 2 等价于

$$\forall v_k \in T, \forall l_i \preceq Lv_k \text{ and } l_j \preceq Rv_k, \max f_{|\mathrm{ShortPath}(X_i, X_j)} = \pi(v_k).$$

由此，立即归纳可得，对于每个节点 $v_k \in T$，最大值 $\max f_{|\mathrm{Conv}_{X_f}(v_k)}$等于 $\pi(v_k)$，并在 $\mathrm{ShortPath}(凸包_{X_f}(Lv_k)$，$凸包_{X_f}(Rv_k))$ 上取得。

反设最大值 $\pi(v_k)$ 在最短路径的两个不同连通子集 Y_1 和 Y_2 处取得。那么，在 $f^{-1}(-\infty, t]$ 对于 $t < \pi(v_k)$，介于 Y_1 和 Y_2 之间的元素所构成的连通分支，与凸包$_{X_f}(Lv_k)$ 和凸包$_{X_f}(Rv_k)$中元素所构成的连通分支不同，因此在 $t = \pi(v_k)$ 处，f 的子水平集至少有三个彼此对应的连通分支，这与 T 是一般的相矛盾。 $\square$

5 将纤维形变收缩到树上的构型空间

设 X 为一棵几何树。我们通过上确界范数对 X 上的函数空间赋予度量。在本节中，我们固定一个一般的带标记的细胞合并树 T，并分析纤维中函数 f 所构成的子空间：

$$\mathrm{MT}^{-1}(T) = \left\{f : X \to \mathbb{R}, \mathrm{MT}(f) = T\right\}.$$

不妨设 T 的节点仅包括分支点和叶节点。我们将通过一系列同伦等价来简化 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$

$$\mathrm{MT}^{-1}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}(X, T),$$

其中，$\mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X, T)$、$\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X, T)$ 和 $\mathrm{Conf}(X, T)$ 是构形空间，用于追踪函数 $f \in \mathrm{MT}^{-1}(T)$ 的局部极小值和鞍点，详情如下。

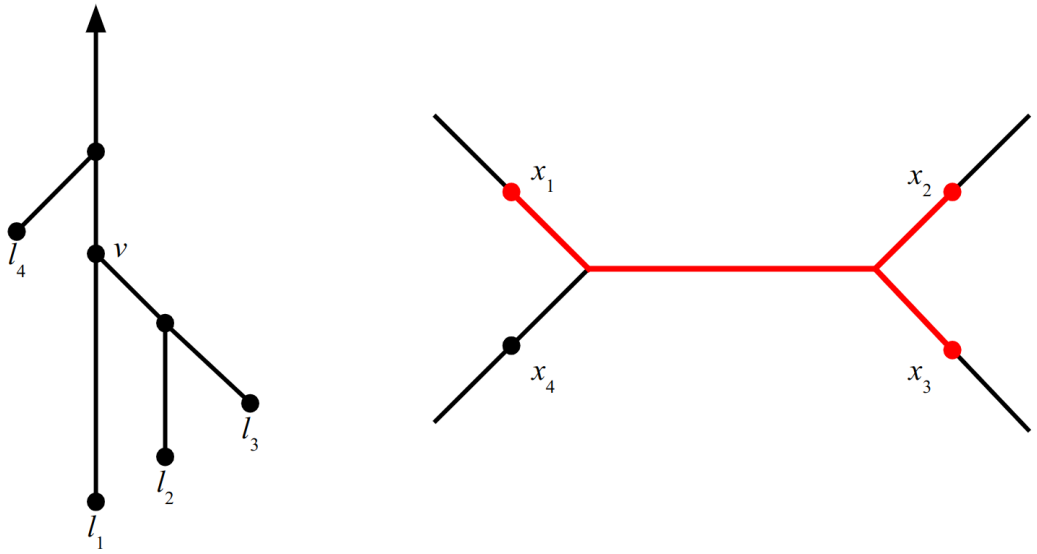

图3：（左）一棵有四个叶节点的胞腔合并树 T。（右）树 X 上 $\mathsf{Conf}_4(X)$ 的一个元素 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$。这里，与节点 $v\in T$ 相关联的集合 $\mathsf{Conv}_x(v)$ 已突出显示。

˜考虑 $X=(X_1,\ \ldots,\ X_n)\subseteq X^n$。受命题 16中定义的启发，对于 v 中的节点 T（可能是叶节点），我们定义：

$$\mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(v):=\mathrm{Conv}\Big\{X_i\mid \text{ leaf } l_i \text{ is a descendent of } v\Big\}\subseteq X.$$

我们类似地定义 $\mathsf{Conv}_x(v)$ $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X^n$。我们在图3中展示这一构造。记通常的有序构型空间为 Conf n（含有$_n(X)$ 个点）。空间 $\mathsf{Conf}(X,T)$ 定义如下：

$$\mathrm{Conf}(X,T):=\Big\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{Conf}_n(X)\mid \mathrm{Conv}_x(v)\cap\mathrm{Conv}_x(v')\neq\emptyset\Rightarrow v\preceq v' \text{ or } v'\preceq v\Big\}.$$

构型 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\mathsf{Conf}(X,\ T)$ 应被理解为函数 f（其合并树为 T）取得局部极小值 $m_1,\ \cdots,\ m_n$ 的点。一般而言，函数 f（其合并树为 T）可能在任意闭集而非点上取得其极小值，因此自然可以将 $\mathsf{Conf}(X,\ T)$ 扩展为以下闭集构形空间：

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T):=\Big\{&\tilde{X}=(X_1,\cdots,X_n)\subseteq X^n \text{ disjoint connected closed sets }\mid\\ &\mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(v)\cap\mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(v')\neq\emptyset\Rightarrow v\preceq v' \text{ or } v'\preceq v\Big\}.\end{aligned}$$

˜注意，集合构型 $X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)\in\mathsf{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,\ T)$ 会为任意节点 $v\in T$ 诱导出凸包 $\mathsf{Conv}_{\tilde{X}}(v)$。对于具有子节点 Lv 和 Rv 的内部节点 v，我们还将考虑 X 的以下子集：

$$\mathrm{ShortPath}_{\tilde{X}}(v):=\mathrm{ShortPath}\big(\mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(Lv),\mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(Rv)\big).$$

现在我们可以介绍最后一个构形空间 $\mathsf{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,T)$，其中包含闭集，并且还记录函数 $g\in\mathsf{MT}^{-1}(T)$ 的鞍点：

$$\begin{aligned}\mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,T):=\Big\{&(\tilde{X},\tilde{Y})=(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_{n-1})\subseteq X^{2n-1} \text{ disjoint connected closed sets }\mid\\ &(X_1,\cdots,X_n)\in\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T),\\ &\forall j,\ Y_j\cong[0,1],\ Y_j \text{ subset of the interior of } \mathrm{ShortPath}_{\tilde{X}}(v_j)\Big\}.\end{aligned}$$

注意，从 X 上的底层度量继承的豪斯多夫距离会在闭集的构形空间上诱导拓扑，因此也会在我们的空间 $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,T), \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$ 和 $\mathrm{Conf}(X,T)$ 上诱导子集拓扑。

定理 17. 空间 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$、$\mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,T)$、$\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$ 和 $\mathrm{Conf}(X,T)$ 同伦等价。

定理 17 的证明由连续构造三个同伦等价组成：

$$\mathrm{MT}^{-1}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}(X,T).$$

证明。 证明中，我们将在 X 上固定度量 d。

步骤 1： $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,\ T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}(X,\ T)$

我们任取一个叶节点 $\tau \in X$ 作为树的根，因此对于任意连通闭子集 $A \subseteq X$，离根最近的点 $\tau(A)$ 唯一确定。我们可以通过一族由 $(A_t)_{0\le t\le 1}$ 表示的包含子集，将 A 连续收缩到 $\tau(A)$：

$$A_t := \big\{x \in A \mid d(a,\tau(A)) \le (1-t)\mathrm{diam}(A)\big\}.$$

给定一个由连通闭集组成的构型 $(X_1,\ \cdots,\ X_n)$，将每个 X_i 连续收缩到 $\tau(X_i)$，便定义了一个变形收缩，将 $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,\ T)$ 收缩到 $\mathrm{Conf}(X,\ T)$：

$$\mathrm{H} : \big(t,(X_1,\cdots,X_n)\big) \in [0,1]\times \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T) \longmapsto ((X_1)_t,\cdots,(X_n)_t) \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$$

~ ~事实上，在这个映射下，任意 $X \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$ 都会映射到一个满足属于 $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$ 条件的元素 $\mathrm{H}(t,X)$：对于任意节点 $v,v' \in T$，如果 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{H}(t,\tilde{x})}(v) \cap \mathrm{Conv}_{\mathrm{H}(t,\tilde{x})}(v') \neq \emptyset$，由于 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{H}(t,\tilde{x})}(v) \subseteq \mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v)$ 且 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{H}(t,\tilde{x})}(v') \subseteq \mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v')$，那么我们也有 $\mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v) \cap \mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v') \neq \emptyset$，因此 $v \preceq v'$ or $v' \preceq v$，如所需。

步骤 2： $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,\ T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,\ T)$

~我们继续使用根 $\tau \in X$。设 $X = (X_1,\cdots,X_n) \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$ 是一个闭集构型。给定 $1 \le j \le (n-1)$，我们有 $\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v_j)$ 是 X 中的一个闭线段 $[a_j,b_j]$，按照约定，其端点 a_j 是离根 τ 最近的。

令 (s,t) 是开标准单纯形 $\Delta_2 := \{(s,t) \mid 0<s\le t<1\}$ 的一个元素。定义

$$Y_j^{s,t} := \left\{x \in [a_j,b_j] \mid s \le \frac{d(a_j,x)}{d(a_j,b_j)} \le t\right\}.$$

注意，随着 $1 \le j \le (n-1)$ 变化，最短路径 $\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v_j)$ 彼此不相交。事实上，反设 $\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v)$ 与 $\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v')$ 相交，其中 ~ 是两个不同的节点 v、$v' \in T$。于是我们有 $\mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v) \cap \mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v') \neq \emptyset$，且由于 $X \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)$，不失一般性，可设 v 是 v' 的后代。但这样一来，$\mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v)$ 与 $\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v')$ 不相交；又因为 $\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v) \subseteq \mathrm{Conv}\ \tilde{x}(v)$，便得到矛盾：$\mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v) \cap \mathrm{ShortPath}\ \tilde{x}(v') = \emptyset$。因此，集合 $Y^{s_j}_{\ j}{}^{t_j}$ 彼此不相交，且均与集合 X_i 不相交，从而有如下同胚：

$$[(X_i)_{i=1}^n,(s_j,t_j)_{j=1}^{n-1}] \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,T)\times(\Delta_2)^{n-1} \longmapsto [(X_i)_{i=1}^n,(Y_j^{s_j,t_j})_{j=1}^{n-1}] \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,T)。$$

将每个 Δ_2 的副本变形收缩至一点，便得到 $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,\ T)$ 与 $\mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X,\ T)$ 之间的同伦等价。

步骤 3： $\mathrm{MT}^{-1}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X,\ T)$

为了证明这两个空间之间存在同伦等价，我们需要定义一个映射，将函数 f 映射到它的局部极小值 $X_i(f)$ 和鞍点 $Y_j(f)$，见图4。

设 $f \in \mathrm{MT}^{-1}(T)$。对于 $1 \le i \le n$，令 $X_i(f)$ 表示 X 中的连通子集，在该子集上，f 取得对应于 T 的叶节点 l_i 的最小值 m_i。映射 $f \mapsto X_i(f)$ 是连续的。

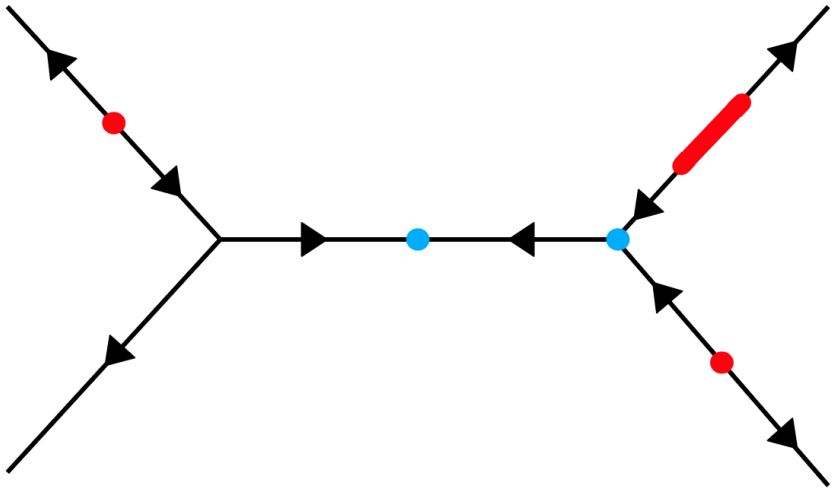

图4：树上函数的局部极小值和鞍点。所示树上箭头的方向 X 表示函数递增的方向。三个红色区域表示局部极小值 $X_i(f)$ 的位置，而两个蓝色区域表示鞍点 $Y_j(f)$ 的位置。鞍点不一定是局部极大值：在此例中，一个鞍点是局部极大值，而另一个不是。

设 v、$v' \in T$ 是两个节点，使得 $A := $ 凸包 $\tilde{x}(v) \cap$ 凸包 $\tilde{x}(v') \neq \emptyset$。不失一般性，假设 $\pi(v) \leq \pi(v')$，并证明 v 是 v' 的后代，即 $v \preceq v'$。节点 v，视为 $f^{-1}(-\infty, \pi(v)]$，中的一个连通分支，包含 A。由于 $f^{-1}(-\infty, \pi(v')]$ 中由 v' 表示的连通分支也包含 A，再次将节点视为次水平集的连通分支，可知 $\tilde{v}$ 是 v' 的子集。因此 $v \preceq v'$（见注记 3）。于是 $X := (X_1(f) \ldots, X_n(f)) \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Min}}(X, T)$。

根据命题 16，对于 $1 \leq j \leq n-1$，将 f 限制在 ShortPath $\tilde{x}(v_j)$ 上的最大值 $\pi(v_j)$ 在唯一的连通闭集 $Y_j(f$ 上取得。由于局部极小值 $X_i(f)$ 随 f 连续变化，凸包 Conv $\tilde{x}(v_j)$ 以及它们之间的最短路径 ShortPath $\tilde{x}(v_j)$ 也连续变化，因此映射 $f \mapsto Y_j(f)$ 是连续的，从而我们定义了一个连续映射：

$$F : f \in \mathrm{MT}^{-1}(T) \longmapsto \big(X_1(f), \cdots, X_n(f), Y_1(f), \cdots, Y_{n-1}(f)\big) \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X, T).$$

为了证明 F 是同伦等价，我们定义一个方向相反的映射。设 $Z = (X, Y) = (X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_{n-1}) \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X, T)$。我们对 T 的节点使用归纳法来构造函数 f_Z。首先，我们定义 $f_Z(X_i) := m_i$。接下来，设 $v_j \in T$ 是一个节点，且 f_Z 已在凸包 $\tilde{x}(Lv_j)$ 和凸包 $\tilde{x}(Rv_j)$ 上定义。我们将 f_Z 扩展到

$$\mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(v_j) = \mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(Lv_j) \cup \mathrm{Conv}_{\tilde{X}}(Rv_j) \cup \mathrm{ShortPath}_{\tilde{X}}(v_j),$$

令 $f_Z(Y_j) := s_j$，并在 ShortPath (v_j) 的其余部分上进行线性插值。完成这一过程后，f_Z 便定义在所有 X_i 的凸包上；在该凸包之外，我们令 f_Z 向所有方向递增：

$$\forall x \in X \setminus \mathrm{Conv}(X_1, \cdots, X_n), \qquad f_Z(x) := f_Z(\mathrm{proj}_{\mathrm{Conv}(X_1, \cdots, X_n)}(x)) + d(x, \mathrm{Conv}(X_1, \cdots, X_n)).$$

根据命题 16 $\mathrm{MT}(f_Z) = T$ 如所需。

这给出了一个连续映射：

$$G : Z \in \mathrm{Conf}_{\mathrm{Crit}}(X, T) \longmapsto f_Z \in \mathrm{MT}^{-1}(T),$$

且显然 $F \circ G =$ 恒等映射。反过来，根据命题 16，直线插值 n

$$(t, f) \in [0, 1] \times \mathrm{MT}^{-1}(T) \longmapsto (1-t)f + tG \circ F(f)$$

取值于 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$，因此它定义了一个同伦等价 $G \circ F \sim \mathrm{Id}$。 □

6 具有给定条形码的树上函数的拓扑

设 X 是一棵几何树。本节中，我们固定一个条形码 D，并分析由条形码 D 确定的连续点有限维函数空间 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$。对于 $f \in \mathrm{PH}^{-1}(D)$，我们令 $\mathrm{PH}_f^{-1}(D) \subseteq \mathrm{PH}^{-1}(D)$ 表示包含 f 的纤维的连通分支。本节余下部分中，我们假设 D 在以下意义下是一般的：

定义 18. 条形码 D 是一般的，当且仅当它是有限的，且所有区间端点都互不相同。

计算纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$，可以通过计算两个复合映射的纤维来完成：

$$\mathrm{PH} : f \longmapsto^{\mathrm{MT}} T \longmapsto D$$

第二个映射的纤维已由 [6]给出：产生一般条形码的合并树的数量 D 有限，且已在 [6, 定理 4.8]中计算得出。因此，接下来需要分析具有给定合并树的函数 T。

我们首先在小节 $^{-1}(T)$ 中将 MT 与 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的一个连通分支对应起来，然后在小节 6.1 中推导这些分支的一些拓扑性质。在开始之前，我们先记录以下两个有用的性质。

命题 19. 若 D 是一般条形码，且 $f \in \mathrm{PH}^{-1}(D)$，则合并树 $\mathrm{MT}(f)$ 是一般胞腔合并树。

证明。 由于 D是有限的，根据引理 6 f有有限多个局部极小值，进而根据定理 8，$(\mathrm{MT}(f)\, \pi_f)$ 是胞腔的。由于 $\mathrm{PH}(\pi_f) = \mathrm{PH}(f)$ 的区间端点互不相同，π_f的子水平集中每次至多有两个连通子集合并，因此 $\mathrm{MT}(f)$ 是一棵二叉树。同样，$\mathrm{MT}(f)$ 的任意两个叶节点的 π_f取值都不相同，否则 $\mathrm{PH}(f)$ 将有重复的左端点。 □

命题20。 给定一棵几何树 $X \neq \emptyset$ 和一棵胞腔合并树 T，纤维 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 以及构形空间 $\mathrm{Conf}(X, T)$ 均非空。

证明。 单位区间上的一个函数（因此更一般地说，任意非空树 X上的函数），其合并树为 T，例如可以按照 [6, 命题68]构造。因此 $\mathrm{MT}^{-1}(T) \neq \emptyset$非空，并且根据定理 17，$\mathrm{Conf}(X, T) \neq \emptyset$ 也非空。 □

6.1 计算二叉树上的纤维的连通分支

回顾一下，条形码 D 是一般的。为避免 $\mathrm{PH}^{-1}(D) = \emptyset$的平凡情形，我们进一步假设 D 在度大于 0 时没有区间，并且在度 0 时只有一个无界区间 $[b, \infty)$，它包含所有其他区间。

命题 21. 给定一个条形码为 D 的一般胞腔合并树 T，$\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 是$\mathrm{PH}^{-1}(D)$中非空的连通分支之并。

证明。 $\mathrm{MT}^{-1}(T) \neq \emptyset$ (命题 20) 且 MT 在 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 上局部常值（命题 13）。 □

定理 22. 设 X 是一个不同胚于单位区间的树。给定一般胞腔合并树 T，纤维 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 非空且路径连通。特别地，如果 $f \in \mathrm{MT}^{-1}(T)$的条形码为 D，那么$\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 等于$\mathrm{PH}_f^{-1}(D)$，即包含 f 的纤维$\mathrm{PH}^{-1}(D)$的路径连通分支。

证明主要依赖于以下结果。

命题23。 设 X 是一棵不同胚于单位区间的树。设 T 是一般胞腔合并树。那么$\mathrm{Conf}(X, T)$ 是路径连通的。

在证明该命题之前，我们先来看看它如何推出定理。

定理的证明 *22*。 根据命题 20，$\mathrm{MT}^{-1}(T) \neq \emptyset$，并由定理 17可知，它与 $\mathrm{Conf}(X, T)$ 同伦等价；根据命题 23，后者是路径连通的。若 T的条形码为 D，根据命题 21，$\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 是 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的非空连通分支并集。因此，它恰好等于其中一个连通分支。 □

为了证明 Conf(X,T) 是路径连通的，我们分两步进行，每一步都依赖一个关键引理。首先，我们说明如何将一个点构型变形为所有点都位于 X同一条边上的构型。实现这一步的主要结果是引理26。然后，对于两个点都位于某条边上的构型，我们说明如何借助 X的一个分支点将它们连接起来。我们通过引理 31实现这一步。全文中，我们固定胞腔合并树 T的一个标记。

以下 两个结果——引理24和引理25——将在我们的论证中反复使用 .

引理 *24.* 设 $x=(x_1,\dots,x_n)\in$ *Conf*(X,T)，且 $x'=(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)\in$ *Conf*$_n(X)$。固定 P，它是从 x_i 到 y的某条路径的像。如果对于任何不是 l_i的祖先的 v，*Conv*$_x(v)$ 都不与 P 相交，那么 $x'\in$ *Conf*(X,T)，并且在 *Conf*(X,T) 中存在一条从 x 到 x' 的路径。

证明。对于 $p\in P$，令 $x(p)=(x_1,\dots\dots,x_{i-1},p,x_{i+1},\dots\dots,x_n)$。令 v、v' 为 T 的节点，其中既不是 $v\preceq v'$ 的祖先，也不是 $v'\preceq v$ 的祖先。因此，不可能 v 和 v' 同时是 l_i 的祖先，因为 l_i 的祖先是全序的。如果 v 和 v' 都不是 l_i 的祖先，那么

$$\mathrm{Conv}_{x(p)}(v)\cap\mathrm{Conv}_{x(p)}(v')=\mathrm{Conv}_x(v)\cap\mathrm{Conv}_x(v')=\emptyset,$$

最终等式由以下事实得出：$x\in$ Conf(X,T)。最后，考虑以下情形：v 或 v' 是 l_i的祖先，但二者并非都是。无损一般性地，假设 v' 是 l_i 的祖先，而 v 不是。注意

$$\mathrm{Conv}_{x(p)}(v')\subseteq\mathrm{Conv}_x(v')\cup\mathrm{ShortPath}(x_i,p)\subseteq\mathrm{Conv}_x(v')\cup P.$$

因此，由于 Conv$_x(v)\cap$ Conv$_x(v')=\emptyset$，我们有

$$\mathrm{Conv}_{x(p)}(v)\cap\mathrm{Conv}_{x(p)}(v')\subseteq\mathrm{Conv}_x(v)\cap\big(\mathrm{Conv}_x(v')\cup P\big)=\mathrm{Conv}_x(v)\cap P=\emptyset.$$

因此，对于所有 $p\in P$，$x(p)$ 属于 Conf(X,T) 的判据均得到满足。结论得证。

□

引理 25。设 b是 X 中的一个分支点或叶节点，其关联边为 e，且 $x=(x_1,\dots,x_n)\in$Conf(X,T)。若对于某个 i有 $x_i=b$，则从 x_i到 e内部点 y的足够短路径，定义了从 x 到 $(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$（位于 Conf$(X,T)$中的路径。

证明。当 y 与 $x_i=b$ 足够接近时，从 y 到 x_i的最短路径中不存在 x_j（此处为 $j\neq i$），也不存在额外的分支点。将此路径记为 P，并令 $x'=(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$。对于一个不是 l_i 祖先的节点 $v\in T$，集合 Conv$_x(v)$ 与 P 不相交，因为若相交，则意味着它会包含 x_i。由引理 24 可得结论。

□

引理 26。任取 $x=(x_1,\dots,x_n)\in$Conf(X,T)。在 X 中存在一条边 e，使得在 Conf(X,T) 中存在一条从 x 到 $x'=(x'_1,\dots,x'_n)$ 的路径，其中每个 x'_i 都位于 e 的内部。

证明。根据引理25，不失一般性地，假设 x 中没有点位于 X的分支点或叶节点上。设 $e\in X$ 是一条边，其内部包含 x 中的部分（但非全部）元素。我们将构造一条路径，通向一个 x'，使其在 e中多出一个元素，从而通过归纳法得到该引理。路径的构造如图 5所示。

根据假设，x 中至少有一个元素位于 X 去掉 e的内部后所得的两个路径连通分支之一中。设 b 表示该路径连通分支中 e 的端点，我们将其称为 C。设 x_j表示 x 中位于 e 内部且距离 b最近的元素。我们将构造一条从 b 到某个 $x_i\in C$的路径，并利用引理 Conf(X,T)24证明该路径可提升为 Conf$(,)$ 中的一条路径。

令 $v_0\in T$ 为满足 Conv$_x(v_0)$ 包含 b的最小祖先。于是，v_0 本身不是 l_j，因此 v_0 有两个子节点 v_1 和 v'_1，其中恰有一个是 l_j的祖先。不失一般性，设 v'_1 是 l_j 的祖先，而 v_1 不是。令 P 表示从 b 到 Conv$_x(v_1)$ 的最短路径，令 z_1 表示与 Conv$_x(v_1)$ 相交的 P 的端点。由于 b 和 z_1 都位于 Conv$_x(v_0)$ 中，P 也在其中。若 b 位于 Conv$_x(v_1)$ 中，则 P 由单元素集合 b 构成，且不与 Conv$_x(v'_1)$ 相交。否则，b 既不在 Conv$_x(v_1)$ 中，也不在 Conv$_x(v'_1)$ 中。因此，b 位于这两个集合之间的最短路径上。由此，P 是这条最短路径的子集，因此不与 Conv$_x(v'_1)$ 相交。所以在这两种情况下，P 都不与 Conv$_x(v'_1)$ 相交。

我们将继续扩展 P，直到其达到某个 x_i。归纳地，假设我们已经构造出一条路径 P，从 b 到达凸包$_x($ $v_{m-1})$中的某个点 z_{m-1}。如果 v_{m-1} 没有子节点，

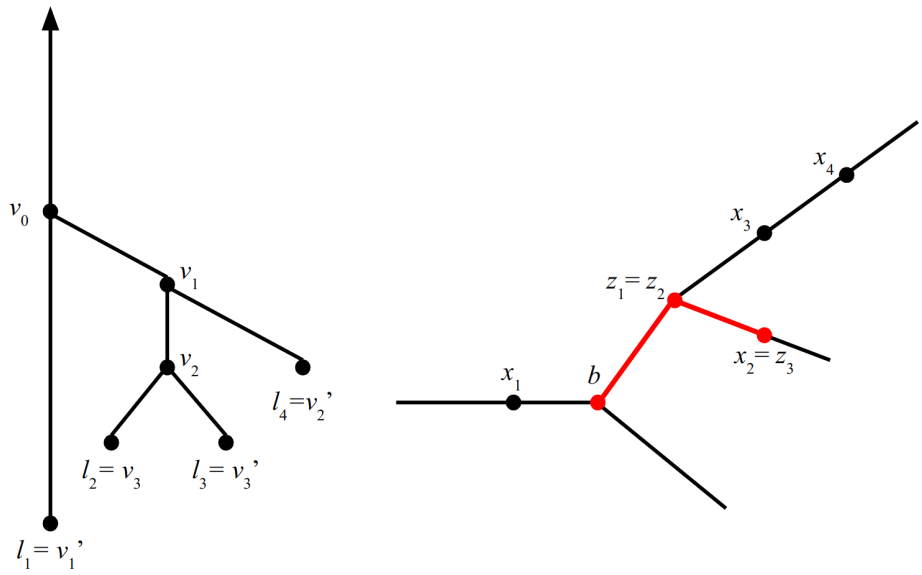

图 5：一棵合并树 T（左）和一棵几何树示例 X（右），展示引理26的主要构造。红色高亮部分是从点 x_i 到 X 的路径，该路径提升为 Conf(X,T) 中的一条路径。在证明中，x_1 起到 x_j 的作用。注意，在此示例中，我们也可以构造一条从 b 到 x_3的路径，但不能构造到 x_4，因为 Conv$_x$（v_2）阻断了从 b 到 Conv$_x$（v_2'）的路径。

那么凸包$_x(v_{m-1})$是一个包含某个 x_i 的单元素集合，其中 i，此时结论成立。否则，令 v_m 和 v_m'表示 v_{m-1}的子节点。

从 z_{m-1} 到 Conv$_x(v_m)$ 的最短路径与 Conv$_x(v_m')$ 不相交，或者从 z_{m-1} 到 Conv$_x(v_m')$ 的最短路径与 Conv$_x(v_m)$ 不相交。不妨设我们处于第一种情况。由于 z_{m-1} 属于 Conv$_x(v_{m-1})$，因此从 z_{m-1} 到 Conv$_x(v_m)$ 的最短路径也属于其中。我们用这条路径扩展 P，并将扩展后的端点记为 z_m。由于 v_0 只有有限多个后代，这一过程最终必然终止，从而得到一条从 b到某个 x_i 的路径 P。此外，由于 P 的每个扩展部分都包含于某个 m的 Conv$_x(v_m)$ 中，因此 P 整体包含于 Conv$_x(v_0)$ 中。

设 v 是 T 中一个不属于 l_j 的祖先的节点。如果 Conv$_x(v)$ 与 P 相交，那么它也与包含 P 的 Conv$_x(v_0)$ 相交。因此，要么 $v \preceq v_0$，要么 $v_0 \preceq v$。不可能是 $v_0 \preceq v$，因为 l_i 不是 v 的后代，所以 $v \preceq v_0$。同样，由于 l_i 不是 v 的后代，对于任意 m，v 都不可能是 v_m，因此 v 是某个 v_m' 的后代。然而，根据构造，对于任意 m，P 都不与 Conv$_x(v_m')$ 相交，因此也不可能与 Conv$_x(v)$ 相交。应用引理 24 后，我们可以将 x_i 移到 b 上。然后应用引理 25，我们可以进一步将 x_i 移入 e 的内部。 □

既然我们知道可以把所有点移到同一条边上，接下来希望能够沿曲线移动点群。令 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \text{Conf}_n(X)$，这里 Conf$_n(X)$ 是 X 上 n 个点的通常有序构型空间，并假设存在一个子集 $Y \subseteq X$，它通过映射 h 与单位区间 $[0,1]$, 同胚，且每个 x_i 都属于 Y。于是，x 的坐标根据它们在 h 下的像所具有的全序，也继承了一个全序。因此，对于 $\{1,\ldots,n\}$ 的某个置换 σ，继承的全序具有形式 $x_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq x_{\sigma(n)}$。我们称 σ 为 x 的 h-置换。注意，σ 仅取决于 h 所确定的定向。

引理 27. 设 $x \in \text{Conf}(X,T)$，$y \in \text{Conf}_n(X)$，并假设存在一个子集 $Y \subseteq X$，它通过映射 h 与单位区间 $[0,1]$, 同胚，且 x 和 y 的每个坐标都位于 Y 中。那么，当 x 和 y 具有相同的 h-置换时，Conf(X,T) 中存在一条从 x 到 y 的路径。

证明。令 h 和 h^{-1} 通过逐分量作用，在 Conf$_n(Y)$ 和 Conf$_n([0,1])$ 上诱导映射。考虑 Conf$_n(X)$ 中从 x 到 y的路径

$$\gamma(t) := h^{-1}\big[(1-t)h(x) + th(y)\big]$$

它在 h 下的像在 $h(x)$ 和 $h(y)$ 之间线性插值。因此，对于所有 $t \in [0,1]$，$\gamma(t)$ 的 h-置换与 x 的相同。假设 $\mathrm{Conv}^{\gamma(t)}(v) \cap \mathrm{Conv}^{\gamma(t)}(v')$ 非空。那么，要么存在 i、j 和 k，使得 l_i 和 l_k 是 v 的后代，l_j 是 v' 的后代，并且 $\gamma(t)_i \le \gamma(t)_j \le \gamma(t)_k$；要么交换 v 和 v' 的角色后，同样的结论成立。不失一般性，假设是第一种情况。因此 $x_i \le x_j \le x_k$，因为沿着 γ，h-置换保持不变。所以 $\mathrm{Conv}_x(v) \cap \mathrm{Conv}_x(v')$ 也非空，且 $v \preceq v'$ 或 $v' \preceq v$。因此，γ 是 $\mathrm{Conf}(X,T)$ 中的一条路径。 □

引理 28. 假设 $x \in \mathrm{Conf}(X,T)$ 由位于 X 的一个子集 Y 上的点组成，该子集通过映射 h 与单位区间同胚。那么存在 $1 \le i < k \le n$，使得 $l_{\sigma(i)}, \ldots, l_{\sigma(k)}$ 是 v 的后代。

证明. 只需证明集合 $\{j \mid l_{\sigma(j)} \preceq v\}$ 是凸的。考虑两个叶节点 $l_{\sigma(i)}$ 和 $l_{\sigma(k)}$，其中 $i<k$，它们的祖先是 v，并令 $j \in \{i, \cdots, k\}$。由于 $x_{\sigma(i)} < x_{\sigma(j)} < x_{\sigma(k)}$，我们有 $x_{\sigma(j)} \in$凸包$(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(k)}) \subseteq$ 凸包$_x(v)$。由于凸包$_x(l_{\sigma(j)}) = \{x_{\sigma(j)}\}$，凸包$_x(l_{\sigma(j)})$ 与凸包$_x(v)$ 相交。因此，要么 $l_{\sigma(j)} \preceq v$，要么 $v \preceq l_{\sigma(j)}$。但 $l_{\sigma(j)}$ 是一个叶节点，所以必定有 $l_{\sigma(j)} \preceq v$。 □

该引理意味着，同胚映射 h 边 e 上的构型 $x \in \mathrm{Conf}(X, T)$ 所处的位置确定了每个内部节点 $v \in T$ 的左子节点 Lv 和右子节点 Rv。明确地说，我们可以选择 Lv 和 Rv 使得 $i < j$ 只要 $l_{\sigma(i)} \preceq Lv$ 和 $l_{\sigma(j)} \preceq Rv$。因此，构型 x 在 T_x 上诱导出一个 手性合并树 的结构，该结构定义于 T，如 [6, 定义 53]所定义：

定义 29。 手性合并树是一个二叉胞腔合并树，其中任一内部节点的两个子节点分别标记为左 或右 子节点。

下一个引理将允许我们在 X特别简单时，改变赋予构型的手性合并树结构。

引理 30。 设 X 是一个度为3的几何星形树，即 X 同胚于三份 $[0,1]$ 在0处粘合所得的空间。设 $x \in \mathrm{Conf}(X、T)$ 是位于 X的一条边 e 内部的构型。固定一个将 e 同胚映射到 $[0,1]$的同胚映射 h。设 T_c 是 T上的任意手性合并树结构。则存在一条从 x 到某个 $y \in \mathrm{Conf}(X、T)$ 的路径，该构型位于 e的内部，并且满足 $T_y = T_c$。

证明。 由归纳法，只需证明这样的情形： T_c 与 T_x 仅在某个给定节点的左子节点 Lv 和右子节点 Rv 互换了位置。

为简单起见，假设由 x 和 h 诱导的置换 σ 是恒等映射，因此 $x_1 \le \ldots \le x_n$。将 v的后代记为 $l_i, \ldots, l_k$。存在某个 $i \le j < k$，使得 $l_i, \ldots, l_j$ 是 Lv 的后代，而 $l_{j+1}, \ldots, l_k$ 是 Rv的后代。因此，目标是在 $\mathrm{Conf}(X, T)$ 中构造一条从 x到某个 $y = (y_1, \ldots, y_n)$的路径，其中 y 的每个元素都位于 e的内部，并满足

$$y_1 \le \cdots \le y_{i-1} \le y_{j+1} \le \cdots \le y_k \le y_i \le \cdots \le y_j \le y_{k+1} \le \cdots \le y_n.$$

设 $e_1 = e$、e_2和 e_3 是 X的边，b 是 X的分支点。不失一般性，假设 h 满足 $h(b) = 0$。我们将证明，从 x 到 y的以下一系列移动在 $\mathrm{Conf}(X,T)$ 中是允许的：

1. 按顺序将从 e_1 到 e_2 的 1st 至 j^{th} 坐标移动。
2. 按顺序将从 e_1 到 e_3 的 $(j+1)^{\text{th}}$ 至 k^{th} 坐标移动。
3. 按相反顺序将从 e_2 到 e_1 的 i^{th} 至 j^{th} 坐标移动。
4. 按相反顺序将从 e_3 到 e_1 的 $(j+1)^{\text{th}}$ 至 k^{th} 坐标移动。 5. 按相反顺序将从 e_2 到 e_1 的 1st 至 i^{th} 坐标移动。

图 6 展示了这一系列移动的可视化示例，其中共有五个坐标。

根据引理 27，移动 1 和 5 可以通过 $\mathrm{Conf}(X,T)$ 中一条经过 $Y = e_1 \cup e_2$ 的路径来实现。对于移动 2，假设我们已经将坐标 $j+1$ 到 $m-1$ 移入 e_3，从而得到构型 $z = (z_1, \ldots, z_n)$。令 P 表示从 z_m 到 b 的最短路径，以及 $z' = (z_1, \ldots, z_{m-1}, b, z_{m+1}, \ldots, z_n)$。令 v_0 为 T 中一个不是 l_m 祖先的节点。

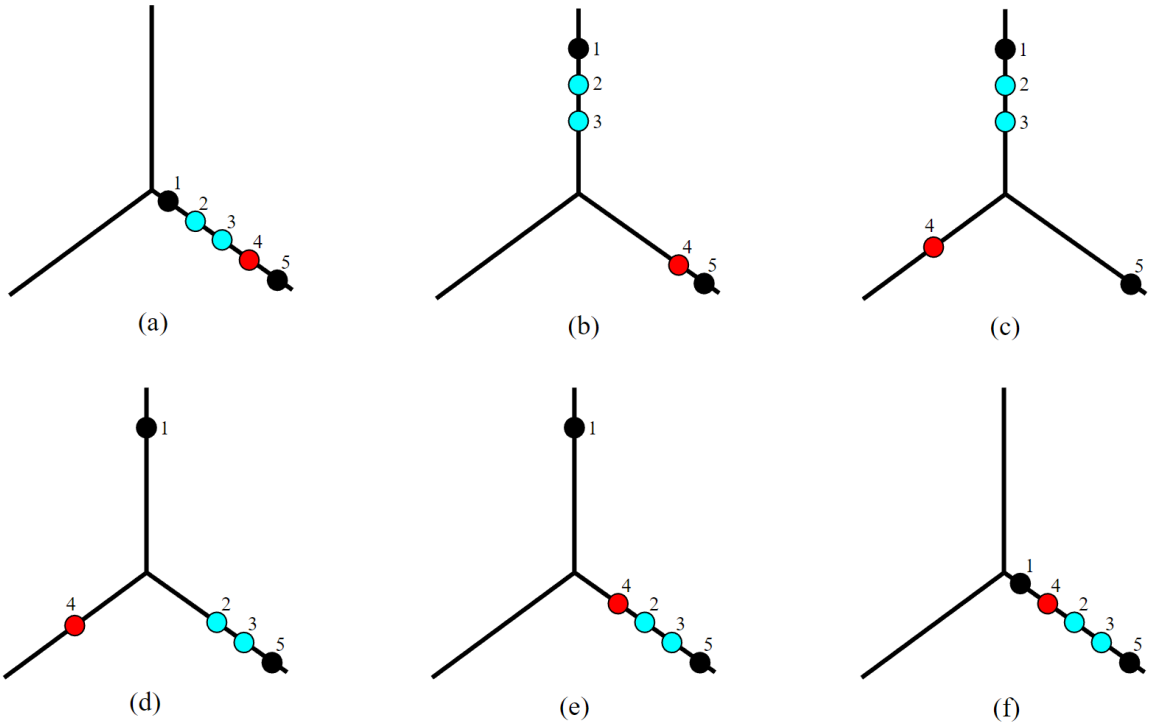

图6：引理证明的直观示意图 30。在所示的例子中， T 有五个叶节点，其中三个是 v的后代。这些节点中有一个以红色标出，同时也是 Lv的后代。另外两个 v的后代以蓝色标出，它们是 Rv的后代。（a）至（f）各图展示了证明中用于重新配置点的路径。

假设 $\mathrm{Conv}_z(v_0)$ 与 P 相交。由于 $l_m \not\preceq v_0$，$\mathrm{Conv}_z(v_0)$ 只能在 b 处与 P 相交。这意味着 $\mathrm{Conv}_{z'}(v_0)$ 与 e_2 和 e_3 的内部均相交，因此 z 中必定已经有点位于 e_3 上，即 $m > j+1$。特别地，$\mathrm{Conv}_z(v_0)$ 同时包含 z_j 和 z_{m-1}。由于 l_j 和 l_{m-1} 分别是 Lv 和 Rv 的后代，v_0 必须是 v 的祖先。由于 l_m 是 v 的后代，v_0 是 l_m 的祖先，矛盾。因此，$\mathrm{Conv}_z(v)$ 不与 P 相交，所以根据引理 24，我们可以将 z 的 m^{th} 坐标移至 b。然后应用引理 25，我们可以将 z 的 m^{th} 坐标移入 e_3 的内部。接着对 m 使用归纳法，即可完成移动 2。

移动3和4的情形类似处理。 □

引理 31. 设 X 是一棵度为3的几何星形树。那么 $\mathrm{Conf}(X,T)$ 是路径连通的 $d.$

证明。固定一条边 $e \in X$，并赋予其定向 h。由命题 20，$\mathrm{Conf}(X,T) \neq \emptyset$。设 x， $y \in \mathrm{Conf}(X,T)$。应用引理 26 和引理 27后，不妨设 x 位于 e的内部。同理，不妨设 y 位于 e的内部。

由引理30，我们可以将 x 连接到一个位于 $x' \in \mathrm{Conf}(X,T)$上的构型 e，并使得 $T_{x'} = T_y$。特别地，x' 和 y 诱导相同的 h-置换，因此，由引理27，它们之间存在一条位于 $\mathrm{Conf}(X,T)$中的路径。 □

Fi最后，我们可以证明本节的核心命题，为方便起见，现重述如下 ce.

命题23。 设 X 是一棵不同胚于单位区间的树。设 T 是一棵一般胞腔合并树。则$\mathrm{Conf}(X,T)$ 是路径连通的。

命题23的证明。设 X的一片叶节点为 l ，与 l相邻的边为 e 。由于 X 是连通的且不同胚于单位区间，e 的另一个端点 b 必为分支点。因此，存在一个包含 e的子树 $Y \subseteq X$ ，它是度为3的几何星形树。根据命题20，$\mathrm{Conf}(Y,T) \neq \emptyset$。设 $y \in \mathrm{Conf}(Y,T) \subseteq \mathrm{Conf}(X,T)$是 X上的一个固定目标配置。

令 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathrm{Conf}(X, T)$。应用引理 26，再应用引理 27，我们在 $\mathrm{Conf}(X, T)$ 中找到一条路径，从 x到一个构型 x'，其点位于 e的内部。将 x' 视为一个

Conf(Y， T) 中的构型 $\subseteq \mathrm{Conf}(X$， $T)$，根据引理 31，它可以通过 Conf(y， Y) 中的一条路径与 T相连，该路径也定义了 Conf(X， T) 中的一条路径。 □

推论 32. 设 X 是一棵不同胚于单位区间的树。设 δ_L 为 D 中任意两个不相等的区间左端点之间的最小距离， δ_R 为任意两个不相等的右端点之间的最小距离。那么，纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的路径连通分支彼此之间的距离至少为 $\min(\delta_L, \delta_R)$ 。特别地，$\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的路径连通分支就是 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$的连通分支。

证明. 设 $f, g: X \to \mathbb{R}$ 是纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 中属于不同路径连通分支的函数。根据定理 22，它们的合并树 MT(f) 和 MT(g) 不同胚，因此根据命题 13，可得 $\|f-g\|_\infty \geq \min(\delta_L, \delta_R$。 □

推论 33. 设 X 是一棵不同胚于单位区间的树。纤维 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 的连通分支数有限，具体为：

$$\#\pi_0(\mathrm{PH}^{-1}(D)) = \prod_{[b,d)\in D} \#\big\{[b',d') \in D \mid [b,d) \subset [b',d')\big\}.$$

证明。 这是条形码为 D 的不同胞腔合并树的数量，参见 [6, 定理 4。8]。根据定理 22，此类合并树与 PH 的道路连通分支一一对应$^{-1}(D)$，而根据推论33，它们等于 PH 的连通分支$^{-1}(D)$。 □

6.2 纤维中连通分支的拓扑

当胞腔合并树 T 中的叶节点很少，因此 Conf(X， T) 中的点也很少时，我们能够推导出 MT^{-1}(T) 的连通分支的同伦类型，从而也能确定简单条形码 D 对应的 PH^{-1}(D)。最简单的情形是 T 只有一个叶节点。

推论 34。 设 X 是一棵树的几何实现， T 是一棵只有一个叶节点的合并树， D 是与 T 相关联的条形码。那么 $\mathrm{MT}^{-1}(T) = \mathrm{PH}^{-1}(D)$，且二者均可缩。

证明。 条形码 D 由一个无穷区间组成 $[a, \infty)$ ，其中 a 是赋给 T的唯一叶节点的值。唯一能够产生 D的合并树是 T，根据 [6,定理 4。8]。因此 MT^{-1}(T) =PH^{-1}(D)。根据定理17，

$$\mathrm{MT}^{-1}(T) \simeq \mathrm{Conf}(X,T) = \mathrm{Conf}_1(X) = X,$$

且 X 是可缩的，因此 MT^{-1}(T) 是可缩的。 □

如果 Conf(X, T) 中只有两个点，其结构仍然相当简单，并且其同伦类型已经计算出来。我们由此立即得到以下推论。

推论 35。 设 X 是一棵至少有一个度为 ≥ 3 的顶点的树的几何实现， T 是一棵恰有两个叶节点 l_1 和 l_2 的胞腔合并树。假设 $\pi(l_1) \neq \pi(l_2)$。那么 $\mathrm{MT}^{-1}(T)$ 与以下对象的楔和同伦等价：

$$-1 + \sum_{v\in N(X)} (\eta(v)-1)(\eta(v)-2)$$

个圆，其中 $N(X)$ 表示 X 的任意胞腔分解中的节点， $\eta(v)$ 表示 X 中节点 v 的度。此外，记由合并树 T 得到的条形码为 D，则有 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ =MT^{-1}(T)。

证明。 定理 17 告诉我们， MT^{-1}(T) 同伦等价于 Conf(X, T)，其中 Conf(X, T) =Conf$_2$(X) 是 X 上两个点的构形空间，其同伦类型在 [9,定理 11.1] 中计算得出。最后一个陈述由 [6, 定理 4.8] 得出： D 是具有两个区间的条形码，其中一个有限区间包含于另一个无穷区间中，因此 T 是唯一能产生条形码 D 的合并树。 □

注记 4。令 X 为由 n 条在一个顶点处连接而成的星形树，并令 D 为推论 *35* 中所述的条形码。那么该推论告诉我们，$\mathrm{PH}^{-1}(D)$同伦等价于 n^2-3n+1 个圆的楔和。

在 *[20]*，中，作者考察了相同的条形码 D 以及由 X 得到的离散树 Y，其方法是在每条边的中点插入一个额外的顶点。考虑定义在 Y的顶点和边上的函数空间 f，其中对于任意边 $e=(v,w)$，$f(e) =\max(f(v) f(w))$。在这种情形下，作者发现 $\mathrm{PH}^{-1}(D)$ 也同伦等价于 n^2-3n+1 个圆的楔和 *[20,*定理 *8.1]*。这表明，几何树的持久同调的纤维与具有足够细三角剖分的离散树之间可能存在一般性的关系。

致谢

DB 是拓扑数据分析中心的成员，该中心部分经费由英国工程与物理科学研究委员会 EP/R018472/1 资助。JL 曾获伦敦数学会早期职业研究员奖学金支持，并在项目的最后阶段因其研究助理职责获得圣约翰学院的资助；其导师为 Heather Harrington。

参考文献

[1] P. Bendich、J. S. Marron、E. Miller、A. Pieloch 和 S. Skwerer。脑动脉树的持久同调分析。《应用统计年鉴》，10(1)：198，2016年。[2] M. J. Catanzaro、J. M. Curry、B. T. Fasy、J. Lazovskis、G. Malen、H. Riess、B. Wang 和 M. Zabka。持久性莫尔斯函数模空间。《应用与计算拓扑学杂志》，4(3)：353–385，2020年。[3] C. Chen、X. Ni、Q. Bai 和 Y. Wang。通过持久同调实现分类器的拓扑正则化项。在第*22*届国际人工智能与统计学会议，第2573–2582页，2019年。[4] D. Cohen-Steiner、H. Edelsbrunner 和 J. Harer。持久图的稳定性。《离散与计算几何》，37(1)：103–120，2007年。[5] W. Crawley-Boevey。逐点有限维持久模的分解。《代数及其应用杂志》，14(05)：1550066，2015年。[6] J. Curry。区间上函数的持久性映射的纤维。《应用与计算拓扑学杂志》，2(3)：301–321，2018年。[7] J. Curry、J. DeSha、A. Garin、K. Hess、L. Kanari 和 B. Mallery。从树到条形码再返回：组合与概率方面的拓扑逆问题。*arXiv*预印本 *arXiv:2107.11212*，2021年。[8] J. Cyranka、K. Mischaikow 和 C. Weibel。持久映射原像的可缩性。《应用与计算拓扑学杂志》，4(4)：509–523，2020年。[9] M. Farber。构形空间与机器人运动规划算法。在《组合与托里克同伦：入门讲座》，第263–303页。World Scientific，2018年。[10] E. Gasparovic、E. Munch、S. Oudot、K. Turner、B. Wang 和 Y. Wang。合并树的内禀交错距离。*arXiv*预印本 *arXiv:1908.00063*，2019年。[11] Y. Hiraoka、T. Nakamura、A. Hirata、E. G. Escolar、K. Matsue 和 Y. Nishiura。通过持久同调表征非晶固体的层级结构。《美国国家科学院院刊》，113(26)：7035–7040，2016年。[12] B. Johnson 和 N. A. Scoville。离散莫尔斯理论中的合并树。《数学科学研究》，9：1–17，2022年。[13] L. Kanari、P. D-lotko、M. Scolamiero、R. Levi、J. Shillcock、K. Hess 和 H. Markram。分支神经元形态的拓扑表示。《神经信息学》，16(1)：3–13，2018年。

[14] L. Kanari、A. Garin 和 K. Hess。从树到条形码再返回：理论与统计视角。*Algorithms*，13(12)：335，2020年。[15] L. Kanari、S. Ramaswamy、Y. Shi、S. Morand、J. Meystre、R. Perin、M. Abdellah、Y. Wang、K. Hess 和 H. Markram。新皮质锥体细胞的客观形态学分类。*Cerebral Cortex*，29(4)：1719–1735，2019年。[16] J. Leygonie 和 G. Henselman-Petrusek。胞复形上持久同调纤维的算法重构。*arXiv*预印本 *arXiv:2110.14676*，2021年。[17] J. Leygonie 和 U. Tillmann。单纯复形的持久同调的纤维。*Journalof Pure and Applied Algebra*，第107099页，2022年。[18] C. Li、M. Ovsjanikov 和 F. Chazal。基于持久性的结构识别。在*Proceedings ofthe IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*，第1995–2002页，2014年。[19] Y. Liu 和 N. A. Scoville。树上离散 Morse 函数的实现问题。在 *Algebra Colloquium*，第 27 卷，第 455–468 页。World Scientific，2020年。[20] K. Mischaikow 和 C. Weibel。具有不可缩原像的持久同调。*arXiv*预印本 *arXiv:2105.08130*，2021年。[21] D. Morozov、K. Beketayev 和 G. Weber。合并树之间的交错距离。*Discreteand Computational Geometry*，49(22-45)：52，2013年。[22] E. F. Touli 和 Y. Wang。计算树之间 Gromov-Hausdorff 距离和交错距离的 FPT 算法。*arXiv*预印本 *arXiv:1811.02425*，2018年。