arXiv:2303.16303v1 [cs.CG] 28 Mar 2023

用于更多几何相交图的常数跳数伸展器，大小更小

Timothy M. Chan ！ 计算机科学系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，美国

Zhengcheng Huang 计算机科学系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，美国

摘要

在 SoCG 2022 中，Conroy 和 Tóth 提出了几种几何相交图中的稀疏低跳数生成器构造，包括平面中 n 圆盘（或胖凸物体）的 $O(n\log n)$大小的 3 跳稀疏器，以及平面中 n 轴对齐矩形的 $O(n\log^2 n)$大小的 3 跳稀疏器。他们的工作留下了两个主要问题：（i）允许更大的常数伸展，能否使大小更接近线性？以及（ii）对于更一般的相交图类，能否实现近线性大小？

我们通过提出新的常数跳数伸展器构造，同时解决这两个问题；这些构造具有近乎线性的大小，并且适用于大得多的相交图类。更准确地说，我们证明，对于任意常数 k，任意弦图都存在一个 $O(1)$ 跳稀疏器，其大小为$O(n\alpha_k(n))$，其中 $\alpha_k(n)$表示反阿克曼层级中的第 k个函数。类似地，我们证明，对于任意常数 k 和 d，d维胖对象的相交图存在一个 $O(1)$ 跳稀疏器，其大小为 $O(n\alpha_k(n))$。

我们还在跳数或大小方面改进了 Conroy 和 Tóth 的一些具体结果：我们给出了平面中圆盘（或更一般地，具有线性并复杂度的对象）的一个大小为 $O(n\log n)$ 的二跳伸展子图，以及平面中轴对齐矩形的一个大小为 $O(n\log n)$ 的 3 跳稀疏器。

我们的证明都很简单，使用了分隔定理、递归、平移四叉树和浅切割。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 计算几何

关键词与短语 跳数生成器、几何相交图、弦图、胖对象、分隔器、浅切割

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs.SoCG.2023.24

资助 *Timothy M. Chan*：研究工作获美国国家科学基金会资助项目 CCF-2224271 支持。

1 引言

稀疏化子图—即给定图的子图，使距离保持在某个乘法因子范围内—在图算法和计算几何文献中都有众多应用，并得到了广泛研究 [4, 37]。传统上，在计算几何中，研究重点一直是欧几里得生成器或度量稀疏化子图（即针对由 n 点定义的加权完全图的稀疏子图，其中边权是欧几里得距离或某种度量下的距离）。

近年来，针对几何相交图的稀疏子图受到了更多关注。几何相交图是由 n 几何对象构成的无权无向图，其中顶点对应这些对象；当且仅当两个对象相交时，我们就在它们之间设置一条边。这类图在计算几何中得到了广泛研究（例如，参见[11, 12, 21, 22, 31]），并且自然地出现在无线通信等应用中。

形式上，在无权情形下，图 G 的 t跳数伸展器 是其子图 G，满足：对于每条边 $uv \in E(G)$，在 G 中都存在一条从 u 到 v、至多包含 t 条边的路径。 (It

©Timothy M. Chan 和 Zhengcheng Huang；根据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权 第39届国际计算几何研讨会（SoCG 2023）。编辑：Erin W. Chambers 和 Joachim Gudmundsson；文章编号：24；页码：24:1–24:16
莱布尼茨国际信息学论文集 达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，达格施图尔出版社，德国

有时也简称为 t-伸展器，但“跳数”一词强调我们在此考虑的是无权图距离。参数 t 称为跳数伸展。对于一个有 n 个顶点的任意无权图，已知 [5] 存在一个 t-跳数伸展器，其$O(n^{1+1/\lceil t/2\rceil})$ 大小（即边数）为；对于任意常数整数 $t \geq 3$，假设 Erdős 围长猜想成立，此界是紧的 [27]。我们的目标是在几何相交图的情形下获得更好的界。

已有结果。 有多篇论文研究了单位圆盘图中的跳数伸展器，即平面上单位圆盘的相交图：Yan等人 [38] 构造了大小为 $O(n\log\ n)$ 的 15 跳伸展器。Catusse等人 [13] 构造了大小为 $O(n)$ 的 5 跳伸展器（Biniaz [10] 和 Dumitrescu等人 [26]还改进了规模上界中的隐藏常数因子）。Dumitrescu等人 [26] 还构造了大小为 $O(n)$ 的 3 跳伸展器，以及大小为 $O(n\log\ n)$ 的二跳伸展子图。最后，Conroy和Toth [24] 构造了大小为$O(n)$ 的二跳伸展子图。

Conroy和Toth [24] 还率先研究了其他几何相交图族的跳数伸展器。他们得到以下结果：

- 胖矩形的 2 跳跃式稀疏子图[1]（例如，正方形）位于平面上，大小为 $O(n\log\ n)$。（事实上，他们证明了一个几乎匹配的下界 $\Omega(n\log\ n/\log\log\ n)$，适用于正方形，或平面上任意固定凸物体的位似图形。）平面上胖凸物体（例如圆盘）的 3 跳稀疏子图，大小为 $O(n\log\ n)$。平面上任意矩形的 3 跳稀疏子图，大小为 $O(n\log^2 n)$。

主要问题。 Conroy 和 Tóth 的研究在几何相交图的跳数生成器方面取得了重大进展，但也引出了许多耐人寻味的问题：

1. 对于他们研究的图类，能否使跳数生成器的大小更接近线性？他们针对任意圆盘、矩形等给出的界都带有额外的对数因子。在论文末尾，Conroy 和 Tóth 明确提出：“是否存在一个常数$t \in \mathbb{N}$，使得每个由 n 圆盘或矩形构成的相交图都存在一个 t跳 $O(n)$ 边的跳数伸展器？”

2. 忽略对数因子，能否针对比他们研究的范围更广的几何相交图类，构造出大小接近线性的跳数生成器？具体而言，对于平面上的任意$O(n$多重对数$n)$规模上界，任意线段或任意三角形，以及 $\mathbb{R}^d$ 中的任意球，针对 $d \geq 3$都尚无已知结果。在论文末尾，Conroy 和 Tóth 写道：“若能找到其他一些相交图类（例如，$\mathbb{R}^2$中的曲线或凸集、VC维有界的集合系统，或 $\mathbb{R}^d$中的半代数集合），使得 $O(n^{1+1/\lceil t/2\rceil})$ 边的 t跳数伸展器的一般界得以改进，那将很有意思。”

为了理解这些问题的难度，不妨提一下它们与双团覆盖大小的联系。图 的双团覆盖指的是 G 双团的集合$A_1 \times B_1$、……、 $A_s \times B_s$，满足 $E(G) = \bigcup_{i=1}^{s}(A_i \times B_i)$。覆盖的大小指的是$M = \sum_{i=1}^{s}(|A_i| + |B_i|)$。双团覆盖是与范围查询密切相关的一种标准技术，在计算几何中有许多应用（例如，参见 [2, 17, 19]）。大多数几何相交图类别都存在大小次二次的双团覆盖；事实上，对于矩形或轴对齐盒，已有标准的双团覆盖构造

[1] 本文中的所有矩形、正方形和超立方体均与坐标轴对齐。

其大小为 $O(n$多对数 $n)$（与范围树的构造类似 [3, 25]）。给定一个大小为 M的双团覆盖，很容易构造出一个大小为 $O(M)$的 3 跳稀疏器，正如 Conroy 和 Tóth 指出的那样 [24], ，只需为每个双团保留两颗星。特别是，Conroy 和 Tóth 针对矩形构造的 3 跳、$O(n$对数$^2\, n)$大小稀疏化子图，本质上就是通过范围树式分治得到的。

然而，双团覆盖构造通常需要多个对数因子。这使得矩形情形下的第一个问题颇具挑战。对于非轴对齐对象，双团覆盖大小甚至更大；例如，对于线段，已知上界接近$n^{4/3}$（例如，参见 [19]）。因此，对于跳数伸展 $t \geq 5$，这无法比一般图得到更好的界。对于弦图，情况更糟；弦图即平面中曲线（其描述复杂度可能很高）的相交图。解决第二个问题需要新的思路。

主要新结果。 我们同时推进上述两个问题，得到了以下结果：

- 任意弦图的O_k（1）跳稀疏化子图，其大小为 $O(n\alpha_k(n))$。

这里， O 记号中的下标表示假定为常数的变量；隐藏的常数因子可能依赖于这些变量。函数 $\alpha_k(\cdot)$ 表示反阿克曼层级中的第 k 个函数： $\alpha_0(n) = n/2$， $\alpha_1(n) = \log n$， $\alpha_2(n) = \log^* n$（迭代对数）， $\alpha_3(n) = \log^{**} n$ （迭代的迭代对数），等等。由于这些函数随着 k 增大而增长极其缓慢，因此我们得到大小几乎线性的常数跳数伸展器。尽管反阿克曼函数过去曾出现在一些关于欧几里得生成器的研究中（具体而言，涉及大小与跳直径 [7, 33] 之间的权衡），但它如今出现在几何相交图的跳数伸展器中仍然令人意外。

弦图包括平面上由闭曲线围成的任意区域的相交图（例如，参见 [34, 引理 4]）。因此，我们的结果具有很强的普适性，首次涵盖了 $\mathbb{R}^2$ 中的任意线段和三角形，同时也包括 Conroy 和 Tóth 考虑过的所有先前类型的几何对象，例如 $\mathbb{R}^2$中的圆盘、矩形和胖凸物体——我们的结果表明， $\mathbb{R}^2$中并不需要胖度。

对于更高维的胖对象，我们也得到了类似的结果：

- O_k跳数为 1 的稀疏子图，其规模为 $O_{d,\ k}(n\alpha_k(n))$，适用于 $\mathbb{R}^d$中胖对象的相交图。

特别地，这包括 $\mathbb{R}^d$中任意球的情形，而此前关于 $d \geq 3$尚无相关结果。（在 $d = 2$ 维空间中，与 Conroy 和 Tóth 先前关于胖对象的结果相比，我们采用了不同的胖度定义，该定义不要求凸性。）

更多新结果。 上述新结果改进了跳数伸展足够大时的既有规模上界，但不一定改进 Conroy 和 Tóth 的 2 跳和 3 跳跃式稀疏子图。我们还有其他新构造，可直接改进他们的一些特定结果。值得注意的是，我们得到：

- 2-对于在平面中具有线性并复杂度的对象，大小为 $O(n\log\ n)$ 的跳数伸展器。

具有线性并复杂度的对象类别包括 $\mathbb{R}^2$ 中的任意圆盘、伪圆盘和胖矩形。因此，对于圆盘的情况，我们的结果严格改善了 Conroy 和 Tóth 的 3 跳、大小为 $O(n\log\ n)$ 的稀疏子图的跳数伸展；同时，也将他们针对胖矩形的 2 跳、大小为 $O(n\log\ n)$ 的稀疏子图进行了推广。因此，我们的结果显著扩大了允许稀疏2跳生成器的几何相交图类别。

此外，我们还得到了：

	跳数伸展	size
弦图	3	$O(n\log^3 n)$
	$O_k(1)$	$O(n\alpha_k(n))$
胖对象中 $\mathbb{R}^d$	3	$O(n\log\ n)$
	$O_k(1)$	$O_{d,\ k}(n\alpha_k(n))$
并复杂度对象 $\mathcal{U}(\cdot)$	2	$O(\mathcal{U}(n)$ 对数 $n)$
$\mathbb{R}^2$中的矩形	3	O（$n\log\ n$）

T表 1 我们关于不同类别几何相交图的 $O(1)$-跳数稀疏化子图的结果 .

- 平面中矩形的 3 跳跃式稀疏子图，大小为 $O(n\log\ n)$。

这比 Conroy 和 Tóth 先前的结果提升了一个对数因子。我们的结果汇总见表 1。

技术。 我们的证明采用了有趣的技术。对于弦图，我们的方法（见第2节）基于通过图分隔器进行分治。针对弦图的分隔定理已在一系列论文中得到发展 [28, 36, 34], ，但只有当弦图不太稠密时，才存在次线性大小的分隔器。另一方面，如果图是稠密的，则存在高阶顶点，其邻域构成较大的星。关键在于认识到，每个这样的星都可以视为一个对象，因为曲线的连通并集可以看作一条新的曲线。除了对分隔集产生的部分进行递归外，我们还额外进行一次递归调用来处理这些星。（幸运的是，弦图的分隔界不受曲线复杂程度的影响。）这种双重递归最终带来反阿克曼复杂度。整体构造很简单。

有趣的是，即使我们只关注垂直/水平线段（或矩形）这一非常特殊的情形，采用上述方法时，将范围推广到曲线仍然很重要。（事实上，我们最初以更传统的分治方法研究垂直/水平线段这一情形，目标较为 modest；但最终，上述弦图分隔方法更胜一筹。）

对于 $\mathbb{R}^d$ 中的胖对象，方法类似，只是我们使用 平移四叉树[9, 14, 16] 和树划分 [30] 进行分治（见第 3 节）。关键在于，将包含某个公共点的一组胖对象的并集视为一个新的胖对象。同样，我们得到双重递归，从而导出反阿克曼复杂度。

对于 $\mathbb{R}^2$ 中并复杂度为线性的对象，我们的二跳伸展子图采用了对数数量的 浅切割（见第 4 节）。浅切割 [35] 有许多应用，例如用于半空间范围搜索 [15] 和正交范围查询 [1], 的静态数据结构、动态几何数据结构、 [18], 排列中的层、 [15], 关联、 [20], ε-网 [35], 以及几何集合覆盖 [23]。有趣的是，我们的工作又为这份清单增添了一项（意料之外的）应用。利用浅切割引理，这次我们的证明很简单，甚至不需要递归；事实上，它比 Conroy 和 Tóth 先前关于胖矩形的二跳伸展子图，以及关于 $\mathbb{R}^2$中胖凸物体的三跳稀疏器的证明都更简单。

我们针对矩形构造的 3 跳稀疏子图 $\mathbb{R}^2$ （见第 5 节）或许是最不令人振奋的。它与 Conroy 和 Tóth 先前的证明类似，采用直接的范围树式分治，但将已知的一维稀疏子图（即实数轴上的点和区间）作为基本情形。

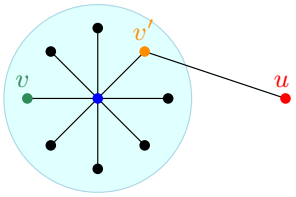

图 1 浅蓝色圆圈表示包含 v 的星。中心的蓝点表示该星的中心。

2 弦图

我们针对字符串图的稀疏距离结构构造将使用 Lee 提出的分隔定理 [34]（该定理改进了 Fox 和 Pach [28] 以及 Matoušek [35]先前提出的版本）。

▶ **引理 1** (弦图分隔定理 [34])。对于每个具有 G 个 n 顶点和m 条边的弦图，都存在 $V(G)$ 的一个划分，分为若干子集 V_1、V_2、X，满足 $|V_1|$、$|V_2| \leq 2n/3$、$|X| = O(\sqrt{m})$，且 V_1 与 V_2之间没有边。

我们先通过介绍一个大小为 $O(n\log^3 n)$ 的 3 跳稀疏器，以及一个大小为 $O(n\log\log n)$ 的7跳稀疏化子图来进行预热，然后将其推广为具有反阿克曼复杂度的更大跳数稀疏子图。

2.1 大小为 $O(n\log^3 n)$ 的 3 跳稀疏器

弦图构造 I

1. 反复选取一个度数大于 Δ 的顶点，其中参数 Δ 将在稍后确定；将该顶点及其邻域一并移除，直到剩余图中不再有度数至多为 Δ 的顶点。令 G' 为剩余图。一个顶点及其邻域构成一颗星，最多移除 n/Δ 颗这样的星。将这些星中的$\widehat{}$边（总计 $O(n)$ 条）加入输出稀疏距离结构 G。

2. 对于每个顶点 $u \in V(G)$，以及步骤 1 中移除的每颗星，只要其中包含一个与$\widehat{}$相邻的顶点 u，就将 u 与该星中任意一个这样的顶点相连，并将这条边加入 G。这样最多会添加 $O(n\cdot n/\Delta)$ 条边。

3. 将引理 1 应用于 G'，得到 V_1、V_2、X。由于 G' 有 $O(\Delta n)$ 条边，$|X| = O(\sqrt{\Delta n})$。递归地为 $V_1 \cup X$ 的诱导子图以及 $\widehat{}$的诱导子图 $V_2 \cup X$ 构造 3 跳稀疏器。将它们的所有边加入 G。

跳数伸展。 对于任意一条边 uv，如果 u 和 v 都属于 G'，那么根据归纳法，u 和 v 之间有一条由 3 跳组成的路径。否则，其中一个顶点（例如 v）属于步骤 1 中移除的一个星。$\widehat{}$根据步骤 2，稀疏子图 G 将 u 连接到同一星中的某个顶点 v'，该顶点与 v同属一星。该星通过 2 跳连接 v' 和 v，因此 u 和 v 之间有一条由 3 跳组成的路径（见图 1）。

稀疏性。 稀疏子图的大小 $S(n)$ 满足递推关系

$$S(n) \leq \max_{n_1,n_2\leq 2n/3:\ n_1+n_2\leq n} (S(n_1 + O(\sqrt{\Delta n})) + S(n_2 + O(\sqrt{\Delta n})) + O(n\cdot n/\Delta)).$$

令 $\Delta = n/\log^2 n$，递推关系可解得 $S(n) = O(n\log^3 n)$。

▶ **定理 2。** 每个具有 n 个顶点的弦图都存在一个大小为 $O(n对数^3 n)$ 的 3-跳数生成器。

2.2 大小为 $O(n\log\log n)$ 的7跳稀疏化子图

为了获得大小更小的跳数生成器，我们需要定理 1的一个推广版本，将其划分为多个子集（类似于平面图中的“r-划分”） [29]:

▶**引理3**（弦图分隔定理：多子集版本）。给定参数 r 和 Δ，满足 $\Delta = o(r)$，对于任意具有 n 个顶点且最大度数为 Δ的弦图 G，存在$O(n/r)$ 个子集 $V_i \subset V(G)$，每个子集至多包含 r 个顶点，使得 $E(G) \subset \bigcup_i (V_i \times V_i)$，且边界复杂度（定义为 $\sum_i |V_i| - |V(G)|$）至多为 $O(\sqrt{\Delta n}/\sqrt{r})$。

证明。应用引理 1 得到 V_1、V_2、X，其中 $|X| = O(\sqrt{\Delta n})$，然后分别由 $V_1 \cup X$ 诱导的子图和由 $V_2 \cup X$诱导的子图递归生成子集。当子图的顶点数少于 r 时，输出其顶点集。

令 $B(n)$ 表示对一个含 n 个顶点的弦图执行上述划分过程后得到的子集的边界复杂度。我们有如下递推关系

$$B(n) \le \begin{cases} \max\limits_{n_1,n_2 \le 2n/3:\ n_1+n_2 \le n} (B(n_1 + O(\sqrt{\Delta n})) + B(n_2 + O(\sqrt{\Delta n})) + O(\sqrt{\Delta n})) & \text{if } n \ge r \\ 0 & \text{if } n < r \end{cases}$$

解得递推关系 $B(n) = O(\sqrt{\Delta n}/\sqrt{r})$。 ◀

弦图构造 II

1. 按照构造 I 的步骤 1 执行。2. 对于每个与至少一个星中的某个顶点相邻的顶点 $u \in V(G)$，在 u 与该星中的任意一个这样的顶点之间添加一条边，并将其加入 G。通过这种方式至多添加 $O(n)$ 条边。3. 对于步骤 1 中移除的每对星，若它们之间存在一条 2跳路径，则将任意一条这样的 2跳路径加入 $\widehat{G}$。通过这种方式至多添加 $O((n/\Delta)^2)$ 条边。4. 对 G' 应用引理3，得到子集 V_i。递归地为每个 V_i 所诱导的子图构造一个 7跳稀疏化子图。将它们的所有边加入 G。

跳数伸展。对于任意一条边 uv，如果二者 u 和 v 都属于 G'，那么根据归纳法，u 和 v 通过 7 跳相连。否则，其中一个顶点（不妨设为 v）属于在第 1 步中移除的一个星。根据第 2 步，稀疏子图 G 将 u 连接到另一个顶点 v'，该顶点可能属于不同的星。根据第 3 步，这两个星在 G中通过 2 跳相连。在一个星内部，2 跳即已足够。因此，u 和 v 通过 7 跳相连（见图 2）。

稀疏性。稀疏子图的大小满足递推关系

$$S(n) \le \max_{n_1,n_2,\ldots \le r:\ \sum_i n_i \le n + O(\sqrt{\Delta} n/\sqrt{r})} \left(\sum_i S(n_i) + O(n + (n/\Delta)^2) \right).$$

通过选取 $\Delta = \sqrt{n}$ 和 $r = n^{0.9}$，递推关系可解为 $S(n) = O(n\log\log n)$。

▶ **T定理 4**。每个具有 n 个顶点的弦图都存在一个大小为 $O(n\log\log n)$的7跳稀疏子图 .

2.3 $O_k(1)$跳稀疏子图，大小为 $O(n\alpha_k(n))$

令 $t_1 = 3$ 和 $t_k = 5t_{k-1} + 3$ 对所有 $k > 1$成立。这意味着 $t_k = \frac{3}{4}(5^k - 1)$。接下来，我们修改前述构造，以得到一个 t_k-跳数伸展器。关键在于以下观察:

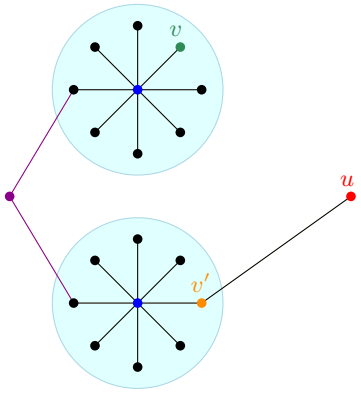

图2 如果 $uv \in E(G)$，那么 $\widehat{G}$ 通过 7 跳连接 u 和 v。紫色路径表示在步骤 3 中添加的任意 2跳路径。

▶**观察5**。构成连通弦图的曲线的并集 C 可以视为一条曲线。

证明。 我们可以先通过移除 C 中的无穷小弧来消除环，然后对所得树进行欧拉遍历，从而得到一条无交叉路径。（如果像一些作者所做的那样 [28]将曲线定义为平面中的任意连通集，这一观察就更加显而易见了。）◀

弦图构造 III

1. 按照构造 I 的步骤 1
。2. 将引理3应用于 G'，以得到子集 V_i。令 B 为边界顶点，即属于至少两个子集 V_i的顶点。递归地为每个 V_i构造 t_k-跳数伸展器$\widehat{\ }$，其对应的图是由 $V_i \setminus B$ 诱导的子图。将它们的所有边添加到 G中。$\overline{\ }$此外，对于 B中的每个顶点，创建一个大小为 1 的星（即单元素集合），并将其从 G'中移除。$\underline{\ }$现在星的数量为 $O(n/\Delta + \sqrt{\Delta}n/\sqrt{r})$。3. 对于每个与至少一个星中的顶点相邻的顶点 u，在 $u\widehat{\ }$与该星中任意一个这样的顶点之间添加一条边，并将其加入 G；我们称 u 被分配给该星。通过这种方式至多添加 $O(n)$条边。4. 对于每个星 σ，将其扩展星 $S(\sigma)$定义为所有属于 σ 或被分配给 σ的顶点的集合，并将新对象 $U(\sigma)$定义为 $S(\sigma)$中的所有曲线的并集。$\widehat{\ }$递归地为这些新对象构造 t_{k-1}-跳数伸展器 H；根据观察5，可以将这些对象视为曲线。对于稀疏子图 H中的每条边 $U(\sigma)U(\sigma')$，向 G中添加一条边$\frown ww'$，其中 $w \in S(\sigma)$ 和 $w' \in S(\sigma')$ 是任意选取的相交曲线。

跳数伸展。对于任意边 uv，如果 u 和 v 都属于 G'，那么根据归纳法，u 和 v 之间由 t_k 跳连接。否则，其顶点之一（设为 v）属于在步骤 1 或 2 中移除的星 σ。根据步骤 3，稀疏子图 G 将 u 与另一个可能不同的星 σ' 中的某个顶点 v' 相连。由于 u 属于 $S(\sigma')$，且 v 属于 σ，因此这两个对象 $U(\sigma)$ 和 $U(\sigma')$ 相交；根据归纳法，它们在稀疏子图 H 中由 t_{k-1} 跳连接。在一个扩展星内部，4 跳就足够了。因此，u 和 v 在 G 中由 $5t_{k-1}+3$ 跳连接（见图3）。

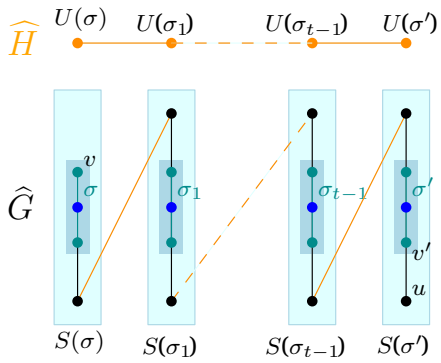

图 3 $v \in S(\sigma)$ 和 $v' \in S(\sigma')$。如果 $\widehat{H}$ 通过 t 跳将 $U(\sigma)$ 与 $U(\sigma')$ 相连，那么 $\widehat{G}$ 通过 $5t+3$ 跳将 v 与 v' 相连。较小的方框表示 $\widehat{G}$中的星，较大的方框表示扩展星。方框中心的蓝色点表示星的中心。

稀疏性。 t_k 跳稀疏子图的大小满足递推关系

$$S_k(n) \leq \max_{n_1,n_2,\ldots \leq r:\ \sum_i n_i \leq n} \left(\sum_i S_k(n_i) + S_{k-1}(O(n/\Delta + \sqrt{\Delta} n/\sqrt{r})) + O(n) \right).$$

对于基本情形，根据定理 2，我们有 $S_1(n) = O(n\log^3 n)$。对于 $k=2$，通过选择$\Delta = \log^3 n$ 和 $r = \Delta^3$，递推关系给出 $S_2(n) = O(n\log^* n)$。对于 $k > 2$，当常数 c_0足够大时，我们选择$\Delta = c_0\alpha_{k-1}(n)$ 和 $r = \Delta^3$ 。通过归纳法可以直接证明 $S_k(n) \leq c_0 n\alpha_k(n)$。

▶ **定理6**。 每个具有 n 个顶点的弦图都存在一个大小为$O(n\alpha_k(n))$ 的$3\,4(5^k - 1)$跳数伸展器，适用于任意 $k \geq 2$。

备注。 我们没有尝试优化上述定理中的跳数伸展。由于上述规模上界中的常数因子不依赖于 k，我们也可以选择 $k = \alpha(n)$，从而得到一个具有 $O(5^{\alpha(n)})$跳数伸展且大小为 $O(n)$的稀疏子图。

尽管我们引用了Lee的弦图分隔定理 [34]，，但Fox 和 Pach给出的较弱分隔界 [28] 实际上足以证明定理4–6 （尽管对于定理2，该界会多出一些对数因子）。

3 个 $\mathbb{R}^d$中的胖对象

本节将注意力转向胖对象的情形。我们将使用以下胖度定义 [16]。这里，边长 指对象的最小包围超立方体的边长。

▶**定义 7**。 **</style}对象集合是 -胖的**，如果对于每个边长为 ℓ 的超立方体 γ，都存在 c 个点，能够击中所有与 γ 相交且边长至少为 ℓ 的对象。

我们的稀疏子图构造将使用四叉树以及一个已知的“平移引理” [16]（基于一项早期工作 [14]）。

▶**定义 8**。 一个四叉树单元 是形如 $[i_1/2^k, (i_1+1)/2^k) \times \cdots \times [i_d/2^j, (i_d+1)/2^k)$ 的超立方体，其中整数 $i_1, \ldots, i_d, k$。

边长为 ℓ 的对象 u 在包含于边长至多为 $C\ell$的四叉树单元中时，称为 C-对齐。

▶ **引理 9**（四叉树平移 [16]）。取一个奇数 $d^* > d$。令 $\tau^{(j)} = (j/d^*, \ldots\ldots, j/d^*) \in \mathbb{R}^d$。对于任意对象 $u \subset [0,1)^d$，平移后的对象 $u + \tau^{(j)}$ 在（$2d^*$）-对齐，除至多 d 个指标 $j \in \{0, \ldots\ldots, d^* - 1\}$ 外均成立。

选取 $d^* = 2d + 1$。通过缩放，我们可以假设所有输入对象都位于 $[0,1)^d$ 中。于是，对任意一对对象 u 和 v，至少存在一个索引 $j \in \{0, \ldots, d^* - 1\}$，使得 $u + \tau^{(j)}$ 和 $v + \tau^{(j)}$ 都满足 $(2d^*)$-对齐。对于每个 j，只需为所有满足 $u + \tau^{(j)}$ 为 $(2d^*)$-对齐的对象 u 构造一个跳数伸展器；然后我们可以输出这些 d^* 稀疏化子图的并集。

因此，从现在起，我们可以假设所有给定对象都满足 $(2d^*)$-对齐。

我们先介绍一个大小为 $O(n \log n)$ 的 3 跳稀疏器，以此作热身，然后再介绍一个具有反阿克曼复杂度的更多跳数稀疏器。

3.1 大小为 $O(n \log n)$ 的 3 跳稀疏器

我们的 3 跳稀疏器将用到以下引理，它可直接通过在四叉树中选取一个树质心得到：

▶ **引理 10** (四叉树树质心 [8, 14])。对于任意一组 n 中的点 $\mathbb{R}^d$，存在一个四叉树单元，使得单元内部和外部的点数都至多为 $\frac{2^d}{2^d+1} n$。

胖对象构造 I

1. 对对象中最靠左的点应用引理 10，得到一个四叉树单元 γ。递归地为完全位于 γ 内部的对象以及完全位于 γ 外部的对象构造 3 跳稀疏器。将它们的所有边加入 G。 2. 设 P_γ 为一个击中集，它击中所有与 $\partial\gamma$ 相交且边长至少为 $\ell_\gamma/(2d^*)$ 的对象，其中 ℓ_γ 表示 γ 的边长。根据 c 胖度的定义，存在一个大小为 $|P_\gamma| = O_d(c)$ 的击中集（因为 $\partial\gamma$ 可以由边长为 $\ell_\gamma/(2d^*)$ 的 $(2d^*)^d$ 个超立方体覆盖）。对于每个点 $p \in P_\gamma$，构造一个星 $S(p)$，连接所有被 p 击中的对象，其中的中心任选。将这些星的边加入 G。这样至多添加 $O_d(cn)$ 条边。 3. 对于每个对象 u 以及每个包含与 u 相交对象的星 $S(p)$，在 u 与 $S(p)$ 中任意一个这样的对象之间添加一条边，并将其加入 G。这样至多添加 $O(n)$ 条边。

跳数伸展。对于任意边 uv，如果对象 u 和 v 都在 γ 内部，或都在 γ 外部，那么根据归纳法，u 和 v 通过 3 个跳数连通。否则，其中一个对象——不妨设为 v——与 $\partial\gamma$ 相交（见图 4）。注意，由于 v 与 （$2d^*$）对齐，v 的边长至少为 $\ell_\gamma/$（$2d^*$）。因此，v 属于第 2 步中的一个星 S（p）。根据第 3 步，稀疏子图 G 将 u 与同一星 S（p）中的某个对象 v' 相连。由于 v' 和 v 在 G 中通过 2 个跳数连通，因此 u 和 v 通过 3 个跳数连通。

稀疏性。稀疏子图的大小 S（n）满足递推关系

$$S(n) \leq \max_{n_1, n_2 \leq 2^d n/(2^d+1):\ n_1+n_2 \leq n} (S(n_1) + S(n_2) + O_d(cn)).$$

该递推关系的解为 S（n）$= O_d$（$cn \log n$）。

▶**定理 11**。 n 胖对象在 $\mathbb{R}^d$ 中的相交图具有大小为 $O(n \log n)$ 的 *3* 跳稀疏器。

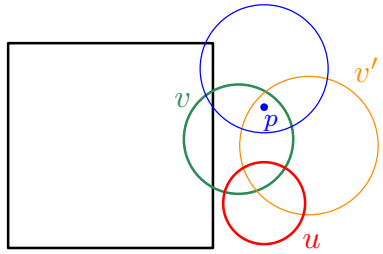

图 4 $uv' \in \widehat{G}$，v' 通过星 $S(p)$ 的中心（蓝色圆盘）与 v 相连。

3.2 $O_k(1)$ 跳稀疏子图，大小为 $O_{d,k}(n\alpha_k(n))$

为了获得大小更小的跳数生成器，我们需要引理10 的一个将其划分为多个子集的推广版本：

▶ **定义 12.** 广义四叉树单元 γ 指四叉树单元，或外四叉树单元 γ^+ 与内四叉树单元 γ^- 之差（在前一种情况下，令 $\gamma^+ = \gamma$和 $\gamma^- = \emptyset$）。

▶ **引理 13** (四叉树划分)。 给定参数 r，对于 $[0,2)^d$ 中任意包含 n 个点的集合，都存在一种将 $[0,2)^d$ 划分为 $O(n/r)$ 个广义四叉树单元的划分，使得每个单元最多包含 r 个点。

证明。 这可直接通过将 Frederickson 的树划分方案应用于四叉树 [30] 得到；或者递归应用引理 10（当单元最多包含 r 个点时停止，并进一步细分以确保每个广义单元至多包含一个内四叉树单元——例如，参见 [8]）。◀

▶**观察 14**。 给定 $\mathbb{R}^d$ 中一组 c-胖、 C-对齐的对象，被某个公共点击中的对象子集的并集可以视为一个 $(4^d c)$-胖、 C-对齐的对象。

证明。 考虑一个超立方体 γ，其边长为 ℓ。将 γ 扩展为一个超立方体 $\hat{\gamma}$，其边长为 2ℓ，并保持中心不变。存在一个点集 P，其中包含 $4^d c$ 个击中所有与 $\hat{\gamma}$ 相交且边长至少为 $\ell/2$的对象的点。

现在取一个包含公共点 p_0 的对象子集 S。令 U 为 S 中对象的并集。假设 U 与 γ 相交，且边长至少为 ℓ。

- 情况 1： $p_0 \in \hat{\gamma}$。某个对象 $u \in S$ 的边长至少为 $\ell/2$。由于 u 包含 p_0，因此与 $\hat{\gamma}$相交，我们知道 u 被 P击中，所以 U 被 P击中。情况 2： $p_0 \notin \hat{\gamma}$。某个对象 $u \in S$ 与
- γ相交，且 u 的边长必须至少为 $\ell/2$。因此， u 被 P击中，所以 U 被 P击中。

这证明了 U 的 $(4^d c)$-胖度。 U 的 C-对齐性源于 S 中各个对象的 C-对齐性。◀

设 $t_1 = 3$ 和 $t_k = 3t_{k-1}+3$。这意味着 $t_k = \frac{11}{9}3^k - \frac{2}{3}$。现在我们描述一种 t_k-跳数伸展器的构造。

胖对象构造 II

1. 将引理 13 应用于对象中最左侧的点，从而得到一组 Γ 个 $O(n/r)$广义四叉树单元。对于每个 $\gamma \in \Gamma$，递归地为完全位于其中的对象构造一个 t_k 跳数伸展器 γ。

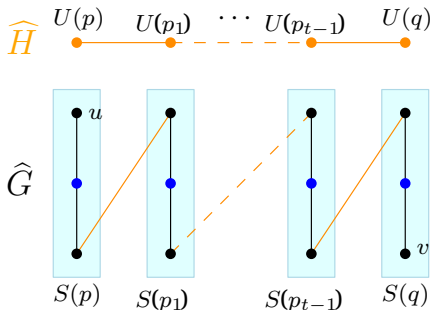

图 5 假设对于某个 p, $q \in P$, $u \in S(p)$ 和 $v \in S(q)$。如果 $\widehat{H}$ 通过 t 跳数连接 $U(p)$ 和 $U(q)$，那么 $\widehat{G}$ 通过 $3t+2$ 跳数连接 u 和 v。$\widehat{G}$ 中的星以蓝色方框表示。蓝色点表示这些星的中心。

2. 对于每个 $\gamma \in \Gamma$，设 P_{γ^+} 为一组 $O_d(c)$个击中所有与 $\partial\gamma^+$ 相交且边长至少为 $\ell_{\gamma^+}/(2d^*)$的对象的点，其中 ℓ_{γ^+} 表示 γ^+的边长。类似地，设 P_{γ^-} 为一组 $O_d(c)$个击中所有与 $\partial\gamma^-$ 相交且边长至少为 $\ell_{\gamma^-}/(2d^*)$的对象的点，其中 ℓ_{γ^-} 表示 γ^-的边长。设 $P_\gamma = P_{\gamma^+} \cup P_{\gamma^-}$。对于完全位于 γ 内的每个对象 u 以及每个点 $p \in P_\gamma$，在 u 与一个被 p 击中且与 u 相交的任意对象$\widehat{}$之间添加一条边（如果存在这样的对象），连接到 G。通过这种方式至多添加 $O_d(cn)$条边。

3. 令 $P = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma$。将 u 每个被 P 击中的对象 任意分配给一个 $p \in P$，该对象击中 u。对于每个 $p \in P$，构造一个星 $S(p)$，连接分配给 p的所有对象，并任意选择$\widehat{}$作为中心。将这些星的边添加到 G中。通过这种方式至多添加 $O(n)$ 条边。

4. 对于每个 $p \in P$，将新对象 $U(p)$ 定义为 $S(p)$ 中对象的并集。递归地为这些新对象构造一个 t_{k-1}-跳数伸展器 $\widehat{H}$；根据观察 14，这些对象是（$4^d c$）-胖的$\widehat{}$并且（$2d^*$）-对齐的。对于伸展器 H 中的每条边 $U(p)U(p')$，向 G 添加一条$\widehat{}$边 ww'，其中 $w \in S(p)$ 和 $w' \in S(p')$ 是任意选取的相交对象。

跳数伸展。对于任意一条边 uv，如果 u 和 v 都完全位于 Γ中的某个广义四叉树单元内，那么根据归纳法，u 和 v 之间存在一条仅含 t_k 跳的路径。

否则，考虑 u 和 v 都未完全位于 Γ中的任何广义四叉树单元内的情况。此时，对于某些 γ、$\gamma' \in \Gamma$，u 与 $\partial\gamma$ 相交，且 v 与 $\partial\gamma'$ 相交。注意，如果 u 与 $\partial\gamma^+$ 相交（分别地，若与 $\partial\gamma^-$相交），那么 u 的边长至少为 $\ell_{\gamma^+}/(2d^*)$（分别为 $\ell_{\gamma^-}/(2d^*)$），因为 u 是（$2d^*$）对齐的。因此，P_γ 与 u 相交。类似地，$P_{\gamma'}$与 v 相交。于是，对于某些 p、$q \in P$，u 和 v分别属于步骤 3 中的两个星 $S(p)$ 和 $S(q)$。两个对象 $U(p)$ 和 $U(q)$ 相交；根据归纳法，它们在稀疏子图 H中由仅含 t_{k-1} 跳的路径连通。在一个星内，$\widehat{}$只需 2 跳。因此，u 和 v 在 G 中由仅含 $3t_{k-1}+2$ 跳的路径连通（见图 5）。

最后，考虑恰好有一个对象（设为 u）完全位于 Γ 中的广义四叉树单元 γ 内，而另一个对象 v 与 $\partial\gamma$ 相交的情况。于是，某个$\widehat{}$点 $q \in P_\gamma$ 会击中 v。根据步骤 2，稀疏子图 G 将 u 与某个同样被点 q 击中的对象 v' 相连。接着，v 和 v' 分别属于步骤 3 中的两个星 $S(p)$ 和 $S(p')$，其中某个 p，$p' \in P$。这两个对象 $U(p)$ 和 $U(p')$ 相交。根据前一种情况中的相同论证，v 和$\frown v'$ 在 G 中通过 $3t_{k-1}+2$ 跳相连，因此 u 和 v 通过 $3t_{k-1}+3$ 跳相连。

稀疏性。 对于 c-胖（$2d^*$）对齐对象， t_k-跳数伸展器的大小满足以下递推关系

$$S_{k,c}(n) \le \max_{n_1,n_2,\ldots\le r:\ \sum_i n_i\le n}\left(\sum_i S_{k,c}(n_i)+S_{k-1,4^dc}(O_d(cn/r))+O_d(cn)\right).$$

对于基本情形，根据定理 11，我们有 $S_{1,\ c}(n) = O_d(cn$对数 $n)$。对于 $k>1$，我们选择 $r=\alpha_{k-1}(n)$。通过归纳法可以直接验证，$S_{k,\ c}(n)=O_{d,\ k,\ c}(n\alpha_k(n))$。

▶ **定理 15**。 $\mathbb{R}^d$ 中的 n c-胖对象的相交图存在一个大小为 $O_{d,\ k,\ c}(n\alpha_k(n))$ 的$(\frac{11}{9}3^k-\frac{2}{3})$ 跳稀疏化子图，其中任意 $k\ge 1$ 均成立。

备注。 由于胖度参数 c 在递归过程中随 k 增长，上述规模上界中的常数因子取决于 k。

与上一节类似，也可以得到一个中间结果，即一个 6 跳稀疏化子图，其大小为 $O(n\log\log n)$。

4 $\mathbb{R}^2$ 中具有（近乎）线性并复杂度的对象

本节介绍一种使用 Matoušek 提出的浅切割引理来构造跳数生成器的不同方法 [35]。下面的变体见于 [23]。

▶ 引理*16*（浅切割）。考虑一个良性[2] 对象族 $\mathbb{R}^2$，使得任意 n 个对象的并集复杂度至多为 $U(n)$，并假设 $U(n)/n$ 是非递减的。给定该对象族中的一组 n 对象以及参数 r 和 k，存在一个由 $O((rk/n+1)^2U(n/k))$个单元组成的集合，使得：（*i*）每个单元与至多 n/r 个对象的边界相交；（*ii*）这些单元覆盖所有深度至多为 k的点。这里，点 p 的深度是包含 p的对象数量。

通过浅切割进行构造

1. 对于每个 $i=1$，……，$\log n$，应用引理16，取 $k=2^i$和 $r=n/2^{i-2}$，得到一个由 Ξ_i 个 $O(\mathcal{U}(n/2^i))$ 个单元组成的集合。我们可以假设每个单元 Ξ_i 至少包含一个深度至多为 2^i 的点（否则可以移除该单元）。
2. 对于每个 i 以及满足存在一个完全包含 ξ 的对象 $s(\xi)$ 的每个 $\xi\in\Xi_i$，构建一个以 $s(\xi)$ 为中心、连接所有与 ξ 相交的对象的星。将这些星的边加入 $\widehat{G}$。由于至多有 2^i 个对象包含 ξ，且有 2^{i-2} 个对象的边界与 ξ 相交，因此加入的边数为 $O(\sum_{i=1}^{\log n}\mathrm{U}(n/2^i)\cdot 2^i)$ $=O(\mathrm{U}(n)\log n)$。

跳数伸展。对于任意边 uv，选取 p 中位于 u 和 v 交集内的任意点，并令 k 为 p 的深度。令 i 为满足 $2^{i-1}\le k<2^i$ 的数。令 ξ 为 Ξ_i 中包含 p 的单元。至少有 2^{i-1} 个对象包含 p，但至多有 2^{i-2} 个对象的边界与 ξ 相交。因此，必然存在一个对象 $s(\xi)$ 完全包含 ξ。于是， G 包含边 $s(\xi)u$ 和 $s(\xi)v$，因此 u 和 v 通过 2 个跳数相连（见图 6 ）。

▶**定理17**。 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一个良态对象族，其中任意 n 个对象的并集复杂度至多为 $U(n)$，并假设 $U(n)/n$ 是非递减的。该族中 n 个对象的相交图存在一个大小为 $O(U(n)\log n)$ 的二跳伸展子图。

[2] 参见 [23]，其中有精确定义。 $\mathbb{R}^2$中的大多数对象族，例如圆盘、伪圆盘等，都表现良好。

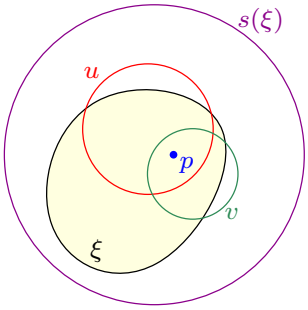

图6 对象 u 和 v 相交，p 是 $u \cap v$中的任意点，而 $\xi \in \Xi_i$ 是包含p的单元。我们的计数论证表明，必定存在一个对象 $s(\xi)$ 完全包含 ξ，因此 $\widehat{G}$ 必须包含路径 $u \to s(\xi) \to v$。

例如，已知平面 [32], 中的圆盘和伪圆盘满足 $\mathrm{U}(n) = O(n)$，而平面 [6] 中的胖三角形满足 $\mathrm{U}(n) = O(n \log^* n)$。因此，我们得到大小为 $O(n \log n)$ 的圆盘和伪圆盘二跳伸展子图，以及大小为 $O(n \log n \log^* n)$ 的胖三角形二跳伸展子图。

备注。 通过使用更少的浅切割，并令 $k = 2^{(1+\delta)^i}$ 对于 $i = 1$、.....、$O(\log \log n)$，可以在 5 跳的情况下将规模上界降低到 $O(\mathcal{U}(n) \log \log n)$，但对于更大的跳数伸展，这种方法似乎无法带来进一步改进。

5 $\mathbb{R}^2$中的轴对齐矩形

本节将介绍一种 3 跳稀疏器，适用于输入对象由平面中的水平线段 H 和垂直线段 V 组成的情形。随后将给出更一般的轴对齐矩形情形下的稀疏化子图。

我们首先考虑所有垂直线段都是直线的特殊情形。这个问题是一维的，因为线段的 y 坐标并不重要。借鉴 Conroy 和 Tóth [24] 处理一维区间图的方法，我们将 x轴划分为不相交区间 $\mathcal{I} = \{I_1, ..., I_\ell\}$ 如下（见图 7）：

1. $I_0 = \{x_0\}$ 是仅包含所有水平线段中最左端点的 x坐标的区间。2. 对于整数 $k \geq 1$，$I_k = (x_{k-1}, x_k]$，其中 x_{k-1} 是 I_{k-1}的右边界，并且 x_k是满足存在一条线段 $h_k = [x'_k, x_k] \in H$ 使得$x'_k \leq x_{k-1}$的最大数。我们称 h_k 为 的覆盖线段 。 I_k。

▶**引理18。** 水平线段 G 和 n 垂直直线的相交图 $\widehat{\ }$存在一个具有 $O(n)$ 条边的 *3* 跳稀疏器。

证明。 对于每个区间 $I = (x_L, x_R]$令 h_I 为覆盖线段。保留涉及 h_I 且位于带状区域 $I \times \mathbb{R}$中的所有交点。最后，对于每条线段 $h \in H$，保留与相交的最左侧和最右侧竖直线的交点 h，分别记为 $v_L(h)$ 和 $v_R(h)\widehat{\ }$。令 G 为一个子图，其中每个保留的交点对应一条边。

跳数伸展。 考虑相交的 $h \in H$ 和 $v \in V$。$v_L(h)$ 或 $v_R(h)$ 必定位于与 v 相同的区间 $I \in \mathcal{I}$ 中；不妨设它是 $v_R(h)$。v 和 $v_R(h)$ 都与覆盖线段$\frown h_I$相交。因此，G 包含 3跳路径 $h \to v_R(h) \to h_I \to v$。

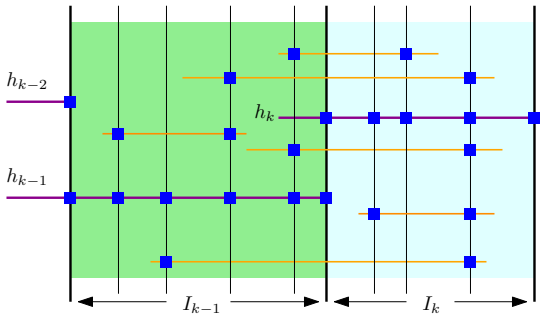

图 7 不相交区间 I_{k-1} 和 I_k 以及覆盖线段 h_{k-2}，h_{k-1}，h_k（以紫色绘制）的示意图。蓝色正方形表示保留了哪些交点。

稀疏性。对于每条覆盖线段 h_I，我们只保留了区间 I 内的交点，因此在所有区间 I 中，我们总共保留了 $O(n)$ 个交点。对于每个不是覆盖线段的 $h \in H$，我们只保留了涉及 h 的两个交点。◀

根据引理 18，沿 y轴进行标准的二分分治，可得到一个包含 $O(n\log n)$ 条边的 3 跳稀疏器，适用于水平和垂直线段的情形。给定一个水平条带 σ，我们按如下方式构造 3 跳稀疏器：

1. 根据引理 18 构造一个 3 跳稀疏器，以处理水平线段与长垂直线段之间的交点，即贯穿整个带状区域的垂直线段 σ。然后移除这些长垂直线段。2. 将 σ 分成两个水平子条带，每个子条带包含一半数量的水平线段。对这两个子条带分别递归地构造一个 3 跳稀疏器。

每条线段，无论是水平还是垂直的，都会出现在 $O(\log n)$ 次递归调用中。因此，稀疏子图中的边总数至多为 $O(n\log n)$。由此，我们证明了以下结论：

▶**引理 19**。 *n 水平/垂直线段的相交图存在一个大小为 $O(n\log n)$ 的 3 跳稀疏器。*

将每个矩形替换为其四条边所对应的线段，即可把轴对齐线段的结果扩展到轴对齐矩形。我们为这些线段构造一个稀疏子图。如果两个矩形相交，那么它们的边要么相交，要么其中一个矩形包含另一个。第一种情况可归约为线段相交。对于包含的情况，Conroy 和 Tóth [24] 已证明，使用 $O(n\log n)$ 条边，就能为仅包含“角点相交”的子图构造一个二跳伸展子图；所谓“角点相交”，即一个矩形包含另一个矩形的某个角点。

▶**定理 20**。 *n 轴对齐矩形的相交图在 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个大小为 $O(n\log n)$ 的 3 跳稀疏器。*

6 开放问题

尽管我们已经为弦图和胖对象相交图中的跳数生成器获得了近线性规模上界，但仍有一个问题尚未解决：这些上界是否能够进一步改进为线性界，或者能否证明存在反阿克曼型下界。

另一个问题是，对于本文未涉及的其他相交图，例如 $\mathbb{R}^3$ 中的单纯形，是否也能得到近线性界。在这里，一个较为务实的起点或许是，先寻求任何优于一般图的上界。

参考文献

1 Peyman Afshani 和 Konstantinos Tsakalidis。三维支配范围的最优确定性浅切割。《Algorithmica》，80(11):3192–3206，2018年。 doi:10.1007/s00453-017-0376-3。2 Pankaj K. Agarwal、Noga Alon、Boris Aronov 和 Subhash Suri。可见性图能否紧凑表示？《离散与计算几何》，12:347–365，1994年。 doi:10.1007/BF02574385。3 Pankaj K. Agarwal 和 Jeff Erickson。几何范围搜索及其相关问题。载于《离散与计算几何进展》，《当代数学》第223卷，页1–56。美国数学会出版社，1999年。网址： http://jeffe.cs.illinois.edu/pubs/survey.html。4 Abu Reyan Ahmed、Greg Bodwin、Faryad Darabi Sahneh、Keaton Hamm、Mohammad Javad Latifi Jebelli、Stephen G. Kobourov 和 Richard Spence。图跨距子图：教程式综述。《计算机科学评论》，37:100253，2020年。 doi:10.1016/j.cosrev.2020.100253。5 Ingo Althöfer、Gautam Das、David P. Dobkin、Deborah Joseph 和 José Soares。关于加权图的稀疏伸展器。《离散与计算几何》，9:81–100，1993年。 doi:10.1007/BF02189308。6 Boris Aronov、Mark de Berg、Esther Ezra 和 Micha Sharir。平面中局部肥胖对象并集的改进界。《SIAM计算杂志》，43(2):543–572，2014年。 doi:10.1137/120891241。7 Sunil Arya、Gautam Das、David M. Mount、Jeffrey S. Salowe 和 Michiel H. M. Smid。欧几里得生成器：短、细且修长。载于第27届ACM计算理论年度研讨会（STOC）论文集，页489–498，1995年。 doi:10.1145/225058.225191。8 Sunil Arya、David M. Mount、Nathan S. Netanyahu、Ruth Silverman 和 Angela Y. Wu。固定维度近似最近邻搜索的最优算法。《ACM杂志》，45(6):891–923，1998年。 doi:10.1145/293347.293348。9 Marshall W. Bern。高维中的近似最近点查询。《信息处理快报》，45(2):95–99，1993年。 doi:10.1016/0020-0190(93)90222-U。10 Ahmad Biniaz。单位圆盘图的平面跳数跨距子图：更简单、更优。《计算几何》，页101622，2020年。 doi:10.1016/j.comgeo.2020.101622。11 Karl Bringmann、Sándor Kisfaludi-Bak、Marvin Künnemann、André Nusser 和 Zahra Parsaeian。迈向几何相交图直径的次二次计算。载于第38届国际计算几何研讨会（SoCG）论文集，页21:1–21:16，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.21。12 Sergio Cabello 和 Miha Jejčič。单位圆盘相交图中的最短路径。《计算几何》，48(4):360–367，2015年。 doi:10.1016/j.comgeo.2014.12.003。13 Nicolas Catusse、Victor Chepoi 和 Yann Vaxès。单位圆盘图的平面跳数跨距子图。载于第6届传感器系统、无线自组网和自主移动实体算法国际研讨会（ALGOSENSORS）论文集，页16–30，2010年。 doi:10.1007/978-3-642-16988-5_2。14 Timothy M. Chan。重新探讨近似最近邻查询。《离散与计算几何》，20(3):359–373，1998年。 doi:10.1007/PL00009390。15 Timothy M. Chan。三维中的随机抽样、半空间范围报告与($\leq k$)层的构造。《SIAM计算杂志》，30(2):561–575，2000年。 doi:10.1137/S0097539798349188。16 Timothy M. Chan。用于胖对象装箱与刺穿的多项式时间近似方案。《算法杂志》，46(2):178–189，2003年。17 Timothy M. Chan。具有几何应用的动态子图连通性。《SIAM计算杂志》，36(3):681–694，2006年。 doi:10.1137/S009753970343912X。18 Timothy M. Chan。通过浅切割实现的动态几何数据结构。《离散与计算几何》，64(4):1235–1252，2020年。 doi:10.1007/s00454-020-00229-5。

19 Timothy M. Chan。在几何相交图中寻找三角形及其他小型子图。载于第34届ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，2023年。即将出版。网址： https://arxiv.org/abs/2211.05345。20 Timothy M. Chan 和 Sariel Har-Peled。几何场景中避免诱导完全二部图时的关联数。载于第34届ACM-SIAM离散算法研讨会（SODA）论文集，2023年。即将出版。网址： https://arxiv.org/abs/2112.14829。21 Timothy M. Chan 和 Dimitrios Skrepetos。几何相交图中的所有点对最短路径。《计算几何杂志》，10(1):27–41，2019年。 doi:10.20382/jocg.v10i1a2。22 Timothy M. Chan 和 Dimitrios Skrepetos。加权单位圆盘图中的近似最短路径与距离预言机。《计算几何杂志》，10(2):3–20，2019年。 doi:10.20382/jocg.v10i2a2。23 Chandra Chekuri、Kenneth L. Clarkson 和 Sariel Har-Peled。几何场景中的集合多重覆盖问题。《ACM算法汇刊》，9(1)，2012年12月。 doi:10.1145/2390176.2390185。24 Jonathan B. Conroy 和 Csaba D. Tóth。几何相交图的跳数伸展器。载于第38届国际计算几何研讨会（SoCG），页30:1–30:17，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.30。25 Mark de Berg、Otfried Cheong、Marc J. van Kreveld 和 Mark H. Overmars。《计算几何：算法与应用》。施普林格，第3版，2008年。26 Adrian Dumitrescu、Anirban Ghosh 和 Csaba D. Tóth。单位圆盘图的稀疏跳数伸展器。《计算几何》，页101808，2022年。 doi:10.1016/j.comgeo.2021.101808。27 保罗·厄尔多什。图论中的极值问题。载于图论研讨会论文集，斯莫莱尼采，捷克斯洛伐克科学院，页29–36，1963年。28 Jacob Fox 和 János Pach。弦图的分隔定理及其应用。《组合学、概率与计算》，19(3):371–390，2010年。29 Greg N. Frederickson。平面图最短路径的快速算法及其应用。《SIAM计算杂志》，16(6):1004–1022，1987年。30 Greg N. Frederickson。用于动态二边连通性和 k最小生成树的双态数据结构。《SIAM计算杂志》，26(2):484–538，1997年。31 Jie Gao 和 Li Zhang。单位圆盘图度量的良分离点对分解及其应用。《SIAM计算杂志》，35(1):151–169，2005年。 doi:10.1137/S0097539703436357。32 Klara Kedem、Ron Livne、János Pach 和 Micha Sharir。约旦区域的并集，以及多边形障碍物环境中的无碰撞平移运动。《离散与计算几何》，1:59–70，1986年。 doi:10.1007/BF02187683。33 Hung Le、Lazar Milenkovic 和 Shay Solomon。具有极小直径的稀疏欧几里得伸展器：紧确下界。载于第38届国际计算几何研讨会（SoCG）论文集，页54:1–54:15，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.54。34 James R. Lee。区域相交图中的分隔器。载于第8届理论计算机科学创新会议（ITCS）论文集，页1:1–1:8，2017年。 doi:10.4230/LIPIcs.ITCS.2017.1。35 Jirí Matoušek。报告半空间中的点。《计算几何》，2(3):169–186，1992年。36 Jirí Matoušek。弦图中的近最优分隔器。《组合学、概率与计算》，23(1):135–139，2014年。 doi:10.1017/S0963548313000400。37 Giri Narasimhan 和 Michiel H. M. Smid。《几何伸展网络》。剑桥大学出版社，2007年。38 Chenyu Yan、Yang Xiang 和 Feodor F. Dragan。单位圆盘图的紧凑低延迟路由标记方案。载于算法与数据结构第11届国际研讨会（WADS）论文集，页566–577，2009年。 doi:10.1007/978-3-642-03367-4_49。