arXiv:2303.16182v2 [math.CV] 4 Aug 2023

关于单位圆上的半经典权函数

Cleonice F.Bracciali[a], *, Karina S. Rampazzi[a], †, Luana L. Silva Ribeiro[a], [b], ‡[a]数学系，IBILCE，UNESP - 圣保罗州立大学，邮编 15054-000，圣若泽-杜里奥普雷图，圣保罗州，巴西。

[b]数学系，UnB - 巴西利亚大学，邮编 70910-900，巴西利亚，DF，巴西。

2023年8月7日

摘要

我们研究与某些半经典权函数相关的单位圆上的正交多项式。这意味着，这些权函数所满足的 Pearson 型微分方程涉及两个次数至多为 2 的多项式。我们确定了所有这类半经典权函数，其中还包括单位圆上 Jacobi权函数的一种扩展。我们建立了正交多项式的一般结构关系，以及相关复 Verblunsky 系数所满足的非线性差分方程。作为应用，我们给出了与其中一些半经典权函数相关的若干新的结构关系和非线性差分方程。

关键词：单位圆上的正交多项式；半经典权函数；差分方程；结构关系。

2020年数学主题分类：42C05，33C47

1 引言

设 μ 是单位圆 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}$ 上的正测度：$|z|=1\}$。与之相关的单位圆上的正交归一多项式序列 $\{\Psi_n\}_{n\geqslant 0}$ 满足

$$\langle\Psi_n,\Psi_m\rangle=\int_{\mathbb{T}}\Psi_n(z)\overline{\Psi_m(z)}d\mu(z)=\int_0^{2\pi}\Psi_n(e^{i\theta})\overline{\Psi_m(e^{i\theta})}d\mu(e^{i\theta})=\delta_{n,m},$$

其中 $\Psi_n(z)=\kappa_n z^n+\cdots$，且 $\kappa_n>0$. 单位圆上的首一正交多项式（简称 MOPUC）记作 $\Phi_n(z)$，即 $\Phi_n(z)=\Psi_n(z)/\kappa_n$。因此 $||\Phi_n||^2=\int_{\mathbb{T}}|\Phi_n(z)|^2d\mu(z)=\kappa_n^{-2}$。关于这一主题的近期基础文献，可参见例如 [7] 和 [15]。这些多项式满足关系式

$$\Phi_n(z)=z\Phi_{n-1}(z)-\overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z),\quad n\geqslant 1, \tag{1.1}$$

其中，$\Phi_0(z)=1$、$\Phi_n^*(z)=\overline{z^n\Phi_n(1/\overline{z})}$ 是倒数多项式，$\alpha_{n-1}=-\Phi_n(0)$ 被称为 Verblunsky 系数。由关系式 (1.1) 可知，$\kappa_n^2/\kappa_{n+1}^2=1-|\alpha_n|^2$.

*cleonice.bracciali@unesp.br（通讯作者）

†karina.rampazzi@unesp.br.

‡luanadelimasr@gmail.com.

我们将单位圆上的多重正交多项式记为

$$\Phi_n(z) = z^n + \gamma_n z^{n-1} + \cdots + \beta_n z - \overline{\alpha}_{n-1}, \quad n \geqslant 0, \tag{1.2}$$

由 $\alpha_{-1} = -1$。利用关系式 (1.1) 容易证明，(1.2) 中的系数 γ_n 可表示为 Verblunsky 系数的形式：

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha}_j \alpha_{j-1}, \ n \geqslant 1, \quad \text{and} \quad \gamma_0 = 0. \tag{1.3}$$

注意， $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}$. 对 (1.1) 求导并在 $z = 0$ 处取值，可知系数 $\beta_n = \Phi_n'(0)$ 满足

$$\beta_n = -(\overline{\alpha}_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_{n-1}) = -[(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_n], \quad n \geqslant 1. \tag{1.4}$$

后一个右端等式由 (1.3) 得出。

由于 $\Phi_n(z) = z^n + \gamma_n z^{n-1} + O(z^{n-2})$，因此 $\langle \Phi_{n-1}, \Phi_n \rangle = 0$ 得到

$$\langle \Phi_{n-1}, z^n \rangle = -\overline{\gamma}_n \langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1} \rangle. \tag{1.5}$$

在本文中，我们假设 μ 是绝对连续的，并设 $d\mu(e^{i\theta}) = \nu(e^{i\theta})d\theta$.因此，我们可以写成

$$\langle f(z), z^n \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \nu(e^{i\theta}) d\theta = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} \nu(z) \frac{dz}{iz}.$$

为简便起见，记 $w(\theta) = \nu(e^{i\theta})$。权函数 w 的矩为 $\mu_n = \langle 1, z^n \rangle = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} w(\theta) d\theta$，其中 $n \in \mathbb{Z}$。

本文分析与单位圆上的半经典权函数相关的单位圆上的多重正交多项式的性质。单位圆上的权函数 w 称为半经典权函数，当且仅当

$$\frac{d}{d\theta}\left[A(e^{i\theta})w(\theta)\right] = B(e^{i\theta})w(\theta). \tag{1.6}$$

其中，函数 A 和 B 是劳伦多项式，并且 $A(e^{i\theta})$在$1/w$的奇点处 $= 0$ ，见 [1] 和 [10]。方程 (1.6) 称为 Pearson 型微分方程。

关系式 (1.6) 也可以写成

$$\frac{dw(\theta)/d\theta}{w(\theta)} = \frac{w'(\theta)}{w(\theta)} = \frac{B(e^{i\theta}) - ie^{i\theta}\frac{dA(e^{i\theta})}{de^{i\theta}}}{A(e^{i\theta})}. \tag{1.7}$$

对于单位圆上的正交性，半经典单位圆上的正交多项式的分类问题通常通过考虑满足 Pearson 型方程的线性泛函来研究，参见例如，[5], [17], 和 [18]。通过考虑如下情形，可以将这种方法应用于方程 (1.6)：若 $\deg A(z) = p$ 且 $\max\{p-1, \deg((p-1)A(z) + iB(z))\} = q$，则 w 属于半经典权函数的类 (p, q)。属于类 (p, q) 的权函数也属于类 $(p+1, q+1)$。

在实直线上的正交多项式理论中，众所周知，若定义在区间（a, b）上的权函数 ω 满足 Pearson 方程 $[\sigma(x)\omega(x)]' = \rho(x)\omega(x)$，其中 σ 是次数至多为 2 的多项式，且 ρ 是一次多项式，则该权函数为经典权函数，相应的正交多项式为经典正交多项式。若 σ 是次数大于 2 的多项式，或 ρ 是次数不为 1 的多项式，则该权函数称为半经典权函数。若 $\sigma\omega$ 在.....的端点处为零

正交区间，则与实数轴上的经典权函数或半经典权函数相对应的正交多项式满足微分递推关系（也称为结构关系）。例如，参见 [2, 3, 12, 13, 19]。

与某些半经典权函数（例如 Freud 权函数）相关的实数轴上的正交多项式的递推系数满足差分方程，并且与某些 Painlev´e 方程相关。参见 [6, 9, 19]。

单位圆上的一个已知半经典权函数示例是 $w(\theta) = e^{t\cos(\theta)}$，其中$t > 0$，参见 [7]。相关多指标单位圆正交多项式满足结构关系

$$\Phi_n'(z) = n\Phi_{n-1}(z) + \frac{t\kappa_{n-2}^2}{2\,\kappa_n^2}\Phi_{n-2}(z), \quad n \geqslant 2. \tag{1.8}$$

Verblunsky 系数为实数，并且依赖于参数 t。由单位圆上的多重正交多项式的结构关系可以证明，Verblunsky 系数满足非线性差分方程

$$\alpha_n(t) + \alpha_{n-2}(t) = -\frac{2n}{t}\frac{\alpha_{n-1}(t)}{1-\alpha_{n-1}^2(t)}, \quad n \geqslant 2. \tag{1.9}$$

这一众所周知的方程出现在 Periwal 和 Shevitz 的文献 [14] 中。它对应于 Painlev´e 离散方程 $\mathrm{dP_{II}}$，参见 [19] 及其中的参考文献。关于单位圆上的半经典权函数的研究也可见于 [4, 5, 10, 18]。

本文旨在研究单位圆上的半经典权函数，w，其单位圆上的多重正交多项式具有复 Verblunsky 系数。我们将此研究限定于这样的半经典权函数：在（1.6）中， A 和 B 是次数至多为 2 的多项式。我们指出，在 [5] 中，作者研究了 A 恰为次数 2 且具有不同零点的多项式这一特殊情形。此外，在 [17] 中，还考虑了 $A(z) = (z-r)^2$, 以及$B(r) - irA'(r) = 0$ 的情形。

本文的一个目标是确定属于该类的所有单位圆上的半经典权函数。另一个目标是给出该类单位圆上的半经典权函数所对应的相关多指标单位圆正交多项式的结构关系，以及相关复 Verblunsky 系数的非线性差分方程。我们想指出，在 [8] 中，建立了与 $w(\theta) = e^{-v(\theta)}$ 类型的权函数相关的阶梯算子的一般分析，并给出了相关单位圆上的正交多项式的结构关系。

本文结构如下。在第 2 节中，我们利用单位圆上的半经典权函数的定义 (1.6)，确定相关多指标单位圆正交多项式的结构关系形式，见定理 2.1。在定理 2.4 中，我们给出相关复 Verblunsky 系数的两个非线性差分方程，这是本文的主要结果之一。

在第 3 节中，我们确定了单位圆上的所有半经典权函数 w，其中 (1.6) 中的 A 和 B 是次数至多为 2 的多项式。所采用的方法是考虑多项式 A 的所有可能零点，使得 w 为正。我们确定了许多已知的半经典权函数，并且还发现了半经典权函数

$$w(\theta) = \tau(\lambda,\beta,\eta)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta},$$

其中 $\eta \in \mathbb{R}$、 $\lambda > -1/2$、 $\beta > -1/2$ 和 τ（λ、β、η）为常数，见 (3.21)。该权函数的特殊情形涵盖了文献中已知的大多数半经典权函数，见注释 3.6。然而，据我们所知， $\lambda\beta\eta \neq 0$ 情形此前从未被研究过。

作为这些结果的应用，在第 4 节中，我们利用第 3 节所描述的半经典权函数，给出了单位圆上的多重正交多项式的结构关系以及关于 Verblunsky 系数的非线性差分方程。特别地，在第 4.1 小节中，我们给出了若干与 {v1}({v2}) {v3}正弦函数{v4}({v5}){v6},{v7},{v8}相关的结构

关系以及关于复 Verblunsky 系数的若干非线性差分方程。第4.2小节专门讨论权函数 $w(\theta) = e^{2|u|\sin(\theta+\arg u)}$、 $u \in \mathbb{C}$，其中我们给出了非线性差分方程（4.21），该方程可视为 Painlev´e 离散方程 $\mathrm{dP_{II}}$ 的复扩展。

2 S结构关系与非线性差分方程

Si由于我们假设 A 和 B 是次数至多为 2 的复多项式，因此设

$$A(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0 \quad \text{and} \quad B(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0.$$

于是，Pearson 型方程 (1.7) 变为

$$\frac{dw(\theta)/d\theta}{w(\theta)} = \frac{(b_2 - 2ia_2)z^2 + (b_1 - ia_1)z + b_0}{a_2z^2 + a_1z + a_0}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{2.1}$$

等价地，我们可以写成

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{(b_2 - 2ia_2)z^2 + (b_1 - ia_1)z + b_0}{z(a_2z^2 + a_1z + a_0)}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{2.2}$$

在介绍我们的结果之前，我们需要引用 Magnus [10] 的一些结果。例如，若 w满足 (1.7)，其中 A 和 B 是次数至多为 d 的多项式，且 $d \geqslant 1$，并且 $w(0) = w(2\pi)$，则$\langle A\Phi_n', z^k\rangle = \langle \Phi_n[iB(z)+(k+1)A(z)], z^{k+1}\rangle, n \geqslant 2$ 以及 $\langle A\Phi_n', z^k\rangle = 0$，对于 $k = d-1, d, \ldots, n-2$.确实，利用分部积分以及性质 (1.7)，可以看出

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle = \langle \Phi_n(z)[iB(z) + (k+1)A(z)], z^{k+1}\rangle - i\Phi_n(1)A(1)[w(2\pi) - w(0)], \tag{2.3}$$

对于 $k = 0, 1, \ldots, n$。然而，对于 $k = d-1, d, \ldots, n-2$，多项式 $[iB(z)+(k+1)A(z)]z^{-k-1}$∈属于 $\mathrm{Span}\{z^{-(n-1)}, z^{-(n-2)}, \ldots, z^{-1}\}$，因此 $\langle \Phi_n[iB(z) + (k+1)A(z)], z^{k+1}\rangle = 0.$

在本文中，我们考虑 $d = 2$ 以及条件 $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$，因此

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{2.4}$$

Magnus 在 [10] 中证明，如果 A 和 B 是次数为 $\leqslant d$的多项式，那么$A\Phi_n'$ 是 Φ_{n+d-1}、Φ_{n+d-2}、……、Φ_{n-1} 以及 Φ^*_{n+d-1}、$z\Phi^*_{n+d-2}$、……、$z^{d-2}\Phi^*_{n+1}$的线性组合。

下面的结果给出了单位圆上的多重正交多项式的结构关系，这些关系用多项式Φ_{n+1}、Φ_n、Φ_{n-1}和Φ^*_n 表示（而不是用 Φ^*_{n+1}表示），其中相关权函数满足(1.7)，且 A 和 B 是次数至多为2的多项式，并且 $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$。所有系数均已明确给出。

定理 2.1. 设权函数满足 (1.7)，其中 A和 B 是次数至多为 2 的多项式，且 $A(1)[w(2\pi)-w(0)] = 0$。若 $A(z) = a_2z^2+a_1z+a_0$ 且 $B(z) = b_2z^2+b_1z+b_0$，则相关多指标单位圆正交多项式满足以下结构关系：

$$A(z)\Phi_n'(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z), \ n \geqslant 2, \tag{2.5}$$

其中

$$\mathfrak{t}_n = (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n, \tag{2.6}$$

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2), \tag{2.7}$$

$$\mathfrak{s}_{n,n} = na_1 - a_2\gamma_n + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}, \tag{2.8}$$

α_n 是 Verblunsky 系数，γ_n 由（1.3）给出。系数 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 也可以写作

$$\mathfrak{s}_{n,n} = ib_1 + (n+1)a_1 - a_0\overline{\gamma}_n - [ib_0 + (n+1)a_0]\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}. \tag{2.9}$$

证明。注意到 $A(z)\Phi_n'(z) - na_2\Phi_{n+1}(z) - \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z)$ 是次数至多为 n 的多项式。因此，可以写成

$$A(z)\Phi_n'(z) - na_2\Phi_{n+1}(z) - \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z) = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{s}_{n,j}\Phi_j(z).$$

首先，我们考虑 $\langle A\Phi_n', 1\rangle - na_2\langle\Phi_{n+1}, 1\rangle - \mathfrak{t}_n\langle\Phi_n^*, 1\rangle = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{s}_{n,\ j}\langle\Phi_j, 1\rangle$，并利用正交性质，得到

$$\langle A\Phi_n', 1\rangle - \mathfrak{t}_n\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle = \mathfrak{s}_{n,0}\langle\Phi_0, 1\rangle.$$

令 $\mathfrak{t}_n = \langle A\Phi_n', 1\rangle/\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle$，可得 $\mathfrak{s}_{n,\ 0} = 0$。由 (2.3) 和 $k = 0$,

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', 1\rangle &= \langle\Phi_n[(ib_2 + a_2)z^2 + (ib_1 + a_1)z + (ib_0 + a_0)], z\rangle \\ &= (ib_2 + a_2)\langle z\Phi_n, 1\rangle.\end{aligned}$$

由 (1.1) 可知 $\langle z\Phi_n, 1\rangle = \overline{\alpha}_n\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle$，因此 (2.6) 成立。

依次进行 $k = 1,2, \ldots, n-2$，得到

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle - na_2\langle\Phi_{n+1}, z^k\rangle - \mathfrak{t}_n\langle\Phi_n^*, z^k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{s}_{n,j}\langle\Phi_j, z^k\rangle$$

并且，由正交性质和 (2.4)，对于 $k = 1, 2, \ldots, n-2$，有 $\mathfrak{s}_{n,\ k} = 0$。因此,

$$A(z)\Phi_n'(z) - na_2\Phi_{n+1}(z) - \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z) = \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z),$$

且 (2.5) 成立。

为了求出 $\mathfrak{s}_{n,n-1}$ 的显式值，我们对方程 (2.5) 两边与 z^{n-1} 取内积，得到 $\langle A\Phi_n', z^{n-1}\rangle = \mathfrak{s}_{n,n-1}\langle\Phi_{n-1}, z^{n-1}\rangle$. 由 (2.3) 和 $k = n-1$ 可知,

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', z^{n-1}\rangle &= \langle\Phi_n[(ib_2 + na_2)z^2 + (ib_1 + na_1)z + (ib_0 + na_0)], z^n\rangle, \\ &= (ib_0 + na_0)\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle.\end{aligned}$$

Hen因此，我们证明了 (2.7)，即 $\mathfrak{s}_{n,n-1} = (ib_0 + na_0)\kappa_{n-1}^2/\kappa_n^2 = (ib_0 + na_0)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]$.

为了求出 $\mathfrak{s}_{n,n}$ 的显式值，首先对方程两边与 Φ_n 取内积，得到 (2.5)

$$\langle A\Phi_n', \Phi_n\rangle = \mathfrak{s}_{n,n}\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle + \mathfrak{t}_n\langle\Phi_n^*, \Phi_n\rangle. \tag{2.10}$$

另一方面，由正交性质可知,

$$\langle A\Phi_n', \Phi_n\rangle = na_2\langle z^{n+1}, \Phi_n\rangle + [\gamma_n(n-1)a_2 + na_1]\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle,$$

并且由 (1.5) 得到 $\langle A\Phi_n', \Phi_n\rangle = -\gamma_{n+1}na_2\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle + [\gamma_n(n-1)a_2 + na_1]\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle$. 将这些关系代入 (2.10)，得到

$$\mathfrak{s}_{n,n} = -\gamma_{n+1}na_2 + \gamma_n(n-1)a_2 + na_1 + \mathfrak{t}_n\alpha_{n-1},$$

利用 (1.3) 和 (2.6)，方程 (2.8) 成立。

最后，我们利用 (2.5) 得到 $\langle A\Phi_n', z^n\rangle = \mathfrak{s}_{n,n-1}\langle\Phi_{n-1}, z^n\rangle + \mathfrak{s}_{n,n}\langle\Phi_n, z^n\rangle$. 此外，由于 $\langle\Phi_n, z^n\rangle = \langle\Phi_n, \Phi_n\rangle$ 以及 (1.5)，可得

$$\langle A\Phi_n', z^n\rangle = -\mathfrak{s}_{n,n-1}\overline{\gamma}_n\langle\Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}\rangle + \mathfrak{s}_{n,n}\langle\Phi_n, \Phi_n\rangle. \tag{2.11}$$

由 (2.3) 和 $k=n$，我们得到

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', z^n\rangle &= \langle \Phi_n[(ib_2+(n+1)a_2)z^2+(ib_1+(n+1)a_1)z+(ib_0+(n+1)a_0)], z^{n+1}\rangle \\ &= (ib_1+(n+1)a_1)\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle + (ib_0+(n+1)a_0)\langle \Phi_n, z^{n+1}\rangle\end{aligned}$$

并利用（1.5），$\langle A\Phi_n' z^n\rangle = (ib_1+(n+1)a_1)\langle \Phi_n \Phi_n\rangle - (ib_0+(n+1)a_0)\overline{\gamma}_{n+1}\langle \Phi_n \Phi_n\rangle$. 将后一个关系代入（2.11），得到

$$\mathfrak{s}_{n,n} = \mathfrak{s}_{n,n-1}\overline{\gamma}_n \frac{\langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}\rangle}{\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle} + (ib_1+(n+1)a_1) - (ib_0+(n+1)a_0)\overline{\gamma}_{n+1}.$$

因此，结合（2.7）中给出的$\mathfrak{s}_{n,\ n-1}$、 $\kappa_{n-1}^2/\kappa_n^2 = 1-|\alpha_{n-1}|^2$这一事实以及关于$\gamma_{n+1}$的关系（1.3），可得（2.9）。 □

由于倒数多项式满足 $\Phi_{n+1}^*(z) = \Phi_n^*(z) - \alpha_n z\Phi_n(z)$， $\Phi_{n+1}^*(z) + (\ )(\ )$ $\alpha_n\Phi_{n+1}(z) = 1-|\alpha_n|^2\ \Phi_n^*(z)$ (), 因此( )( )( )( )。由此，我们得到相关多指标单位圆正交多项式的结构关系，其中涉及多项式 Φ_{n+1}、 Φ_n、 Φ_{n-1} 和 Φ_{n+1}^*。在下一个推论中，我们恢复了 Magnus [10] 关于 $d=2$ 的结果，并给出系数的显式公式。

推论 ary 2.2. 在定理 2.1 的假设下，相关多指标单位圆正交多项式满足

$$\begin{aligned}A(z)\Phi_n'(z) = \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \frac{na_2+[ib_2-(n-1)a_2]|\alpha_n|^2}{1-|\alpha_n|^2}\Phi_{n+1}(z) \\ + \frac{(ib_2+a_2)\overline{\alpha}_n}{1-|\alpha_n|^2}\Phi_{n+1}^*(z), \quad n\geqslant 2,\end{aligned}$$

系数 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 和 $\mathfrak{s}_{n,\ n-1}$ 如定理 2.1 所示。

将结构关系 (2.5) 中由 (2.8) 给出的 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 代入，可得

$$\begin{aligned}A(z)\Phi_n'(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + [na_1 - a_2\gamma_n - na_2\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) \\ + (ib_2+a_2)\overline{\alpha}_n\,[\Phi_n^*(z) + \alpha_{n-1}\Phi_n(z)].\end{aligned}$$

下一个结果给出了单位圆上的多重正交多项式的一个结构关系，其中涉及倒数多项式 $\Phi_{n-1}^*(z)$。

推论 推论 2.3。在定理 2.1 的假设下，相关多指标单位圆正交多项式满足

$$\begin{aligned}A(z)\Phi_n'(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + [na_1 - a_2\gamma_n - na_2\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\Phi_n(z) + [(ib_0+na_0)(1-|\alpha_{n-1}|^2)]\Phi_{n-1}(z) \\ + (ib_2+a_2)\overline{\alpha}_n(1-|\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}^*(z), \quad n\geqslant 2.\end{aligned}$$

利用定理 2.1 的结果，我们在下面的结果中证明 Verblunsky 系数满足某些非线性差分方程。

定理 2.4。如果权函数满足（1.7），且其中的 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是次数至多为 2 的多项式（如定理 2.1 中所述），那么 Verblunsky 系数满足非线性差分方程

$$[(n-1)\overline{a}_2 + i\overline{b}_2]\alpha_n + [(n-1)\overline{a}_0 - i\overline{b}_0]\alpha_{n-2} = -(n\overline{a}_1 - \gamma_n\overline{a}_0 - \overline{\gamma}_n\overline{a}_2)\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2},\ n\geqslant 2, \tag{2.12}$$

and

$$\begin{aligned}&[(n-1)\overline{a}_2 + i\overline{b}_2]\frac{\alpha_n}{1-|\alpha_{n-1}|^2} + [(n-1)\overline{a}_0 - i\overline{b}_0]\alpha_{n-2} \\ &\quad = -\big\{[i\overline{b}_0 - (n+1)\overline{a}_0]\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_n - i\overline{b}_1 + (n+1)\overline{a}_1 - 2\gamma_n\overline{a}_0\big\}\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2},\ n\geqslant 2,\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中， α_n 为 Verblunsky 系数， γ_n 由（1.3）给出。

证明：将 $z=0$ 代入（2.5），得到

$$a_0\Phi_n'(0) = -\mathfrak{s}_{n,n-1}\overline{\alpha}_{n-2} - \mathfrak{s}_{n,n}\overline{\alpha}_{n-1} + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n. \tag{2.14}$$

由 (1.4)，我们知道 $\Phi_n'(0) = -(1-|\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} - \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_n$. 利用这一信息，将 (2.7) 和 (2.8) 代入方程 (2.14)，可得

$$\begin{aligned}-a_0[(1-|\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_n] = [ib_2-(n-1)a_2]\overline{\alpha}_n - (ib_0+na_0)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2}\\ - \{[ib_2-(n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} - a_2\gamma_n + na_1\}\overline{\alpha}_{n-1},\end{aligned}$$

经过一些化简后，我们得到 (2.12)。

如果在方程 (2.14) 中使用 (2.9) 代替 (2.8)，我们将得到非线性差分方程 (2.13)。

□

3 半经典权函数的确定

本节旨在确定单位圆上满足 (1.7) 的所有半经典权函数 w，其中 A和 B 是次数至多为 2 的多项式。

单位圆上的一些半经典权函数已经为人所知，例如，勒贝格权函数 $w(\theta) = 1/(2\pi)$ 是半经典的。在 Ismail 的著作 [7] 中给出了一些例子。例如，在 [7, 第 229] 页和 [8] 中，我们可以找到关于相对于其正交的圆Jacobi多项式的信息

$$w(\theta) = \tau(\lambda)|1-e^{i\theta}|^{2\lambda} = \tilde{\tau}(\lambda)[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \tag{3.1}$$

其中 $\lambda > -1/2$、$\tau(\lambda)$ 和 $\tilde{\tau}(\lambda)$ 是满足 $\mu_0 = 1$ 的常数。在 [7, 第 236] 页和 [8] 中，介绍了关于以半经典权函数为正交权的修正贝塞尔多项式的信息

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(t)} e^{t\cos(\theta)}, \tag{3.2}$$

其中 I_α 是修正贝塞尔函数。

关于半经典权函数的正交多项式

$$w(\theta) = [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}\,[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \tag{3.3}$$

其中 $\lambda > -1/2$ 和 $\beta > -1/2$，称为单位圆上的雅可比多项式，见 [8] 和 [10]。在 [11]，中，作者在讨论单位圆上第二类权函数相干对的背景下，研究了以下半经典权函数。对于 $u \in \mathbb{C}$，且 $\tau(u)$ 是满足 $\mu_0 = 1$ 的常数，

$$w(\theta) = \tau(u)\, e^{2|u|\sin(\theta+\arg(u))}. \tag{3.4}$$

对于 u、$r \in \mathbb{C}$、$|r| \neq 1$，且 $\tau(u$、$r)$ 是满足 $\mu_0 = 1$ 的常数，

$$w(\theta) = \tau(u,r)\, e^{2\,\mathrm{Re}(u/\overline{r})\arg(1-re^{-i\theta})}|e^{i\theta}-r|^{-2\,\mathrm{Im}(u/\overline{r})}. \tag{3.5}$$

对于 $\lambda > -1/2$、$\eta \in \mathbb{R}$、$b = \lambda + i\eta$，以及 $\tau(b)$ 是一个常数，使得 $\mu_0 = 1$，

$$w(\theta) = \tau(b)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}. \tag{3.6}$$

Sri Ranga [16] 研究了权函数 (3.6)。

随后，我们将为这些权函数中的每一个给出形如 (1.6) 的 Pearson 型方程。

我们继续使用记号 $B(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0$，由于系数 b_k、$k = 0$、1、2 是复数，我们记 $b_k = \mathrm{Re}(b_k) + i\mathrm{Im}(b_k)$，其中 Re($c$) 表示 c 的实部，而 Im(c) 表示 c 的虚部。不失一般性，我们考虑 A 为一个首一多项式。半经典权函数的确定分析根据多项式 A 的零点分为三种情况。

3.1 $A(z)$ 是一个 0 次多项式，$A(z) = 1$

令 $A(z) = 1$，由（2.1）可知，w 应满足

$$\frac{dw(\theta)/d\theta}{w(\theta)} = b_2 z^2 + b_1 z + b_0, \quad z = e^{i\theta}. \tag{3.7}$$

为了使权函数 w 在 (3.7) 中为正，必须有 $\mathrm{Im}(b_2 e^{2i\theta} + b_1 e^{i\theta} + b_0) = 0$，这等价于

$$\mathrm{Im}(b_2)\cos(2\theta) + \mathrm{Re}(b_2)\sin(2\theta) + \mathrm{Re}(b_1)\sin(\theta) + \mathrm{Im}(b_1)\cos(\theta) + \mathrm{Im}(b_0) = 0,$$

对于 $\theta \in [0, 2\pi]$。由于集合 $\{\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(\theta), \sin(\theta)\ 1\}$ 线性无关，因此$b_2 = 0$、$b_1 = 0$ 以及 $\mathrm{Im}(b_0) = 0$。于是，利用表示 (2.2)，我们得到

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{\mathrm{Re}(b_0)}{z}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{3.8}$$

对 (3.8) 关于 z积分，可得

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = \mathrm{Re}(b_0)[\theta - \theta_0],$$

其中 $z_0 = e^{i\theta_0}$，且 $\theta_0 \in [0, 2\pi]$，使得 $w(\theta_0) > 0$。

因此，$w(\theta) = w(\theta_0)e^{Re(b_0)[\theta-\theta_0]}$. 为得到结构关系所需的附加条件是$A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$。我们假定 $w(0) = w(2\pi)$，从而 $\mathrm{Re}(b_0) = 0$ 且 $w(\theta) = w(\theta_0)$。由于 $w(\theta_0)$ 是一个常数，我们可以选择该常数，使得 $\int_0^{2\pi} w(\theta)d\theta = 1$。我们得出，满足 $A(z) = 1$ 的单位圆上唯一的半经典权函数是勒贝格权函数，即 $w(\theta) = 1/(2\pi)$。这里，Pearson 型方程 (1.6) 中的多项式 B 就是 $B(z) = 0$。我们可以看到，勒贝格权函数属于类 (0, 0)。

3.2 $A(z)$ 是次数为 1 的多项式，$A(z) = z - r$，其中 $r \in \mathbb{C}$

由 (2.1) 可知，当 $A(z) = z - r$，$r \in \mathbb{C}$ 时，得到

$$\frac{dw(\theta)/d\theta}{w(\theta)} = \frac{b_2 z^2 + (b_1 - i)z + b_0}{z - r}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{3.9}$$

为了使 w 为正，(3.9) 右侧必须为实数。注意到

$$\frac{dw(\theta)/d\theta}{w(\theta)} = \frac{-\overline{r}b_2 z^2 + [b_2 - \overline{r}(b_1 - i)]z - \overline{r}b_0 + b_1 - i + b_0 z^{-1}}{|z - r|^2}$$

是实数，当 a 且仅当右侧的分子为实数时。因此，我们假设

$$\mathrm{Im}(-\overline{r}b_2 z^2 + [b_2 - \overline{r}(b_1 - i)]z - \overline{r}b_0 + b_1 - i + b_0 z^{-1}) = 0.$$

我们采用与第 3.1 小节类似的过程，求出满足后一假设的 b_k、$k = 0$、1、2 的值。然后得到五个方程，可将其写成一个阶数为 5×6 的线性方程组，

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{x} = \mathbf{g}_1. \tag{3.10}$$

该线性方程组的解为 $\mathbf{x}$ =(实部(b_2)、虚部(b_2)、实部(b_1)、虚部(b_1)、实部(b_0)、虚部(b_0))^T，矩阵 $\mathbf{F}_1$ 和向量 $\mathbf{g}_1$ 为

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(r) & -\operatorname{Im}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Im}(r) & -\operatorname{Re}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \operatorname{Im}(r) & -\operatorname{Re}(r) \\ 1 & 0 & -\operatorname{Re}(r) & -\operatorname{Im}(r) & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \operatorname{Im}(r) & -\operatorname{Re}(r) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\operatorname{Im}(r) \\ -\operatorname{Re}(r) \end{pmatrix}.$$

现在我们分别考虑 $r = 0$ 和 $r \neq 0$ 的情形。

3.2.1 $A(z) = z$

当 $r = 0$ 时，线性方程组 (3.10) 的解给出 $b_2 = \overline{b}_0$，且 $\operatorname{Im}(b_1) = 1$。因此，利用表示 (2.2)，我们有

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{b_2 z^2 + \operatorname{Re}(b_1) z + \overline{b}_2}{z^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

类似地，对 z 积分并考虑 $z_0 = e^{i\theta_0}, \theta_0 \in [0, 2\pi]$，可得

$$i \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = b_2(z - z_0) - \overline{b}_2\overline{(z - z_0)} + i \operatorname{Re}(b_1)(\theta - \theta_0).$$

注意到

$$\begin{aligned} b_2(z - z_0) - \overline{b}_2\overline{(z - z_0)} &= [e^{i(\theta-\theta_0)/2} - e^{-i(\theta-\theta_0)/2}][b_2 e^{i(\theta+\theta_0)/2} + \overline{b}_2 e^{-i(\theta+\theta_0)/2}] \\ &= 2i|b_2|[\sin(\theta + \arg(b_2)) - \sin(\theta_0 + \arg(b_2))]. \end{aligned}$$

Thus

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = 2|b_2|[\sin(\theta + \arg(b_2)) - \sin(\theta_0 + \arg(b_2))] + \operatorname{Re}(b_1)(\theta - \theta_0)$$

且 $w(\theta) = w(\theta_0) e^{2|b_2|[\text{正弦函数}(\theta+\arg(b_2)) - \text{正弦函数}(\theta_0+\arg(b_2))]} e^{\operatorname{Re}(b_1)(\theta-\theta_0)}$。

假设 $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$，则有实部(b_1) $= 0$。因此，权函数可写为

$$w(\theta) = \tau(b_2)\, e^{2|b_2|\sin(\theta+\arg(b_2))}. \tag{3.11}$$

其中 $\tau(b_2) = w(\theta_0)\ e^{-2|b_2|[\text{正弦函数}(\theta_0+\arg(b_2)]}$。该权函数满足带有 $A(z) = z$ 和 $B(z) = b_2 z^2 + iz + \overline{b}_2$. 的 Pearson 型方程 (1.6)。考虑到 $b_2 \neq 0$，可知权函数 (3.11) 属于半经典类 (1, 2)。

注 3.1。权函数 (3.11) 曾在 *[11]* 中，使用 $b_2 = u \in \mathbb{C}$（见 (3.4)），针对单位圆上第二类权函数相干对的背景进行了研究。

注 3.2。如果在 (3.11) 中选择 $b_2 = it/2$，使得 $t > 0$ 且 $\tau(b_2) = 1/[2\pi I_0(t)]$，则 $\arg(b_2) = \pi/2$，权函数为 $w(\theta) = \tau(b_2) e^{t\cos(\theta)}$，见 (3.2)。这是与修正贝塞尔多项式 *[7]* 相关的权函数。

3.2.2 $A(z) = z - r$，其中 $r \neq 0$

方程组 (3.10) 的解表明，$\operatorname{Re}(b_2) = \operatorname{Im}(b_2) = 0$，即 $b_2 = 0$。

现在我们分析在 $|r| = 1$ 且 $|r| \neq 1$时方程组 (3.10) 的解。

1. 若 $|r|=1$，方程组 (3.10) 的解为 $b_1=-r\overline{b}_0+i$，其中 b_0 是任意复数。于是，此情形下的表示 (2.2) 变为

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)}=\frac{-r\overline{b}_0z+b_0}{z(z-r)},\quad z=e^{i\theta}. \tag{3.12}$$

再次对 z 进行积分，并考虑 $z_0=e^{i\theta_0}$、$\theta_0\in[0,2\pi]$，可得

$$i\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right)=-ib_0\overline{r}(\theta-\theta_0)+\ln\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right)2\,\mathrm{Im}(b_0\overline{r})i.$$

由于 $|r|=1$，记 $r=e^{i\varphi}$ 并写成

$$\frac{z-r}{z_0-r}=e^{i(\theta-\theta_0)/2}\frac{\sin(\theta/2-\varphi/2)}{\sin(\theta_0/2-\varphi/2)}. \tag{3.13}$$

因此，

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right)=-\,\mathrm{Re}(b_0\overline{r})(\theta-\theta_0)+\ln\left[\frac{\sin^2(\theta/2-\varphi/2)}{\sin^2(\theta_0/2-\varphi/2)}\right]^{\mathrm{Im}(b_0\overline{r})}.$$

因此，权函数可写为

$$w(\theta)=\tau(b_0)e^{-\,\mathrm{Re}(\overline{b}_0r)\theta}[\sin^2(\theta/2-\varphi/2)]^{\mathrm{Im}(b_0\overline{r})},$$

其中 $\tau(b_0)=w(\theta_0)e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_0r)\theta_0}[\text{正弦函数}^2(\theta_0/2-\varphi/2)]^{-\text{虚部}(b_0\overline{r})}$。

I假设 $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$，我们得到两个可能的权函数

i) 若正弦函数$(\varphi/2)\neq0$（即 $r\neq1$），则必须有 $\mathrm{Re}(b_0\overline{r})=0$，因此

$$w(\theta)=\tau(b_0)\left[\sin^2(\theta/2-\varphi/2)\right]^{\mathrm{Im}(b_0\overline{r})},\quad \mathrm{Im}(b_0\overline{r})>-1/2.$$

这里，$B(z)=(-r\overline{b}_0+i)z+b_0$，其中，当 $\mathrm{Re}(r)=0$ 时，$b_0\in\mathbb{R}$；而当 $\mathrm{Re}(r)\neq0.$ 时，$b_0=ir\,\mathrm{Im}(b_0)/\mathrm{Re}(r)$

ii) 若正弦函数$(\varphi/2)=0$（即 $r=1$），则权函数变为

$$w(\theta)=\tau(b_0)e^{-\,\mathrm{Re}(b_0)\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\mathrm{Im}(b_0)},\quad \mathrm{Im}(b_0)>-1/2. \tag{3.14}$$

在这种情况下，$B(z)=(-\overline{b}_0+i)z+b_0$。

注 3.3. 权函数 (3.14) 与文献 *[16],* 中研究的权函数 (3.6) 相同，其中考虑参数 $b_0=i\overline{b}$，且 $b=\lambda+i\eta,\ \lambda>-1/2$ 和 $\eta\in\mathbb{R}.$。该权函数满足 Pearson 型方程，其中 $A(z)=z-1$ 且 $B(z)=i[(b+1)z+\overline{b}]$。

2. 若 $|r|\neq1$，则由方程组 (3.10) 的解可知，系数 b_1 和 b_0 满足

$$b_1=\begin{cases}-\frac{\mathrm{Re}(b_0)}{\mathrm{Re}(r)}+i, & \text{if } \mathrm{Re}(r)\neq0,\\ -\frac{\mathrm{Im}(b_0)}{\mathrm{Im}(r)}+i, & \text{if } \mathrm{Re}(r)=0,\end{cases}\quad\text{and}\quad b_0=\begin{cases}\frac{\mathrm{Re}(b_0)r}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{if } \mathrm{Re}(r)\neq0,\\ i\,\mathrm{Im}(b_0), & \text{if } \mathrm{Re}(r)=0,\end{cases}$$

其中，若 $\mathrm{Re}(r)\neq0$（分别为 $\mathrm{Re}(r)=0$），则 $\mathrm{Re}(b_0)$（分别为 $\mathrm{Im}(b_0)$）是任意实数。因此，对于 $|r|\neq1$，表示式 (2.2) 可概括为

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)}=\frac{s(r)}{z},\quad\text{where}\quad s(r)=\begin{cases}-\frac{\mathrm{Im}(b_0)}{\mathrm{Im}(r)}, & \text{if } \mathrm{Re}(r)=0,\\ -\frac{\mathrm{Re}(b_0)}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{if } \mathrm{Re}(r)\neq0.\end{cases}$$

与推导方程 (3.8) 时所采用的方法类似，这里的权函数满足$w(\theta)=w(\theta_0)e^{s(r)[\theta-\theta_0]}$，并令 $w(0)=w(2\pi)$，我们再次得到勒贝格权函数。这里，(1.6) 中的多项式 A 和 B 是 $A(z)=z-r$，其中 $|r|\neq1$ 和 $B(z)=iz$。因此，我们注意到，勒贝格权函数也属于类 (1, 1)，这正如预期。

3.3 $A(z)$ 是一个次数为 2 的多项式，$A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$，其中 $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$

考虑到 $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$，表达式 (2.1) 等价于

$$\frac{dw(\theta)/d\theta}{w(\theta)} = \frac{[(b_2 - 2i)z^2 + [b_1 + i(r_1 + r_2)]z + b_0][(\overline{z} - \overline{r}_1)(\overline{z} - \overline{r}_2)]}{|z - r_1|^2 |z - r_2|^2}.$$

同样，当 w 为正时，权函数

$$\operatorname{Im}\{[(b_2 - 2i)z^2 + (b_1 + i(r_1 + r_2))z + b_0][(\overline{z} - \overline{r}_1)(\overline{z} - \overline{r}_2)]\} = 0, \tag{3.15}$$

对 $z = e^{i\theta}$。与第3.2节中的做法类似，要找出满足 (3.15) 的 b_k、$k = 0$、1、2 的值，等价于求解一个阶数为 5×6 的线性方程组，

$$\mathbf{F}_2 \mathbf{x} = \mathbf{g}_2, \tag{3.16}$$

其中 $\mathbf{x} = (\text{虚部}(b_0), \text{实部}(b_0), \text{虚部}(b_1), \text{实部}(b_1), \text{虚部}(b_2), \text{实部}(b_2))^T$，

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{Re}(r_1 r_2) & -\operatorname{Im}(r_1 r_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \operatorname{Im}(r_1 r_2) & \operatorname{Re}(r_1 r_2) \\ \operatorname{Re}(r_1 r_2) & -\operatorname{Im}(r_1 r_2) & -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 + r_2) & 1 & 0 \\ -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 + r_2) & \operatorname{Re}(r_1 r_2) + 1 & -\operatorname{Im}(r_1 r_2) & -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 + r_2) \\ \operatorname{Im}(r_1 + r_2) & \operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 r_2) & \operatorname{Re}(r_1 r_2) - 1 & -\operatorname{Im}(r_1 + r_2) & -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) \end{pmatrix}$$

and

$$\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(r_1 r_2) \\ 2\operatorname{Im}(r_1 r_2) \\ 2 + |r_1 + r_2|^2 \\ -3\operatorname{Re}(r_1 + r_2) - |r_1|^2 \operatorname{Re}(r_2) - |r_2|^2 \operatorname{Re}(r_1) \\ -3\operatorname{Im}(r_1 + r_2) - |r_1|^2 \operatorname{Im}(r_2) - |r_2|^2 \operatorname{Im}(r_1) \end{pmatrix}.$$

若按零点 r_1 和 r_2 分类讨论，则更容易求出线性方程组 (3.16) 的解。

3.3.1 $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$，其中 $|r_1| = 1$ 且 $|r_2| = 1$

我们将分析分为两种情况：$r_1 = r_2 = r$ 或 $r_1 \neq r_2$。

1. 对于 $A(z) = (z - r)^2$, 且 $|r| = 1$，线性方程组 (3.16) 的解为

$$b_2 = r^2 \overline{b}_0 + 2i, \qquad b_1 = \begin{cases} \frac{2}{\operatorname{Im}(r)} + \operatorname{Im}(b_1)i, & \text{if } \operatorname{Re}(r) = 0, \\ \frac{\operatorname{Re}(b_1) r - 2i}{\operatorname{Re}(r)}, & \text{if } \operatorname{Re}(r) \neq 0, \end{cases}$$

其中 b_0 为任意复数；当 $\operatorname{Re}(r) \neq 0$（相应地，$\operatorname{Re}(r) = 0$）时，$\operatorname{Re}(b_1)$（相应地，$\operatorname{Im}(b_1)$）为任意实数。

因此，Pearson 型方程 (2.2) 变为

$$i \frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{r^2 \overline{b}_0 z^2 + (b_1 + 2ri)z + b_0}{z(z - r)^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

对 $z = e^{i\theta}$ 积分，并考虑具有 $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ 的 $z_0 = e^{i\theta_0}$，我们得到

$$\begin{aligned} i \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = {} & [2\operatorname{Re}(r^2 \overline{b}_0) + (b_1 + 2ri)\overline{r}] \frac{r(z - z_0)}{(z - r)(z_0 - r)} \\ & + i b_0 \overline{r}^2 (\theta - \theta_0) + 2i \operatorname{Im}(r^2 \overline{b}_0) \ln\left(\frac{z - r}{z_0 - r}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

注意到 $(b_1+2ri)\overline{r}\in\mathbb{R}$ 和

$$(b_1+2ri)\overline{r}=\begin{cases}\mathrm{Im}(b_1)\,\mathrm{Im}(r), & \text{se } \mathrm{Re}(r)=0,\\ \dfrac{\mathrm{Re}(b_1)-2\,\mathrm{Im}(r)}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r)\neq 0.\end{cases}$$

由于 $|r|=1$，我们记 $r=e^{i\varphi}$，其中 $0\le\varphi\le 2\pi$。因此，由

$$\frac{r(z-z_0)}{(z-r)(z_0-r)}=\frac{\sin(\theta/2-\theta_0/2)}{2i\sin(\theta/2-\varphi/2)\sin(\theta_0/2-\varphi/2)}=\frac{\cot(\theta_0/2-\varphi/2)-\cot(\theta/2-\varphi/2)}{2i}$$

以及 (3.13)，方程 (3.17) 变为

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right)=&-\left[\mathrm{Re}(r^2\overline{b}_0)+\frac{(b_1+2ri)\overline{r}}{2}\right][\cot(\theta_0/2-\varphi/2)-\cot(\theta/2-\varphi/2)]\\&+\mathrm{Re}(\overline{b}_0r^2)(\theta-\theta_0)+\ln\left(\frac{\sin^2(\theta/2-\varphi/2)}{\sin^2(\theta_0/2-\varphi/2)}\right)^{\mathrm{Im}(r^2\overline{b}_0)}.\end{aligned}$$

相应的权函数为

$$w(\theta)=\tau(b_0;b_1)\left[\sin^2(\theta/2-\varphi/2)\right]^{2\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0r^2)}e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_0r^2)\theta}e^{[\mathrm{Re}(\overline{b}_0r^2)+\frac{(b_1+2ri)\overline{r}}{2}][\cot(\theta/2-\varphi/2)]},$$

其中 $\tau(b_0;\,b_1)$ 是一个常数。

假设 $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$，我们得到两个可能的权函数

i) 若 $\sin(\varphi/2)\neq 0$，则必须有 $\mathrm{Re}(\overline{b}_0r^2)=0$ 且 $(b_1+2ri)\overline{r}=0$，此时权函数为

$$w(\theta)=\tau(b_0;b_1)\left[\sin^2(\theta/2-\varphi/2)\right]^{\mathrm{Im}(\overline{b}_0r^2)},\quad \mathrm{Im}(\overline{b}_0r^2)>-1/2.$$

在此情况下，$B(z)=(r^2\overline{b}_0+2i)z^2-(2ir)z+b_0$，其中当 $\mathrm{Re}(r^2)=0$ 时，$b_0\in\mathbb{R}$，而当 $\mathrm{Re}(r^2)\neq 0$ 时，$b_0=ir^2\,\mathrm{Im}(b_0)/\mathrm{Re}(r^2)$

ii) 如果正弦函数 $(\varphi/2)=0$，则必须有 $\mathrm{Re}(\overline{b}_0)+(b_1+2i)/2=0$，并且

$$w(\theta)=\tau(b_0;b_1)e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_0)\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{\mathrm{Im}(\overline{b}_0)},\quad \mathrm{Im}(\overline{b}_0)>-1/2,\quad \mathrm{Re}(\overline{b}_0)\in\mathbb{R}.\qquad(3.18)$$

这里，$B(z)=(\overline{b}_0+2i)z^2+[-(b_0+\overline{b}_0)-2i]z+b_0$。

注 3.4。与注 3.3 一样，我们得出结论：考虑参数 $b_0=-i\overline{b}$ 时，权函数 (3.18) 就是权函数 (3.6)，其中 $b=\lambda+i\eta$、$\lambda>-1/2$ 和 $\eta\in\mathbb{R}$.在此情况下，(1.6) 中的多项式为 $A(z)=(z-1)^2$ 以及 $B(z)=i[(b+2)z^2+(\overline{b}-b-2)z-\overline{b}]$.

2. 对于 $A(z)=(z-r_1)(z-r_2)$、$|r_1|=|r_2|=1$ 和 $r_1\neq r_2$，为求线性方程组 (3.16) 的解，我们需要将 r_1 和 r_2 的取值分为两种情况：$\mathrm{Re}(r_1+r_2)=0$ 和 $\mathrm{Re}(r_1+r_2)\neq 0$。当 $\mathrm{Re}(r_1+r_2)=0$ 时，我们还会得到另外两种可能性：$r_2=-r_1$ 或 $r_2=-\overline{r}_1$。对于情况 $r_2=-r_1$，若 $\mathrm{Re}(r_1)^2=1$ 或 $\mathrm{Re}(r_1)^2\neq 1$，方程组的解也不同。综上所述，我们有

$$b_2=2i+r_1r_2\overline{b}_0,$$

$$b_1=\begin{cases}\mathrm{Im}(b_1)i, & \text{if } r_2=-r_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)^2=1,\\ -\frac{r_1\,\mathrm{Re}(b_1)i}{\mathrm{Im}(r_1)}, & \text{if } r_2=-r_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)^2\neq 1,\\ 2\,\mathrm{Im}(r_1)+\mathrm{Im}(b_1)i, & \text{if } r_2=-\overline{r}_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)\,\mathrm{Im}(r_1)\neq 0,\\ \frac{\mathrm{Re}(b_1)(r_1+r_2)-|r_1+r_2|^2i}{\mathrm{Re}(r_1+r_2)}, & \text{if } \mathrm{Re}(r_1+r_2)\neq 0,\end{cases}$$

其中， b_0 是任意复数。此外，Re(b_1)或 Im(b_1)中有一个是任意的，具体取决于子情况是 r_1 还是 r_2。因此，表示 (2.2) 变为

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{r_1 r_2 \overline{b}_0 z^2 + [b_1 + i(r_1 + r_2)]z + b_0}{z(z - r_1)(z - r_2)}.$$

使用与之前类似的积分，并结合 $z_0 = e^{i\theta_0}$、 $\theta_0 \in [0, 2\pi]$，我们得到

$$i \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = ib_0\overline{r}_1\overline{r}_2(\theta - \theta_0) + H_1 \ln\left(\frac{z - r_1}{z_0 - r_1}\right) + H_2 \ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right), \tag{3.19}$$

其中

$$H_1 = -\frac{1}{r_2 - r_1}[r_1^2 r_2 \overline{b}_0 + b_1 + i(r_1 + r_2) + \overline{r}_1 b_0],$$
$$H_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}[r_2^2 r_1 \overline{b}_0 + b_1 + i(r_1 + r_2) + \overline{r}_2 b_0].$$

注意到 $H_1 + H_2 = 2i$虚部($\overline{b}_0 r_1 r_2$)，因此我们可以将 (3.19) 重写为

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) &= b_0\overline{r}_1\overline{r}_2(\theta - \theta_0) + 2\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1 r_2) \ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right) \\ &\quad + iH_1 \left[\ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right) - \ln\left(\frac{z - r_1}{z_0 - r_1}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.20}$$

另一方面， H_1 可以写成

$$H_1 = -\frac{1}{|r_2 - r_1|^2}[2i\,\mathrm{Im}[\overline{b}_0 r_1(r_1 - r_2)] - 2\,\mathrm{Im}(r_1\overline{r}_2) + b_1(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)].$$

现在，使用方程组的每个解所对应的 b_1 值，我们将 H_1 的值总结如下

$$\begin{cases} [\mathrm{Im}(b_0) + \frac{\mathrm{Im}(b_1)r_1}{2}]i, & \text{if } r_2 = -r_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)^2 = 1, \\ -\left[2\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1^2) + \frac{\mathrm{Re}(b_1)}{\mathrm{Im}(r_1)}\right]\frac{i}{2}, & \text{if } r_2 = -r_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)^2 \neq 1, \\ \frac{[2\,\mathrm{Im}(\overline{r}_1 b_0) + \mathrm{Im}(b_1)]i}{2\,\mathrm{Re}(r_1)}, & \text{if } r_2 = -\overline{r}_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)\,\mathrm{Im}(r_1) \neq 0, \\ \{-\mathrm{Im}[\overline{b}_0 r_1(r_1 - r_2)] + \frac{\mathrm{Im}(\overline{r}_1 r_2)]}{\mathrm{Re}(r_1 + r_2)}[\mathrm{Re}(b_1) - \mathrm{Im}(r_1 + r_2)]\}\frac{2i}{|r_2 - r_1|^2}, & \text{if } \mathrm{Re}(r_1 + r_2) \neq 0. \end{cases}$$

由于 $|r_1| = |r_2| = 1$ 和 $r_1 \neq r_2$，从上述 H_1 的值可以看出，H_1 的实部 $= 0$。因此，方程 (3.20) 可以写成

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = b_0\overline{r}_1\overline{r}_2(\theta - \theta_0) + 2\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1 r_2) \ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right) + \mathrm{Im}(H_1)\left[\ln\left(\frac{z - r_1}{z_0 - r_1}\right) - \ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right)\right].$$

将 $r_1 = e^{i\varphi}$ 和 $r_2 = e^{i\phi}$ 按照 (3.13) 中的定义记号，我们有

$$\frac{z - r_1}{z_0 - r_1} = e^{i(\theta - \theta_0)/2}\frac{\sin[(\theta - \varphi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \varphi)/2]} \quad \text{and} \quad \frac{z - r_2}{z_0 - r_2} = e^{i(\theta - \theta_0)/2}\frac{\sin[(\theta - \phi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \phi)/2]}.$$

因此可得

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) &= \mathrm{Re}(b_0\overline{r}_1\overline{r}_2)(\theta - \theta_0) + \ln\left|\frac{\sin[(\theta - \phi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \phi)/2]}\right|^{-2\,\mathrm{Im}(b_0\overline{r}_1\overline{r}_2)} \\ &\quad + \ln\left|\frac{\sin[(\theta - \varphi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \varphi)/2]}\right|^{\mathrm{Im}(H_1)} + \ln\left|\frac{\sin[(\theta - \phi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \phi)/2]}\right|^{-\mathrm{Im}(H_1)},\end{aligned}$$

而权函数变为
$w(\theta) = \tau(b_0;\, b_1) e^{\mathrm{Re}(b_0 \overline{r}_1 \overline{r}_2)\theta} \left[\text{正弦函数}^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{-[\frac{1}{2}\text{虚部}(H_1) - \text{虚部}(\overline{b}_0 r_1 r_2)]} \left[\text{正弦函数}^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\frac{1}{2}\text{虚部}(H_1)}$，其中 $\tau(b_0;\, b_1) = e^{-\text{实部}(\overline{b}_0 r_1 r_2)\theta_0} \left[\text{正弦函数}^2(\theta_0/2 - \phi/2)\right]^{[\frac{1}{2}\text{虚部}(H_1) - \text{虚部}(\overline{b}_0 r_1 r_2)]} \left[\text{正弦函数}^2(\theta_0/2 - \varphi/2)\right]^{-\frac{1}{2}\text{虚部}(H_1}$).
假设 $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$，我们得到两个可能的权函数

i) 若 $\sin(\varphi/2)\sin(\phi/2) \neq 0$，（即 $r_1 \neq 1, r_2 \neq 1$），则必须满足 $\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r_1 r_2) = 0$，且权函数变为

$$w(\theta) = \tau(b_0; b_1) \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{-[\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(H_1) - \mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1 r_2)]} \left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(H_1)}.$$

此处，$B(z) = (\overline{b}_0 r_1 r_2 + 2i) z^2 + b_1 z + b_0$，其中 b_0 满足 $\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r_1 r_2) = 0$。

ii) 考虑 $\sin(\varphi/2)\sin(\phi/2) = 0$。（即 $(r_1 - 1)(r_2 - 1) = 0$）。首先假设 $r_2 = 1$，因此 $\phi = 0$，且

$$w(\theta) = \tau(b_0, b_1) e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r_1)\theta} \left[\sin^2(\theta/2)\right]^{-[\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(H_1) - \mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1)]} \left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(H_1)},$$

其中 $\mathrm{Im}(H_1)/2 - \mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1) < 1/2$，且 $\mathrm{Im}(H_1)/2 > -1/2$。
现在选取 $r_1 = -1$，权函数变为

$$w(\theta) = \tau(b_1, b_0) e^{-\,\mathrm{Re}(b_0)\theta} \left[\sin^2(\theta/2)\right]^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(b_0) + \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}(b_1)} \left[\cos^2(\theta/2)\right]^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(b_0) - \frac{1}{4}\,\mathrm{Im}(b_1)},$$

其中 $\mathrm{Im}(b_0)/2 + \mathrm{Im}(b_1)/4 > -1/2$，且 $\mathrm{Im}(b_0)/2 - \mathrm{Im}(b_1)/4 > -1/2$。在这种情况下，$B(z) = (-\overline{b}_0 + 2i) z^2 + i\,\mathrm{Im}(b_1) z + b_0$。
注 3.5. 记 $\eta = \mathrm{Re}(b_0) \in \mathbb{R}$、$\lambda = \mathrm{Im}(b_0)/2 + \mathrm{Im}(b_1)/4$，以及 $\beta = \mathrm{Im}(b_0)/2 - \mathrm{Im}(b_1)/4$，因此 $b_0 = \eta + i(\lambda + \beta)$ 且 $\mathrm{Im}(b_1) = 2(\lambda - \beta)$，则我们得到单位圆上的一个新的半经典权函数

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta, \eta)\, e^{-\eta\,\theta} [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda} [\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \tag{3.21}$$

其中 $\tau(\lambda, \beta, \eta)$ 是一个常数，$\eta \in \mathbb{R}$、$\lambda > -1/2$、$\beta > -1/2$ 和 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$。该权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中 $A(z) = z^2 - 1$ 且 $B(z) = i[(\lambda + \beta + i\eta + 2) z^2 + 2(\lambda - \beta) z + \lambda + \beta - i\eta]$。因此，权函数 (3.21) 属于类 (2, 2)。

注释 3.6。我们注意到，半经典权函数 (3.21) 是其他半经典权函数的推广，因为

- 当 $\eta = 0$ 时，该权函数为 (3.3)，称为单位圆上的 Jacobi 权函数，见 *[10]*。

- 当 $\eta = 0$ 且 $\beta = 0$ 时，该权函数为 (3.1)，其对应的正交多项式称为圆Jacobi多项式，见 *[7]*。
- 当 $\beta = 0$ 时，该权函数为 (3.6)，相关研究见 *[16]*。

特殊情形
将权函数 (3.21) 写作

$$\tilde{w}(t) = \tau(\beta, \eta)\, e^{-\eta\, t} [\sin^2(t/2)]^{\beta}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

设定 $\theta = t - \pi$ 和旋转 $w(\theta) = \tilde{w}(\theta + \pi)$，我们得到

$$w(\theta) = \tau(\beta, \eta)\, e^{-\eta\,\theta} [\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \tag{3.22}$$

它在 $\theta = \pm\pi$ 时为零。因此，内积变为

$$\langle f, g \rangle = \tau(\beta, \eta) \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})}\, e^{-\theta\,\eta} [\cos^2(\theta/2)]^{\beta} d\theta.$$

T其权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中 $A(z) = z^2 -$ 1.

3.3.2 $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$，其中 $|r_1| \neq 1$ 和 $|r_2| = 1$

我们将分析分为两种情况 $r_1 \neq 0$ 和 $r_1 = 0$。

1. 对于 $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$，其中 $|r_1| \neq 1$、 $r_1 \neq 0$和 $|r_2| = 1$，线性方程组（3.16）的解为

$$b_2 = \frac{\overline{b}_0 r_2}{\overline{r}_1} + 2i \quad \text{and} \quad b_1 = -\frac{1}{|r_1|^2}(r_1^2 r_2 \overline{b}_0 + \overline{r}_1 b_0) - (r_1 + r_2)i$$

其中 b_0 为任意复数。

将此解代入（2.2），可得

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{\overline{b}_0 r_1 r_2 z - b_0 \overline{r}_1}{|r_1|^2 z(z - r_2)}.$$

与（3.12）中的处理类似，考虑 $r_2 = e^{i\phi}$，可得权函数

$$w(\theta) = \tau(b_0) e^{\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{b}_0 r_2}{\overline{r}_1}\right)\theta} \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{b}_0 r_2}{\overline{r}_1}\right)},$$

其中 $\tau(b_0)$为常数。

Iفرض定 $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$，我们得到两个可能的权函数

i) 若正弦函数$(\phi/2) \neq 0$ （即 $r_2 \neq 1$），则必须有实部$(\overline{b}_0 r_1 r_2) = 0$，权函数变为

$$w(\theta) = \tau(b_0) \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{b}_0 r_2}{\overline{r}_1}\right)}.$$

在这种情况下， $B(z) = \left(\frac{\overline{b}_0 r_2}{\overline{r}_1} + 2i\right) z^2 - \left(\frac{b_0 r_1 r_2}{\overline{r}_1} + \frac{b_0}{r_1} + (r_1 + r_2)i\right) z + b_0$。我们注意到，当实部$(r_1 r_2) = 0$ 时，条件实部$(\overline{b}_0 r_1 r_2) = 0$ 等价于 $b_0 \in \mathbb{R}$；或者当实部$(r_1 r_2) \neq 0$时，等价于 $b_0 = i$虚部$(b_0) r_1 r_2$/实部$(r_1 r_2)$。

ii) 如果正弦函数$(\phi/2) = 0$ （即 $r_2 = 1$），则

$$w(\theta) = \tau(b_0) e^{\mathrm{Re}\left(\frac{b_0}{r_1}\right)\theta} \left[\sin^2(\theta/2)\right]^{-\mathrm{Im}\left(\frac{b_0}{r_1}\right)}, \tag{3.23}$$

其中虚部$(b_0/r_1) < 1/2$.

备注 3.7. 与备注 3.3 和 3.4 中一样，我们看到，权函数 (3.23) 在考虑 $r = r_1 \in \mathbb{C}$、 $b_0 = -ir\overline{b}$、 $b = \lambda + i\eta$、 $\lambda = -$虚部(b_0/r) 以及 $\eta = -$实部(b_0/r) 的情况下，就是权函数 (3.6)。该权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中多项式为 $A(z) = (z-1)(z-r)$ 以及 $B(z) = i\{(b+2)$ $z^2 + [\overline{b} - 1 - r(b+1)]z - r\overline{b}\}$。

2. 如果 $r_1 = 0$ 和 $|r_2| = 1$，令 $r = r_2$，则可将 $A(z) = z(z - r)$ 写成 $|r| = 1$，而线性方程组 (3.16) 的解为 $b_2 = -\overline{b}_1 r + 3i$ 和 $b_0 = 0$，其中 b_1 为任意复数。

使用这个解，表示式 (2.2) 变为

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{-r(\overline{b}_1 - i\,\overline{r})z + (b_1 + ir)}{z(z - r)}, \quad z = e^{i\theta}.$$

类似于 (3.12) 中的做法，考虑 $r = e^{i\varphi}$，可得

$$w(\theta) = \tau(b_1) e^{-\mathrm{Re}(\overline{b}_1 r - i)\theta} \left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{-\mathrm{Im}(\overline{b}_1 r - i)},$$

其中 $\mathrm{Im}(\overline{b}_1 r - i) < 1/2$ 且 $\tau(b_1) = e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_1 r - i)\theta_0} \left[$正弦函数$^2(\theta_0/2 - \varphi/2)\right]^{\mathrm{Im}(\overline{b}_1 r - i)}$。

A假设 $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$，我们得到两个可能的权函数

i) 如果正弦函数$(\varphi/2) \neq 0$，则必须有实部$(\overline{b}_1 r) = 0$，从而得到

$$w(\theta) = \tau(b_1)\left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{-\operatorname{Im}(\overline{b}_1 r - i)},$$

其中 $\operatorname{Im}(\overline{b}_1 r - i) < 1/2$. 此处，$A(z) = z(z-r)$，$B(z) = (3i - \overline{b}_1 r)z^2 + b_1 z$，且 $\operatorname{Re}(\overline{b}_1 r) = 0$ 等价于 $b_1 \in \mathbb{R}$，当 $\operatorname{Re}(r) = 0$ 或 $b_1 = i\operatorname{Im}(b_1)r/\operatorname{Re}(r)$，当 $\operatorname{Re}(r) \neq 0$。

ii) 若 $\sin(\varphi/2) = 0$，则

$$w(\theta) = \tau(b_1) e^{-\operatorname{Re}(\overline{b}_1 - i)\,\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{-\operatorname{Im}(\overline{b}_1 - i)},$$

其中 $\operatorname{Im}(\overline{b}_1 - i) < 1/2$.

注记3.8. 再次，考虑到 $b_1 = i(\lambda - i\eta) - i$，$\lambda = -\operatorname{Im}(\overline{b}_1 - i)$，以及 $\eta = \operatorname{Re}(\overline{b}_1 - i)$，我们得到权函数 (3.6)。该权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中 $A(z) = z(z-1)$，且 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\overline{b} - 1)z]$，对于 $b = \lambda + i\eta$.

3.3.3 $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$，其中 $|r_1| \neq 1$ 且 $|r_1 r_2| = 1$

由于我们正在考虑 $|r_1| \neq 1$、$|r_2| \neq 1$和 $|r_2| = 1/|r_1|$，因此可求得线性方程组 (3.16) 在两种情形 $r_2 = 1/\overline{r}_1$ 和 $r_2 \neq 1/\overline{r}_1$下的解。

1. 首先考虑 $|r_1| \neq 1$ 和 $r_2 = 1/\overline{r}_1$。记 $r_1 = r$ 和 $r_2 = 1/\overline{r}$，得到 $A(z) = (z - r)(z - 1/\overline{r})$。在这种情况下，(3.16) 的解为

$$b_2 = \frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}} + 2i \quad \text{and} \quad b_1 = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(b_1)r - (|r^2|+1)i}{\operatorname{Re}(r)}, & \text{if } \operatorname{Re}(r) \neq 0, \\ \frac{|r^2|+1}{\operatorname{Im}(r)} + \operatorname{Im}(b_1)i, & \text{if } \operatorname{Re}(r) = 0, \end{cases}$$

其中 b_0 是任意复数；根据 $\operatorname{Re}(r) = 0$ 还是 $\operatorname{Re}(r) \neq 0$，$\operatorname{Re}(b_1)$ 或 $\operatorname{Im}(b_1)$ 是任意实数。

表示式 (2.2) 变为

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{\overline{b}_0 r z^2 + [b_1\overline{r} + i(|r|^2+1)]z + b_0\overline{r}}{\overline{r}z(z-r)(z-1/\overline{r})}, \quad z = e^{i\theta}, \tag{3.24}$$

with

$$b_1\overline{r} + i(|r|^2+1) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(b_1)|r|^2 - \operatorname{Im}(r)(|r^2|+1)}{\operatorname{Re}(r)}, & \text{if } \operatorname{Re}(r) \neq 0, \\ \operatorname{Im}(r)\operatorname{Im}(b_1), & \text{if } \operatorname{Re}(r) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

注意，$b_1\overline{r} + i(|r|^2+1)$ 是实数。对 $z = e^{i\theta}$ 积分，并结合 $z_0 = e^{i\theta_0}$、$\theta_0 \in [0, 2\pi]$，可得

$$i\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = \frac{b_0\overline{r}}{r}i(\theta - \theta_0) + H\ln\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right) - \overline{H}\ln\left(\frac{z-1/\overline{r}}{z_0-1/\overline{r}}\right),$$

with

$$H = \frac{\overline{b}_0 r^2 + b_1\overline{r} + i(|r|^2+1)}{|r|^2 - 1} + \frac{b_0(\overline{r})^2}{|r^2|(|r|^2-1)}.$$

由于

$$\frac{z-r}{z_0-r} = \frac{z}{z_0}\frac{1 - r\overline{z}}{1 - r\overline{z}_0} \quad \text{and} \quad \frac{z-1/\overline{r}}{z_0-1/\overline{r}} = \frac{z}{z_0}\frac{\overline{r} - \overline{z}}{\overline{r} - \overline{z}_0},$$

由此可得

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right)=\left(\frac{b_0\overline{r}}{r}-\overline{H}\right)(\theta-\theta_0)+i(\overline{H}-H)\ln\left|\frac{z-r}{z_0-r}\right|+(H+\overline{H})\arg\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right).$$

经过直接计算可得

$$G=\frac{b_0\overline{r}}{r}-\overline{H}=-\frac{2\,\mathrm{Re}(b_0\overline{r}/r)+b_1\overline{r}+i(|r|^2+1)}{|r|^2-1}\in\mathbb{R}.$$

因此,

$$\mathrm{Im}(H)=\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}}\right)\quad\text{and}\quad\mathrm{Re}(H)=\frac{(|r|^2+1)\,\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r/\overline{r})+b_1\overline{r}+i(|r|^2+1)}{|r|^2-1}.$$

因此，权函数可写为

$$w(\theta)=\tau(G;H)\,e^{[G+2\,\mathrm{Re}(H)]\theta}\,e^{2\,\mathrm{Re}(H)\arg(1-\overline{z}r)}\,|z-r|^{2\,\mathrm{Im}(H)},$$

其中 $\tau(G,\ H)=w(\theta_0)e^{-[G+2\text{实部}(H)]\theta_0}e^{-2\text{实部}(H)\arg(1-\overline{z}_0 r)}\ |z_0-r|^{-2\text{虚部}(H)}$。

要验证条件 $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$，必须满足 $G+2\text{实部}(H)=0$，这等价于 $b_1\overline{r}+i(|r|^2+1)=-2\text{实部}(\overline{b}_0 r^2)$。由 (3.25) 可得

$$b_1=-\frac{2\,\mathrm{Re}(b_0\overline{r}^2)+i(|r|^2+1)}{\overline{r}}\quad\text{and}\quad H=-\frac{b_0\overline{r}}{r}.$$

最后，权函数为

$$w(\theta)=\tau(b_0,r)e^{-2\,\mathrm{Re}(b_0\overline{r}/r)\arg(1-\overline{z}r)}|z-r|^{-2\,\mathrm{Im}(b_0\overline{r}/r)},\tag{3.26}$$

其中 $\tau(b_0,r)$ 为常数。此外，该权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中 $A(z)=(z-r)(z-1/\overline{r})$，且 $B(z)=\left(2i+\overline{b}_0 r/\overline{r}\right)z^2-[2\text{实部}(b_0\overline{r}^2)+(|r|^2+1)i]z/\overline{r}+b_0$.

备注 3.9。将 $b_0=-\overline{u}/\overline{r}$ 代入 (3.26)，即可得到已知的半经典权函数 (3.5)，其多项式为 $A(z)=(z-r)(z-1/\overline{r})$，且 $B(z)=(2i-u/\overline{r})z^2+[2\text{实部}(ur)-(|r|^2+1)i]z/\overline{r}-\overline{u}/\overline{r}$.。参数为 $b_0=2(r/\overline{r})i$ 的权函数 (3.26) 所满足的 Pearson 型方程，已以矩泛函的形式出现在 *[5]* 中，且$B(z)=i[-(|r|^2+1)z+2r]/\overline{r}$。权函数 (3.26) 属于 (2, 2) 类。

2. 现在我们考虑 $|r_1|\neq 1$ 和 $r_2\neq 1/\overline{r}_1$。设 $\mathfrak{u}$ 和 $\mathfrak{v}$ 为

$$\mathfrak{u}=(1+|r_1^2|)\,\mathrm{Im}(1/\overline{r}_1)-(1-|r_1|^2)\,\mathrm{Re}(1/\overline{r}_1)b_0,$$
$$\mathfrak{v}=(\overline{r}_1+\overline{r}_2)(r_1r_2+1)-(|r_1|^2+1)\,\mathrm{Re}(r_2+1/\overline{r}_1)-(1-|r_1|^2)\,\mathrm{Im}[\overline{b}_0(r_2-1/\overline{r}_1)].$$

注意，如果 $r_2=-1/r_1$ 且实部$(r_1)=0$，那么 $r_2=1/\overline{r}_1$，这种可能性此前已考虑过。因此，线性方程组 (3.16) 的其他解为

$$b_2=\overline{b}_0 r_1 r_2+2i,$$
$$b_1=\begin{cases}\frac{(r_1+r_2)\mathfrak{v}}{\mathrm{Im}[(r_1+r_2)(\overline{r}_1\overline{r}_2+1)]}, & \text{if } r_2\neq -1/r_1,\\ \frac{(\overline{r}_1-|r_1|^2r_1)\mathfrak{u}+|r_1^2-1|^2i}{\mathrm{Re}(r_1)(1-|r_1|^2)}, & \text{if } \mathrm{Re}(r_1)\neq 0 \text{ and } r_2=-1/r_1,\end{cases}$$
$$b_0=\begin{cases}\frac{\mathrm{Re}(b_0)(r_2-1/\overline{r}_1)^2}{\mathrm{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]}, & \text{if } \mathrm{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]\neq 0,\\ \mathrm{Im}(b_0)i, & \text{if } \mathrm{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]=0.\end{cases}$$

将这些值代入 (2.2)，得到

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)}=\frac{\overline{b}_0r_1r_2z^2+[b_1+(r_1+r_2)i]z+b_0}{z(z-r_1)(z-r_2)},\quad z=e^{i\theta}.$$

注意到

$$\overline{b}_0r_1r_2=\begin{cases}-\frac{\mathrm{Re}(b_0)|r_2-1/\overline{r}_1|^2}{\mathrm{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]}, & \text{if } \mathrm{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]\neq 0,\\ -(ir_1r_2)\,\mathrm{Im}(b_0), & \text{if } \mathrm{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]=0.\end{cases}$$

因此，$\overline{b}_0r_1r_2\in\mathbb{R}$。于是我们可以写成

$$b_1+(r_1+r_2)i=\begin{cases}\frac{(r_1+r_2)\{\mathfrak{v}-\mathrm{Im}[(\overline{r}_1+\overline{r}_2)(r_1r_2+1)]i\}}{\mathrm{Im}[(r_1+r_2)(\overline{r}_1\overline{r}_2+1)]}, & \text{if } r_2\neq -1/r_1,\\ \frac{(r_1^2-1)b_0}{r_1}, & \text{if } r_2=-1/r_1 \text{ and } \mathrm{Re}(r_1)\neq 0.\end{cases}$$

再次使用积分，并令 $z_0=e^{i\theta_0}$，得到

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right)=b_0\overline{r}_1\overline{r}_2(\theta-\theta_0)+iH\left[\ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right)-\ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right)\right],$$

其中 $H=[\overline{b}_0r_1r_2(r_1+r_2)+b_1+(r_1+r_2)i]/(r_1-r_2)=0$. 因此，权函数为 $w(\theta)=w(\theta_0)e^{b_0\overline{r}_1\overline{r}_2(\theta-\theta_0)}$。由条件 $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$，可得$b_0=0$。因此，我们得到勒贝格权函数。

3.3.4 $A(z)=(z-r_1)(z-r_2)$，其中 $|r_1|\neq 1$, $|r_2|\neq 1$ 和 $|r_1r_2|\neq 1$

在这种情况下，线性方程组 (3.16) 的解为

$$b_2=\mathrm{Re}(b_2)+2i,\quad b_1=-(r_1+r_2)[\mathrm{Re}(b_2)+i]\quad\text{and}\quad b_0=r_1r_2\,\mathrm{Re}(b_2),$$

其中 $\mathrm{Re}(b_2)$ 为任意实数。

此解还包括 $r_1=r_2=0$ 或 $r_1=0$ 和 $r_2\neq 0$ 满足 $|r_2|\neq 1$的情形，即当 $A(z)=z^2$ 或 $A(z)=z(z-r)$，且 $|r|\neq 1$时。表示式 (2.2) 变为 $(idw(\theta)/dz)/w(\theta)=\mathrm{Re}(b_2)/z$. 再次假设条件 $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$ 成立，我们得到勒贝格权函数。

4 应用

本节将针对单位圆上的半经典权函数的例子，给出单位圆上的多重正交多项式的结构关系（使用定理 2.1），以及与之相关的 Verblunsky 系数的非线性差分方程（使用定理 2.4）。

4.1 例 1

H这里我们考虑式 (3.6) 中的半经典权函数，研究于 [16], ，即

$$w(\theta)=\tau(b)e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda},\tag{4.1}$$

其中 $\eta\in\mathbb{R}$、$\lambda>-1/2$、$b=\lambda+i\eta$ 和 $\tau(b)=e^{\pi\eta}2^{b+\overline{b}}|\Gamma(b+1)|^2/[2\pi\Gamma(b+\overline{b}+1)]$.

首一正交多项式 $\Phi_n(z)$ 可用超几何函数表示为

$$\Phi_n(z)=\frac{(b+\overline{b}+1)_n}{(b+1)_n}{}_2F_1(-n,b+1,b+\overline{b}+1;1-z),\quad n\geqslant 0.$$

参见 [16]。Verblunsky 系数为

$$\alpha_n = -\frac{(b)_{n+1}}{(\overline{b}+1)_{n+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{4.2}$$

在第 3 节中，我们确定了 Pearson 型方程 (1.6) 的多项式 A 和 B，其中 $A(1) = 0$，参见注释 3.3、3.4、3.5、3.7 和 3.8。可能的情况如下：

1. 当 $A(z)$ 的次数为 1 时，$A(z) = z - 1$ 且 $B(z) = i[(b+1)z + \overline{b}]$. 因此，权函数 (4.1) 属于类 (1, 1)。

2. 当 $A(z)$ 的次数为 2 时，$A(z) = (z-1)(z-r)$，$r \in \mathbb{C}$ 且 $B(z) = i[(b+2)z^2 + [\overline{b} - 1 - r(b+1)]z - r\overline{b}]$. 对于 r 的特殊取值：

i) 若 $r = -1$，则 $A(z) = z^2 - 1$ 且 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (b+\overline{b})z + \overline{b}]$.ii) 若 $r = 1$，则 $A(z) = (z-1)^2$ 且 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\overline{b} - b - 2)z - \overline{b}]$.iii) 若 $r = 0$，则 $A(z) = z(z-1)$ 且 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\overline{b} - 1)z]$.

在这里我们观察到，权函数 (4.1) 也属于类 (2, 2)，这与预期一致。

我们注意到，这个半经典权函数满足若干 Pearson 型方程。在接下来的小节中，我们将给出对应于多项式 A 的不同选择时，首一正交多项式Φ_n 的结构关系，以及 Verblunsky 系数 α_n 满足的非线性差分方程。

4.1.1 结构关系

利用定理 2.1 和推论 2.3，并对多项式 A 和 B 进行不同选择，可以得到单位圆上的多重正交多项式的若干结构关系。

取 $A(z) = z - 1$，则关于 $\mathfrak{s}_{n,n}$ 的方程 (2.8) 和 (2.9) 以及 (1.3) 给出

$$\gamma_n = \overline{b} - (b + n - 1)\overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}. \tag{4.3}$$

根据定理 2.1 并利用关系式 (4.3)，我们在下一个结果中给出与权函数 (4.1) 相关的单位圆上的多重正交多项式的若干结构关系。

定理 4.1. 与半经典权函数 (4.1) 相关的单位圆上的多重正交多项式满足以下结构关系，对于 $n \geqslant 2$。

i) 对于 $A(z) = z - 1$,

$$(z-1)\Phi_n'(z) = -(\overline{b} + n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) + n\Phi_n(z). \tag{4.4}$$

ii) 对于 $A(z) = (z-1)(z-r)$, $r \in \mathbb{C}$,

$$(z-1)(z-r)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - [\overline{b} + n(r+1)]\Phi_n(z) + r(\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z),$$

• 对于 $A(z) = z(z-1)$,

$$z(z-1)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - (\overline{b} + n)\Phi_n(z) - (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z). \tag{4.5}$$

• 对于 $A(z) = (z-1)^2$,

$$(z-1)^2\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - (\overline{b} + 2n)\Phi_n(z) + (\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z), \tag{4.6}$$

• 对于 $A(z) = z^2 - 1$,

$$(z^2-1)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - \overline{b}\,\Phi_n(z) - (\overline{b} + n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z)。 \tag{4.7}$$

现在，我们考察 (4.3) 中 γ_n 的显式值。对于 $n+1$，利用 (1.3) 可得 $\overline{b} = \gamma_n + (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}$. 另一方面，由 (4.3) 可得 $\overline{b} = \gamma_n + (b+n-1)\overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}$.因此，

$$\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} = \frac{(\overline{b}+n-1)}{(\overline{b}+n+1)}\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_{n-2}. \tag{4.8}$$

因此，我们可以得到以下结果。

命题 4.2。系数 α_n 和 γ_n 满足

$$\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} = \frac{|b|^2}{(\overline{b}+n)(\overline{b}+n+1)} \quad and \quad \gamma_n = \frac{n\overline{b}}{b+n}. \tag{4.9}$$

证明。由于 $\alpha_0 = -b/(\overline{b}+1)$ 和 $\alpha_{-1} = -1$，利用 (4.8) 可得 (4.9) 中的第一个关系式。

由于 $\gamma_n + (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} = \overline{b}.$，(4.9) 中的第二个方程成立 □

4.1.2 复 Verblunsky 系数的非线性差分方程

利用定理 2.4，我们找到了与权函数 (4.1) 相关的复 Verblunsky 系数所满足的非线性差分方程。

定理 4.3。Verblunsky 系数满足以下非线性差分方程

$$(b+n+1)\alpha_n = [n+2+\overline{b}-(b+n+1)\overline{\alpha}_{n+1}\alpha_n]\frac{\alpha_{n+1}}{1-|\alpha_{n+1}|^2}, \quad n \geqslant 0, \tag{4.10}$$

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n = (b+n)\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \tag{4.11}$$

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n + (b+n-1)\alpha_{n-2} = \frac{2[\mathrm{Re}(\gamma_n)+n]\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.12}$$

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n - (b+n-1)\alpha_{n-2} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}(\gamma_n)\,\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.13}$$

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n + (b+n-1)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = \left(\frac{n\overline{b}}{b+n}+b+2n\right)\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.14}$$

and

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n - (b+n-1)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = -\left(\frac{n\overline{b}}{b+n}-b\right)\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{4.15}$$

证明。

- 当 $A(z) = z-1$ 和 $B(z) = i[(b+1)z+\overline{b}]$ 时，方程 (2.12) 给出

$$(b+n-1)\alpha_{n-2} = (n+\gamma_n)\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.16}$$

并利用 (4.3) 可得到 (4.10)。

- 对于 $A(z) = z(z-1)$ 以及 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\overline{b}-1)z]$，方程 (2.12) 为

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n = (n+\overline{\gamma}_n)\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2} \quad n \geqslant 1, \tag{4.17}$$

且关系式 (2.13) 给出 (4.11)。

- 如果 $A(z) = (z-1)^2$ 以及 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\overline{b}-b-2)z - \overline{b}]$，则 (2.12) 得出 (4.12)。

关系式 (2.13) 变为

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n + (b+n-1)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = (\gamma_n+b+2n)\,\alpha_{n-1}. \tag{4.18}$$

U利用 (4.9) 中的第二个方程，方程 (4.18) 可写成 (4.14)。

• 当 $A(z) = z^2 - 1$ 和 $B(z) = i[(b+2)z^2 + (b+\overline{b})z + \overline{b}]$ 时，(2.12) 得出 (4.13)。

由关系式 (2.13) 可得

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n - (b+n-1)\alpha_{n-2}(1-|\alpha_{n-1}|^2) = -[2\gamma_n - \overline{b} - b + (b+n+\overline{1})\alpha_n\alpha_{n-1}]\alpha_{n-1}$$

利用 (1.3) 和 (4.3)，上述方程可推出

$$(\overline{b}+n+1)\alpha_n - (b+n-1)\alpha_{n-2}(1-|\alpha_{n-1}|^2) = -(\gamma_n - b)\alpha_{n-1}, \tag{4.19}$$

因此，由 (4.9) 可得 (4.15)。

备注：通过将 (4.18) 与 (4.19) 相加，可以得到 (4.11)。通过用 (4.16) 减去 (4.17)，可以得到 (4.13)。 □

备注 4.4。利用非线性差分方程 (4.11)，我们可以写出

$$\alpha_n = \frac{b+n}{\overline{b}+n+1}\frac{b+n-1}{\overline{b}+n}\cdots\frac{b}{\overline{b}+1}\alpha_{-1}, \quad n \geqslant 0,$$

由于 $\alpha_{-1} = -1$，我们得到 Verblunsky 系数 (4.2) 的显式公式。

此外，利用另一种方法（见 [19]），我们找到了与权函数 (4.1) 相关的复 Verblunsky 系数的另一个非线性差分方程。

定理 4.5。 Verblunsky 系数满足以下非线性差分方程 n

$$\overline{\alpha}_n(\alpha_{n-1} + \alpha_n) = (\overline{b}+n)(|\alpha_{n-1}|^2 - |\alpha_n|^2), \quad n \geqslant 1. \tag{4.20}$$

证明。由关系式 (1.1) 可得

$$\Phi'_{n+1}(z) = z\Phi'_n(z) + \Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n\Phi^{*\prime}_n(z)$$

使用结构关系 (4.4),

$$\frac{(n+1)\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n+1,n}\Phi_n(z)}{z-1} = \frac{z\left[n\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z)\right]}{z-1} + \frac{(z-1)\left[\Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n\Phi^{*\prime}_n(z)\right]}{z-1},$$

其中 $\mathfrak{s}_{n+1,\ n} = -(\overline{b}+n+1)[1-|\alpha_n|^2]$ 以及 $\mathfrak{s}_{n,\ n-1} = -(\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]$。

再次使用关系 (1.1)，得到

$$\begin{aligned}(n+1)\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n+1,n}\Phi_n(z) =& (n+1)[\Phi_{n+1}(z) + \overline{\alpha}_n\Phi^*_n(z)] + \mathfrak{s}_{n,n-1}[\Phi_n(z) + \overline{\alpha}_{n-1}\Phi^*_{n-1}(z)] \\ & - \overline{\alpha}_n z\Phi^{*\prime}_n(z) - \Phi_n(z) + \overline{\alpha}_n\Phi^{*\prime}_n(z).\end{aligned}$$

由于 $\Phi^*_n(z) = -\alpha_{n-1}z^n + \cdots$ 以及 $z\Phi^{*\prime}_n(z) = -\alpha_{n-1}nz^n + \cdots$，因此有

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{n+1,n}\Phi_n(z) =& (n+1)\overline{\alpha}_n\left[-\alpha_{n-1}z^n + \cdots\right] + \mathfrak{s}_{n,n-1}\left[\Phi_n(z) + \overline{\alpha}_{n-1}\Phi^*_{n-1}(z)\right] \\ & + \left[\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}nz^n + \cdots\right] - \Phi_n(z) + \overline{\alpha}_n\Phi^{*\prime}_n(z).\end{aligned}$$

比较 z^n 的系数，可得 $\mathfrak{s}_{n+1,\ n} = -(n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \mathfrak{s}_{n,\ n-1} + \overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}n - 1$以及 $\mathfrak{s}_{n,\ n-1} - \mathfrak{s}_{n+1,\ n} = \overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} + 1$. 现在，可以写成

$$\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} = (\overline{b}+n+1)(1-|\alpha_n|^2) - (\overline{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2) - 1$$

最后得到（4.20）。 □

4.1.3 特殊情形

这里我们考虑 考虑半经典权函数（3.22），即对于 $\eta \in \mathbb{R}$ 和 $\beta > -1/2$ ，

$$w(\theta) = \tau(\beta, \eta)\, e^{-\theta\,\eta}\, [\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

该权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中包含若干多项式 A和 B。记 $c = \beta + i\eta$，我们可以计算这些多项式：

i) When $A(z)$ has degree 1, $A(z) = z + 1$ and $B(z) = i[(c+1)z - \overline{c}]$.

ii) 当 $A(z)$ 的次数为 2 时， $A(z) = (z+1)(z-r)$ 且 $B(z) = i[(c+2)z^2 - (\overline{c} - 1 + r(c+1))z + r\overline{c}]$.

同样，利用定理2.1和2.4，可以为单位圆上的多重正交多项式推导出若干结构关系，并得到关于 Verblunsky 系数的非线性差分方程。此外，我们发现相关的 Verblunsky 系数和单位圆上的多重正交多项式为

$$\alpha_n = (-1)^n \frac{(c)_{n+1}}{(\overline{c}+1)_{n+1}} \quad \text{and} \quad \Phi_n(z) = (-1)^n \frac{(c+\overline{c}+1)_n}{(c+1)_n} {}_2F_1(-n, c+1, c+\overline{c}+1; 1+z).$$

4.2 例2

这里我们考虑半经典权函数 (3.4)

$$w(\theta) = \tau(u) e^{2|u|\sin(\theta + \arg u)},$$

其中 $u \in \mathbb{C}$ ，常数 $\tau(u)$ 满足 $\mu_0 = 1.$ 。我们注意到，若 $u = 0$，则 $w(\theta) = 1/(2\pi)$，即勒贝格测度。

考虑 $u \neq 0$，如第3.2.1小节所述，见注 3.1，该权函数满足 Pearson 型方程 (1.6)，其中 $A(z) = z$ ，且 $B(z) = uz^2 + iz + \overline{u}$.

由定理 2.1，单位圆上的多重正交多项式的结构关系为

$$z\Phi_n'(z) = i\overline{u}(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}(z) + (n + iu\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})\Phi_n(z) + iu\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z).$$

利用 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 的定义 (2.9)，我们还可得 $\mathfrak{s}_{n,\ n} = -i\overline{u}\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} + n.$ 。因此，Verblunsky 系数满足

$$u\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} = -\overline{u}\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

这意味着 $\mathrm{Re}(u\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}) = 0$。由于 $u \neq 0$，我们得到

$$\frac{\alpha_n}{\overline{\alpha}_n} = \frac{\alpha_1}{\overline{\alpha}_1}\left(-\frac{u}{\overline{u}}\right)^{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

此外，由 (2.12) 可知，Verblunsky 系数还满足

$$\overline{iu}\alpha_n + iu\alpha_{n-2} = \frac{n\,\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geq 2. \tag{4.21}$$

与 (1.9) 比较可知，非线性差分方程 (4.21) 可视为 Painlev´e 离散方程 $\mathrm{dP_{II}}$ 的复数推广。

最后，Verblunsky 系数所满足的非线性差分方程 (2.13) 变为

$$\overline{iu}\,\alpha_n + iu\,\alpha_{n-2}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = (n + iu\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})\alpha_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

4.3 例3

这里我们考虑半经典权函数 (3.5)，即对于 u、$r \in \mathbb{C}$、$|r| \neq 1$、$r \neq 0$，常数 $\tau(u,\ r)$ 满足 $\mu_0 = 1$,

$$w(\theta) = \tau(u, r)\, e^{2\,\mathrm{Re}(u/\overline{r})\,\arg(1-re^{-i\theta})} |e^{i\theta} - r|^{-2\,\mathrm{Im}(u/\overline{r})}.$$

根据第 3.3.3 小节的第一个结果和备注 3.9，我们知道该权函数满足 Pearson 型方程，其中 $A(z) = (z-r)(z-1/\overline{r})$ 且 $B(z) = (2i - u/\overline{r})\, z^2 + [2$实部$(ur) - (|r|^2+1)i]z/\overline{r} - \overline{u}/\overline{r}$.

因此，由（2.5）可知，单位圆上的多重正交多项式满足结构关系

$$(z-r)\,(z-1/\overline{r})\,\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) - \left(1 + \frac{u}{\overline{r}}i\right)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z),$$

with

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = \frac{nr - \overline{u}i}{\overline{r}}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) \text{ and } \mathfrak{s}_{n,n} = -\left[n\left(\frac{|r|^2+1}{\overline{r}}\right) + \gamma_n + \left(n+1+\frac{u}{\overline{r}}i\right)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}\right].$$

此外，由（2.9）

$$\mathfrak{s}_{n,n} = -\left[n\left(\frac{|r|^2+1}{\overline{r}}\right) + \frac{r}{\overline{r}}\overline{\gamma}_n + \left((n+1)\frac{r}{\overline{r}} - \frac{\overline{u}}{\overline{r}}i\right)\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}\right] + \frac{2\,\mathrm{Re}(ur)}{\overline{r}}i.$$

比较表示系数 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 的两种形式，我们得出

$$\mathrm{Im}(\overline{r}\gamma_n + [(n+1)\overline{r} + iu]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}) = -\,\mathrm{Re}(ur).$$

根据 Th 根据定理 2.4，Verblunsky 系数的差分方程 (2.12) 变为 e

$$[(n+1)r - \overline{u}i]\alpha_n + [(n-1)\overline{r} + ui]\alpha_{n-2} = \left[n(|r|^2+1) + 2\,\mathrm{Re}(r\overline{\gamma}_n)\right]\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2.$$

Verblunsky 系数的差分方程 (2.13) 为

$$\begin{aligned}&[(n+1)r - \overline{u}i]\alpha_n + [(n-1)\overline{r} + ui]\alpha_{n-2}(1-|\alpha_{n-1}|^2)\\ &\qquad = \{n(|r|^2+1) + 2\,\mathrm{Re}(ur)i + [(n+1)\overline{r} + ui]\overline{\alpha_n}\alpha_{n-1} + 2\overline{r}\gamma_n\}\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2.\end{aligned}$$

4.4 例4

这里我们考虑半经典权函数 (3.21),

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta, \eta)\, e^{-\theta\,\eta}\,[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

其中 $\tau(\lambda,\beta,\eta)$ 是常数，$\eta \in \mathbb{R}$、$\lambda > -1/2$ 和 $\beta > -1/2$，满足 Pearson 型方程 (1.7)，其中 $A(z) = z^2 - 1$ 和 $B(z) = i[(\lambda+\beta+i\eta+2)\, z^2 + 2(\lambda-\beta)z + (\lambda+\beta-i\eta)]$,，参见注 3.5。

利用定理 2.1，我们得到 MOPUC 的以下结构关系

$$(z^2-1)\Phi_n'(z) = \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) - (d+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z),$$

其中 $d = \lambda + \beta + i\eta$,

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = -(\overline{d} + n)(1 - |\alpha_{n-1}|^2), \quad \text{and} \quad \mathfrak{s}_{n,n} = -[(d+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \gamma_n].$$

由 (2.9) 可知，系数 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 也可以写成

$$\mathfrak{s}_{n,n} = \overline{\gamma}_n + (\overline{d} + n + 1)\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} - 2(\lambda - \beta).$$

比较表示系数 $\mathfrak{s}_{n,\ n}$ 的两种形式，可以看出 $\mathrm{Re}(\gamma_n + (d + n + 1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}) = \lambda - \beta.$

利用定理 2.4，我们可以为复 Verblunsky 系数给出一个非线性差分方程。由（2.12）和（2.13）分别得到，对于 $n \geqslant 2$,

$$(\overline{d} + n + 1)\alpha_n - (d + n - 1)\alpha_{n-2} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}(\gamma_n)\,\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2},$$

以及 $(\overline{d}+n+1)\alpha_n - (d+n-1)\alpha_{n-2}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = -\{2\gamma_n + (d+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} - 2(\lambda-\beta)\}\alpha_{n-\ 1}.$

4.5 例 5：实 Verblunsky 系数

4.5.1 单位圆上的 Jacobi 多项式

在 (3.21) 或例4 中取 $\eta = 0$，我们有

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta)[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \lambda, \beta > -1/2, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

在研究单位圆上的雅可比多项式时，[10] 研究了这个权函数。Verblunsky 系数为实数，并且由下式给出

$$\alpha_n = -\Phi_{n+1}(0) = -\frac{\lambda + (-1)^{n+1}\beta}{n + 1 + \lambda + \beta}.$$

注意到，由 (1.3) 给出的系数 γ_n 也是实数。

由于 $\eta = 0$，多项式 $B(z)$ 变为 $B(z) = i[(\lambda + \beta + 2)\,z^2 + 2(\lambda - \beta)z + (\lambda + \beta)]$.单位圆上的多重正交多项式的结构关系为

$$(z^2 - 1)\Phi_n'(z) = \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) - (\lambda + \beta + 1)\alpha_n\Phi_n^*(z),$$

其中

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = -(\lambda + \beta + n)(1 - \alpha_{n-1}^2) \quad \text{and} \quad \mathfrak{s}_{n,n} = -[(\lambda + \beta + n + 1)\alpha_n\alpha_{n-1} + \gamma_n],$$

此外 $\mathfrak{s}_{n,\ n} = \gamma_n + (\lambda + \beta + n + 1)\alpha_n\alpha_{n-1} - 2(\lambda - \beta)$。

最后，利用定理 4.3，我们得到关于 Verblunsky 系数的非线性差分方程:

$$(\lambda+\beta+n+1)\alpha_n - (\lambda+\beta+n-1)\alpha_{n-2}(1 - \alpha_{n-1}^2) = -[2\gamma_n + (\lambda+\beta+n+1)\alpha_n\alpha_{n-1} - 2(\lambda-\beta)]\alpha_{n-1},$$

and

$$(\lambda + \beta + n + 1)\alpha_n = (\lambda + \beta + n - 1)\alpha_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

与后一个方程类似的差分方程已出现在 [10] 中。

4.5.2 圆Jacobi多项式

在（3.21）或例4中选取 $\eta = 0$ 和 $\beta = 0$，我们得到 w（θ）$= \tau$（λ）[正弦函数^2（$\theta/2$）$]^{\lambda}$, $\lambda > -1/2$, $\theta \in [0, 2\pi]$. 由（4.11）可知，Verblunsky 系数满足

$$\alpha_n = \frac{n + \lambda}{n + 1 + \lambda}\alpha_{n-1} \quad \text{and} \quad \alpha_n = -\frac{\lambda}{n + 1 + \lambda}.$$

注意，由定理 4.3 可得到关于 Verblunsky 系数的其他不同的非线性差分方程。

众所周知, 首一圆 Jacobi 多项式满足结构关系 n

$$(z-1)\Phi_n'(z) = n\Phi_n(z) - \frac{n(n+2\lambda)}{n+\lambda}\Phi_{n-1}(z), \tag{4.22}$$

参见 [7], [8], 和 [10]。利用定理 4.1，我们还可得到 (4.22)。此外，由 (4.5)、(4.6) 和 (4.7) 分别可得单位圆上的多重正交多项式的其他结构关系

$$z(z-1)\Phi_n'(z) = -(\lambda+n)\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{n+1+\lambda}\Phi_n^*(z),$$

$$(z-1)^2\Phi_n'(z) = \frac{n(n+2\lambda)}{n+\lambda}\Phi_{n-1}(z) - (\lambda+2n)\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{n+1+\lambda}\Phi_n^*(z)$$

and

$$(z^2-1)\Phi_n'(z) = -\frac{n(n+2\lambda)}{n+\lambda}\Phi_{n-1}(z) - \lambda\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{n+1+\lambda}\Phi_n^*(z).$$

4.5.3 修正贝塞尔多项式

若 $u = it/2$ 且 $t > 0$，参见注 3.2，则 $\sin(\theta +) \arg u = \sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$,

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{t\cos(\theta)} \quad \text{and} \quad \nu(z) = \frac{1}{2\pi}e^{t(z+z^{-1})/2}.$$

此时，Verblunsky 系数均为实数。相关权函数 ν 满足$d\nu(z)$ $= \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\nu(z)$，且单位圆上的多重正交多项式满足引言中提到的结构关系 (1.8)，参见 [19]。

根据注 3.2，权函数 w 满足 Pearson 型方程 (1.7)，其中$A(z) = z$ 且 $B(z) = i\left[(t/2)\right.$ $\left.z^2 + z - t/2\right]$。由推论 2.3 和 $\kappa_{n-1}^2/\kappa_n^2 = 1 - |\alpha_{n-1}|^2$，我们得到如下结构关系

$$z\Phi_n'(z) = n\Phi_n(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\left[\Phi_{n-1}(z) - \alpha_n\Phi_{n-1}^*(z)\right]. \tag{4.23}$$

将 $z = 0$ 代入 (4.23)，可得

$$\frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\alpha_n = -n\alpha_{n-1} - \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\alpha_{n-2}. \tag{4.24}$$

将 (4.24)、(1.1) 和 $\Phi_{n-1}^*(z) = \Phi_{n-2}^*(z) - \alpha_{n-2}z\Phi_{n-2}(z)$ 代入方程 (4.23)，经过一些整理后得到 (1.8)。因此，方程 (4.23) 等价于结构关系 (1.8)。

致谢

作者感谢匿名审稿人提出的意见和建议，这些意见和建议有助于改进本文。

本研究是作者 K.S. Rampazzi 在巴西圣保罗州圣若泽杜里奥普雷图 UNESP 攻读博士论文的一部分，获得了巴西 CAPES 的资助。

作者 C.F. Bracciali 的研究得到来自巴西圣保罗州 FAPESP 的资助项目 2022/09575-5 的支持。

参考文献

[1] M. Alfaro, F. Marcell´an，单位圆上正交多项式的近期趋势，载于《正交多项式及其应用》，埃里切 1990 会议录，C. Brezinski、L. Gori 和 A. Ronveaux 编，见第 3–14 页，IMACS《计算与应用数学年刊》，第 9 卷，Baltzer，巴塞尔，1991 年。[2] S. Bonan, D. Lubinsky, P. Nevai，正交多项式及其导数 II，《SIAM 数学分析杂志》，18（1987）1163–1176。[3] A. Branquinho，关于半经典正交多项式的一则注记，《比利时数学学会通报》，3（1996）1–12。[4] A. Branquinho, M. N. Rebocho，单位圆上正交多项式的结构关系，《线性代数及其应用》，436（2012）4296–4310。[5] A. Cachafeiro, C. Su´arez，关于对应于类 (2,2) 的单位圆上半经典多项式，《计算与应用数学杂志》，85（1997）123–144。[6] G. Freud，关于正交多项式递推公式中的系数，《爱尔兰皇家科学院学报》A辑，76（1976），1–6。[7] M. E. H. Ismail，《单变量经典与量子正交多项式》，《数学及其应用百科全书》第 98 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2005 年。[8] M. E. H. Ismail, N. S. Witte，单位圆上正交多项式的判别式与函数方程，《逼近论杂志》，110（2001）200–228。[9] A. P. Magnus，关于 Freud 指数权的方程，《逼近论杂志》，46（1986）64–99。[10]A. P. Magnus，MAPA 3072A 逼近论专题：单位圆上的半经典正交多项式，2013 年 3 月。可访问 http://perso.uclouvain.be/alphonse.magnus。[11] F. Marcell´an, A. Sri Ranga，单位圆上的 Sobolev正交多项式与第二类相干测度对，《数学研究》，71（2017）1127–1149。[12] P. Maroni，关于若干作为多项式向量空间上线性形式的分布空间，（法文），载于《正交多项式及其应用》（Bar-le-Duc，1984），第 184–194 页，《数学讲义》，1171，Springer，柏林，1985 年。´P. Maroni，正交多项式的代数理论。半经典正交多项式的应用，载于《正交多项式及其应用》，埃里切 1990 会议录，C. Brezinski、L. Gori 和 A. Ronveaux 编，见第 95–130 页，IMACS《计算与应用数学年刊》，第 9 卷，Baltzer，巴塞尔，1991 年。[14] V. Periwal, D. Shevitz，作为精确可解弦理论的酉矩阵模型，《物理评论快报》，64（1990）1326–1329。[15] B. Simon，《单位圆上的正交多项式》第一部分：经典理论，《美国数学学会专题出版物》，第 54 卷，第 1 部分，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005 年。[16] A. Sri Ranga，由超几何函数得到的 Szeg˝o 多项式，《美国数学学会学报》，138（2010）4259–4270。

[17] C. Su´árez，关于 (2,2) 类半经典正交多项式，《计算与应用数学杂志》，131（2001）457–472。[18] C. Su´árez，单位圆上属于 (p,p) 类的一族半经典正交多项式，《积分变换与特殊函数》，19（2008）333–349。[19] W. Van Assche，正交多项式与 Painlev´é 方程，澳大利亚数学学会讲义系列，27，剑桥大学出版社，剑桥，2018。