arXiv:2303.16239v1 [math.AG] 28 Mar 2023

$\bar{\partial}\partial$-引理与 O. Fujino 的一个猜想

曹俊彦，Mihai Paun

1. Introduction

设 (X,ω_X) 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形，(F,h_F) 是定义在 X 上并赋有厄米度量 h_F 的全纯线丛。若曲率形式 $i\Theta(F,h_F)\geqslant 0$ 是半正的，则对于每个取值于 F 的 (n,q)-形式 v，只要满足

$$\bar{\partial}v=0,\qquad \int_X\langle[i\Theta(F,h_F),\Lambda_{\omega_X}]^{-1}v,v\rangle dV<\infty$$

且其 L^2 范数有限，就可以求解方程

$$\bar{\partial}u=v, \tag{1.0.1}$$

其中 u 是一个取值于 F 的 $(n,q-1)$-形式，且其 L^2–范数有限。此外，(1.0.1) 的解 u 若与 $\mathrm{Ker}(\bar{\partial})$ 正交，则满足非常精确的 L^2 估计，参见 [6]。

接下来考虑 X 上的简单正规交叉除子 E，以及沿 E 具有对数极点的形式空间。霍奇理论中 [8], [10] 的结果表明，对于任意对数 (n,q)- 形式 v

$$\bar{\partial}v=0,\qquad v=\partial w$$

（其中，第一个等式在 E 的支集与 w 的补集上逐点成立，且 w 是一个 $(n,q-1)$ 对数形式），存在一个沿 E 具有对数极点的形式 u，使得

$$\bar{\partial}u=v, \tag{1.0.2}$$

¯在 $X\setminus E$ 上成立。这是霍奇理论中熟知的 $\partial\bar{\partial}$ 引理的对数版本。

我们指出，可以尝试将 (1.0.2) 作为 L^2-理论的推论得到，也就是说，将 v 解释为一个取值于 F 的 (n,q)-形式：$=\mathcal{O}(E)$，即对应于 E 的线丛。然而，我们手头唯一自然且具有半正曲率的度量 h_F 在 E 上是奇异的，而我们上文提到的 L^2 条件意味着要求 v 在 E 上消失——总之，这样得到的结果会弱得多。

在本文中，我们旨在证明以下一般消失定理。粗略地说，该定理分别在霍奇理论与 L^2-理论之间进行插值。

定理 1.1. 设 X 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形，设 E 是 X 上的一个简单正规交叉除子，s_E 是 E 的典范截面。设 (L,h_L) 是 X 上的一个全纯线丛，满足

$$i\Theta_{h_L}(L)=\sum q_i[Y_i]+\theta_L,$$

¯其中 $q_i\in]0,\ 1[\cap\mathbb{Q}$, $E+\sum Y_i$ 是简单正规交叉的，且形式 θ_L 光滑、半正。设 λ 是一个取值于 $L+E$ 的 ∂- 闭光滑 (n,q)- 形式。若存在 β_1 和 β_2，分别为两个取值于 L、沿 $E+\sum Y_i$ 具有对数极点的 $(n-1,q)$-形式和 $(n-1,q-1)$-形式，使得

$$\frac{\lambda}{s_E}=D'_{h_L}\beta_1+\theta_L\wedge\beta_2\qquad on\ X\setminus(E+\sum Y_i), \tag{1.1.1}$$

¯则形式 λ 是 ∂-恰当的，即类 $[\lambda]=0\in H^q(X,K_X+L+E)$。

作为本文所发展的方法（尤其是定理 1.1）的推论，并结合 [4]，我们得到以下由 O. Fujino 很早以前提出的单射性陈述（参见 [12]）。

定理 1.2。 [12, 猜想 2。21] 设 X 是一个紧致 K¨ahler 流形，且 $E=\sum E_i$ 是 X 上的一个简单正规交叉除子。我们考虑 X 上的一个半正线丛 F，以及 mF 的一个全纯截面 s （其中 $m\in\mathbb{N}$）。此外，假设 s 的零点集不包含对数典范对（ X， E ）的任何对数典范中心。那么，由与 s 张量积所诱导的乘法映射

$$s\otimes:\qquad H^q(X,K_X+E+F)\to H^q(X,K_X+E+(m+1)F) \tag{1.2.1}$$

对每个 $q\in\mathbb{N}$ 都是单射。

关于上述结果的一些特殊情形，请参阅 [16, 5]

鉴于 [15], 中得到的结果，将我们的方法推广到奇异度量 h_F （具有任意奇点）的情形是很自然的。更确切地说，我们提出以下问题。

问题 1.3. 设 $E=\sum E_i$ 是紧致 K¨ahler 流形 X 上的简单正规交叉除子，并设 F 是 X 上的全纯线丛，赋予一个可能是奇异的度量 h_F，使得 $i\Theta_{h_F}(F)\geqslant 0$。我们假设对于每个 $\varepsilon>0$，都有 $\mathcal{I}(h_F)=\mathcal{I}(h_F\cdot e^{-(1-\varepsilon)\log|s_E|^2})$。

设 s 是 mF 的一个（全纯）截面（对某个 $m\in\mathbb{N}$），满足逐点条件 $|s|^m_{h^m_F}<+\infty$，且 s 的零点集不包含对数典范对 (X,E) 的任何对数典范中心。则由与 s 作张量积所诱导的乘法映射

$$s\otimes:\qquad H^q\big(X,K_X\otimes E\otimes F\otimes\mathcal{I}(h)\big)\to H^q\big(X,K_X\otimes E\otimes(m+1)F\otimes\mathcal{I}(h^{m+1})\big) \tag{1.3.1}$$

对每个 $q\in\mathbb{N}$ 都是单射。

¯定理 1.1 可视为熟知的 $\partial\partial$ 引理的一种推广。因此，霍奇理论在其证明中发挥关键作用也就不足为奇了。这里所需的霍奇分解定理的相应版本，分别针对具有 Poincar´e 奇点或锥形奇点的度量，将在第 2 节中建立。关于风格相似的陈述，可参见 [17] 及其中的参考文献。

本文引入并研究取值于奇异厄米丛 (L,h_L) 的 (p,q)-流的概念，参见第 3 节中的定义 2.30。在定理 1.1 的假设下，我们不得不在 X 上使用具有锥形奇点的 K¨ahler 度量；此外，我们在此需要处理的流的类型，其模型由 (1.1.1) 的右端给出。术语由此而来。

此类流的格林算子 T 通过对偶性定义

$$\int_X\mathcal{G}(T)\wedge\overline{\star\phi}:=\int_X T\wedge\overline{\star\mathcal{G}(\phi)}, \tag{1.3.2}$$

对于任意 L值的 (p,q)-形式 ϕ，其在锥意义下光滑——关于这一重要概念以及 $\mathcal{G}(\phi)$的定义，我们 refer to Sections 2 and 3。

作为第 hodge 节中我们版本的霍奇分解的推论，我们得到流 T 的一个分解，该分解与微分形式的情形相平行

$$T=\mathcal{H}(T)+\Delta''\big(\mathcal{G}(T)\big). \tag{1.3.3}$$

其中 $\mathcal{H}(T)$ 是将 T 投影到 (p,q) 型的调和 L值形式空间上的投影。我们将这一等式称为流 T 的小平–德拉姆分解，类比于 [13] 中讨论的非扭曲情形。结合流 $\mathcal{G}(T)$ 的性质以及来自 [14], 的一个重要引理，这一分解是证明定理 1.1 的关键技巧，同时其本身也颇具意义。

致谢。在本文准备期间的一段时间里，我们有幸得到弗赖堡高等研究院所提供的热情接待和优良工作条件。在 FRIAS，我们有机会与许多访问学者相识；其中，我们与 S. Kebekus 和 C. Schnell 进行的数学交流尤为富有成果。感谢 A. H¨oring、J. Lott、R. Mazzeo 和 Y. Rubinstein 富有价值的讨论。JC 感谢法国大学研究院以及法国国家研究署 JCJC 项目 Karmapolis（ANR-21-CE40-0010）为我们提供优良的工作条件。最后，我们的工作是在 MP 访问复几何中心期间完成的，该中心位于韩国大田。衷心感谢 J.-M. Hwang 的邀请，以及该研究所充满活力的工作氛围！

本文组织如下。

Contents

1. 引言 1 2. L^2 霍奇理论的一些结果 3 2.1. 具有 Poincar´e 奇点的度量的霍奇分解 3 2.2. 具有锥形奇点的度量的霍奇分解 I 10 2.3. 具有锥形奇点的度量的霍奇分解 II 14 3. 锥形流的 de Rham-Kodaira 分解 22 3.1. 某些流的 Green核的正则性 23 4. 定理 1.1 和定理 1.2 的证明 26 4.1. 一般消失定理 26 4.2. 应用：一个单射定理 31 5. 附录 34 参考文献 39

2. A few results from L^2 Hodge theory

2.1. 具有庞加莱奇点的度量的霍奇分解。设 X 是一个 n维紧致凯勒流形，且(L, h_L)是一个赋有（奇异）度量$h_L = e^{-\varphi_L}$的线丛。本节术语如下。

(a) 若度量 h_L 具有对数极点，则称其局部权函数可写成如下形式

$$\varphi_L \equiv \sum a_i \log |f_i|^2$$

模去一个光滑函数，其中 a_i 是有理数， f_i 是全纯函数。

(b) 若度量 h_L 具有对数极点，则我们始终记作

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum a_i [Y_i] + \theta_L$$

其中 θ_L 是一个光滑形式。

我们考虑一个修改 $\pi : X \to X$ of X，使得 $\varphi_L \circ \pi$ 的奇点支集是一个简单正规交叉除子 E。照常，我们可以构造 π，使其在 $X \setminus E$上的限制是一个双全纯映射。记

$$\varphi_L \circ \pi|_\Omega \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} e_\alpha \log |z_\alpha|^2 \tag{2.0.1}$$

除去一个光滑函数。这里 $\Omega \subset X$ 是一个坐标子集，而 $(z_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ 是坐标，使得 $E \cap \Omega = (z_1 \dots z_p = 0)$。

设 $\widehat{\omega}_E$ 是 $X \setminus E$上的一个完备 K¨ahler 度量，在 E沿线具有 Poincar´e 奇点，并且令

$$\omega_E := \pi_\star(\widehat{\omega}_E) \tag{2.0.2}$$

为直接像度量。注意，这样一来，(X_0, ω_E) 就成为一个完备 K¨ahler 流形，其中 $X_0 := X \setminus (h_L = \infty)$。

下面的陈述众所周知，但我们在此回顾所需的精确版本。我们用 s 表示一个线丛的截面，其零除子的支集与 $(h_L = \infty)$ 的支集重合。

L引理 2.1. 存在一族具有以下性质的光滑函数 $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$。

(a) 对每个 $\varepsilon > 0$，函数 μ_ε 在 X_0 中具有紧支集，且 $0 \leqslant \mu_\varepsilon \leqslant 1$。(b) 集合 $(\mu_\varepsilon = 1)$ 穷竭 X_0。(c) 存在正常数 $C > 0$，使得

$$\sup_{X_0} \left(|\partial \mu_\varepsilon|^2_{\omega_E} + |\partial\bar{\partial}\mu_\varepsilon|^2_{\omega_E} \right) \leqslant C.$$

^证明。只需在 X 上得到相应的结论，使得除子 E 是简单正规交叉。于是我们取

$$\mu_\varepsilon = \rho_\varepsilon\Big(\log\log\frac{1}{|\widehat{s}|^2}\Big) \tag{2.1.1}$$

其中， ρ_ε 在区间 $[1,\varepsilon^{-1}]$ 上等于 1，在 $[1+\varepsilon^{-1},\infty]$上等于 0。此外，我们用 $|\widehat{s}|$ 表示截面 s 的范数关于任意光滑度量的逆像。实际上，我们还可以施加如下条件：

$$\max_{j=1,\dots N}\sup_{\varepsilon>0}\sup_{\mathbb{R}_+}|\rho_\varepsilon^{(j)}| < C_N < \infty, \tag{2.1.2}$$

对于任意正整数 N。性质 (a)–(c) 随后可通过简单计算得到验证。 □

在这一背景下，我们有如下陈述，这是 L^2 霍奇理论中通常结果的一个略微推广。

定理 2.2. 考虑一个线丛 $(L,h_L) \to X$ ，其赋有度量 h_L ，使得上述要求 (a) 得到满足，并假设 $\theta_L \geqslant 0$ 在 X上。令 (X_0,ω_E) 为相应的完备 K¨ahler 流形，参见 (2.0.2)。则以下断言成立。

(i) 对于 (n,q) 形式，我们有霍奇分解，即

$$L^2_{n,q}(X_0,L) = \mathcal{H}_{n,q}(X_0,L)\oplus \operatorname{Im}\bar\partial\oplus\operatorname{Im}\bar\partial^\star,$$

其中 $\mathcal{H}_{n,\,q}(X_0,L)$ 是关于 (ω_E,h_L) 的 L^2 $\Delta^{''}$-调和 (n,q)-形式空间。

(ii) 令 u 为一个 L^2-形式值 $\bar\partial$-闭 (n,q)-形式，其在 X_0 上的型为 (n,q)，并假设我们有$u = D'_{h_L}w$，其中 $w \in L^2_{n-1,\,q}(X_0,L)$。那么存在 $v \in L^2_{n,\,q-1}(X_0,L)$，使得$u = \bar\partial v$。

下面给出的定理 2.2 的证明使用了以下命题，该命题是 $\bar\partial$-版本的 Poincar´e 不等式，由 [3] 中建立。

定理 2.3。令 $p \leqslant n$ 为一个整数。存在一个正常数 $C > 0$ ，使得下列不等式成立

$$\int_{X_0}|u|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E} \leqslant C\int_{X_0}|\bar\partial u|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E} \tag{2.3.1}$$

^对于任意属于 ∂ 的定义域且与 L^2 全纯 $(p,0)$–形式空间正交的 L-值 $(p,0)$ 型形式 u 。注意，此处的 θ_L 是任意的。

定理 2.3 的证明。第一个观察是，我们从一开始就可以假设极集 $h_L = \infty$ 具有简单正规交叉支集。事实上，经由映射 π ，我们的 Poincar´e 不等式的假设和结论变换如下。

•该形式

$$\widehat{u} = \pi^\star u \tag{2.3.2}$$

在 $\widehat{X}$ 上取值于 $\pi^\star L$，并且相对于 $\widehat{\omega}_E$ 和 $\pi^\star h_L$是 L^2 。

• 形式 $\widehat{u}$ 与所有取值于 $\pi^\star L$的 L^2–调和 $(p,0)$ 形式所成空间正交。事实上，^给定 $X\setminus E$ 上任意一个取值于 $\pi^\star L$的 $(p,0)$ 型形式 $\widehat{\gamma}$，存在 $X\setminus Z$ 上的一个形式 γ，使得

$$\widehat{\gamma} = p^\star\gamma \tag{2.3.3}$$

^因为 $p\colon X\setminus E \to X\setminus Z$是一个双全纯映射。此外， p分别在 $(X\setminus E,\widehat{\omega}_E)$ 与 $(X\setminus Z,\omega_E)$ 之间建立等距映射。对于 $(p^\star L,p^\star h_L)$ 和 (L,h_L) 这两对情形也是如此，因此我们的断言显然成立。

^这意味着只需假设 $X = X$，即度量 ω_E 沿着简单正规交叉除子 E 具有 Poincar´e 奇点，而该除子与解析集 $h_L = \infty$的支集重合。

以下陈述是证明定理 2.3 的重要一步。

命题 2.4. 设 Ω 是 X 的某个坐标开集，且设 τ 是一个取值于 L 的具有紧支集的 $(p, 0)$-形式，其支集包含于 Ω 中。则有

$$\int_\Omega |\tau|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \leqslant C \int_\Omega |\bar\partial \tau|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \tag{2.4.1}$$

其中 C 是一个常数。

[3], 引理 1.10 中的论证对应于情形 $p = 0$ 和 $\varphi_L = 0$。对于一般情形，我们需要以下辅助结论。

引理 2.5. 设 δ 是任意实数。那么存在 $x_\delta < 1$ 使得以下结论成立。对于定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的闭包上的任意光滑函数 f，其中 $\mathbb{D}$ 位于 $\mathbb{C}$中，若存在 $\varepsilon > 0$ 满足以下性质：在集合 $\{|z| \leqslant \varepsilon\} \cup \{|z| \geqslant 1 - x_\delta\}$上， $f(z) = 0$，则有

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^2 \frac{d\lambda(z)}{|z|^{2\delta}} \leqslant C \int_{\mathbb{D}} \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2 |z|^{2-2\delta} \log^2 |z| d\lambda(z) \tag{2.5.1}$$

以及

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^2 \frac{d\lambda(z)}{|z|^{2+2\delta} \log^2 |z|} \leqslant C \int_{\mathbb{D}} \left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2 \frac{d\lambda(z)}{|z|^{2\delta}}. \tag{2.5.2}$$

引理 2.5 的证明. 设 $x_\delta < 1$ 是一个正实数，其具体表达式将在下文确定。令 $v : [0, 1] \to \mathbb{C}$ 为一个光滑函数，其支集包含于区间$[\varepsilon, x_\delta]$ 内，其中 ε是某个足够小的正数。

我们断言以下不等式成立

$$\int_0^1 |v|^2 t^k dt \leqslant C \int_0^1 |v'|^2 t^{k+2} \log^2 t dt \tag{2.5.3}$$

以及

$$\int_0^1 |v|^2 t^k \frac{dt}{\log^2 t} \leqslant C \int_0^1 |v'|^2 t^{k+2} dt \tag{2.5.4}$$

其中， k 是集合 $\delta + \mathbb{Z}$中的任意元素，而 C 是一个数值常数（特别是与 v、 ε、 k等无关）。

我们首先验证（2.5.3）成立：有

$$-\int_0^1 |v|^2 t^{k+1} \log^2 d\left(\frac{1}{\log t}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\log t} \frac{d}{dt}\left(v^2 t^{k+1} \log^2 t\right) dt \tag{2.5.5}$$

这等于

$$2\int_0^1 (\overline{v} v' + v\overline{v'}) t^{k+1} \log t dt + \int_0^1 \frac{t^k v^2}{\log t}\left((k+1)\log^2 t + 2\log t\right) dt. \tag{2.5.6}$$

现在有两种情况：要么 $k+1 = 0$，此时（2.5.6）中的第二项等于我们感兴趣的量的两倍；要么 $k + 1 \neq 0$。注意，在后一种情况下，可以相对于 k 一致地选取 x_δ，使得

$$|(k+1)\log^2 t + 2\log t| \geqslant 2|\log t| \tag{2.5.7}$$

对于任意 $t \in [0, x_\delta]$， 恰恰因为 $k \in \delta + \mathbb{Z}$。
因此，我们有

$$\left|\int_0^1 (\overline{v} v' + v\overline{v'}) t^{k+1} \log t dt\right| \geqslant \int_0^1 t^k v^2 dt. \tag{2.5.8}$$

对于 $]0$ 中任意具有紧支集的 v， $x_\delta[$。
此外，我们有

$$\left|\int_0^1 (\overline{v} v' + v\overline{v'}) t^{k+1} \log t dt\right|^2 \leqslant \int_0^1 |v'|^2 t^{k+2} \log^2 t dt \int_0^1 |v|^2 t^k dt. \tag{2.5.9}$$

由柯西-施瓦茨不等式可得，因此不等式 (2.5.3) 得证。

(2.5.4) 的论证完全类似：我们有

$$\int_0^1 |v|^2 t^k \frac{dt}{\log^2 t} = \int_0^1 |v|^2 \frac{t^{k+1}}{\log^2 t} d\log t \tag{2.5.10}$$

它等于

$$-\int_0^1 \log t \frac{d}{dt}\left(|v|^2 \frac{t^{k+1}}{\log^2 t}\right) dt = \int_0^1 \frac{|v|^2 t^k}{\log^2 t}\left(2 + (k+1)\log\frac{1}{t}\right) dt - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{\log t}(v'\overline{v} + v\overline{v'})dt. \tag{2.5.11}$$

并且可能出现两种情况。若 $k+1 \geqslant 0$，则有 $2+(k+1)\log\frac{1}{t} \geqslant 2$，对任意 $t \in [0,1]$ 均成立，且由此得到 (2.5.4)。对于每个满足 $k+1<0$ 的元素 $k \in \delta + \mathbb{Z}$，我们可以假设

$$(k+1)\log\frac{1}{t} + 2 \leqslant \frac{1}{2} \tag{2.5.12}$$

对任意 $t \in [0, x_\delta]$ 均成立；如有必要，对 x_δ 施加一个补充的（但一致的）条件，然后我们完全按照证明 (2.5.3) 的方法进行。

因此，对任意 $k \in \delta + \mathbb{Z}$，我们得到 (2.5.3) 和 (2.5.4)。

引理 2.5 由此得证：我们考虑傅里叶级数

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(t) e^{\sqrt{-1}k\theta} \tag{2.5.13}$$

f 的，然后有

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(a_k'(t) - \frac{k}{t}a_k(t)\right) e^{\sqrt{-1}k\theta}. \tag{2.5.14}$$

恒等式

$$t^k \frac{d}{dt}\left(\frac{a_k}{t^k}\right) = a_k'(t) - \frac{k}{t}a_k(t) \tag{2.5.15}$$

将我们命题的证明归结为 (2.5.3) 和 (2.5.4) 型的不等式，而这些不等式已经得到证明。总之，引理 2.5 已完全得证。□

现在我们回到命题 2.4 的证明。

命题 2.4 的证明。我们可以假设交集 $\Omega \cap E$ 属于 $z_1 \cdots z_r = 0$ 型。

我们首先考虑 τ 在 $\Omega \setminus E$ 中具有紧支集的情形。此时，τ 可以写成以下形式之和：

$$\tau_I := f_I dz_I. \tag{2.5.16}$$

改变指标的顺序后，有两种情形：对于某个 p，$I \cap \{1,\ldots,r\} = \{1,\ldots,p\}$；或者 $I \cap \{1,\ldots,r\} = \emptyset$.

在第一种情况下，我们有

$$\frac{|\tau_I|_g^2 e^{-\varphi_L} dV_g}{d\lambda} = \frac{|f_I|^2 e^{-\varphi_L}}{\prod_{\alpha=p+1}^r |z_\alpha|^2 \log^2 |z_\alpha|^2} \tag{2.5.17}$$

其中 $e^{-\varphi_L} = \frac{1}{\prod_{i=1}^r |z_i|^{2\delta_i}}$，在第二种情况下，这与 $p=0$ 相同。在（2.5.17）中，我们用 g 表示模型庞加莱′度量

$$\sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{-1}dz_i \wedge d\overline{z}_i}{|z_i|^2 \log^2 |z_i|^2} + \sum_{i=r+1}^n \sqrt{-1}dz_i \wedge d\overline{z}_i.$$

¯现在，对于 $\partial\tau_I$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{|\bar\partial\tau_I|^2_g e^{-\varphi_L}dV_g}{d\lambda} &= \sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\partial f_I}{\partial\overline{z}_i}\right|^2\frac{|z_i|^2\log^2|z_i|^2e^{-\varphi_L}}{\prod_{\alpha=p+1}^{r}|z_\alpha|^2\log^2|z_\alpha|^2}\\ &\quad+\sum_{i=r+1}^{n}\left|\frac{\partial f_I}{\partial\overline{z}_i}\right|^2\frac{e^{-\varphi_L}}{\prod_{\alpha=p+1}^{r}|z_\alpha|^2\log^2|z_\alpha|^2}\end{aligned}\tag{2.5.18}$$

并且需要注意的是，对于每个 $\xi\in\Omega$，都存在某个指标 $j\in\{1,\dots,r\}$，使得我们在引理 2.5 中要求的支集条件对

$$f(z):=f_I(\xi_1,\dots\xi_{j-1},z,\xi_{j+1},\dots\xi_n).\tag{2.5.19}$$

根据 $j\geqslant p$ 是否属于 (2.5.18) 的情况，我们使用 (2.5.3) 或 (2.5.4)。

一般而言，若 τ 在 Ω 中具有紧支集，我们便在引理 2.1 中使用截断函数 μ_ε。我们对 $\mu_\varepsilon\tau$应用上述估计。注意，引理 2.5 中的常数 C 相对于 ε是统一的。因此令 $\varepsilon\to 0$，即可完全证明命题 2.4。□

现在我们完成定理 2.3 的证明，其论证沿用 [3, 引理 1.10]：若 (2.3.1) 中所述的正常数不存在，则可得到一个由 L值的、类型为 (*p*,0) 的形式组成的序列 u_j，它们与全纯形式空间正交，并且满足

$$\int_X|u_i|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}=1,\qquad\lim_i\int_X|\bar\partial u_i|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}=0\tag{2.5.20}$$

由此可知，(u_i) 的弱极限 u_∞ 是全纯的。另一方面，每个 u_i 都与全纯形式空间正交，因此 u_∞ 等于零。此外，结合命题 2.4 的 Bochner 公式表明，我们可以假设 u_i 在 Sobolev 空间 W^1 中弱收敛，因而在 L^2 中强收敛到零。特别地，我们有

$$u_i|_K\to 0\tag{2.5.21}$$

对任意紧子集 $K\subset X\setminus E$，在 L^2 中成立。

证明的最后一步是注意到，上述论证与每个 u_i 的 L^2 范数等于一这一事实相矛盾。这一点并非显而易见，但与 [3], 中引理 1.10 证明的结尾完全相同，因此这里不再重复。思路其实很清楚：我们将每个 $u_j=\chi u_j+$ 分解为 $(1-\chi)u_j$，其中 χ 是一个截断函数，在 U 上等于 1，且相应梯度的范数很小。由 (2.4.1) 和 (2.5.20) 可知，χu_j 的 L^2 范数很小。$(1-\chi)u_j$ 的 L^2 范数同样由 (2.5.21) 可知很小，这便导出了矛盾。□

我们得到命题 2.4 的以下推论。

推论 2.6。在定理 2.2 的设定下，我们可以找到一个正常数 $C>0$，使得以下结论成立。设 v 是某个 $q\geqslant 1$ 的取值于 L 的 (n,q) 型形式。假设 v 是 L^2，且与算子 $\bar\partial^\star$ 的核正交。那么我们有

$$\int_{X_0}|v|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}\leqslant C\int_{X_0}|\bar\partial^\star v|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}.\tag{2.6.1}$$

证明。首先，我们考虑霍奇星算子 $u:=\star v$（其为 $(n-q,0)$ 型且取值于 L）与空间 $\mathrm{Ker}(D'_{h_L})$ 正交。这可如下看出：设 ϕ 是一个 L^2 形式，类型为 $(n-q,0)$，且满足 $D'_{h_L}\phi=0$。那么我们有

$$\int_{X_0}\langle u,\phi\rangle e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}=\int_{X_0}\langle v,\star\phi\rangle e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}=0.$$

因为 $\bar\partial^\star(\star\phi)=-\star D'_{h_L}(\phi)=0$。
因此，我们需要证明存在某个常数 $C>0$，使得不等式

$$\int_{X_0}|u|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}\leqslant C\int_{X_0}|D'_{h_L}u|^2_{\omega_E}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_E}.\tag{2.6.2}$$

对于任意与 D'_{h_L} 的核正交的、取值于 L 的 $(n-q,0)$ 型形式 u 都成立。

和之前一样，这通过反证法完成：如果我们找不到如（2.6.2）中的常数 C，那么就得到一个形式序列 u_i，使得

$$\|u_i\|^2 = 1, \qquad \lim_{i\to\infty} \|D'_{h_L}(u_i)\|^2 = 0, \tag{2.6.3}$$

其中（2.6.3）中的范数正是（2.6.2）中的范数。因此，序列（u_i）的任意弱极限 u_∞ 都必须为零，因为它同时属于 $\mathrm{Ker}(D'_{h_L})$ 及其正交补。因此我们得到

$$u_i|_K \to 0 \tag{2.6.4}$$

在 L^2 中，对任意紧子集 $K \subset X \setminus E$,

另一方面，对于每个指标 i，我们有 $D'^{\star}(u_i) = 0$。因此 Bochner 公式写成

$$\int_{X_0} |\bar\partial u_i|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} = \int_{X_0} |D'_{h_L} u_i|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} + \int_{X_0} \langle [\theta_L, \Lambda_{\omega_E}] u_i, u_i\rangle e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \tag{2.6.5}$$

并且由于——根据假设 $\theta_L \geqslant 0$，我们有 e

$$\int_{X_0} \langle [\theta_L, \Lambda_{\omega_E}] u_i, u_i\rangle e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \leqslant 0 \tag{2.6.6}$$

这是因为 u_i 的类型。

由此可得 $\lim_i \|\bar\partial u_i\|^2 = 0$，并且我们恰如定理 2.3 证明末尾那样得到矛盾。

□

以下是前述推论的“伴随”版本。

推论 2.7. 在定理 2.2 的设定下，存在一个正常数 $C > 0$，使得以下结论成立。设 v 是某个 $q \geqslant 1$ 的 L-值 (n,q) 型形式。假设 v 是 L^2，并且与算子 $\bar\partial$ 的核正交。那么有

$$\int_{X_0} |v|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \leqslant C \int_{X_0} |\bar\partial v|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}. \tag{2.7.1}$$

证明. 论证完全相同：如果 v 在 $\mathrm{Ker}(\partial)$ 上正交，那么 $u := \star v$ 与 $D'^{\star}$ 的核正交。因此，需要证明的不等式为

$$\int_{X_0} |u|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \leqslant C \int_{X_0} |D'^{\star} u|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}. \tag{2.7.2}$$

对任意与 $D'^{\star}$ 的核正交的 L-值 $(n-q,0)$ 型形式 u，均成立。这（同样）通过反证法完成——注意在此情形下 $D'_{h_L} u = 0$——，我们略去细节。□

定理 2.2 的证明。这个陈述几乎已包含在 [6, 第 VIII 章，第 367-370] 页中。事实上，在完备流形的情形下，有如下分解

$$L^2_{n,q}(X_0, L) = \mathcal{H}_{n,q}(X_0, L) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,\bar\partial} \oplus \overline{\mathrm{Im}\,\bar\partial^{\star}}. \tag{2.7.3}$$

我们还知道（见同上），冯·诺伊曼意义下的伴随算子 $\partial^{\star}$ 和 $D'^{\star}$ 分别与 ∂ 和 D' 的形式伴随算子重合。

剩下要证明的是，$\bar\partial$算子和 $\bar\partial^{\star}$算子的像关于 L^2拓扑是闭的。在我们的设定中，这归因于度量 ω_E 在无穷远处的特殊形式（即在 $\pi(E)$ 的支集附近）。根据推论 2.6，$\partial^{\star}$ 的像是闭的；而根据推论 2.7，∂ 的像是闭的。

断言（ii）是（i）的直接推论，结合标准论证即可得出。 □

注记 2.8。了解算子 ∂ 和 $\partial^{\star}$ 的像对于任意类型的 L-值形式是否为闭集将非常有趣，特别是当 (L, h_L) 的曲率的非奇异部分 θ_L 具有任意符号时。在我们的论证中，由于大量使用 Bochner 公式，必须满足要求 $\theta_L \geqslant 0$。关于这一方向的结果，请参阅 [10] 和 [11]。

在本节的框架下，调和 $(n,1)$-形式具有以下性质。

引理 2.9. 在定理 2.2 的设定下，设 α 是一个取值于 L 的 L^2 Δ''-调和 $(n,1)$-形式。记其霍奇对偶为 $F := \star\alpha$ 。则有以下结论。

(1) 我们有 (2) 设 $\Omega \subset X$ 是一个坐标开集，令 f 为 Ω 上定义的任意全纯函数。我们假设 f 的零点集的支集包含于 $(h_L = \infty)$。则形式 $F \wedge D'\frac{df}{f}_{h_L} F$ 在 X 上是非奇异的（但尚不清楚该形式关于 $e^{-\varphi_L}$ 是否为 L^2 ）。（3）设 $\Omega \subset X$ 是一个坐标开集，令 g 为 Ω 上定义的任意全纯函数。则有

$$\int_\Omega |F \wedge dg|^2 e^{-\varphi_L} < \infty.$$

证明。注意，对于任意给定的 Δ''-调和 $(n,1)$-形式 α，结合 (L, h_L) 的曲率为半正这一事实，由 Bochner 公式可得

$$D'^{\star}\alpha = 0 \qquad \text{on } X \setminus (h_L = \infty). \tag{2.9.1}$$

因此，若记为 $\alpha = \omega_E \wedge F$，便可得出

$$F \in H^0\big(X, \Omega_X^{n-1} \otimes L\big), \qquad \int_X |F|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} < \infty \tag{2.9.2}$$

由性质 (2.9.1) 可知。此外，由于 $\partial^*\alpha = 0$ ，我们还可以得到 $D'_{h_L} F = 0$ 。于是得到 (1) 和 (3)。注意，(2.9.2) 在更一般的情形下也成立，参见 [?], [19]。

至于 (2)，根据我们对度量 ω_E 的选取，我们先证明

$$|df|^2_{\omega_E} \sim |f|^2 \log^2 |f|. \tag{2.9.3}$$

事实上，假设通过双亚纯映射 $\pi : X \to X$ ，函数 f 在局部对应于r函数 $\prod z_i^{p_i}$（记号同本节开头）。那么，度量 ω_E 与沿 $z_1 \dots z_r = 0$ 具有奇点的 Poincar´e 度量准-$i=1$等距。 π对 $\frac{df}{f}$ 的逆像等于

$$\sum_{i=1}^r p_i \frac{dz_i}{z_i}$$

因此我们有

$$\left|\frac{\partial f}{f}\right|^2_{\omega_E} \simeq \sum p_i^2 \log^2 |z_i|^2$$

而该量的右端与 $\log^2 |f|^2$ 相同。

因此我们推得

$$\int_\Omega \left|F \wedge \frac{df}{f}\right|^2 \frac{e^{-\varphi_L}}{\log^2 |f|} \leqslant C \int_X |F|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}. \tag{2.9.4}$$

由于（2.9.4）的右端是有限的，并且 φ_L 在$Div(f)$ 的任一分支上都有非零勒隆数，因此可知 $F \wedge df$ 沿着 $Div(f)$ 消失。□

考虑方程

$$\bar\partial u = D'_{h_L} w + \Theta(L, h_L) \wedge \tau \qquad \text{on } X \setminus \{h_L = \infty\} \tag{2.9.5}$$

其中， τ、 w和 $D'w$是 L^2，且$D'_{h_L} w + \Theta$（L、 h_L） $\wedge \tau$在 $X \setminus \{h_L = \infty\}$上是 $\bar\partial$-闭的。接下来我们将在相当一般的情形下证明可以求解该问题，并且得到关于具有最小范数的解的 L^2 估计。关于非奇异情形下的类似论证，请参阅 [? 、定理 A.5] 。

定理 2.10. 设（L、h_L）是 X 上的全纯线丛，带有可能具有沿子簇 $Z \subset X$ 的解析奇异性的奇异度量 h_L，且其曲率流是半正的。考虑完备的 K¨ahler 度量（$X \setminus Z$、ω_E）。设 w 是 $X \setminus Z$上的一个 L-值（$n-1$，1）–形式，使得 w和$D'_{h_L} w$属于 L^2。再设 τ是 $X \setminus Z$上的一个 L-值（$n-1$，0）–形式，使得 τ和 Θ（L、h_L）$\wedge \tau$属于 L^2。

若 $D'_{h_L} w + \Theta(L, h_L) \wedge \tau$ 在 $X \setminus Z$ 上是 ∂-闭的，则方程 (2.9.5) 存在一个解 u，使得

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi_L} \leqslant \int_X |w|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} - \int_{X\setminus Z} \langle [\Theta(L, h_L), \Lambda_{\omega_E}]\tau, \tau\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \tag{2.10.1}$$

证明。设 ξ 是 $X \setminus Z$ 中一个具有紧支集的光滑 $(n, 1)$-形式。将 $\xi = \xi_1 + \xi_2$ 按照核 Ker(∂) 及其正交补进行分解，得到 ¯。
利用 L^2-假设，我们有

$$\int_{X\setminus Z} \langle D'w + \Theta(L, h_L) \wedge \tau, \xi\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} = \int_{X\setminus Z} \langle D'w + \Theta(L, h_L) \wedge \tau, \xi_1\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}.$$

于是，半正曲率条件和 Bochner 等式推出

$$\left| \int_{X\setminus Z} \langle D'w, \xi_1\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \right|^2 \tag{2.10.2}$$

小于

$$\int_X |w|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \cdot \int_X |\bar\partial^\star \xi|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}. \tag{2.10.3}$$

对于 包含 (L, h_L) 的曲率项，我们使用柯西不等式，并推得

$$\left| \int_{X\setminus Z} \langle \Theta(L, h_L) \wedge \tau, \xi_1\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \right|^2 \tag{2.10.4}$$

小于

$$\int_X \langle -[\Theta(L, h_L), \Lambda_{\omega_E}]\tau, \tau\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \cdot \int_X \langle [\Theta(L, h_L), \Lambda_{\omega_E}]\xi_1, \xi_1\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}. \tag{2.10.5}$$

我们再次使用 Bochner 等式，并推得

$$\left| \int_{X\setminus Z} \langle \Theta(L, h_L) \wedge \tau, \xi_1\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \right|^2 \tag{2.10.6}$$

小于

$$\int_X \langle -[\Theta(L, h_L), \Lambda_{\omega_E}]\tau, \tau\rangle_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E} \cdot \int_X |\bar\partial^\star \xi|^2_{\omega_E} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_E}. \tag{2.10.7}$$

然后，通过标准的 L^2-估计论证即可证明该定理。 □

2.2. 具有锥形奇点的度量的霍奇分解 I。我们在本小节讨论具有锥形奇点的度量对应于定理 2.2 的类似结果。这对于我们所针对的应用将十分重要。处理这类问题有两种可能性：要么用完备度量逼近我们的度量（例如，使用具有 Poincar´e 奇点的度量），要么直接使用局部一致化。在本小节中，我们采用前一种方法，并在下一小节中介绍后一种方法。

由于定理 2.2 证明中的大部分论证将在此处用到，我们将略去一些细节。本节最后一部分将对这类奇点中的 L^2 估计作几点评论。本小节的设定如下。

设定：令 X 为紧致 K¨ahler 流形， $Y=\sum Y_i$ 为一个简单正规交叉除子。我们用 $\omega_{\mathcal{C}}$ 表示沿 $\mathbb{Q}$-除子具有锥形奇点的度量

$$\sum_{i\in I}\left(1-\frac{1}{m}\right)Y_i \tag{2.10.8}$$

其中 m 是一个正整数。据此，我们的意思是局部有

$$\omega_{\mathcal{C}}\simeq\sum_{i=1}^{r}\frac{\sqrt{-1}dz_i\wedge d\overline{z}_i}{|z_i|^{2-\frac{2}{m}}}+\sum_{i\geqslant r+1}\sqrt{-1}dz_i\wedge d\overline{z}_i \tag{2.10.9}$$

也就是说， $\omega_{\mathcal{C}}$ 与 (2.10.9) 的右端准等距，其中 $z_1\ldots z_r=0$ 是除子 Y 的局部方程。

Let (L,h_L) 是赋有（奇异）度量 h_L 的线丛，并满足以下条件。

(i) 度量 h_L 的奇点包含于 Y 的支集中，即模去一个光滑函数后， $\varphi_L\simeq\sum q_i\log|z_i|^2$，其中 $q_i\in\mathbb{Q}$，且如上所述， z_i 表示 Y 各分支的局部方程。注意， q_i 不一定为正。

(ii) 对每个 $q_i\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$，我们假设 $\left\lfloor q_i-\frac{1}{m}\right\rfloor=\lfloor q_i\rfloor$ 成立且 $mq_i\in\mathbb{Z}$。

注意，条件 (i) 意味着 (L,h_L) 的曲率流可写为

$$i\Theta(L,h_L)=\sum q_i[Y_i]+\theta_L$$

其中 θ_L 是 X 上的光滑形式。

我们的下一个结果如下。

定理 2.11。设 $(L,h_L)\to X$ 是赋有度量 h_L 的线丛，且满足上述条件 (i)-(ii)；此外，我们假设 $i\Theta(L,h_L)\geqslant 0$。设 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是如上所述具有锥形奇点的 K¨ahler 度量。

(i) 下列等式成立

$$L^2_{n,q}(X_0,L)=\mathcal{H}_{n,q}(X_0,L)\oplus\operatorname{Im}\bar{\partial}\oplus\operatorname{Im}\bar{\partial}^{\star},$$

对任意 $q\geqslant 0$，其中 $X_0:=X\setminus Y$。

(ii) 对任意调和形式 $\xi\in\mathcal{H}_{n,\,q}(X_0,L)$，有

$$\bar{\partial}\xi=\bar{\partial}^{\star}\xi=(D')^{\star}\xi=0.$$

特别地， $\star\xi$ 是 X上的 L^2-全纯形式。

定理 2.11 的证明基于具有 Poincar´e 奇点的度量的相应版本，以及以下结果。下一小节将给出该命题更一般版本的另一种论证。我们决定在此处纳入这个初步证明，因为下面的命题 2.12 可能对其他情形有所帮助。

Let

$$\omega_{Y,\varepsilon}:=\omega_{\mathcal{C}}+\varepsilon\omega_{\mathcal{P}} \tag{2.11.1}$$

设其为逼近 $\omega_{\mathcal{C}}$的序列，其中 $\omega_{\mathcal{P}}$ 是 Y上具有 Poincar´e 奇点的度量。我们有以下命题。

定理 2.12。存在一个正常数 $C>0$ （与 ε无关），使得以下不等式成立

$$\int_{X_0}|u|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_{Y,\varepsilon}}\leqslant C\int_{X_0}|\bar{\partial}u|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}}e^{-\varphi_L}dV_{\omega_{Y,\varepsilon}} \tag{2.12.1}$$

¯对于任意 L-值的 u 型（p，0）形式 u，其属于 ∂ 的定义域，并且相对于度量$\omega_{Y,\,\varepsilon}$与 L^2 调和（p，0）–形式空间正交。

我们首先证明定理 2.12，然后将定理 2.11 推导为其推论。

定理 2.12 的证明。当 $\varepsilon = 0$ 时，情形相当简单；即使一般情形不能由此推出，我们仍在此给出一个直接证明。

我们用反证法：如果（2.12.1）不成立，那么存在一个序列 (u_k)，其元素是与 $\mathrm{Ker}(\bar{\partial})$ 正交的 $(p, 0)$-形式，并且满足

$$\int_{X_0} |u_k|^2_{\omega_{\mathcal{C}}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{\mathcal{C}}} = 1, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{X_0} |\bar{\partial} u_k|^2_{\omega_{\mathcal{C}}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{\mathcal{C}}} = 0. \tag{2.12.2}$$

由此可知，(u_k) 的弱极限 $u_0\ _{k\geqslant 1}$ 具有以下性质

$$\int_{X_0} |u_0|^2_{\omega_{\mathcal{C}}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{\mathcal{C}}} \leqslant 1, \qquad \bar{\partial} u_0 = 0. \tag{2.12.3}$$

另一方面，由于 u_0 与 $\mathrm{Ker}(\bar{\partial})$ 正交，因此可得 $u_0 = 0$。接下来我们证明，当 k 足够大时，这与（2.12.2）的第一个等式矛盾。

设 Ω 是一个坐标球，其原点属于 Y。限制 $\partial u_k|_{\Omega\setminus Y}$ 是一个闭的 $(p, 1)$-形式，但我们也可以将其视为取值于向量丛 $\Lambda^{n-p}T_X \otimes L|_\Omega$ 的 $(n, 1)$-形式。我们在切丛 $E := T_X|_\Omega$ 上赋予具有锥形奇点的标准度量，并在 L 上赋予$e^{-\phi_L}$，其中

$$\phi_L = \varphi_L + \|z\|^2 + C\sum |z_i|^{\frac{2}{m_i}}. \tag{2.12.4}$$

在 (2.12.4) 中，我们用 $(z_i)_{i=1,\ \ldots,\ n}$ 表示一个适配于 Y的坐标系。于是，E的曲率大于 $\omega_{\mathcal{C}} \otimes \mathrm{Id}_E$，根据应用于 $\Omega \setminus Y$上的 L^2 估计，我们可以求解方程

$$\bar{\partial} v_{\Omega,k} = \bar{\partial} u_k, \qquad \int_\Omega |v_{\Omega,k}|^2 e^{-\varphi_L} \leqslant C \int_{X_0} |\bar{\partial} u_k|^2_{\omega_{\mathcal{C}}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{\mathcal{C}}}. \tag{2.12.5}$$

Here 我们使用了以下事实：在 (2.12.4) 中，加到 L 的整体度量上的局部项是双边的 d bou有界的。

我们用 Ω 的一个有限坐标子集覆盖 X，并如上构造形式 $v_{\Omega,\ k}$（如果集合 Ω 不与除子 Y的支集相交，那么我们就使用平坦度量）。如果 (i) 中的所有系数 q_i 均为正，则全纯形式 $(u_k - v_{\Omega,\ k})$ 弱收敛到零，因而也强收敛到零。此外，每个 $v_{\Omega,\ k}$ 的 L^2 范数随着 $k \to \infty$趋于零，因此当 k 足够大时，(2.12.2) 中的第一个等式不可能成立。由此得到的矛盾结束了情形 $\varepsilon = 0$的证明。

现在假设只有一个负系数 $q_1 < 0$，那么我们写作 $q_1 = \lfloor q_1 \rfloor + \{q_1\}$，并在度量的表达式中将该系数替换为其分数部分 $\{q_1\}$。接着，考虑 $z_1^{-\lfloor q_1 \rfloor}(u_k - v_{\Omega,\ k})$，即可像上面那样进行论证。

一般情形（即对于任意的 ε）非常类似，只是我们不能依赖 $\Omega \cap Y \neq \emptyset$ 的“修正”形式 $v_{\Omega,\ k}$。相反，我们使用以下两个事实。

第一个事实是命题 2.4 的一个变体：设 U 是 X 的有限个坐标子集的并，且包含 Y。存在一个正常数 $C > 0$（与 ε 无关），使得对于任意支集包含于 U 的 L 值的 $(p, 0)$ 形式 u，都有以下不等式

$$\frac{1}{C}\int_U |u|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{Y,\varepsilon}} \leqslant \int_U |\bar{\partial} u|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{Y,\varepsilon}} + \int_{U\setminus\frac{1}{2}U} |u|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} e^{-\varphi_L} dV_{\omega_{Y,\varepsilon}}. \tag{2.12.6}$$

我们在此不证明 (2.12.6)，因为它可直接由命题 2.4 证明中所用的论证推出。

第二个事实是，L^2 全纯 p-形式空间与 $\varepsilon \geqslant 0$ 无关。设 Φ 是 X_0 上取值于 L 的全纯 p–形式。如果 Φ 关于 $(\omega_{Y,\ \varepsilon}, h_L)$ 是 L^2，那么由于下面的不等式，它关于 (ω_Y, h_L) 也是 L^2 可积的

$$\|\Phi\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \geqslant \|\Phi\|^2_{\omega_Y}. \tag{2.12.7}$$

接下来，我们假设相对于（ω_Y，h_L），Φ 是 L^2。在局部坐标下，这可写为

$$\int_\Omega \sum |\Phi_I(z)|^2 \prod_{j\notin I} \lambda_j(z) e^{-\varphi_L(z)} d\lambda(z) < \infty \tag{2.12.8}$$

其中， λ_j 是 $\omega_{\mathcal{C}}$ 相对于 (Ω上的欧氏度量的特征值，（z_1，...，z_n）)。我们选取坐标 z，使其适配于（X，Y），即Ω $\cap Y = z_1 \dots z_r = 0$。由此可知，全纯函数 Φ_I 可被

$$\prod_{i\leqslant r, i\in I} z_i^{\lfloor q_i \rfloor} \prod_{i\leqslant r, i\notin I} z_i^{\lfloor 1+q_i-\frac{1}{m}\rfloor} \tag{2.12.9}$$

参见开头的记号。回想一下，我们选取了 m 使得

$$\left\lfloor q_i - \frac{1}{m} \right\rfloor = \lfloor q_i \rfloor , \tag{2.12.10}$$

对于度量 h_L 的表达式中出现的每个非整数系数 q_i。因此综上所述，通过对度量 $\omega_{\mathcal{C}}$ 的奇点进行仔细选择，参见（ii），对于满足 $\|\Phi\|^2_{\omega_{\mathcal{C}}} < \infty$ 的任意全纯形式 Φ，我们有

$$\|\Phi\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} < \infty \qquad \text{and} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \|\Phi\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} = \|\Phi\|^2_{\omega_{\mathcal{C}}}. \tag{2.12.11}$$

证明的其余部分与定理 2.3 的情形完全类似（即通过反证法）：我们用反证法假设存在一个序列 u_ε，使得$\|u_\varepsilon\|_{\omega_{Y,\ \varepsilon}} = 1$, u_ε 关于 $\omega_{Y,\ \varepsilon}$ 与 L^2-全纯形式空间正交，并且 $\lim_{\varepsilon\to 0} \|\bar\partial u_\varepsilon\|_{\omega_{Y,\ \varepsilon}} = 0$。取某个子序列后，$u_\varepsilon$ 弱收敛到 X_0 上的某个（$p, 0$）-形式 u。于是 $\|u\|_{\omega_{\mathcal{C}}} \leqslant 1$ 且 $\bar\partial u = 0$。因此，u 是 X 上的全纯 L^2-形式。由于 u_ε 与全纯形式正交，我们有 $\int_X \langle u, u_\varepsilon\rangle_{\omega_{Y,\ \varepsilon}} = 0$。结合（2.12.11），得到 $u = 0$。然后，结合（2.12.6），用与定理 2.3 相同的论证即可得到矛盾。□

接下来证明定理 2.11。

证明。设 ξ 是一个任意的、取值于 (L, h_L) 的 (n, q) 型 L^2-形式（相对于度量 $\omega_{\mathcal{C}}$）。那么我们还有 $\|\xi\|_{\omega_{Y,\ \varepsilon}} < \infty$ 因此记为

$$\xi = \xi_\varepsilon + \bar\partial(\eta_\varepsilon) + \bar\partial^\star(\tau_\varepsilon), \tag{2.12.12}$$

其中 ξ_ε 是调和的，η_ε 与 Ker($\bar\partial$) 正交，且 τ_ε 在 Ker($\bar\partial^\star$) 上正交。我们有

$$\|\xi_\varepsilon\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \leqslant \|\xi\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \leqslant \|\xi\|^2_{\omega_Y} \tag{2.12.13}$$

因此，$(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 的极限将关于 $\omega_{\mathcal{C}}, h_L$ 是调和的。此外，由定理 2.12 可得

$$\|\eta_\varepsilon\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \leqslant C\|\bar\partial\eta_\varepsilon\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \leqslant C\|\xi\|^2_{\omega_Y} \tag{2.12.14}$$

因此，我们可以在 X_0 的紧集上提取 $(\eta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 的一个极限。

为了处理族 $(\tau_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$，由定理 2.12 的一致估计可知，推论 2.6 的证明同样适用。因此可得一个常数 $C > 0$，使得

$$\|\tau_\varepsilon\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \leqslant C\|\bar\partial^\star(\tau_\varepsilon)\|^2_{\omega_{Y,\varepsilon}} \tag{2.12.15}$$

并且 (2.12.15) 的右端关于 ε 一致有界。因此，我们可以取极限 $\varepsilon \to 0$，得到 ξ_0 调和，$\eta_0 \in$ 属于定义域($\bar\partial$)，且 $\tau_0 \in$ 属于定义域($\bar\partial^\star$)，使得

$$\xi = \xi_0 + \bar\partial\eta_0 + \bar\partial^\star(\tau_0). \tag{2.12.16}$$

为了证明 $\mathcal{H}_{n,\ q}(X_0, L)$、Im $\bar\partial$ 和 Im $\bar\partial^*$ 两两正交，我们使用单位分解和局部覆盖。例如，设 $\xi_0 \in \mathcal{H}_{n,\ q}(X_0, L)$ 且 $\eta_0 \in L^2$。令 θ_i 为一个单位分解。于是

$$\int_{X_0} \langle \xi_0, \bar\partial\eta_0\rangle = \sum_i \int_{X_0} \langle \xi_0, \bar\partial(\theta_i\eta_0)\rangle.$$

设 $\pi_i : V_i \to U_i$ 是一个局部分歧覆盖，使得 $\pi_i^*\omega_{\mathcal{C}}$ 光滑且 $Supp\theta_i \Subset U_i$。Then

$$\int_{X_0} \langle \xi_0, \bar\partial(\theta_i\eta_0)\rangle = \int_{U_i} \langle \xi_0, \bar\partial(\theta_i\eta_0)\rangle = \frac{1}{r}\int_{V_i} \langle \pi_i^*\xi_0, \bar\partial(\pi_i^*(\theta_i\eta_0))\rangle_{\pi_i^*\omega_{\mathcal{C}}} = 0,$$

其中，最后一个等式源于 $\pi_i^*\omega_{\mathcal{C}}$ 在 V_i 和 $Supp\theta_i \Subset V_i$上是光滑的这一事实。

要完成证明，尚需验证 (2.11.1)。令 $\xi \in \mathcal{H}_{n,q}(X_0, L)$（相对于锥度量）。那么，对于每个 ε，ξ 相对于 $\omega_{Y,\varepsilon}$ 仍然是 L^2 。我们考虑 ξ 相对于 $\omega_{Y,\varepsilon}$的霍奇分解：

$$\xi = \xi_\varepsilon + \bar\partial \eta_\varepsilon + \bar\partial^{\star_\varepsilon} \tau_\varepsilon.$$

那么，相对于完备度量 $\omega_{Y,\ \varepsilon}$， ξ_ε 是调和的。特别地，利用 Bochner 定理，我们知道

$$\bar\partial \xi_\varepsilon = \bar\partial^{\star_\varepsilon} \xi_\varepsilon = (D')^{\star_\varepsilon} \xi_\varepsilon = 0. \tag{2.12.17}$$

取一个子序列后，上述论证表明， ξ_ε、 η_ε 和 τ_ε 收敛到某些ξ_0、 η_0 和 τ_0 ，它们相对于 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是 L^2 ，并且我们有

$$\xi = \xi_0 + \bar\partial \eta_0 + \bar\partial^\star \tau_0.$$

由于我们已经证明$\mathcal{H}_{n,\ q}(X_0, L)$、$\mathrm{Im}\ \bar\partial$和 $\mathrm{Im}\,\bar\partial^*$ 彼此正交，因此得到$\xi = \xi_0$。结合 (2.12.17)，(2.11.1) 得证。□

注 2.13. 分解

$$L^2_{n,q} = \mathrm{Ker}\Delta'' \oplus \mathrm{Im}\,\Delta''$$

相对于 Poincar´e 型度量/锥度量的情形仍然成立，正如我们接下来将看到的。根据前面的结果，我们只需证明 Δ'' 的像是闭的。
我们先证明 Poincar´e 情形，锥情形类似。若（反证）此结论不成立，则存在一列紧支集光滑 f_i ，使得

$$\|f_i\|^2_{L^2} = 1, \qquad \|\Delta'' f_i\|^2_{L^2} \to 0. \tag{2.13.1}$$

此外，所有形式 f_i 都与调和形式空间正交，即与 Ker(∂) 和 Ker($\partial^\star$) 正交。

由 (2.13.1) 可得

$$\langle f_i, \Delta'' f_i\rangle \to 0 \tag{2.13.2}$$

如 $i \to \infty$。另一方面，我们有 $\langle f_i,\ \Delta'' f_i\rangle = \|\bar\partial f_i\|^2 + \|\bar\partial^* f_i\|^2$，由此得到如下矛盾。我们可以写成

$$f_i = \bar\partial \alpha_i + \bar\partial^\star \beta_i, \tag{2.13.3}$$

根据定理 2.2。此外，由定理 2.2 的证明可知

$$\|f_i - \bar\partial \alpha_i\|^2 \leqslant C\|\bar\partial f_i\|^2, \qquad \|f_i - \bar\partial^\star \beta_i\|^2 \leqslant C\|\bar\partial^\star f_i\|^2 \tag{2.13.4}$$

因为 $f_i - \partial\alpha_i$ 与 Ker(∂) 正交，且 $f_i - \partial^\star \beta_i$ 与 Ker($\partial^\star$) 正交。将两个不等式相加可得

$$\|f_i\|^2 \leqslant C(\|\bar\partial f_i\|^2 + \|\bar\partial^\star f_i\|^2), \tag{2.13.5}$$

这不可能，因为 $i \to \infty$。

2.3. 具有锥形奇点的度量的霍奇分解，II。本小节的设置与前一小节 2.2 中的设置相同。我们将系统地使用与轨形结构相对应的分歧覆盖

$$\Delta := \sum_{i\in I} \left(1 - \frac{1}{m}\right) Y_i \tag{2.13.6}$$

以建立定理 2.11 的推广。

设 $(V_i, z_i)_{i\in I}$ 是 X 的一个有限覆盖，带有坐标图，使得

$$z_i^1 \dots z_i^r = 0 \tag{2.13.7}$$

当限制在集合 V_i 上时，是除子 Y 的局部方程。于是我们考虑局部分歧映射

$$\pi_i : U_i \to V_i, \qquad \pi_i(w_i^1, \dots, w_i^n) := \left((w_i^1)^m, \dots, (w_i^r)^m, w_i^{r+1}, \dots w_i^n\right) \tag{2.13.8}$$

它们定义了与 (X, Δ) 相对应的轨形结构。

我们首先在几何语境中定义光滑形式的类似物。

定义 2.14. 设 ϕ 是定义在 X_0 上、取值于 L 的 (p,q) 型 $\mathcal{C}^\infty$ 形式：$= X \setminus Y$。如果局部逆像的商

$$\phi_i := \frac{1}{w_i^{qm}} \pi_i^\star(\phi|_{V_i}) \tag{2.14.1}$$

可 $\mathcal{C}^\infty$-延拓到 U_i。为简化书写，在上述等式中我们使用记号 $w_i^{qm} := (w_i^1)^{q_1 m} \cdots (w_i^r)^{q_r m}$。

在没有扭曲丛 L 的情况下，这对应于“轨形微分形式”的通常定义。这里从某种意义上说，思想是相同的，只是我们考虑了度量 h_L L 的奇点。在下文中，我们将建立一些简单的性质。

命题 2.15。设 ϕ 是 X 上取值于 L 的通常意义下的光滑 (n,q)-形式，并且假设对每个 i 都有 $q_i < 1$。则 ϕ 在锥意义下光滑。

证明。通过局部计算即可立即得到。这基于以下事实：$d(z^m)\, z^{qm}$ 是光滑的（回忆一下，qm 是整数）。□

注 2.16。设 ϕ 是 X 上取值于 L 的光滑 (p,q)-形式。即使对每个 i 都有 $q_i \in]0,1[$， ϕ 也可能不是在锥意义下光滑的。但我们稍后将证明，它在锥形意义下定义了一个流。

下面的陈述建立了与数据 $(X, \omega_{\mathcal{C}})$ 和 (L, h_L) 相关的内在微分算子与局部微分算子之间的对应关系。

命题 2.17. 设 ϕ 是一个取值于 L 的 (p,q)-形式，且在轨形意义下光滑。那么它的“自然”导数 D'_{h_L}, $D^\star_{h_L}, \cdots$ 也在轨形意义下光滑。此外，我们有：

(1) $\sup_{X\setminus Y} |\phi|_{h_L,\ \omega_{\mathcal{C}}} < \infty$，即在锥形意义下光滑的形式是有界的。

(2) 下列等式成立

$$\pi_i^\star(D'\phi) = w_i^{qm} D'\phi_i; \qquad \pi_i^\star(\bar\partial\phi) = w_i^{qm}\bar\partial\phi_i,$$

以及

$$\pi_i^\star(D'^\star\phi) = w_i^{qm} D'^\star\phi_i; \qquad \pi_i^\star(\bar\partial^\star\phi) = w_i^{qm}\bar\partial^\star\phi_i$$

其中，左边的 D' 是 D'_{h_L}，其余记号为 $D'\psi := \partial\psi - \partial(\varphi_{L,\ 0}\circ\pi_i)\wedge\psi$ 和 $\varphi_L = \sum q_i \log|z_i|^2 + \varphi_{L,\ 0\circ}$

(3) 令 $\Delta'' := [\bar\partial, \bar\partial^\star]$ 为关于 $(\omega_{\mathcal{C}}, h_L)$ 的拉普拉斯算子。于是有

$$\pi_i^\star \Delta''\phi = w_i^{qm} \cdot \Delta''_{sm}\phi_i,$$

其中 Δ''_{sm} 是局部非奇异情形 $(\pi_i^\star\omega_{\mathcal{C}}, \varphi_{L,0}\circ\pi_i)$ 下的拉普拉斯算子

证明。第一个不等式显然；对于其余部分，我们只讨论 (2) 中的第一个等式，因为其余各式的验证完全类似。此外，为简化记号，我们省略指标 i。根据定义，在 V 的局部范围内有

$$D'_{h_L}\phi = \partial\phi - \Big(\partial\varphi_{L,0} + \sum q_\alpha \frac{dz_\alpha}{z_\alpha}\Big)\wedge\phi \tag{2.17.1}$$

其经映射 π 拉回到 U 后等于

$$\pi^\star(D'_{h_L}\phi) = \partial\pi^\star\phi - \Big(\partial\varphi_{L,0}\circ\pi + m\sum q_\alpha \frac{dw_\alpha}{w_\alpha}\Big)\wedge\pi^\star\phi. \tag{2.17.2}$$

等式

$$\frac{1}{w^{mq}}\pi^\star(D'_{h_L}\phi) = \partial\frac{\pi^\star\phi}{w^{mq}} - \partial(\varphi_{L,0}\circ\pi)\wedge\frac{\pi^\star\phi}{w^{mq}} \tag{2.17.3}$$

立即可得，右端恰好等于 $D'\Big(\frac{1}{w^{qm}}\pi^\star\phi\Big)$。

□

例 2.18。我们所使用的术语有时可能会产生误导。令 L 为 $X=\mathbb{D}$ 上赋予度量 $\varphi_L=-\frac{1}{2}\ln|z|$ 的平凡丛。则定义在带标记圆盘上的形式 $\frac{dz}{z}$ 在我们定义 2.14 的意义下是光滑的。此外，其 ∂ 在锥意义下也是光滑的：要求是 $w\bar{\partial}\Big(\frac{dw}{w}|_{\mathbb{D}^\star}\Big)$ 延拓到整个圆盘上，而这显然成立。

命题 2.17 的一个直接推论是，锥意义下光滑的形式可以很好地进行分部积分。

推论 2.19. 设 α 和 β 分别是一个取值于 L 的 (p,q)-形式和一个取值于 $L^\star$ 的 $(n-p-1,n-q)$-形式，且二者在锥意义下光滑。则通常的分部积分公式成立

$$\int_X D'_{h_L}\alpha\wedge\beta=(-1)^{p+q+1}\int_X\alpha\wedge D'_{h_L^\star}\beta. \tag{2.19.1}$$

证明. 设 $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 是与 Y 对应的截断函数族。显然有

$$\int_X D'_{h_L}(\mu_\varepsilon\alpha)\wedge\beta=(-1)^{p+q+1}\int_X\mu_\varepsilon\alpha\wedge D'_{h_L^\star}\beta \tag{2.19.2}$$

对每个正的 ε 都成立。积分 $\int_X\mu_\varepsilon\alpha\wedge D'_{h_L^\star}\beta$ 和 $\int_X\mu_\varepsilon D'_{h_L}\alpha\wedge\beta$ 由勒贝格定理收敛到预期值，因为

$$\sup_{X\setminus Y}(|D'_{h_L}\alpha|+|\alpha|+|D'_{h_L^\star}\beta|+|\beta|)<\infty \tag{2.19.3}$$

（参见上文命题 2.17）。剩余项有界于

$$\int_X|\partial\mu_\varepsilon|dV_{\mathcal{C}} \tag{2.19.4}$$

相差一个一致常数因子——这是因为 (2.19.3)——且当 $\varepsilon\to0$ 时该项趋于零。 □

下面的推论非常有用。

推论 2.20. 设 ϕ 是定义在 X 上的一个 L 值 L^2 形式，且对于某个锥意义下光滑的形式 ψ，等式 $\Delta''(\phi)=\psi$ 在 X 上以流的意义成立。那么 ϕ 在锥意义下光滑。

证明。设 $V\subset X$ 是一个坐标开子集，使得由轨形结构给出局部分歧覆盖 $\pi\colon U\to V$。根据假设，我们有

$$\int_V\phi\wedge\overline{\Delta''\tau}e^{-\varphi_L}=\int_V\psi\wedge\overline{\tau}e^{-\varphi_L} \tag{2.20.1}$$

对于任意在 V 中具有紧支集且在轨形意义下光滑的 L 值形式 τ。式 (2.20.1) 中的拉普拉斯算子由 $\omega_{\mathcal{C}}$ 和 h_L 诱导。

我们首先证明

$$\int_U\frac{\pi^\star(\phi)}{w^{mq}}\wedge\overline{\Delta''_{sm}(\rho)}=\int_U\frac{\pi^\star(\psi)}{w^{mq}}\wedge\overline{\rho} \tag{2.20.2}$$

对于任意在 U 中具有紧支集的光滑形式 ρ。

In 事实上， m-分歧覆盖 $\pi\colon U\to V$ 诱导出伽罗瓦群 γ_1、$\cdots$、γ_m，它们是..... e auto态射 $\gamma_i\colon U\to U$ 在 V 上不变。由于 $\pi^*\psi$ 是 γ_i-不变的，我们有

$$\int_U\frac{\pi^\star(\psi)}{w^{mq}}\wedge\overline{\rho}=\frac{1}{m}\sum_i\int_U\pi^\star(\psi)\wedge\gamma_i^*\frac{\overline{\rho}}{w^{mq}}=\frac{1}{m}\sum_i\int_U\pi^\star(\psi)\wedge\gamma_i^*(\overline{w^{mq}\cdot\rho})\cdot e^{-\pi^*\varphi_L}$$

$$=\frac{1}{m}\int_U\pi^\star(\psi)\wedge\overline{G}\cdot e^{-\pi^*\varphi_L},$$

其中 $G:=\sum_i\gamma_i^*(w^{mq}\rho)$ 具有 π-不变性，且商 $\frac{G}{w^{mq}}$ 按构造是光滑的。根据定义， G 是某个形式 τ 在 V 上的拉回，在锥意义下光滑。因此我们有

$$\int_U\frac{\pi^\star(\psi)}{w^{mq}}\wedge\overline{\rho}=\int_V\psi\wedge\overline{\tau}\cdot e^{-\varphi_L}. \tag{2.20.3}$$

对于项 $\int_U \frac{\pi^\star(\phi)}{w^{mq}} \wedge \overline{\Delta''_{sm}(\rho)}$，我们采用相同的论证：

$$\int_U \frac{\pi^\star(\phi)}{w^{mq}} \wedge \overline{\Delta''_{sm}(\rho)} = \frac{1}{m}\sum_i \int_U \pi^\star(\phi) \wedge \gamma_i^* \frac{\overline{\Delta''_{sm}(\rho)}}{w^{mq}} = \frac{1}{m}\sum_i \int_U \pi^\star(\phi) \wedge \gamma_i^* (\overline{w^{mq} \cdot \Delta''_{sm}(\rho)}) \cdot e^{-\pi^*\varphi_L}$$

$$= \frac{1}{m}\int_U \pi^\star(\phi) \wedge \overline{H} \cdot e^{-\pi^*\varphi_L},$$

其中 $H := \sum_i \gamma_i^*(w^{mq}\Delta''_{sm}(\rho))$ 是 π-不变的，且商 $\frac{H}{w^{mq}}$ 光滑。于是存在一个定义在 V 上的形式 θ，它在锥意义下光滑，并且满足 $H = \pi^*\theta$。于是

$$\int_U \frac{\pi^\star(\phi)}{w^{mq}} \wedge \overline{\Delta''_{sm}(\rho)} = \int_V \phi \wedge \overline{\theta} \cdot e^{-\varphi_L}. \tag{2.20.4}$$

由于 Δ''_{sm} 与 γ_i 可交换，我们得到 $H = w^{qm}\Delta''_{sm}(\frac{G}{w^{qm}})$。结合命题 2.17，我们知道 V 上的 $\theta = \Delta''\tau$。将此与 (2.20.3)、(2.20.4) 和 (2.20.1) 结合，最终得到

$$\int_U \frac{\pi^\star(\phi)}{w^{mq}} \wedge \overline{\Delta''_{sm}(\rho)} = \int_U \frac{\pi^\star(\psi)}{w^{m}q} \wedge \overline{\rho}.$$

因此，等式

$$\Delta''_{sm}(\widehat{\phi}) = \frac{\pi^\star(\psi)}{w^m q} \tag{2.20.5}$$

在 U 上的分布意义下成立，其中 $\widehat{\phi} := \pi^\star(\phi)\, w^{mq}$ 此外还是 L^2。推论得证。

□

另一个推论是 Bochner 公式的以下版本。

命题 2.21. 设 ϕ 是一个取值于 L 的 (p,q)-形式，在轨形意义下光滑。则等式

$$\Delta''\phi = \Delta'\phi + [\theta_L, \omega_{\mathcal{C}}]\phi \tag{2.21.1}$$

在 $X \setminus Y$ 上逐点成立。此外，下面的 Bochner 公式成立。

$$\int_X |\bar\partial\phi|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} + \int_X |\bar\partial^\star\phi|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} = \int_X |D'\phi|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} + \int_X |D'^\star\phi|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}}$$
$$+ \int_X \langle [\theta_L, \omega_{\mathcal{C}}]\phi, \phi\rangle e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}}$$

证明。在每个局部分歧覆盖 $\pi_i :\ U_i \to V_i$ 上，根据命题 2.17，我们有

$$\pi_i^\star(\Delta''\phi) = w_i^{qm} \cdot \Delta''_{sm}\phi_i.$$

使用同类型的论证，我们推得

$$\pi_i^\star(\Delta'\phi) = w_i^{qm} \cdot \Delta'_{sm}\phi_i.$$

结合通常的 Bochner 等式 $\Delta''_{sm} = \Delta'_{sm} + [i\Theta_{\pi^\star\varphi_0}, \pi_i^\star\omega_{\mathcal{C}}]$，我们得到（2.21.1）。为了得到积分恒等式，我们首先注意到，如果将 ϕ wi 替换为 th $\mu_\varepsilon\phi$，其中截断函数 μ_ε 在引理 2.1 中定义。由于误差项，例如以下类型的项

$$\int_X \langle \bar\partial\mu_\varepsilon \wedge \phi, \bar\partial\phi\rangle e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} \tag{2.21.2}$$

¯趋于零，我们就完成了证明。注意，这里使用了函数 $|\phi||\partial\phi|e^{-\varphi_L}$ 有界这一事实（而不仅仅是 L^1）。□

还有一个推论如下。

推论 2.22. 设 τ 是一个取值于 (L, h_L) 且支集在 $X \setminus Y$ 中的光滑 (n,q)-形式。我们考虑（通常的）正交分解

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \tag{2.22.1}$$

其中 $\tau_1 \in$ 核 $\bar\partial$ 且 $\tau_2 \in$ (核$\bar\partial$)$^\perp$。

- 我们有
$$\bar{\partial}\tau_1 = 0, \qquad \bar{\partial}^\star \tau_1 = 0$$
当限制在 U，即 τ 的支集补集上时。换言之， $\tau_1|_U$ 是调和的，因此在锥意义下光滑。

- 作为第一条结论的推论，Bochner 公式对 τ^- 在 ∂ 的核上的投影 τ_1 成立。对于满足 $\sup |\rho|_{h_L,\ \omega_C} < \infty$ 的形式 ρ，结论更一般地成立。$X \setminus Y$

推论2.23. 如果 $i\Theta_{h_L} \geqslant 0$ （分别地， $i\Theta_{h_L} \leqslant 0$），且 ϕ 是一个取值于 L 的 Δ''-调和（n,q）-形式（分别地，$(0,q)$-形式），并且在锥意义下光滑。那么 $D_{h_L}\phi = D^\star_{h_L}\phi = 0$ 和 $\theta_L \wedge \phi = 0$。

证明 我们所要做的只是结合前面的结果：调和形式在锥形意义下光滑
因此 Bochner 公式适用，推论得证。 □

与光滑情形一样，我们可以在此设定中定义 Hodge算子 $\star$ 和 $\sharp = \overline{\star}$： 给定一个 L值(p,q)形式 s，存在唯一的 L^*值$(n-p,n-q)$形式，记为 $\sharp t$，使得对每个 L值(p,q)形式 s，都有

$$\langle s,t\rangle_{h_L} dV_{\omega_C} = s \wedge \sharp t,$$

其中， $s \wedge \sharp t$ 通过自然配对 $L \otimes L^\star \to \mathbb{C}$计算得到。下面给出一些结论，其证明留给感兴趣的读者。

命题2.24. 设 t 是一个 L值(p,q)形式，在锥形意义下光滑。那么， $\sharp t$ 是一个$L^\star$值$(n-p,n-q)$形式，在锥形意义下光滑（相对于$(\omega_C, h_L^\star)$）。

Prop 命题2.25. 设 t是一个取值于 L的 Δ''-调和形式。那么 $\sharp t$ 是一个取值于 L^* 取值with

通常的G$\mathring{a}$rding不等式和索博列夫不等式，以及Rellich嵌入定理，在锥形情形下仍然成立。通过(X,Δ)的局部一致化，可以利用通常版本证明这些结果。我们将陈述并讨论G$\mathring{a}$rding不等式，但在此之前，先引入适用于我们情形的Sobole夫空间类比概念。

定义2.26. 我们用$W^k_{p,q}(X,L)$表示由取值于 L的(p,q)型 L^2 形式 u 组成的空间，要求它们经分歧覆盖拉回 $\frac{\pi_i^\star u}{w_i^{qm}}$后属于通常的Sobole夫空间 $W^k(U_i)$。$W^k_{p,q}(X,L)$的Sobole夫范数通过单位分解以及局部形式 $\frac{\pi_i^\star u}{w_i^{qm}}$ 的通常Sobole夫范数来定义。

给定一个形式 $u \in W^k_{p,\ q}(X,L)$，我们可以在锥的意义下用光滑形式 u_ε 对其进行逼近。事实上，利用单位分解，只需考虑 u 支集包含于某个开集 V_i中的情形。设 z 是 U_i上的坐标。设 $\rho_\varepsilon(\|w\|^2)$ 是标准卷积函数。设 G 是覆盖 $\pi: U_i \to V_i$ 的伽罗瓦群，并令 $\gamma \in G$。那么 $\rho_\varepsilon(|w|^2)$ 是G-不变的。为简单起见，假设 $p=q=0$；于是我们考虑函数

$$v_\varepsilon(w) := \frac{(w^{-qm}\cdot \pi^\star u) \star \rho_\varepsilon}{w^{-qm}}.$$

注意， $\gamma(w)^{-qm} = c_\gamma \cdot w^{-qm}$，其中某个常数 c_γ 与 w 无关。于是

$$v_\varepsilon(\gamma(w)) = \frac{\int_{U_i}(\gamma(w)-\tau)^{-qm}\cdot \pi^\star u(\gamma(w)-\tau)\cdot \rho_\varepsilon(\|\tau\|^2)dV_\tau}{\gamma(w)^{-qm}}$$

$$= \frac{c_\gamma \int_{U_i}(w-\gamma^{-1}(\tau))^{-qm}\cdot \pi^\star u(w-\gamma^{-1}(\tau))\cdot \rho_\varepsilon(\|\tau\|^2)dV_\tau}{c_\gamma \cdot w^{-qm}}$$

$$= \frac{c_\gamma \int_{U_i}(w-\tau)^{-qm}\cdot \pi^\star u(w-\tau)\cdot \rho_\varepsilon(\|\gamma(\tau)\|^2)dV_{\gamma(\tau)}}{c_\gamma \cdot w^{-qm}} = v_\varepsilon(w),$$

这里我们用到了以下事实： π^*u、 $\rho_\varepsilon(\|w\|^2)$ 和 dV_w 都是 G-不变的。因此， v_ε 是 G-不变的，我们可以在 U_i 上找到某个形式 u_ε ，使得 $v_\varepsilon = \pi^* u_\varepsilon$。于是 u_ε 在锥意义下光滑，且 $\|u_\varepsilon - u\|_{W^k_{p,\,q}} \to 0$。

任意 (p,q)–形式的一般情形也类似，可通过在局部对其系数进行正则化得到。

我们有如下版本的 G°arding 定理。

¯ ¯定理 2.27. 设 $\Delta'' := [\partial^\star, \partial]$ 为由 $(h_L, \omega_{\mathcal{C}})$ 诱导的拉普拉斯算子。那么，对任意 $u \in L^2_{p,q}(X, L)$，若 $\Delta'' u \in W^k_{p,q}(X, L)$，则 $u \in W^{k+2}_{p\,q}(X, L)$，并且

$$\|u\|_{k+2} \leqslant C_k(\|\Delta'' u\|_k + \|u\|_0).$$

证明。我们首先注意到，如果形式 u 的紧支集包含于集合 V_i 之一中，那么这直接由通常的 G° arding 不等式得出。此外，命题 2.17 中建立的“字典”表明，可以直接在 X 上定义空间 $\big(W^k_{p,q}(X, L)\ \|\cdot\|_k\big)$，方法是使用由 h_L 和 $\omega_{\mathcal{C}}$ 诱导的、作用于 L-值形式的协变导数。一般情形可通过单位分解论证得到。□

因此，在锥形情形下霍奇分解仍然成立，例如可参见 [6], 第 6 章中的证明。

定理 2.28. 设 $(L, h_L) \to X$ 是一个配备度量 h_L 的线丛，且满足本节开头的条件 (i)-(ii)。设 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是一个具有锥形奇点的 K ¨ahler 度量，如 (2.10.8) 中所示。那么有如下霍奇分解

$$L^2_{p,q}(X, L) = \mathrm{Ker}\Delta''_{h_L} \oplus \mathrm{Im}\,\bar\partial \oplus \mathrm{Im}\,\bar\partial^\star \tag{2.28.1}$$

and

$$\mathcal{C}^\infty_{p,q}\big(X, (L, h_L)\big) = \mathrm{Ker}\Delta''_{h_L} \oplus \mathrm{Im}\,\Delta''_{h_L}, \tag{2.28.2}$$

其中 $\mathcal{C}^\infty_{p\,,\,q}\big(X、(L, h_L)\big)$ 和 $L^2_{p,\,q}(X, L)$ 分别是锥意义下光滑的 L 值 (p,q) 形式空间以及 L^2。

我们不对这一结论给出正式的论证，因为它与非奇异情形一样可以推出（通过结合上文提到的三大定理使用拉普拉斯算子的椭圆性）。类似地，存在一个正常数 $C > 0$ ，使得熟知的椭圆估计

$$\int_X |u|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} \leqslant C \int_X |\Delta''_{h_L} u|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} \tag{2.28.3}$$

对于所有与 $\mathrm{Ker}\Delta''_{h_L}$ 正交的 L^2-形式均成立，这是相应的非奇异情形中的陈述的推论。

最后，我们汇集一些关于数据 (L, h_L) 和 $(X, \omega_{\mathcal{C}})$ 的 L^2 理论的结果。本节首先介绍其中最重要的结果，即 J.-P. Demailly 得出的以下陈述。

定理 2.29。 [6] 设 $v \in L^2_{n,q}(X, L)$ 是一个取值于 L 的 (n,q)-形式，满足 $\bar\partial v = 0$。假设 $i\Theta(L, h_L) \geqslant 0$，且系数 $q_i \in]0, 1[$。此外，假设可积性条件

$$\int_X \langle [\theta_L, \Lambda_{\omega_{\mathcal{C}}}]^{-1} v, v\rangle e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} < \infty$$

成立。于是存在 $u \in L^2_{n,q-1}(X, L)$，使得

$$\bar\partial u = v, \qquad \int_X |u|^2 e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}} \leqslant \int_X \langle [\theta_L, \Lambda_{\omega_{\mathcal{C}}}]^{-1} v, v\rangle e^{-\varphi_L} dV_{\mathcal{C}}. \tag{2.29.1}$$

这是通过逼近过程（化归到完备情形）完成的，并且在更一般的情形下仍然成立，见 [7]。

In o在我们的具体情形中，一个重要的观察是，只需解这个方程 n

$$\bar\partial u = v \tag{2.29.2}$$

在 $X \setminus Y$ 上按分布的意义成立，前提是 u 属于 L^2。同样，这可以像通常的非奇异情形那样看出。事实上，设 ϕ 是一个取值于丛 L的对偶丛 $L^\star$ 上的任意光滑 $(0, n-q)$ 形式。我们有

$$\int_X \bar{\partial} u \wedge (\mu_\varepsilon \phi) = \int_X v \wedge (\mu_\varepsilon \phi) \tag{2.29.3}$$

因此，为了 证明 (2.29.2) 在 X 上处处成立，只需证明

$$\lim_\varepsilon \int_X u \wedge \phi \wedge \bar{\partial} \mu_\varepsilon = 0. \tag{2.29.4}$$

然而，根据柯西-施瓦茨不等式，这显然成立：我们有 $\sup_{X\setminus Y} |\phi|^2_{\omega_C} e^{\varphi_L} < \infty$，因为与 h_L 的奇点相对应的系数 q_i 为正，且 ϕ 在 X 上光滑。因此，(2.29.4) 归结为证明 $\int_X |\bar{\partial}\mu_\varepsilon|^2_{\omega_C} dV_C$ 的极限等于零。但通过一个简单的计算即可看出这一点，计算过程从略。

我们引入以下概念，它可以说是对我们随后讨论的例子的形式化。

定义 2.30. 一个取值于 (L, h_L) 的 (p,q)-流 T，就是一个取值于 L 的流，并且存在常数 $C > 0$ 和正整数 d，使得不等式

$$\left| \int_X T \wedge \overline{\star \phi} e^{-\varphi_L} \right|^2 \leqslant C \sum_{s=0}^{d} \sup_{X\setminus Y} |\nabla^s \phi|^2_{h_L, \omega_C} \tag{2.30.1}$$

对所有取值于 L 且同时在锥意义下光滑的 (p,q)-形式 ϕ 均成立。这里， h_0 是 L 上的非奇异度量。

Re注 2.31. 我们也可以不使用表达式 (2.30.1)，而是说 T 作用于 L *-valu于 $(n-p, n-q)$ 形式在锥意义下光滑。

注 2.32. 定义 2.30 中的流 T 比一个 L-值流“更奇异”，因为它只作用于在锥意义下光滑的形式。

条件 (2.30.1) 等价于以下命题。

命题 2.33. 一个取值于 (L, h_L) 的 (p,q)-流 T 由 U_i 上的不变流 T_i（其中 $i \in I$）组成，并满足：对于每个紧 $K \subset U_i$，存在一个常数 $C_K > 0$和一个数 $d \in \mathbb{N}$，使得以下条件成立

$$\left| \int_{U_i} \frac{1}{w_i^{qm}} T_i \wedge \overline{\rho}_i \right|^2 \leqslant C_K \sum_{s=0}^{d} \sup_{V_i \setminus Y} |\nabla^s \rho_i|^2 \tag{2.33.1}$$

对于所有取值于 L、支集紧包含于 V_i 且在锥意义下光滑的 $(n-q, n-p)$-形式 ρ，其中 $\rho_i := \frac{1}{w_i^{mq}} \pi_i^\star(\rho)$。

证明。这是由于我们有

$$\sum_{s=0}^{d} \sup_{V_i \setminus Y} |\nabla^s_{h_L} \rho|^2 \simeq \sum_{s=0}^{d} \sup_{U_i} |\nabla^s \rho_i|^2, \tag{2.33.2}$$

并且通过与命题 2.17 中相同的论证即可看出。 □

注 2.34. 我们有关于 T 的另一种描述，它用到了局部流 (T_i)。设 ϕ 是一个取值于 L 的形式，在锥意义下光滑，且设 T 是定义 2.30 中的流。那么我们有

$$\int_X T \wedge \overline{\phi} e^{-\varphi_L} = \sum_{i \in I} \frac{1}{\delta_i} \int_{U_i} \frac{\theta_i \cdot (T_i \wedge \overline{\phi}_i)}{w_i^{qm}} \tag{2.34.1}$$

这里回顾一下，$\phi_i = \dfrac{1}{w_i^{mq}}\pi_i^\star(\phi)$ 和 (θ_i) 是与 $(V_i)_{i\in I}$ 对应的单位分解。整数 δ_i 是映射 π_i 的映射次数。注意，利用 L_0 上的光滑度量 h_0，可将 $\dfrac{T_i\wedge\overline{\phi}_i}{w_i^{qm}}$ 视为 U_i 上的一个 (n,n)-流：

$= L - \sum q_i Y_i$，其中 $h_0 := h_L e^{\sum q_i \text{对数}|s_{Y_i}|^2}$。

2.3.1. 例子。接下来我们讨论几个例子。

• 设 Θ 是 X上的一个光滑的、取值于 L 的 (p,q)-形式。一般而言，Θ 在锥形意义下并不光滑——$p=n$ 且 $q_i<1$ 的情形是例外。然而，Θ 通过其主值在锥形意义下诱导出如下一个流：

$$\int_X \Theta\wedge\overline{\rho} := \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i \frac{1}{\delta_i}\int_{U_i}\mu_\varepsilon\frac{\theta_i}{w_i^{qm}}\pi_i^\star\Theta\wedge\overline{\rho}_i, \tag{2.34.2}$$

其中 θ_i 是一个单位分解。

• 更一般地，设 $E=\sum E_i$ 是 X 上的一个除子，使得 $E+Y$是简单正规交叉（因此特别地，E和Y 没有任何公共分支）。设 Θ 是 X 上一个取值于 L的 (p,q)-形式，在 $E+Y$上具有对数极点，并且在 $X\setminus(E+Y)$ 上光滑。 Θ自然地诱导出如下一个 (L,h_L)-值流：

$$\int_X \Theta\wedge\overline{\rho} := \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i \frac{1}{\delta_i}\int_{U_i}\mu_\varepsilon\frac{\theta_i}{w_i^{qm}}\pi_i^\star\Theta\wedge\overline{\rho}_i. \tag{2.34.3}$$

这里我们不详细说明等式 (2.34.2) 和 (2.34.2) 定义了锥形情形下的流这一事实的验证，而是参见附录，那里对此进行了详尽讨论。

• 设 $E=\sum E_i$ 和 W 分别是 X 上的一个除子和一个额外的超曲面，且 $E+W$是简单正规交叉的。若 α是 W上沿 $E|_W$具有对数极点的一个取值于 L的 $(n-1,0)$-形式，则相应的流由下式定义

$$\int_X T\wedge\overline{\phi} := \sum_i \frac{1}{\delta_i}\int_{W_i}\theta_i\frac{1}{w_i^{qm}}\pi_i^\star\alpha\wedge\overline{\phi}_i \tag{2.34.4}$$

其中 $W_i := \pi_i^{-1}(W\cap V_i)$。由于 α 的类型，容易验证 (2.30.1) 成立（其中 $d=0$）。

• 设 λ是一个取值于丛 $L+kE$的光滑 $(n,1)$ 形式。上面第一条中引入的流的一个更一般的版本如下

$$\int_{U_i}\frac{1}{w_i^{qm}}T_i\wedge\overline{\phi} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{d_i}\int_{U_i}\frac{1}{w_i^{qm}}\pi_i^\star\Big(\theta_\varepsilon\frac{\lambda}{s_E^k}\Big|_{V_i}\Big)\wedge\overline{\phi} \tag{2.34.5}$$

其中 θ_i 是一个在 $X\setminus E$ 中具有紧支集、并收敛到该开子集 X上的恒等函数的截断函数序列。通过使用涉及 θ_ε 的泰勒展开的论证，我们推得由 (2.34.5) 定义的整体对象 T 具有如下性质

$$\left|\int_X T\wedge\overline{\phi}e^{-\varphi_L}\right|^2 \leqslant C\sum_{i\in I}\sum_{s=0}^{k}\sup_{U_i}|\nabla^s\phi_i|^2. \tag{2.34.6}$$

其中 ϕ是一个取值于 L 的 $(n-1,0)$ 型形式，在锥意义下光滑，而 ϕ_i在 (2.14.1) 中定义。同样，(2.34.6) 的验证过程详见附录末尾。

下一个命题可视为附录中所用论证类型的“开胃菜”。

Le题 2.35. 设 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}$ 中单位圆盘上的一个负的 $\mathcal{C}^\infty$ 实函数。定义

$$\mathcal{D}_\varepsilon := \{z\in\mathbb{D} : \varepsilon < |z|e^{-\phi(z)} < 2\varepsilon\},\qquad \mathcal{D}_{\varepsilon,r} := \{z\in\mathbb{D} : \varepsilon < |z|e^{-\phi(z)} < r\}.$$

以下结论成立。

(a) *For any smooth function f and any $\delta<1$ we have* $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathcal{D}_\varepsilon} f(z)\dfrac{d\lambda}{z|z|^{2\delta}} = 0.$

(b) 对于任意光滑函数 f、任意 $\delta < 1$ 以及任意固定的 $r > 0$，复数集

$$\left(\int_{\mathcal{D}_{\varepsilon,r}} f(z)\frac{d\lambda}{z|z|^{2\delta}}\right)_{\varepsilon>0} \quad \textit{is bounded.}$$

证明。我们讨论 (a) 点。首先要指出，对于常函数 f，只需证明所讨论的极限为零（正如我们通过写出 $f(z) = f(0) + zf_1(z) + \overline{z}f_{\overline{1}}(z)$ 并注意到第二项和第三项显然成立所看到的那样）。

于是我们取 $f = 1$；由于 φ 是负的，我们可以写成

$$\int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \frac{d\lambda}{z|z|^{2\delta}} = \int_{\varepsilon<|z|<2\varepsilon} \frac{d\lambda}{z|z|^{2\delta}} - \int_{2\varepsilon e^{\phi(z)}<|z|<2\varepsilon} \frac{d\lambda}{z|z|^{2\delta}} + \int_{\varepsilon e^{\phi(z)}<|z|<\varepsilon} \frac{d\lambda}{z|z|^{2\delta}} \tag{2.35.1}$$

右端的第一项等于零。我们可以假设 $1 \leqslant 2\delta < 2$，只需证明

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon(1-C\varepsilon)<|z|<\varepsilon} \frac{d\lambda}{|z|^{1+2\delta}} = 0, \tag{2.35.2}$$

其中 C 是依赖于函数 φ 的正常数。这显然成立。
引理证明的其余部分留给感兴趣的读者。

□

作为应用，我们得到以下结果。设 β 是一个取值于 L、类型为 $(n-1,1)$ 且沿 $E+Y$ 有对数极点的形式。那么我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_X \theta_\varepsilon D'\beta \wedge \overline{\gamma} e^{-\varphi_L} = 0 \tag{2.35.3}$$

对任意全纯 L^2 形式 γ，其中 θ_ε 是标准截断函数。

3. De Rham-Kodaira decompostion for conic currents

在本小节中，我们想要说明，de Rham-Kodaira 在 [9] 中关于紧流形上流的霍奇分解的结果，在我们的情形下有完全类似的结论，即对于第 2.2 小节所设定情形中的 $(X,\omega_{\mathcal{C}})$ 和 (L,h_L)。

根据定理 2.28，对于任意锥意义下光滑的 L 值 (p,q)-形式 ϕ，我们有

$$\phi = \mathcal{H}(\phi) + \Delta''\psi \tag{3.0.1}$$

其中 $\mathcal{H}(\phi)$ 是 ϕ 的调和部分，而 ψ 是一个 L 值 (p,q)-形式。若在 ψ 上加一个调和形式，等式 (3.0.1) 仍然成立。因此，与标准情形一样，我们引入格林算子。

定义 3.1。我们用 $\mathcal{G}(\phi)$ 表示唯一的 L 值 (p,q)-形式，它与调和空间正交，并且满足

$$\phi = \mathcal{H}(\phi) + \Delta''\big(\mathcal{G}(\phi)\big) \tag{3.1.1}$$

成立。

注 3.2。由于调和形式特别地在锥意义下光滑，我们推知 $\mathcal{G}(\varphi)$ 也具有这一性质。

容易看出，$\mathcal{G}$ 与 ∂ 可交换。因此，如果 $\partial\phi = 0$，那么 $\partial\mathcal{G}(\phi) = 0$，于是等式 (3.0.1) 变为

$$\phi = \mathcal{H}(\phi) + \bar{\partial}S \tag{3.2.1}$$

其中 $S := \partial^\star\mathcal{G}(\phi)$。对于取值于 L 的对偶 $L^\star$ 的形式，同样成立。

设 T 是一个取值于 (L,h_L) 的 (p,q)-流。与非扭曲情形 [9]（即没有任何“L”）完全一样，我们可以将 T 的调和部分定义为

$$\mathcal{H}(T) := \sum_i \langle T,\xi_i\rangle\xi_i \tag{3.2.2}$$

其中，$(\xi_i)_i$ 是 L^2 上取值于 L、类型为 (p,q) 的调和形式的一组基，而 (3.2.2) 中的记号表示

$$\langle T,\xi\rangle := \int_X T\wedge\overline{\gamma_\xi}, \tag{3.2.3}$$

并且 $\gamma_\xi := \star\xi$ 因此 $\overline{\gamma_\xi} = \sharp\xi$ 成为一个取值于 $L^\star$ 的 $(n-p,n-q)$ 形式。

设 T 是一个取值于 (L,h_L) 的 (p,q)-流，参见定义 2.30。接下来，我们通过对偶性由以下公式在 T 上定义格林算子

$$\int_X \mathcal{G}(T)\wedge\overline{\star\phi} := \int_X T\wedge\overline{\star\mathcal{G}(\phi)}, \tag{3.2.4}$$

对于任意取值于 L 的 (p,q)-形式 ϕ，其在锥意义下光滑。这诱导出流 T 的一个分解，正如通常情形中那样

$$T = \mathcal{H}(T) + \Delta''\big(\mathcal{G}(T)\big). \tag{3.2.5}$$

定义 3.3。等式 (3.2.5) 称为流 T 的德拉姆-小平分解。

备注 3.4。若进一步 T 是闭的，则我们可以写成

$$T = \mathcal{H}(T) + \bar\partial T_1 \tag{3.4.1}$$

其中 $T_1 = \bar\partial^\star\big(\mathcal{G}(T)\big)$。说明如下：由 (2.11.1)，我们知道 $\mathcal{H}(T)$ 是 $\bar\partial$-闭的。因此有 $\Delta''\bar\partial\big(\mathcal{G}(T)\big) = 0$。由此可得，$\bar\partial\big(\mathcal{G}(T)\big)$ 在轨形意义下光滑，进而通过通常的分部积分得到 $\bar\partial^\star\bar\partial\big(\mathcal{G}(T)\big) = 0$。

我们有以下兼容关系，联系了上文引入的概念。

引理 3.5. 设 s 是一个取值于 L 的 (p,q)-流，t 是一个取值于 $L^\star$ 的 $(n-p,n-q)$-形式，且在锥意义下光滑。则有

$$\int_X \mathcal{G}(s)\wedge t = \int_X s\wedge\mathcal{G}(t). \tag{3.5.1}$$

证明. 首先注意到，由于 $\mathcal{G}(s)$ 与调和空间正交，根据命题 (2.25)，我们有

$$\int_X \mathcal{G}(s)\wedge\mathcal{H}(t) = 0.$$

于是我们有

$$\int_X \mathcal{G}(s)\wedge t = \int_X \mathcal{G}(s)\wedge\Delta''(\mathcal{G}t) = \int_X \Delta''(\mathcal{G}(s))\wedge\mathcal{G}(t) = \int_X s\wedge\mathcal{G}(t). \tag{3.5.2}$$

□

3.1. 某些流的 Green 核的正则性。回到由带有对数极点的形式 α 诱导的流这一情形，Green 流 $\mathcal{G}(\alpha)$ 具有若干有趣的性质，我们将在下面的命题中归纳这些性质。

命题 3.6. 设 $E=\sum E_i$ 是 X 上的除子，且 $E+Y$ 是简单正规交叉。设 α 是 $X\setminus(E\cup Y)$ 上一个光滑的、取值于 L 的 (n,q)-形式，其沿 $E+Y$ 有对数极点。以下陈述成立。

(1) 流 $\mathcal{G}(\alpha)$ 是定义在 $X\setminus(E\cup Y)$ 上、取值于光滑 L 的 (n,q)-形式，并且在 X 上还是 L^2。(2) 对每个指标 i，局部形式 $v_i := \dfrac{1}{\prod w_i^{q_i m}}\pi_i^\star(\mathcal{G}(\alpha))$ 是下列类型方程的一个解，其中 u_i 是沿 $E+Y$ 具有对数极点的 (n,q)-形式。(3) 对每个 $\delta>0$，形式 v_i 都属于 Sobolev 空间 $W^{2,\,2-\delta}$（即它有两个导数，关于$L^{2-\delta}$

$$\Delta''_{sm}(v_i) = u_i$$

).

(4) 形式 $\tau_i := \partial^\star v_i$ 是 L^2，并且关于变量 w_j 也“光滑”，对每个$j = r+1, \ldots, n$ 都成立，其含义是它可以作泰勒展开

$$\tau_i(w) = \sum_{|I|+|J|\leqslant N-1} w'^{\alpha}\overline{w}'^{\beta}\tau_{I\overline{J}}(w'') + \sum_{|I|+|J|=N} w'^{\alpha}\overline{w}'^{\beta}\tau_{I\overline{J}}(w)$$

其中

$$w' = (w_{r+1}, \ldots, w_n), \qquad w'' = (w_1, \ldots, w_r)$$

且 $\tau_{I\overline{J}}$ 是 L^2。

证明。为了证明第 (1) 点，我们首先注意到

$$\int_X |\mathcal{G}(\Phi)|^2 e^{-\varphi} \leqslant C \int_X |\Phi - \mathcal{H}(\Phi)|^2 e^{-\varphi} \tag{3.6.1}$$

由庞加莱不等式可得。不等式 (3.6.1) 对 (n,q)-形式成立，并推出

$$\int_X |\mathcal{G}(\Phi)|^2 e^{-\varphi} \leqslant C \int_X |\Phi|^2 e^{-\varphi} \tag{3.6.2}$$

因为 $\mathcal{H}(\Phi)$ 的 L^2 范数小于 Φ 的 L^2 范数。在除子 $E+Y$ 的支集补集上， $\mathcal{G}(\alpha)$ 的光滑性是标准结果。于是， $\mathcal{G}(\Phi)$ 的二阶索博列夫范数由 (3.6.2) 的右端有界。

根据流 $\mathcal{G}(\alpha)$ 的定义（如 (3.2.4) 所示），可得

$$\left|\langle \mathcal{G}(\alpha), \overline{\Phi}\rangle\right| \leqslant \|\alpha\|_{L^{2-\delta}} \|\mathcal{G}(\Phi)\|_{L^{\frac{2-\delta}{1-\delta}}}. \tag{3.6.3}$$

现在， $\mathcal{G}(\Phi)$ 的 $L^{\frac{2-\delta}{1-\delta}}$-范数显然受到上述索博列夫范数的控制（至少当 δ 足够小时），因此最终得到

$$\left|\langle \mathcal{G}(\alpha), \overline{\Phi}\rangle\right|^2 \leqslant C_\delta \|\Phi\|_{L^2}^2 \tag{3.6.4}$$

这表明 $\mathcal{G}(\alpha)$ 属于 L^2。

第 (2) 点的第一部分（即形式 v_i 所满足的方程）已在命题 2.17 中讨论过。右端是一个具有对数极点的形式这一事实是显然的，因此我们略去细节。

第 (3) 点和第 (4) 点稍微更有趣一些，我们将给出完整的处理。首先，前面给出的论证使我们可以假设 (3.6.1) 中的形式 v_i 属于 L^2。结合在 [2], 定理 7.1 中建立的 G°ard 不等式，我们得到

$$\|v_i\|_{W^{2,2-\delta}} \leqslant C_p(\|v_i\|_{L^{2-\delta}} + \|u_i\|_{L^{2-\delta}}) \tag{3.6.5}$$

对于任意 $0 < \delta < 2$。因此第 (3) 点得证 d.

To p为了证明第 (4) 点，设 Ξ 是一个具有如下常系数的局部向量场 g
shape

$$\Xi = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial w_i}. \tag{3.6.6}$$

方程 (3.6.1) 表明，我们有

$$\Delta''_{sm}(\Xi \cdot v_i) = \Xi \cdot u_i + \mathcal{L}(v_i) \tag{3.6.7}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是一个二阶算子。在 (3.6.7) 中，我们用 $\Xi \cdot v_i$ 表示这样一个形式：其系数是 v_i 的系数沿 Ξ 方向的导数。

由索博列夫嵌入定理可知， $\Xi(v)$ 属于 L^2 （条件是 $\delta \ll 1$）。由 (3.6.7) 可知， $\Xi(v)$ 在 L^p 中有二阶导数。我们可以迭代这一方法，从而推得，对于任意 m， $\Xi^m(v) \in L^2$。

最后，利用傅里叶展开的常见论证可知， v_i 具有（4）中所要求的泰勒展开。出于记号方面的考虑，我们这里只讨论一个特殊情形。设$f \in L^2(\mathbb{D})$是定义在 $\mathbb{R}^2$中的单位圆盘上的平方可积函数，并且对于任意正整数 m， $\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}(f)$都属于 L^2 。

我们考虑 f 与通常的正则化核的卷积，并且像往常一样，可以假设这些函数是1-周期的。于是我们写作

$$f_\varepsilon(x,y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\varepsilon,k}(y)e^{\sqrt{-1}kx} \tag{3.6.8}$$

以及 b y 假设，结合卷积及其导数的 L^2 收敛性，我们在
特别是在 pa
rticular 对任意 $m\in\mathbb{Z}_+$，我们有

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{2m}\int_{|y|<1}|f_{\varepsilon,k}(y)|^2 d\lambda(y)<C_m \tag{3.6.9}$$

其中 C_m 是一个与 ε无关的常数。
(3.6.9) 的第一个推论是存在 $C>0$ 使得

$$\int_{|y|<1}|f_\varepsilon(0,y)|^2 d\lambda(y)<C \tag{3.6.10}$$

通过观察可知

$$\left|\sum_{k=-N}^{N} f_{\varepsilon,k}(y)\right|^2 \leqslant 2\sum_{k=-N}^{N} k^2|f_{\varepsilon,k}(y)|^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$$

并进行积分。
接下来我们将 $f_\varepsilon(x,y)=f_\varepsilon(0,y)+x\int_0^1\partial_1 f_\varepsilon(tx,y)dt$ 写成。请注意，我们已经知道右端第一项的 L^2 范数是一致有界的，因此它弱收敛于 L^2 中的某个函数。接下来我们将分析另一个函数；注意

$$\int_{\mathbb{D}}\left|\int_0^1\partial_1 f_\varepsilon(tx,y)dt\right|^2 d\lambda\leqslant\int_0^1 dt\int_{\mathbb{D}}\left|\partial_1 f_\varepsilon(tx,y)\right|^2 d\lambda \tag{3.6.11}$$

这等于

$$\int_{\mathbb{D}}\log\frac{1}{|x|}\left|\partial_1 f_\varepsilon(x,y)\right|^2 d\lambda. \tag{3.6.12}$$

由 H¨lder 不等式，表达式 (3.6.12) 小于

$$C_\delta\int_{|y|<1}dy\left(\int_{|x|<1}\left|\partial_1 f_\varepsilon(x,y)\right|^{2+2\delta}dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}}, \tag{3.6.13}$$

另一方面，对于每个固定的 y，我们有

$$\frac{1}{C}\left(\int_{|x|<1}\left|\partial_1 f_\varepsilon(x,y)\right|^{2+2\delta}dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}}\leqslant\int_{|x|<1}\left|\partial_1 f_\varepsilon(x,y)\right|^2 dx+\int_{|x|<1}\left|\partial_{11} f_\varepsilon(x,y)\right|^2 dx \tag{3.6.14}$$

by SSobolev 不等式。对 (3.6.14) 关于 y 积分可知，(3.6.1 1)
是 一致有界的。
一般情形的论证完全类似——只是指标的数量更多——我们不再提供任何进一步的细节。□

设 $E=\sum E_i$ 是 X 上的一个除子，使得 $E+Y$ 为简单正规交叉。接下来考虑如下类型的流

$$T:=\frac{\lambda}{s_E}-\sum_i T_{\gamma_i}, \tag{3.6.15}$$

其中，λ 是一个取值于 $L+E$ 的形式，在锥意义下光滑；γ_i 是在 E_i 上取值于 L 的形式，在锥意义下光滑；而 T_{γ_i} 是由 γ 定义的 X 上的流，参见第 2.3.1 小节。接下来我们将确立 $\mathcal{G}(T)$ 的若干性质。具体而言，我们将讨论以下结果。

命题 3.7。设 T 是由 (3.6.15) 定义的流。相应的流 $\mathcal{G}(T)$ 在除子 $E+F$ 的补集上光滑，而且它还是 L^2，即

$$\int_X |\mathcal{G}(T)|^2_{\omega_C} e^{-\varphi} dV_{\omega_C} < \infty. \tag{3.7.1}$$

证明。首先指出， T 比例如由带对数极点的形式所诱导的流更为奇异，因此， $\mathcal{G}(T)$的正则性性质远弱于命题 3.6 中所确立的性质，这是自然的。

根据定义，我们有

$$\langle \mathcal{G}(T), \Phi \rangle = \int_X \frac{\lambda}{s_E} \wedge \overline{\mathcal{G}(\Phi)} e^{-\varphi_L} + \sum_i \int_{E_i} \gamma_i \wedge \overline{\mathcal{G}(\Phi)} e^{-\varphi_L}, \tag{3.7.2}$$

and 和的第一部分的绝对值至多为一个常数乘以$\|\Phi\|_{L^2}$： 这 is a co证明命题 3.6 第一条时所得到的序列。

现在处理 (3.7.2) 右端的第二部分。设 Γ_i 是 L^2，并且是 L 值形式 γ_i 的光滑延拓。可以通过单位分解来构造这一延拓——注意， L^2 条件恰好因为 $E+Y$ 是简单正规交叉除子而成立。对于每个 i，我们可以写成

$$\int_{E_i} \gamma_i \wedge \overline{\mathcal{G}(\Phi)} e^{-\varphi_L} = \int_X \left(\theta_i + dd^c \log |s_i|^2\right) \wedge \Gamma_i \wedge \overline{\mathcal{G}(\Phi)} e^{-\varphi_L}. \tag{3.7.3}$$

其中 θ_i 是与除子 E_i 相关联的丛的曲率，该丛赋有非奇异度量。

在 $\theta_i \wedge \Gamma_i$ 相对于 h_L 是 L^2 的条件下，(3.7.3) 右端的第一项由 Φ 的 L^2 范数有界。

对于 (3.7.3) 右端的第二项，我们使用斯托克斯定理，并需要估计

$$\int_X \frac{\partial s_i}{s_i} \wedge \bar{\partial} \Gamma_i \wedge \overline{\mathcal{G}(\Phi)} e^{-\varphi_L}, \qquad \int_X \frac{\partial s_i}{s_i} \wedge \Gamma_i \wedge \overline{D' \mathcal{G}(\Phi)} e^{-\varphi_L}. \tag{3.7.4}$$

为此，我们只需使用 G˚arding 不等式（与局部分歧映射复合之后），便可推出

$$\|\mathcal{G}(\Phi)\|^2_{W^{2,2}} \leqslant C \left(\|\Phi\|^2_{L^2} + \|\mathcal{G}(\Phi)\|^2_{L^2}\right). \tag{3.7.5}$$

由索 Sobolev 不等式，只要 $\delta \ll 1$， $\mathcal{G}(\Phi)$ 和 $D'\mathcal{G}(\Phi)$ 的 $L^{2+\delta}$ 范数就由 (3.7.5) 的左端有界。至此，我们的命题得证。□

4. Proof of Theorem 1.1 and Theorem 1.2

4.1. 一般消失定理。本节的计划是证明定理 1.1 和定理 1.2。我们将在本小节证明定理 1.1。作为应用，我们将在下一小节证明定理 1.2。我们希望证明：

定理 4.1. [= 定理 1.1] 设 X 为一 n 维紧致 K¨ahler 流形， E 为 X上的一个简单正规交叉除子，s_E 为 E的典范截面。设 (L, h_L) 是 X 上的一个全纯线丛，使得

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum q_i [Y_i] + \theta_L,$$

其中 $q_i \in]0,\ 1[\cap \mathbb{Q}$, $E + \sum Y_i$ 是简单正规交叉的，且形式 θ_L 光滑、半正。

设∂闭光滑 (n,q)-形式，其值取于 $L+E$。若存在 β_1 和 β_2，两个取值于L的 $(n-1,q)$-形式和 $(n-1,q-1)$-形式，分别沿 $E+\sum Y_i$ 有对数极点，使得

$$\frac{\lambda}{s_E} = D'_{h_L} \beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2 \qquad on\ X \setminus (E + \sum Y_i), \tag{4.1.1}$$

¯那么形式 λ 是 ∂-恰当的，即类 $[\lambda] = 0 \in H^q(X, K_X + L + E)$。

R请注意， $E=0$ 的情形相当简单：它可由定理 2.2 和标准论证得出 t.

定理 4.1 的证明。我们考虑一个在 $X \setminus Y$ 中具有紧支集的测试形式 $\varphi \in C^{\infty}_{(0,n-q)}\big(X, -L-E\big)$。

于是我们得到正交分解

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad \varphi_1 \in \operatorname{Ker}\bar{\partial}, \quad \varphi_2 \in (\operatorname{Ker}\bar{\partial})^{\perp} \tag{4.1.2}$$

其中， X 上的参考度量为 $\omega_{\mathcal{C}}$。从 $-L$ 赋予对偶度量 h_L^*，而$-E$ 赋予一个光滑的任意度量。

我们的证明依赖于以下两个命题：

$$\int_X s_E(D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2) \wedge \varphi_1 = 0 \tag{4.1.3}$$

此外，存在一个常数 $C > 0$ 使得

$$\int_X |\varphi_2|^2 dV_{\mathcal{C}} \leqslant C \int_X |\bar{\partial}\varphi_2|^2 dV_{\mathcal{C}} = C \int_X |\bar{\partial}\varphi|^2 dV_{\mathcal{C}}. \tag{4.1.4}$$

为证明 (4.1.3)，首先注意到，由推论 ?? 可知，形式 φ_1 在锥意义下光滑。于是 $s_E \cdot \varphi_1$ 也具有相同性质。此外， $\partial(s_E\varphi_1) = 0$，且 $s_E\varphi_1$ 沿着 E消失。因此，由下文的引理 4.3 可得 (4.1.3)。对于 (4.1.4)，我们只需使用定理 2.28，它蕴含 ∂ 算子的像是闭的（无论$L^\star$ 的曲率是否为负）。

接下来我们考虑线性映射

$$\bar{\partial}\varphi \to \int_X s_E(D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2) \wedge \varphi.$$

由 (4.1.3) 和 (4.1.4) 可知，它是有界的。根据标准泛函分析，存在一个形式 $f \in L^2_{(n,q-1)}(X, L+E)$，使得

$$\int_X s_E(D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2) \wedge \varphi = \int_X \bar{\partial}\varphi \wedge f.$$

因此我们推得等式

$$\lambda = s_E(D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2) = \bar{\partial} f \qquad \text{on } X \setminus Y. \tag{4.1.5}$$

由于 (4.1.5) 中的左端是光滑的，所以它是 L^2。此外， f 也是 L^2。利用定理 2.29 之后的注记，我们知道 (4.1.5) 在全空间 X上成立。因此，定理 4.1 归结为下面的引理 4.3。□

下面的关键引理 4.3 是在我们的情形下对 [14, 引理 .2.3] 的推广。在陈述该引理之前，我们引入一些进一步的记号。设 γ 是一个取值于 L的 (p,q)-型形式，并且沿 E 具有对数极点；当限制在 E的补集上时，它还是 ∂-闭的。在坐标子集 $\Omega \subset X$ 上，若 $E_1 \cap \Omega = (z_1 = 0)$，则局部地可以写成

$$\gamma|_\Omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \gamma_1 + \gamma_2 \tag{4.1.6}$$

这里 γ_1 和 γ_2 沿着 $E_1 \cap \Omega$ 光滑。我们定义

$$\operatorname{Res}_{E_1}(\gamma)|_\Omega := \gamma_1|_\Omega \tag{4.1.7}$$

并且不难看出以下结论成立：

- 形式 $\operatorname{Res}_{E_1}(\gamma)|_\Omega$ 即使像 (4.1.7) 中那样局部给出，也定义了一个全局的 $(p-1,q)$-形式，它定义在 E_1 上，取值于 $L|_{E_1}$，并且在 $(E-E_1)|_{E_1}$ 上有对数极点。我们将其记为 $\operatorname{Res}_{E_1}(\gamma)$
- 我们有

$$\operatorname{Res}_{E_1}(\gamma) = -\chi_{E_1}\bar{\partial}\gamma \tag{4.1.8}$$

也就是说，沿着 E_1 的留数可以通过将流 $\partial\gamma$ 乘以 E_1 的特征函数得到。

- 等式 $\partial \operatorname{Res}_{E_1}(\gamma) = 0$ 在 $(E-E_1)|_{E_1}$的支集的补集上成立。

上述所有性质都是完全标准的。在定理 1.1 的具体情形中，我们考虑流

$$\widehat{\Theta} := D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2 \tag{4.1.9}$$

及其沿 E 的各分支的留数。为证明这一结果做准备，我们接下来讨论 Θ 的一些性质，随后将用到这些性质。

• 首先要指出的事实是，我们有如下等式

$$\frac{\lambda}{s_E} = D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2 \tag{4.1.10}$$

在全空间 X 上的流的意义下。这是因为流 $D'_{h_L}\beta_1$ 在支集包含于 $E+Y$ 的部分中没有除子部分。注意，若我们将 $\bar{\ }$ 替换为 ∂，一般而言绝非如此。

• 另一个重要观察是， Θ 沿着 E 的任意一个分支的留数具有相同的"形状"，即它属于 $D'_{h_L} + \theta_L\wedge$ 的像。这是一个简单的计算，我们略去。

• Θ 在 Y 的各个分支上的留数等于零。这个断言看起来可能有些奇怪或可疑，因为形式 β_i 在 Y 上可能有对数极点，因此每个形式 $D'_{h_L}\beta_1$ 和 $\theta_L\wedge\beta_2$ 在 Y 的某些分支上的留数可能非零。不过，等式 (4.1.10) 说明了其中的缘由。

下面给出一个辅助结果，它将在下文引理 4.3 的证明中发挥非常重要的作用。

引理 4.2. 设 γ 是一个 Δ''_{ω_C}-调和的 $(0, n-q)$-形式，其取值于 L 的对偶丛 $L^\star$ 中。则等式

$$\int_X (D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2) \wedge \gamma = 0 \tag{4.2.1}$$

成立（这里以及全文中，积分均在 $E+Y$ 的补集上计算；事实上，(4.2.1) 中的形式是绝对可积的）。

证明。由于 γ 是调和的，因此它特别地在锥意义下光滑；此外，正如上文所述，等式 $D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2 = \dfrac{\lambda}{s_E}$ 以流的意义成立。由此可知，积分 (4.2.1) 下的形式是绝对可积的：说明如下。设 $\pi : U \to V$ 是一个适合我们当前情形的分歧覆盖，并在 V 上取坐标，使得

$$Y \cap V = (z_1 \dots z_r = 0), \qquad E \cap V = (z_{r+1} \dots z_{r+s} = 0).$$

我们有

$$\frac{1}{w^q m}\pi^\star\Big(\frac{\lambda}{s_E}\Big|_V\Big) \wedge \tau = \frac{\mathcal{O}(1)}{\prod w_j^{q_j m+1-m}\prod w_i} d\lambda(w)$$

对于任意光滑的 $\tau(0, n-1)$型形式，因此我们的断言得证。

因此，只需证明我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X \mu_\varepsilon (D'_{h_L}\beta_1 + \theta_L \wedge \beta_2) \wedge \gamma = 0 \tag{4.2.2}$$

其中（μ_ε）是通常的截断函数族。现在 γ 是调和的，因此我们有

$$D'\gamma = 0, \qquad \theta_L \wedge \gamma = 0. \tag{4.2.3}$$

因此，一切归结为下面的等式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_X \partial\mu_\varepsilon \wedge \beta_1 \wedge \gamma = 0 \tag{4.2.4}$$

而这通过局部计算即可 स्पष्ट（利用 γ 在锥意义下光滑这一事实）。

例如，设 $n=2$，从而 β_1 是一个$(1,1)$-形式，且 $Y = (z_1 = 0)$ $E = (z_2 = 0)$。那么表达式（4.2.4）在局部上等于

$$\int_V \frac{\rho'_\varepsilon(z)}{\log(|z_1|^2 e^{-\phi})}\frac{dz_1}{z_1}\wedge\frac{dz_2}{z_2}\wedge(a d\overline{z}_1 + b d\overline{z}_2)\wedge\gamma|_V \tag{4.2.5}$$

并且通过局部变换 $(w_1, w_2) \to (w_1^m, w_2)$，上面的表达式变为

$$\int_U \frac{\rho'_\varepsilon(w)}{\log(|w_1|^2 e^{-\phi})}\frac{dw_1}{w_1}\wedge\frac{dw_2}{w_2}\wedge(a_1 d\overline{w}_1 + b_1 d\overline{z}_2)\wedge\frac{\tau}{w_1^{mq}} \tag{4.2.6}$$

其中 a_1, b_1 是 U 上具有紧支集的光滑函数， τ 是一个光滑的 (0, 1) 形式。这是因为调和形式在锥意义下光滑。引理 2.35 和上面例子中的论证确实适用，因此我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_U \rho'_\varepsilon(w)\frac{f(w)}{w_1^{1+mq}w_2}\frac{d\lambda}{\log(|w_1|^2e^{-\phi})}=0. \tag{4.2.7}$$

实际上，关于 (4.2.7) 的完整证明，请参见附录。 □

在陈述主要引理之前，我们先引入一些记号。我们假设简单正规交叉除子 E 写作 $E=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}E_i$。设 $I_d\subset\{1,\cdots,r\}$ 满足 $|I_d|=d$。设 α 是定义在某个包含 E_{I_d} 的空间上的一个取值于 L^* 的光滑形式（相对于 $h_L^\star,\omega_{\mathcal{C}}$ 而言具有锥形意义）。我们定义

$$L_{I_d}(\alpha):=\bar\partial^{\star_{I_d}}\mathcal{G}_{I_d}(\alpha|_{E_{I_d}}),$$

其中 $\mathcal{G}_{I_d}$ 是 E_{I_d} 上的格林算子，而 $\partial^{\star_{I_d}}$ 是相对于 $h_L^\star,\omega_{\mathcal{C}}$ 的 E_{I_d} 上的 $\partial^\star$-算子。若 $d=0$, $L_{I_0}\varphi:=\partial^\star\mathcal{G}(\varphi)$ 在 X 上。对于每个固定的序列 $I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0$，留数 $\widehat{\mathrm{Res}}^{E_{I_k}}(\Theta)$ 按如下方式定义：

$$\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}):=\mathrm{Res}_{E_{I_k}}\Big(\mathrm{Res}_{E_{I_{k-1}}}\big(\cdots\mathrm{Res}_{E_{I_1}}(\widehat{\Theta})\big)\Big). \tag{4.2.8}$$

现在我们可以陈述关键引理：

引理 4.3. 在定理 4.1 的设定下，令 $\Theta:=D'_{h_L}\beta_1+\theta_L\wedge\beta_2$。设 φ 是定义在 X 上、取值于 L 的对偶空间的一个 ∂-闭 $(0,n-q)$-形式，并且在锥意义下光滑。我们假设 φ 沿着 E 消失。那么对于每个 $k\in\mathbb{N}^*$，有

$$\sum_{I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0}\int_{E_{I_k}}\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})\wedge L_{I_{k-1}}\circ L_{I_{k-2}}\cdots\circ L_{I_0}\varphi=0, \tag{4.3.1}$$

and

$$\int_X\widehat{\Theta}\wedge\varphi=0. \tag{4.3.2}$$

证明. 我们从大到小对 k 进行归纳证明。对于 $k=n+1$，由于 $E_{I_{n+1}}$ 为空，该结论自动成立。假设该引理对 $k+1$ 成立。现在我们证明该引理对 k 成立。首先，我们有

$$\int_{E_{I_k}}\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})\wedge\gamma=0 \tag{4.3.3}$$

对于任意调和 $\gamma\in C^\infty_{(0,n-k-1)}(E_{I_k},L^\star)$ 都成立。事实上，我们知道，通过迭代引理 4.2 之前回顾的构造得到的留数 $\widehat{\mathrm{Res}}^{E_{I_k}}(\Theta)$ 可以写成

$$\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})=D'(\beta_k)+\theta_L\wedge\alpha_k$$

对于某些具有对数极点的形式 β_k,α_k。因此，引理 4.2 推出 (4.3.3)。

于是，德拉姆-小平分解蕴含等式

$$\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})=\bar\partial\bar\partial^{\star_{I_k}}\mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}))+\bar\partial^{\star_{I_k}}\bar\partial\mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}))$$

成立。因此，我们得到

$$\sum_{I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0}\int_{E_{I_k}}\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})\wedge L_{I_{k-1}}\circ L_{I_{k-2}}\cdots\circ L_{I_0}\varphi=A+B,$$

其中

$$A:=\sum_{I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0}\int_{E_{I_k}}\bar\partial^{\star_{I_k}}\bar\partial\mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}))\wedge L_{I_{k-1}}\circ\cdots\circ L_{I_0}\varphi$$

and

$$B:=\sum_{I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0}\int_{E_{I_k}}\bar\partial\bar\partial^{\star_{I_k}}\mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}))\wedge L_{I_{k-1}}\circ\cdots\circ L_{I_0}\varphi.$$

我们希望证明 $A=B=0$。

我们首先估计 A。由于 $\mathcal{G}$ 与 ∂可交换，结合关系式（4.1.8），可得

$$A = \sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k} \bar{\partial}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge L_{I_{k-1}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi$$

$$= - \sum_{I_{k+1} \subset I_k \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_{k+1}}} \mathrm{Res}_{E_{I_{k+1}}}(\widehat{\Theta}) \wedge L_{I_k} \circ L_{I_{k-1}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi = 0.$$

其中，最后一个等式由归纳假设推出。

接下来，我们估计量 B。我们有

$$B = \sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}\bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge L_{I_{k-1}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi$$

$$= \sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge \bar{\partial}(L_{I_{k-1}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi).$$

将德拉姆-小平分解 (3.2.5) 应用于 $(L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi)|_{E_{I_{k-1}}}$，得到

$$\bar{\partial}(L_{I_{k-1}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi) = \gamma + (L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi)|_{E_{I_{k-1}}} + L_{I_{k-1}} \circ \bar{\partial}(L_{I_{k-2}} \cdots \circ L_{I_0}\varphi),$$

其中，γ是 $E_{I_{k-1}}$上取值于 L的对偶的限制的$\Delta''_{E_{I_{k-1}}}$-调和 $(0, n-k+1)$-形式。

接下来，我们估计涉及前两项的积分。

- 涉及 γ的项。由于 γ是 $E_{I_{k-1}}$上取值于 $L^\star$的调和 $(0, n-k+1)$-形式，因此 $E_{I_{k-1}}$上有 $D'\gamma = 0$ 和 $\theta_L|_{E_{I_k}} \wedge \gamma = 0$。通过再深入一层将其限制到 E_{I_k}，这些关键等式显然仍然成立。由此我们推得该限制

$$\gamma|_{E_{I_k}}$$

仍然是调和的，因此

$$\int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge \gamma = 0.$$

- 涉及 $L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi$ 的项。求和

$$\sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge (L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi)$$

一旦 $k-1 \geqslant 1$，便等于零：对每个固定的 $I_k \subset I_{k-2}$，$I_{k-2} \setminus I_k$ 只包含两个元素。根据 Res^{I_k} (4.2.8) 的构造，对于满足 $I_k \subset I_{k-1} \subset I_{k-2}$ 的 I_{k-1}，其交错和等于 0。

由此可知，若 $k-1 \geqslant 1$，则得到

$$B = \sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge L_{I_{k-1}} \circ \bar{\partial}(L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi).$$

现在，只要 $k \geqslant 3$，我们就可以对 $\partial(L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi)$ 重复同样的论证。唯一的区别在于处理涉及 γ 在 $E_{I_{k-2}}$上的积分：我们利用这一事实：$\mathcal{G}_{I_{k-1}}(\gamma|_{E_{I_{k-2}}}) = 0$。最终得到

$$B = \sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge L_{I_{k-1}} \circ \bar{\partial}(L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_0}\varphi)$$

$$\cdots = \sum_{I_k \subset I_{k-1} \subset \cdots \subset I_0} \int_{E_{I_k}} \bar{\partial}^{\star_{I_k}} \mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta})) \wedge L_{I_{k-1}} \circ L_{I_{k-2}} \circ \cdots \circ L_{I_1} \circ \bar{\partial}(L_{I_0}(\varphi)).$$

关于项 $\partial(L_{I_0}(\varphi)) = \partial\partial^\star\mathcal{G}(\varphi)$，我们考虑霍奇分解

$$\bar{\partial}\bar{\partial}^\star\mathcal{G}(\varphi) = \gamma + \varphi - \bar{\partial}^\star\mathcal{G}(\bar{\partial}\varphi) = \gamma + \varphi,$$

其中 γ 是调和的。由于在 E 上有 $\varphi = 0$，我们得到 $L_{I_1}(\varphi) = 0$。

我们得到

$$\sum_{I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0}\int_{E_{I_k}}\bar{\partial}^{\star_{I_k}}\mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}))\wedge L_{I_{k-1}}\circ L_{I_{k-2}}\circ\cdots\circ\bar{\partial}(L_{I_0}(\varphi))$$

$$=\sum_{I_k\subset I_{k-1}\subset\cdots\subset I_0}\int_{E_{I_k}}\bar{\partial}^{\star_{I_k}}\mathcal{G}_{I_k}(\mathrm{Res}_{E_{I_k}}(\widehat{\Theta}))\wedge L_{I_{k-1}}\circ\cdots\circ L_{I_1}(\gamma+\varphi)=0.$$

引理 4.3 的证明至此完成。 □

备注 4.4. 进一步完善定理 4.1 并求解方程$\lambda = \partial f$ 且给出估计，这既重要又颇具挑战。快速检查我们的论证后可以发现，我们“只需”弄清楚 (4.1.4) 中的常数 C 取决于什么。鉴于这个常数的存在性证明是通过反证法完成的，这恐怕并非易事。

4.2. 应用：一个单射定理。作为定理 1.1 的推论，我们得到以下结果。

定理 4.5. 设 $E=\sum E_i$ 是紧致 K¨ahler 流形X 上的一个简单正规交叉除子，且 F是 X 上的一个全纯线丛，其上带有光滑度量 h_F，使得 $i\Theta_{h_F}(F)\geqslant 0$。令$m\in\mathbb{N}^\star$，并考虑一个截面 $s\in H^0(X,mF)$，其零点集 s 不包含对数典范对 (X,E) 的任何对数典范中心。则由与 s作张量积所诱导的乘法映射

$$s\otimes:\qquad H^q(X,K_X+E+F)\to H^q(X,K_X+E+(m+1)F) \tag{4.5.1}$$

对每个 $q\in\mathbb{N}$ 都是单射。

证明。令 s_E 为 E 的典范截面。经过某种消奇异化后，根据关于 s 的零点集的假设，我们可以假设

$$\mathrm{Div}(s)=\sum a_iF_i,$$

$\widehat{}$和 $\sum F_i+E$ 是简单正规交叉。事实上，考虑一个双有理映射 $\pi\colon X\to X$，使得 $E+\mathrm{Div}(s)$ 的逆像是简单正规交叉。给定一个取值于 $E+F$ 的 (n,q)-形式 λ，$\dfrac{\lambda}{s_E}$ 的 π 逆像是一个沿着 E 逆像的支集具有对数极点的 (n,q)-形式，也就是说，我们有

$$\pi^\star\left(\frac{\lambda}{s_E}\right)=\frac{\widehat{\lambda}}{s_{\widehat{E}}} \tag{4.5.2}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$其中 λ 是 X 上取值于 $E+\pi^\star(F)$ 的 (n,q) 形式。另一种表达方式是熟知的等式

$$G+\pi^\star(K_X+E)=K_{\widehat{X}}+\widehat{E} \tag{4.5.3}$$

$\widehat{}$其中 G 是有效的，并且 E 的分支映射到 (X,E) 的对数典范中心（因为我们只沿着与 E 横截的子流形进行爆破）。特别地，E 支集中的$\widehat{}$分支与 $\mathrm{Div}(s)$ 的逆像不相交。

$\widehat{}$ ¯现在，如果我们能够证明 λ 是 ∂-正合的，那么就写作

$$\pi^\star(\lambda)=\frac{\widehat{\lambda}}{s_{\widehat{E}}}\otimes\pi^\star(s_E). \tag{4.5.4}$$

$\widehat{}$右端是全纯的，因为 E 是约化的，且其支集包含于E的逆像中。因此，λ 的逆像在上同调中为零，进而 λ也如此。

为简便起见，我们假设 $\mathrm{Div}(s)=aF_1+bF_2$（一般情形可由同样的论证推出，只需使用引理 4.7 后的注记）。设 s_i 和 s_E 分别是 F_i 和E的典范截面。证明中的一个要点是构造一个具有以下性质的序列 $(a_k,b_k)\in\mathbb{N}^2$。

（1）我们有（a_0,b_0）$=(0,0)$，（a_N,b_N）$=(a,b)$，并且对于每个 $k\geqslant 0$，连续差值$a_{k+1}-a_k$，$b_{k+1}-b_k$都是集合 $\{0,1\}$ 的元素。

（2）从 $F_k := F + a_kF_1 + b_kF_2$ 允许一个度量 h_k，其局部权函数可以写成

$$\varphi_k = c\varphi_F + c_1 \log|f_1|^2 + c_2 \log|f_2|^2$$

其中，$h_F = e^{-\varphi_F}$ 是 F上的非奇异、半正曲率度量，常数 c为正，且对于 $i = 1,\ c_i \in]0, 1[$ ，2。

这样的序列将在引理 4.7 中构造。我们记

$$s_k := s_1^{(a_{k+1}-a_k)} \otimes s_2^{(b_{k+1}-b_k)} \in H^0(X, (a_{k+1} - a_k)F_1 + (b_{k+1} - b_k)F_2). \tag{4.5.5}$$

上述性质 (1) 表明，(4.5.1) 可以写成以下映射的复合

$$s_k : H^q(X, K_X + E + F_k) \to H^q(X, K_X + E + F_{k+1}). \tag{4.5.6}$$

因此，为了得出结论，只需证明对于每个 k，(4.5.6)都是单射。

设 λ 是 $H^q(X, K_X + E + F_k)$中的一个光滑形式，使得

$$\lambda \otimes s_k = 0 \in H^q(X, K_X + E + F_{k+1}).$$

换言之，存在一个光滑形式 $\alpha \in C^\infty_{(n,q-1)}(X, E + F_{k+1})$，使得

$$s_k \otimes \lambda = \bar\partial\alpha.$$

根据性质 (2)，我们可以赋予 $F_k = F + a_kF_1 + b_kF_2$ 度量 h_k。现在，由于度量 h_k 的权包含奇异部分 $c_i \log|f_i|^2$，其中 $0 < c_i < 1$ 为某个有理数，由下述引理 4.6 可知，我们可以找到沿 $E+F$具有对数极点的形式 β_1、以及沿 E具有对数极点的形式 β_2，使得等式

$$\frac{\lambda}{s_E} = \bar\partial\Big(\frac{\alpha}{s_E s_k}\Big) = D'_{h_k}(\beta_1) + \bar\partial\theta + i\Theta_{h_k} \wedge \beta_2 \tag{4.5.7}$$

在 $X \setminus (E + F_1 + F_2)$ 上成立。因此

$$\frac{\lambda}{s_E} - \bar\partial\theta = D'_{h_k}(\beta_1) + i\Theta_{h_k} \wedge \beta_2 \tag{4.5.8}$$

在 $E + F_1 + F_2$的补集内。由于 θ 在 $F_1 + F_2$的一般点附近是光滑的，(4.5.8) 左端的形式在 $F_1 + F_2$的一般点处是非奇异的，因此我们恰好处于定理 1.1 的框架中。

我们推得

$$\lambda - s_E\bar\partial\theta$$

是 $\bar\partial$-正合的。由于根据构造，θ沿 E只有简单极点，$\bar\partial(\theta) \otimes s_E = \bar\partial(\theta \cdot s_E)$ 是 $\bar\partial$-正合的。于是 λ 是 $\bar\partial$-正合的，并且 (4.5.6) 是单射。因此，除下述两个引理之外，定理得证。□

为完成我们的证明，接下来我们建立所使用的辅助结论；我们先从形式 β_i、θ 的存在性开始。

引理 4.6. 设 X 上的 $F_1 + F_2 + E$ 是一个简单正规交叉除子，且 X 上的 L 是一个带有可能的奇异度量 h_L 的全纯线丛，使得

$$i\Theta_{h_L}(L) = c_1[F_1] + c_2[F_2] + \theta_L$$

其中 c_1、c_2 非零，且 θ_L 光滑。设 $X \setminus (E + F_1 + F_2)$ 上的 L-值光滑 $(n, 0)$-形式 A 沿 $E + F_1 + F_2$ 具有对数极点。那么我们可以找到沿 $E + F_1 + F_2$ 至多具有对数极点的形式 β_1、β_2，以及沿 E 至多具有对数极点的 θ，使得等式

$$\bar\partial A = \bar\partial\theta + D'_{h_L}(\beta_1) + i\Theta_{h_L} \wedge \beta_2$$

在 $E + F_1 + F_2$ 的支集的补集上成立。

证明。令 $\{\Omega_\alpha\}_\alpha$ 为 X 的覆盖，并令 θ_α 为关于该覆盖的单位分解。我们假设 Ω_α 上的 F_1+F_2 由 $z_{1,\ \alpha}\cdot z_{2,\ \alpha}=0$ 定义。我们定义一个光滑向量场

$$V_1:=\sum_\alpha \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_{1,\alpha}}\in C^\infty(X,T_X).$$

现在在任意局部开集 $\Omega\subset X$上，我们设 F_1+F_2 由 $z_1\cdot z_2=0$定义。那么 V_1 的类型为:

$$V_1|_\Omega=(z_1+\mathcal{O}((z_1)^2)\frac{\partial}{\partial z_1}+\mathcal{O}(z_1z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}+\sum_{i\geqslant 3}a_i\frac{\partial}{\partial z_i}.$$

于是存在一个常数 c，使得 $A_1:=A-cD'_{h_L}(V_1\rfloor A)$ 在 $X\setminus(E+F_2)$ 上光滑，并且沿 $E+F_2$有简单极点。此外，根据构造，$V_1\rfloor A$ 沿 F_1 没有极点，并且沿 $E+F_2$至多有对数极点。注意，我们使用了 A 是一个 $(n,0)$-形式这一事实，其中 $n=$维 X。现在

$$\bar\partial(A)=\bar\partial(A_1)+c\bar\partial(D'_{h_L}(V_1\rfloor A))=\bar\partial(A_1)+D'_{h_L}\bar\partial(cV_1\rfloor A)+i\Theta_{h_L}(L)\wedge(cV_1\rfloor A)$$

在 $X\setminus(E+F_1+F_2)$ 上逐点成立。根据构造，$\partial(cV_1\rfloor A)$ 和 $cV_1\rfloor A$ 沿 $E+F_2$有对数极点。我们对 A_1 重复相同的论证，以消除其沿 F_2的极点。所得形式为 θ，沿 E和 β_1有对数极点；β_2 沿 $E+F$有对数极点，因此我们的引理得证。□

最后，具有性质 (1) 和 (2) 的序列 $(a_k,b_k)_{k=0,\dots,N}$ 可按如下方式构造。

引理 4.7. 设 F是 X上的全纯线丛，且 $m\in\mathbb{N}^\star$。设 $s\in H^0(X,mF)$，使得对某些 $a,b\in\mathbb{N}^\star$ 有 $\mathrm{Div}(s)=aF_1+bF_2$。我们考虑按如下方式构造的序列 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^N\subset\mathbb{N}^2$:

(i) 我们定义 $(a_0,b_0)=(0,0)$。对于 $k\geqslant 1$，若 $(a_k,b_k)=(a,b)$，则在此步停止。否则，取 $c_k:=\min\{\frac{a_k}{a},\frac{b_k}{b}\}$。(ii) 若 $\frac{a_k}{a}>c_k$，则令 $a_{k+1}:=a_k$；若 $\frac{a_k}{a}=c$，则定义 $a_{k+1}:=a_k+1$。(iii) 对 b_{k+1} 作同样处理：若 $\frac{b_k}{b}>c_k$，则 $b_{k+1}:=b_k$；若 $\frac{b_k}{b}=c$，则令 $b_{k+1}:=b_k+1$。

那么，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$0=\min\{a_k-c_ka,b_k-c_kb\}\leqslant\max\{a_k-c_ka,b_k-c_kb\}<1. \tag{4.7.1}$$

特别地，存在 $c_{1,\ k},c_{2,\ k}\in]0,1[\cap\mathbb{Q}$ 和 $d_k\in\mathbb{Q}^+$，使得

$$F+a_kF_1+b_kF_2\equiv d_kF+c_{1,k}F_1+c_{2,k}F_2. \tag{4.7.2}$$

证明。我们用归纳法证明 (4.7.1)。根据 c_k 的定义，我们有

$$\min\{a_k-c_ka,b_k-c_kb\}=0$$

因此，只需证明 max 满足严格不等式。
假设 (4.7.1) 对 k 成立。首先注意到，根据构造，$c_{k+1}>c_k$。需要考虑三种情况。

- $c_k=\frac{a_k}{a}=\frac{b_k}{b}$。那么 $a_{k+1}-c_ka=b_{k+1}-c_kb=1$。由于 $c_{k+1}>c_k$，我们知道 (4.7.1) 对$k+1$ 成立。

- $c_k=\frac{a_k}{a}<\frac{b_k}{b}$。那么 $a_{k+1}=a_k+1$ 和 $b_{k+1}=b_k$。因此

$$a_{k+1}-c_{k+1}a=a_k+1-c_{k+1}a=1+(c_k-c_{k+1})a<1,$$

and

$$b_{k+1}-c_{k+1}b=b_k-c_{k+1}b<b_k-c_kb<1.$$

那么对于 $k+1$，(4.7.1) 成立。

- $c_k=\frac{b_k}{b}<\frac{a_k}{a}$。我们按照第二种情况进行论证。

对于引理的第二部分，由于 (4.7.1)，我们有

$$F+a_kF_1+b_kF_2\equiv(1+c_km)F+(a_k-c_ka)F_1+(b_k-c_kb)F_2.$$

令 $\varepsilon\in\mathbb{Q}^+$ 充分小。则

$$F+a_kF_1+b_kF_2\equiv(1+c_km-\varepsilon m)F+(a_k-c_ka+\varepsilon a)F_1+(b_k-c_kb+\varepsilon b)F_2.$$

由（4.7.1），当 ε 充分小时，我们知道（$a_k - c_k a + \varepsilon a$）和（$b_k - c_k b + \varepsilon b$） $\in]0,1[$。此外（$1 + c_k m - \varepsilon m$） > 0。于是（4.7.2）得证。□

一般而言，($s = 0$) 可能有多个分支，$\mathrm{Div}(s) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} a_i F_i$。序列 $\{(a_{1,\ k}, \cdots, a_{s,\ k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的构造完全相同。

事实上，假设对于某个 $k \geqslant 1$，$(a_{1,\ k}, \cdots, a_{s,\ k})$ 已经构造出来了。我们的序列中的下一个元素 $(a_{1,\ k+1}, \cdots, a_{s,\ k+1})$ 按如下方式得到：令

$$c_k = \min\left\{\frac{a_{1,k}}{a_1}, \frac{a_{2,k}}{a_2}, \cdots, \frac{a_{s,k}}{a_s}\right\}.$$

我们定义

$$a_{i,k+1} := a_{i,k} + 1$$

在 $\frac{a_{i,\ k}}{a_i} = c_k$ 的情形下，并且

$$a_{i,k+1} := a_{i,k}$$

如果 $\frac{a_{i,\ k}}{a_i} > c_k$.，则可以通过归纳法轻易验证，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，关系式

$$0 = \min\{a_{i,k} - c_k a_i\}_{i=1}^{s} \leqslant \max\{a_{i,k} - c_k a_i\}_{i=1}^{s} < 1 \tag{4.7.3}$$

成立，正如我们在 $s = 2$ 的情形中所做的那样。

5. Appendix

我们在此详细说明评估极限（4.2.7）所需的计算（以及对例子的讨论）。这些计算相当冗长，但归根结底，无非是泰勒展开。关于这些主题，我们参考了那篇非常精彩的文章 [1] 及其中的参考文献。

作为“热身”，我们考虑下面这个特殊情形。

(♢) 假设我们可以在 $\mathcal{O}(Y)$ 上找到一个光滑度量 h_0，其局部权函数 φ_0 与 z_1、...、z_r 无关，其中 $(z_i)_{i=1,\ldots,n}$ 是坐标，并且满足 $\varphi_L(z) = \sum q_i \log|z_i|^2 + \varphi_{L,0}$。在这种情况下，我们的论证如下。考虑下面的测度

$$d\lambda_{f,q}(z) := \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{r} z_i^{k_i}} \frac{d\lambda(z)}{\prod_{i=1}^{r} |z_i|^{2-2\delta_i}} \tag{5.0.1}$$

其中 δ_i 是严格正实数，而 k_i 是正整数。

由（♢）立即可见，量

$$\int_{(\mathbb{C}^n,0)} \rho'_\varepsilon \left(\prod |z_i|^2 e^{-\varphi_0(z')}\right) d\lambda_{f,q}(z) \tag{5.0.2}$$

其中 $z' = (z_{r+1}, \ldots z_n)$ 趋于零，而与重数 q_i 的大小无关。这是因为 f 是光滑的，因此 (5.0.2) 相当于计算

$$\int_{(\mathbb{C}^n,0)} g(z')\rho'_\varepsilon \left(\prod |z_i|^2 e^{-\varphi_0(z')}\right) \frac{\prod_{i=1}^{r} z_i^{m_i} \overline{z}_i^{m_{\overline{i}}}}{\prod_{i=1}^{r} z_i^{k_i}} \frac{d\lambda(z)}{\prod_{i=1}^{r} |z_i|^{2-2\delta_i}} \tag{5.0.3}$$

其中 g 是仅依赖于变量 z'的光滑函数。

对于任意 $\varepsilon > 0$，积分 (5.0.3) 都等于零，除非满足

$$m_i - k_i = m_{\overline{i}} \geqslant 0. \tag{5.0.4}$$

但对于这样的指数，(5.0.3) 在 $\varepsilon \to 0$ 处的极限等于零，因为 k_i 阶极点消失了，并且 $\delta_i > 0$。

5.0.1. 泰勒展开。一般而言，也就是说，在不满足假设 (♢) 的情况下，我们的论证实际上相同，只需处理一些技术细节，接下来将对此进行讨论。

我们将使用带积分余项的泰勒公式。为了说明我们所要讨论的命题类型，我们先从一个简单的情形开始。

设 ϕ 是定义在 $\mathbb{R}$上的光滑函数，并考虑

$$f(x_1, x_2) := \phi(x_1 + x_2) \tag{5.0.5}$$

一个函数，例如定义在 $\mathbb{R}^2$中以原点为中心的球内。

f 关于 x_1 的泰勒展开如下

$$f(x_1, x_2) = \phi(x_2) + x_1\phi'(x_2) + \cdots + \frac{x_1^k}{k!}\phi^{(k)}(x_2) \tag{5.0.6}$$

$$+\frac{x_1^{k+1}}{(k+1)!}\int_0^1 \phi^{(k+1)}(tx_1 + x_2)(1-t)^k dt. \tag{5.0.7}$$

接下来，我们分别对式 (5.0.6) 和 (5.0.7) 中涉及的各个函数关于 x_2展开，得到:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{0\leqslant m_1, m_2 \leqslant k} \frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2}}{m_1! m_2!}\phi^{(m_1+m_2)}(0) \tag{5.0.8}$$

$$+ \sum_{0\leqslant m_1 \leqslant k} \frac{x_1^{m_1} x_2^{k+1}}{(k+1)! m_1!}\int_0^1 \phi^{(m_1+k+1)}(tx_2)(1-t)^k dt \tag{5.0.9}$$

$$+ \sum_{0\leqslant m_2 \leqslant k} \frac{x_1^{k+1} x_2^{m_2}}{(k+1)! m_2!}\int_0^1 \phi^{(k+1+m_2)}(tx_1)(1-t)^k dt \tag{5.0.10}$$

$$+\frac{x_1^{k+1} x_2^{k+1}}{(k+1)!^2}\int_0^1\int_0^1 \phi^{(2k+2)}(t_1x_1 + t_2x_2)(1-t_1)^k(1-t_2)^k dt_1 dt_2. \tag{5.0.11}$$

现在注意，在表达式 (5.0.8)–(5.0.11) 中，根据 x_1 和 x_2的指数，分别有三类项。

(1) 如果两个指数 m_1 和 m_2 都小于 k，那么函数 $\phi^{(m_1+m_2)}(0)$ 关于两个变量都是常数。(2) 例如，如果 $m_1 \leqslant k$ 和 $m_2 = k+1$，那么所讨论的函数只依赖于 x_2。交换 x_1 和 x_2 的角色时，当然也同样成立。(3) 如果两个指数 m_1 和 m_2 都等于 $k+1$，那么式（5.0.11）中的函数是光滑的（并且一般而言依赖于两个变量）。

This 这并不局限于两个变量的情形，结论也是相同的：该函数 h
mult使单项式

$$x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} \tag{5.0.12}$$

当对每个 $i = 1, \dots, r$ 都有 $m_i \leqslant k$ 时，与 x_i 无关

回到我们的问题，我们将采用这类思考的一种变体，以获得适合我们语境的展开式。

A假设截面 s of $\mathcal{O}(Y)$ 限制到 Ω 上时对应于单项式 $z_1 \dots z_r$

$$s|_\Omega \simeq z_1 \dots z_r. \tag{5.0.13}$$

我们要展开的函数是

$$\rho_\varepsilon\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi(z)}}\Big). \tag{5.0.14}$$

为此，注意到我们有

$$\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi(z)}} = \log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\hat{1}}(z)}} + z_1\phi_1(z) + \overline{z_1}\phi_{\overline{1}}(z) \tag{5.0.15}$$

对某些函数 ϕ_1、$\phi_{\overline{1}}$，其中 $\phi_{\hat{1}}(z) := \phi(0, z_2, \dots, z_n)$。

我们考虑由以下公式定义的函数 τ_1

$$\tau_1(z) := \log\left(1+\frac{z_1\phi_1(z)+\overline{z_1}\phi_{\overline{1}}(z)}{\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}}}\right), \tag{5.0.16}$$

然后我们有

$$\log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi(z)}} = \log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}} + \tau_1(z). \tag{5.0.17}$$

In o为简化书写，我们约定以下记号，在当前 t
appe附录中均有效。

约定。

•我们将统一用 $a_{\widehat{1\ldots p}}$ 表示任意一个与变量集 z_1、.....、 z_p 及其共轭变量无关的光滑函数。

• 对于不一定相同但具有相似性质的函数，我们使用相同的记号，例如 a、b、ϕ.....；这些性质将明确说明。

于是我们有

$$\mu_\varepsilon(z) = \rho_\varepsilon\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}}\Big) \tag{5.0.18}$$

$$+\rho'_\varepsilon\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}}\Big)\tau_1(z)+\ldots \tag{5.0.19}$$

$$+\rho^{(k)}_\varepsilon\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}}\Big)\frac{\tau_1^k(z)}{k!} \tag{5.0.20}$$

$$+\frac{1}{k!}\tau_1(z)^{k+1}\int_0^1\rho^{(k)}_\varepsilon\Big(t\tau_1(z)+\log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}}\Big)(1-t)^k dt. \tag{5.0.21}$$

接下来考虑量

$$\frac{z_1\phi_1(z)+\overline{z_1}\phi_{\overline{1}}(z)}{\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}}} \tag{5.0.22}$$

它涉及函数 τ_1 的表达式。它可以改写为

$$\frac{z_1\phi_1(z)+\overline{z_1}\phi_{\overline{1}}(z)}{\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi(z')}}+z_2a_2(z)+\overline{z}_2a_{\overline{2}}(z)+\cdots+z_ra_r(z)+\overline{z}_ra_{\overline{r}}(z)} \tag{5.0.23}$$

其中 a_i、$a_{\overline{i}}$ 光滑，且 $z' := (z_{r+1},\ldots,z_n)$。

综上，我们有

$$\tau_1(z) = \Psi_1(z_1,w_1,\ldots,z_r,w_r,z') \tag{5.0.24}$$

其中

$$w_i := \frac{z_i}{\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi(z')}}} \tag{5.0.25}$$

对于 $i=1,\ldots,r$，且 Ψ_1 光滑并属于由 $w_1,\overline{w}_1$生成的理想 .

接下来我们迭代这一过程：在表达式 (5.0.18)–(5.0.21) 中，我们使用以下事实：

$$\log|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)} = \log|s|^2e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}+z_2\phi_{\widehat{12}}(z)+\overline{z}_2\phi_{\widehat{1\overline{2}}}(z) \tag{5.0.26}$$

其中 $\phi_{\widehat{12}}$ 和 $\phi_{\widehat{1\overline{2}}}$ 与 z_1无关。

我们定义

$$\tau_2(z) := \log\left(1+\frac{z_2\phi_{\widehat{12}}(z)+\overline{z}_2\phi_{\widehat{1\overline{2}}}(z)}{\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{1\overline{2}}}(z)}}}\right), \tag{5.0.27}$$

并考虑 ρ_ε 在 (5.0.18)-(5.0.19) 中的泰勒展开及其直到 k 阶的导数。

对于 (5.0.21)，我们进行如下处理。首先注意到，我们可以写成

$$\tau_1(z) = a_{\widehat{2}}(z,w) + b(z,w) \tag{5.0.28}$$

其中，(5.0.28) 中的记号如下所示。

- 如上所述，我们有 $w_i := \dfrac{z_i \text{ 对数}}{\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi(z')}}}$。
- 函数 $a_{\widehat{2}}$ 是光滑的，且仅依赖于 z_1、w_1、z_3、……、z_n。
- 函数 b 属于由 z_2、$\overline{z}_2$ 生成的理想。

由 (5.0.26) 可得

$$\log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{1}}(z)}} = \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}} + b(z,w)$$

具有与上面第三个要点相同的性质。

那么，(5.0.21) 中的函数可以写成如下形式

$$\begin{aligned} t\tau_1(z) + \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi(z_2,z')}} =& ta_{\widehat{2}}(z,w) + \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}} \\ &+ b_0(z,w) + tb_1(z,w). \end{aligned} \tag{5.0.29}$$

并且我们在 处展开 (5.0.21) 中的函数 $\rho_\varepsilon^{(k)}$

$$ta_{\widehat{2}}(z,w) + \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}.$$

经过这第二步，我们看到函数 μ_ε 可以写成以下类型项的和。

$$\tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\rho_\varepsilon^{(m)}\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}\Big) \tag{5.0.30}$$

其中 $m := m_1 + m_2$，且 m_i 均小于或等于 k,

$$\tau_1^{m_1}\tau_2^{k+1}\int_0^1 \rho_\varepsilon^{(k+1+m_1)}\Big(t\tau_2(z) + \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}\Big)(1-t)^k dt \tag{5.0.31}$$

其中 $m_1 \leqslant k+1$ 与

$$\tau_1^{k+1}\tau_2^{m_2}\int_0^1 \rho_\varepsilon^{(k+1+m_2)}\Big(ta_{\widehat{2}}(z) + \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}\Big)(1-t)^k dt \tag{5.0.32}$$

（这里的 τ_2 与 (5.0.31) 中的不同，但它属于由 z_2 和 $\overline{z}_2$ 生成的理想，因此我们使用相同的记号）。

最后一项是

$$\int_0^1\int_0^1 \rho_\varepsilon^{(2k+2)}\Big(t_1b_1 + t_2b_2 + t_1t_2b_3 + \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}\Big)(1-t)^k dt. \tag{5.0.33}$$

与 $\tau_1^{k+1}\tau_2^{k+1}$ 相乘，其中 $(1-t)^k dt := (1-t_1)^k(1-t_2)^k dt_1 dt_2$。

结论是，在所得表达式中，除 (5.0.18) 的右端外，所有项的支集都包含在定义域内

$$\frac{1}{\varepsilon} - C < \log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}} < \frac{1}{\varepsilon} + C. \tag{5.0.34}$$

此外，函数

$$z \to \rho_\varepsilon^{(m)}\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2 e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}\Big) \tag{5.0.35}$$

(5.0.30) 中的函数只依赖于 $|z_1|$、$|z_2|$、z_3、……、z_n。所涉及的其他表达式中的函数具有类似的性质，即 (5.0.31) 中的函数与 z_1 无关，(5.0.32) 中的函数与 z_2 无关。注意，(5.0.33) 中的函数通常依赖于完整的变量集合，但 τ_i 的指数为 $k+1$。

我们之所以强调这一切，是因为这类积分

$$\int_\Omega \frac{\tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}}{z_1^{q_1}z_2^{q_2}}\rho_\varepsilon^{(m)}\Big(\log\log\frac{1}{|s|^2e^{-\phi_{\widehat{12}}(z)}}\Big)\Psi(z,w)\frac{d\lambda(z)}{|z_1|^{2-2\delta_1}|z_2|^{2-2\delta_2}} \tag{5.0.36}$$

对于任意 $m\geqslant 1$，任意 q_1 个正整数以及 $\delta_i>0$ 个正实数，当 $\varepsilon\to 0$ 时均趋于零。在 (5.0.36) 中，我们用 Ψ 表示一个光滑函数。

无论如何，我们重复这一过程，并得到如下结论。

命题 5.1。函数 $\mu_\varepsilon(\cdot)$ 有一个泰勒展开，其有限项均属于以下类型

$$\tau_1^{m_1}(z,w)\dots\tau_r^{m_r}(z,w)\Phi_{\varepsilon,m}(z,w) \tag{5.1.1}$$

其中:

(a) 整数 r 由 (5.0.13) 给出，并且 $\max(m_i)\leqslant k+1$;

(b) *for each* $i=1,\dots,r$ *we have* $w_i:=\dfrac{z_i}{\log\frac{e^{\varphi(z')}}{|z_1\dots z_r|^2}}$, *where* $z':=(z_{r+1},\dots,z_n)$;

(c) 函数 τ_i 是光滑的，并且属于由 w_i 和 $\overline{w}_i$ 生成的理想;

(d) 当对应的指数 m_i 小于或等于 k 时，函数 $\Phi_{\varepsilon,\,m}(z,w)$ 只依赖于 $|z_i|$ 和 $|w_i|$，对所有 $i=1,\dots,r$ 均成立;

(e) 若 $m_1=\dots=m_r=0$，则有

$$\Phi_{\varepsilon,0}(z,w)=\rho_\varepsilon\Big(\log\log\frac{e^{\phi(z')}}{|z_1\dots z_r|^2}\Big);$$

(f) 若 $|m|\geqslant 1$，函数 $\Phi_{\varepsilon,\,m}(z,w)$ 的支集包含在一个类似于 (5.0.34) 的集合中（即相对于每个变量 $z_1,\dots,z_r$ 都是旋转对称的）。注意，即使 $m_1=\dots=m_r=0$，函数 $\Phi_{\varepsilon,\,0}$ 的支集仍然是旋转对称的。

根据命题 5.1，我们需要计算的积分属于以下类型

$$\int_{(\mathbb{C}^n,0)}\rho_\varepsilon^{(m)}(z)\frac{\Psi(z,w)}{\prod_{i=1}^r z_i^{b_i}}\frac{d\lambda(z)}{\prod_{i=1}^r|z_i|^{2-2\delta_i}\log|\prod_{i=1}^r z_i^{p_i}|^2} \tag{5.1.2}$$

其中 $m\geqslant 1$ 和 $z':=(z_{r+1},\dots,z_n)$。我们用 Ψ 表示一个光滑函数，(5.1.2) 中的 b_i 均为正整数，并且

$$\rho_\varepsilon^{(m)}(z):=\rho_\varepsilon^{(m)}\Big(\log\log\frac{e^{\phi(z')}}{|z_1\dots z_r|^2}\Big).$$

现在，由于我们已经解释过，表达式 (5.1.2) 显然趋于零。

最后，我们来讨论第 2.3.1 小节中给出的例子。

设 $E=\sum E_i$ 是 X 上的一个除子，使得 $E+Y$ 是简单正规交叉，并设 Θ 是一个取值于 L、沿 $E+Y$ 有对数极点的 (p,q)-形式。接下来我们证明公式

$$\int_X\Theta\wedge\overline{\rho}:=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_i\int_{U_i}\mu_\varepsilon(w)\frac{\theta_i}{w_i^{mq}}\pi_i^\star\Theta\wedge\overline{\rho_i} \tag{5.1.3}$$

定义了一个取值于 (L,h_L) 的 (p,q)-流。在 (5.1.3) 中，我们用 ρ 表示一个取值于 L、在锥意义下光滑的 $(n-q,n-p)$-形式，因此左端的 ρ_i 是 $\mathcal{C}^\infty$。

在下文中，我们省略指标 "i"，并假设这两个除子的局部方程为

$$Y\cap V=(z_1\dots z_r=0),\qquad E\cap V=(z_{r+1}\dots z_{r+s}=0). \tag{5.1.4}$$

那么，我们需要计算的积分写作如下

$$\int_U\mu_\varepsilon(w)\theta(|w|)\frac{f(w)d\lambda(w)}{\prod_{i=1}^r w_i^{b_i}\prod_{j=r+1}^{r+s}w_j} \tag{5.1.5}$$

其中 f 由 ρ_i 的系数乘以光滑函数（Θ的逆像的系数）得到。

现在，命题 5.1 表明，只需假设

$$\mu_\varepsilon(w) = \rho_\varepsilon\Big(\log\log\frac{e^{\phi(w'')}}{|w_1\dots w_r|^{2m}}\Big) \tag{5.1.6}$$

其中 $w'' = (w_{r+1}, \dots, w_n)$。我们考察 f 关于前 r 个变量的泰勒展开，并注意到对于这些积分

$$\int_U \mu_\varepsilon(w)\theta(|w|)\frac{\prod_{i=1}^r w_i^{\alpha_i}\overline{w}_i^{\beta_i}}{\prod_{i=1}^r w_i^{b_i}\prod_{j=r+1}^{r+s} w_j}d\lambda(w) \tag{5.1.7}$$

只要对于某个指标 i 有 $\alpha_i + \beta_i \leqslant b_i - 1$，其就等于零：事实上，(5.1.7) 中的积分是一致收敛的，因此结合富比尼定理以及积分域具有旋转对称这一事实，即可得到我们的断言。

因此，仅有以下各项

$$\int_U \mu_\varepsilon(w)\theta(|w|)\frac{\prod_{i=1}^r w_i^{\alpha_i}\overline{w}_i^{\beta_i} f_{\alpha\beta}(w)}{\prod_{i=1}^r w_i^{b_i}\prod_{j=r+1}^{r+s} w_j}d\lambda(w) \tag{5.1.8}$$

with 对于每个 i 的 $\alpha_i + \beta_i = b_i$ “存活”。但这类积分可以由 $\alpha_i + \beta_i = b_i$ 的上确界 $\sup_U |f_{\alpha\beta}|$ 控制，而 h 后者又可以由 ρ_i 的某些阶导数的上确界范数控制。

因此， Θ 诱导出一个取值于（L, h_L）的（p, q）-流，正如 2.3.1 中所断言的。最后要指出的是，如果 $p = n$ 和 Θ 沿 E仅具有对数极点，那么在 $q_i < 1$的情形下无需上述极限过程，因为量 $\frac{1}{w^{mq}}\pi^\star(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)$ 是有界的。

References

[1] Andersson, M., Wulcan, E.: *Global effective versions of the Briançon–Skoda–Huneke theorem*, 《数学发明》（2015）200：607–651，DOI 10.1007/s00222-014-0544-x。[2] Agmon, S.: *The L^p approach to the Dirichlet problem*, 《比萨高等师范学校年刊》- 科学类，第三辑，第 13 卷（1959），第 4 期，第 405–448 页。[3] Auvray, H.: *The space of Poincaré type Kähler metrics on the complement of a divisor*, 《纯粹与应用数学杂志》722（2017），1–64。[4] Cao, J.；Paun, M.: *Infinitesimal extension of pluricanonical forms*, arXiv 2023。[5] T. Chan, Y.Choi *On an injectivity theorem for log-canonical pairs with analytic adjoint ideal sheaves* https://arxiv.org/abs/2205 06954 。Demailly, J.-P.: *Complex Analytic and Differential Geometry*, 作者网页。[7] [6] Demailly, J.-P.: *Analytic Methods in Algebraic Geometry*, 高等教育出版社，《现代数学综述》，第 1 卷，2010 年。[8] P. Deligne: *Equations Différentielles à Points Singuliers Reguliers*, LNM 163。[9] de Rham, G.；Kodaira, K.: *Harmonic Integrals*，高等研究院，1950 年。[10] H. Esnault.；E. Viehweg.: *Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems*，《数学发明》86，161–194（1986）；附录由 K. Timmerscheidt 撰写。

[11] *An L2 Dolbeault Lemma and Its Applications* 28 1992 845 884 A. Fujiki:

[12] *On Semipositivity Injectivity and Vanishing Theorems.* L^2 《RIMS 研究刊物》，京都大学（），- O. Fujino, 《霍奇理论与 -分析》，245–282，《数学高级讲座》（ALM），39，国际出版社，美国马萨诸塞州萨默维尔；高等教育出版社，北京，2017 年。[13] K. Kodaira, G. de Rham *Harmonic Integrals* 《高等研究院讲座》，1950 年。[14] Liu, K.；Rao, S.；以及 Wan, X.: *Geometry of logarithmic forms and deformations of complex structures* 《代数几何杂志》 28 2019 773 815 （），- Matsumura, S.-I:

[15] *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities.* 27 2018 2, 305 337 《代数几何杂志》，第（）卷，第 – 期。[16] Matsumura, S.-I: *A transcendental approach to injectivity theorem for log canonical pairs.* 《比萨高等师范学校年刊》，科学类（5）19（2019），第 1 期，311–334。[17] Naumann, P: *Positivity of direct images with a Poincaré type twist* https://arxiv.org/abs/2005.01500。[18] Noguchi, J.: *A short analytic proof of closedness of logarithmic forms* 《古代数学杂志》第 18 卷，第 2 期（1995），295–299。[19] Wu, X.: *On the hard Lefschetz theorem for pseudoeffective line bundles* https://arxiv.org/abs/1911.13253

Université Côte d'Azur、 CNRS、 LJAD、 France*Email address*: junyan.cao@unice.fr

Universität Bayreuth、 Mathematisches Institut、 Lehrstuhl Mathematik VIII、 Universitätsstrasse 30、D-95447、 Bayreuth、 Germany*Email address*: mihai.paun@uni-bayreuth.de