arXiv:2303.16388v1 [cs.GT] 29 Mar 2023

一般平局处理规则下第一价格拍卖均衡的复杂性

Xi Chen BinghuiPeng 哥伦比亚大学 哥伦比亚大学
xichen@cs.columbia.edu bp2601@columbia.edu

摘要

我们研究在共同先验下、平局处理规则作为输入时，第一价格拍卖中近似（纯）贝叶斯纳什均衡的求解复杂度。我们证明，即使平局处理规则是三方规则（即当不超过三名竞拍者出现平局时规定物品分配，否则采用均匀随机破同分规则），该问题仍是 PPAD 完全的。这是关于共同先验下第一价格拍卖中均衡计算的首个困难性结果。作为积极的一面，我们针对均匀随机破同分规则下的问题给出一个多项式时间近似方案。

1 引言

第一价格拍卖可以说是实践中最常用的拍卖形式 [Vic61, Rou10, CKP+22]，在这种拍卖中，出价最高的竞标者赢得物品并支付其出价。第一价格拍卖及其变体已被广泛用于在线广告拍卖：当用户访问某个平台时，感兴趣的广告商之间会进行一场拍卖，以确定向该用户展示的广告。尽管第一价格拍卖形式简单，但它们并不激励相容——这是拍卖理论中最知名的例子：它不允许采用真实策略。这促使经济学领域的研究者投入了大量精力[Leb96, Leb99, MR00, LP00, Ath01, MR03, RZ04, Leb06, BBM17] ，而近年来，计算机科学领域的研究者也进行了大量研究 [CH13, WSZ20, FRGH+21]，以理解第一价格拍卖中的均衡。

本文研究在第一价格拍卖中求解贝叶斯纳什均衡的计算复杂性。我们考虑以下独立共同先验设定。待售物品只有一件， n 位竞标者对其感兴趣。每位竞标者的价值分布均为连续分布 $\mathcal{D}_i$，其支持集为 $[0,1]$。联合价值分布 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}_i$的乘积分布。虽然 $\mathcal{D}_i$是公开的，但每位竞标者 i 都有一个从 $\mathcal{D}_i$中抽取的物品私人价值 v_i 。每位竞标者选择一种出价策略，将其私人价值映射为出价空间 $\mathcal{B} = \{b_0, b_1 \ldots, b_m\}$中的一个出价，其中出价空间是离散的 。贝叶斯纳什均衡是由一组出价策略组成的元组，每位竞标者各有一种策略；在该均衡中，每位竞标者相对于其他竞标者的策略都采取最佳响应（正式定义见第2节，其中包括出价策略必须满足的两个条件：不超价和单调性）。

然而，如果没有平局处理规则，竞标者之间的这场博弈便未被完全定义：当不止一位竞标者出价最高时，物品如何分配？文献中已研究过多种平局处理规则。最常见的是均匀随机破同分规则，即将物品均匀随机地分配给获胜者之一。另一种常用的平局处理规则是额外进行一轮维克里拍卖，以确保在出价空间连续时均衡的存在 [Leb96, DMM+22]。近期的一系列研究 [Syr14, HHT14, JL22, JL23] 采用垄断式平局决胜规则，在建立最坏情况下的无政府状态价格（POA）界时，始终将物品分配给一位玩家。

为处理问题中的平局处理规则，我们考虑这样一种设定：拍卖者指定拍卖中使用的平局处理规则 Γ （作为输入的一部分）。 Γ 将每个 $W \subseteq [n]$映射为 W 上的一个分布 $\Gamma(W)$，其中 $W \subseteq [n]$表示获胜者集合， W 表示向竞标者分配物品的方式W。一般的平局处理规则需要指数数量的条目才能描述，而我们的 PPAD 困难性结果基于一个简洁的规则族，即所谓的三方 平局处理规则：当平局涉及的竞标者不超过三名时，此类平局处理规则 Γ 指定物品分配方式；否则（当平局涉及的竞标者多于三名时），则采用均匀随机破同分规则。该困难性结果表明，当平局处理规则作为输入的一部分给定时，除非 PPAD = P，否则不存在能高效求解第一价格拍卖中贝叶斯纳什均衡的算法。作为对这一困难性结果的补充，我们还给出了一种多项式时间近似方案（PTAS），可在均匀随机破同分规则下求得常数近似贝叶斯纳什均衡。

1.1 我们的结果

我们的主要困难性结果表明，在采用三方平局处理规则的第一价格拍卖中，寻找 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡的问题是 PPAD 完全的。

定理 1.1 （计算困难性）。 *在采用三方平局处理规则的第一价格拍卖中，对于 $\epsilon = 1/\mathrm{poly}(n)$，寻找 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡是 PPAD 完全的。*

值得指出的是，即使满足以下条件，上述困难性仍然成立：(1) 出价空间 $\mathcal{B}$ 的大小为 3；(2) 每个 $\mathcal{D}_i$ 的密度函数都是至多包含四个非零片段的分段常数函数。

从积极的方面来看，我们为在均匀随机破同分规则下的第一价格拍卖中寻找贝叶斯纳什均衡，提出了一种多项式时间近似方案：

定理 1.2（均匀随机破同分规则下的多项式时间近似方案）。对于任意 $\epsilon > 0$、n，$m \geq 2$，存在一种算法，可在 $O(n^4 \cdot g(1/\epsilon))$ 时间内，在均匀随机破同分规则下找到一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡。

只要能够访问每个价值分布 $\mathcal{D}_i$ 的累积分布函数，我们的算法就能运行。

1.2 相关工作

第一价格拍卖 对第一价格拍卖的研究可以追溯到维克里在 20 世纪 60 年代的奠基性工作[Vic61]。尽管其形式极其简单且应用范围广泛，激励问题一直是核心议题；第一价格拍卖或许是最广为人知的不允许采用真实策略的机制。经济学文献中有大量研究 [RS81、Plu92、MMRS94、Leb96、Leb99、MR00、LP00、Ath01、MR03、RZ04、Leb06、CH13、BBM17] 致力于刻画纯策略贝叶斯纳什均衡（或 BNE）的存在性、唯一性及闭式表达。然而，第一价格拍卖的贝叶斯纳什均衡仅在少数特殊情形下得到了充分理解，包括玩家具有对称估值分布 [CH13], 、所有玩家的概率密度函数均有上界且在最低点具有原子概率质量 [Leb06], 、仅有两名竞标者且具有均匀估值分布 [KZ12]，或者玩家具有离散估值和连续出价空间，并通过额外一轮维克里（二价）拍卖执行平局处理 [WSZ20]。

关于第一价格拍卖中均衡计算复杂性的形式化研究，最近由与我们最为接近的 [FRGH+21] 推动。[FRGH+21] 考察了主观先验下的计算复杂性，即每位竞标者对其他竞标者估值分布的看法各不相同。他们证明，在均匀随机破同分规则下，求解一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡（其中 $\epsilon > 0$ 为某个常数）和精确贝叶斯纳什均衡，分别具有 PPAD 完全性和 FIXP 完全性。正如我们很快将要说明的，获得这些结果所采用的技术与我们的方法截然不同。值得注意的是，前述大多数文献研究的都是共同先验设定，而 [FRGH+21] 也提出了一个尚未解决的问题：在标准的独立共同先验设定下，如何刻画 ϵ-贝叶斯纳什均衡的计算复杂性。[FRGH+21] 还给出了一种多项式时间算法，当玩家数量和出价数量为常数且输入分布为分段多项式时，可用于求得高精度的贝叶斯纳什均衡。他们的方法基于多项式方程组求解器，因此与我们的方法不同。[CP14] 研究了贝叶斯组合拍卖，其中有多个物品待售给多位竞标者。他们证明，求解贝叶斯纳什均衡的复杂性至少为 PP 困难（这是介于多项式层级与 PSPACE 之间的一个复杂性类）。该模型与我们的模型截然不同，因为参与者的估值可能复杂得多，且是定义在物品子集上的。

文献中也研究了第一价格拍卖的其他方面，包括无政府状态代价/稳定性 [ST13, Syr14, FFGL13, HTW18, JL22, JL23] 以及参数估计 [GPV00, CDIZ22]。

均衡计算 PPAD（有向图上的多项式奇偶性论证）复杂性类最初由 Papadimitriou [Pap94] 提出，用于刻画一类特定的全搜索函数。开创性工作 [DGP09, CDT09]确立了标准形式博弈的 PPAD-困难性。后续研究 [Rub18, Rub16, DFHM22b] 在过去几年中解决了近似困难性问题。大量问题已被证明是 PPAD 困难，其中值得注意的例子包括以下特殊但重要类别中的均衡计算：

博弈（胜负博弈 [AKV05,CTV07], 、匿名博弈 [CDO15], 、常秩博弈 [Meh14],、图博弈 [PP21]）、市场均衡（阿罗-德布鲁市场 [CT09, CDDT09, VY11],、非单调市场 [CPY13, Rub19], 、Hylland-Zeckhauser机制 [CCPY22]）、公平分配 [OPR16, CGMM21], 、极小极大优化 [DSZ21]以及强化学习 [DGZ22, JMS22]。

已知匿名博弈 [DP15], 的多项式时间近似方案，该方案与我们的工作密切相关。[DP15] 针对具有 m 个行动的 n 玩家匿名博弈，提出了一种 $n^{g(m,1/\epsilon)} \cdot U$ 算法，其运行时间为某个指数函数 g。其中， U 表示表示博弈中收益值所需的比特数。相比之下，我们的算法能够在运行时间为 $n^4 \cdot g(1/\epsilon)$ 的情况下求得第一价格拍卖的 ϵ-BNE，并且该运行时间不依赖于出价空间的大小，也不依赖于分布表示的比特长度。该算法在舍入和搜索步骤中充分利用了第一价格拍卖的结构，因此可能在拍卖理论中具有更广泛的应用。

1.3 技术概述

获得 PPAD-困难性的挑战有两个方面。首先，效用函数无法用其他玩家策略的闭式表达式表示。它依赖于指数数量的可能出价组合，并且只能通过动态规划方法计算。其次，在（独立的）共同先验下，博弈结构具有高度对称性。在第一价格拍卖中，分配由完整的出价组合决定，而每个玩家面对的组合集合“几乎”相同。从这一角度看，它更像是一种匿名博弈。更糟糕的是，在匿名博弈中，每个玩家的效用函数各不相同，并且可以专门为归约而设计。而在第一价格拍卖中，每个玩家的效用函数都相同，并且仅取决于分配概率。当然，一般的（非均匀）平局处理规则以及不同的估值分布可以用来打破这种对称性。我们注意到，上述挑战是共同先验设定所特有的。与之形成鲜明对比的是，在主观先验设定 [FRGH+21] 中，玩家的主观信念可能不同。某个玩家可能会认为大多数其他玩家的价值为零，并提交零出价，因此，该博弈是局部 且非对称的。

为了解决上述挑战，我们的核心思路是：(1) 将分配概率线性化，并展开效用函数的一阶近似；(2) 仔细引入一条（简单的）一般平局处理规则来打破对称性。

技术亮点：将“一切”线性化 给定一个策略组合 s，计算整个出价组合的分布（进而计算分配概率、效用和最佳响应）可能会很复杂，尤其是在多个玩家报出最高出价时。为了解决这一问题，我们在所有玩家的 0 值附近赋予较大的概率 $(1-\delta)$，其中 $\delta > 0$ 为某个多项式级的小量。[1] 这样一来，玩家报出非零出价的概率很小，因此可以忽略高阶项。具体来说，令 $p_{i,j}$ 表示在其他玩家采用策略 s_{-i} 的情况下，玩家 i 出价 b_j 时获得物品的概率；令 $\Gamma_i(b_j, s_{-i})$ 表示在其他玩家采用策略 s_{-i} 的情况下，玩家 i 出价 b_j 时获得的分配。这样做的直接好处是，分配概率可以近似为

$$\Gamma_i(b_j, s_{-i}) \approx (1 - \sum_{i' \in [n] \setminus \{i\}} \sum_{j' > j} p_{i',j'}) + \sum_{i' \in [n] \setminus \{i\}} \Sigma_{i,i'} \cdot p_{i',j} \tag{1}$$

在双边平局处理规则下。这里 $\Sigma \in [0,1]^{n \times n}$ 指定一对玩家（i_1、i_2）平局时的分配，并满足 $\Sigma + \Sigma^\top = (J - I)$。在这个阶段，我们很容易想到使用

[1]这就是为什么我们的困难性结果仅适用于（逆）多项式级别的小 ϵ .

$p_{i,\ j}$ 来编码广义电路问题中的变量，并用最佳响应的选择来编码约束。在最终构造中，我们只需要三个出价 $0 = b_0 < b_1 < b_2$，变量则由 b_1、b_2 之间的跳跃点 τ_i 编码（即玩家 i 出价 b_2 而非 b_1时），其闭式表达为

$$\tau_i = b_2 + \frac{\Gamma_i(b_1, s_{-i}) \cdot (b_2 - b_1)}{\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})}. \tag{2}$$

即使经过式 (1) 的线性化步骤，上述表达式仍然相当难以处理。我们的下一个想法是将跳跃点限制在 $(b_2,1)$ 之间的一个小区间内，并仅在该区间上分配少量总概率质量 $\beta\delta$，其中 β 是另一个多项式级的小量。在 b_2 和 1 附近存在固定的概率质量 δ。我们还可以对式 (2) 进行一阶近似，再次将跳跃点表达式线性化。

纳入平局处理规则 略去一些构造细节后，上述构造将第一价格拍卖归约为满足以下形式的不动点问题

$$\vec{p} = f(G\vec{p}) \quad \text{where} \quad G = 2\Sigma^A - J + I, \tag{3}$$

其中，$\vec{p}$ 是在小区间内以 b_1 出价的概率，$f = (f_1, \ldots, f_n)$ 是按坐标对 $G\vec{p}$ 进行运算的；f_i 是一个从 $[a_i, b_i]$（某个固定区间）映射到 $[0,1]$, 的单调函数；J 是全 1 矩阵，I 是单位矩阵。该不动点问题相当一般，且包含广义电路问题；如果 Σ^A 是 $[0,1]^{n\times n}$ 中的任意矩阵。不幸的是，由于约束 $\Sigma^A + (\Sigma^A)^\top = (J - I)$，这一点并不成立。我们通过添加一个额外的枢轴玩家来解决这个问题。可以保证该枢轴玩家以相同的概率 $1/2$ 报出 $b_0 = 0$ 和 b_2。从较高层面来看，枢轴玩家将均衡计算分为两种情况：其出价为 b_0 时的情况较为相似，而出价为 b_2 时，则会在 $[n]$ 中的原有玩家之间引入另一个平局处理矩阵 $\Sigma^B \in [0,1]^{n\times n}$（因此规则变为三方规则）。这将不动点问题（即式 (3)）转化为一种更便于处理的形式

$$\vec{p} = f(G'\vec{p}) \quad \text{where} \quad G' = 2\Sigma^A + \Sigma^B - J + I, \tag{4}$$

并且可以构造构件，从而将广义电路问题归约为该问题。最后一步相当常见，详细内容见第 3 节。

2 预备知识

记号。我们用 $[n]$ 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 和 $[n_1 :$ 用 $n_2]$ 表示 $\{n_1, n_1 + 1, \ldots, n_2\}$。令 $\mathbf{1}_i$ 为一个指示向量——除第 i 个坐标等于 1 外，其余均等于 0。令 Δ_n 包含 $[n]$ 上的所有概率分布。给定向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 和索引 $i \in [n]$，v_i 表示 v 的第 i 个元素，而 v_{-i} 表示 $(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$，即除第 i 个坐标之外的所有元素。如果 $x \in [y - \epsilon, y + \epsilon]$，我们记为 $x = y \pm \epsilon$。令 $J_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为全 1 矩阵，令 I_n 为 $n \times n$ 单位矩阵。

2.1 模型

在贝叶斯第一价格拍卖（第一价格拍卖）中，有一件待售物品，可用元组 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \Gamma)$ 表示，其中 $\mathcal{N} = [n]$ 是玩家集合，$\mathcal{B}$ 是出价空间，$\mathcal{D}$ 是价值分布，Γ 是平局处理规则。对于每个玩家 $i \in \mathcal{N}$，其拥有物品的私人价值 v_i，该价值由

从一个以 $[0,1]$ 为支撑集的（连续）分布 $\mathcal{D}_i$ 中抽取（记作 $v_i \sim \mathcal{D}_i$）。我们考虑标准的 独立共同先验设定——联合价值分布 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$ 是 $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in[n]}$ 的乘积分布，并假设价值配置 $v = (v_1, \ldots, v_n) \in [0,1]^n$ 从 $\mathcal{D}$ 中抽取。设 $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\} \subset [0,1]$ 为出价空间，其中 $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m \leq 1$。

在第一价格（密封投标）拍卖中，每位竞标者 i 同时向卖方提交出价 $\beta_i \in \mathcal{B}$。卖方将物品分配给提交最高出价的获胜玩家 i^*，并收取 i^* 等于其出价 β_{i^*}的支付。

分配和平局处理规则。 当多位玩家提交相同的最高出价时，卖方会按照预先规定的平局处理规则 Γ，将物品分配给其中一位获胜玩家并向其收取费用。平局处理规则 $\Gamma : \{0,1\}^n \to \Delta_n$ 将获胜玩家集合 $W \subseteq [n]$映射到一个分配配置 $\Gamma(W) \in \Delta_n$，该配置以 W 为支撑，并指定每位玩家 $i \in W$的获胜概率为 $\Gamma_i(W)$。形式上，给定一个出价组合 $\beta \in \mathcal{B}^n$，获胜玩家集合 $W(\beta)$由提交最高出价的玩家组成

$$W(\beta) = \left\{ i \in [n] : \beta_i = \max_{j\in[n]} \beta_j \right\}.$$

平局处理规则 $\Gamma(W(\beta)) \in \Delta_n$ 指定了 $W(\beta)$中每位玩家的获胜概率，而$\Gamma_i(W(\beta))$是竞标者 i 在出价组合 β下获得物品的概率。平局处理规则必须满足：(1) $\Gamma_i(W(b)) > 0$ 仅当 $i \in W(\beta)$ 时成立，即物品只分配给出价最高的玩家；以及 (2) $\sum_{i\in[n]} \Gamma_i(W(\beta)) = 1$，即总分配量为 1。在不会引起混淆时，我们也将 $\Gamma(\beta) = \Gamma(W(\beta))$ 简写。

众所周知，平局处理规则对贝叶斯第一价格拍卖的均衡有着微妙却至关重要的影响。我们的困难性结果建立在三方平局处理规则之上，这是对常用均匀平局处理方法的一种简单推广。

定义 2.1（三方平局处理）。三方 平局处理规则 Γ 由以下非负数元组指定

$$\left(w_{i,j} : 1 \leq i < j \leq n\right) \quad and \quad \left(\sigma^{(1)}_{i,j,k}, \sigma^{(2)}_{i,j,k} : 1 \leq i < j < k \leq n\right)$$

使得 $w_{i,\,j} \leq 1$ 且 $\sigma^{(1)}_{i,\,j,\,k} + \sigma^{(2)}_{i,\,j,\,k} \leq 1$。给定出价组合 $\beta \in \mathcal{B}^n$ 和获胜集合 $W(\beta)$，物品按如下方式依据 Γ 进行分配

1. 如果 $W(\beta) = \{i\}$ 对某个 $i \in [n]$成立，那么 $\Gamma_i(\beta) = 1$;

2. 如果 $W(\beta) = \{i,j\}$ 对某个 $1 \leq i < j \leq n$成立，那么 $\Gamma_i(\beta) = w_{i,\,j}$ 且 $\Gamma_j(\beta) = 1 - w_{i,\,j}$;

3. 若对于某个 $1 \leq i < j < k \leq n$，$W(\beta) = \{i,j,k\}$，则 $\Gamma_i(\beta) = \sigma^{(1)}_{i,\,j,\,k}$, $\Gamma_j(\beta) = \sigma^{(2)}_{i,\,j,\,k}$ 且$\Gamma_k(\beta) = 1 - \sigma^{(1)}_{i,\,j,\,k} - \sigma^{(2)}_{i,\,j,\,k}$；并且

4. 当 $|W(\beta)| \geq 4$ 时，物品在 $W(\beta)$ 中由玩家平均分配。 [2]

[2]我们指出，对于超过 3 名玩家的情形，我们的困难性结果实际上与平局处理规则无关（即不一定采用均匀规则）。

均衡与策略 给定平局处理规则 Γ 和出价组合 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$，竞标者 i 的事后 效用为

$$u_i(v_i; \beta_i, \beta_{-i}) = (v_i - \beta_i) \cdot \Gamma_i(\beta).$$

玩家 i 的策略 s_i： $[0,1] \to \mathcal{B}$ 是一个将其（私人）价值 v_i 映射为出价 $s(v_i) \in \mathcal{B}$的函数，并具有以下两个性质:

- **不超价**。玩家提交的出价绝不会高于其私人价值，即对于所有 $v_i \in [0,1]$，都有 $s_i(v_i) \le v_i$。
- **单调性**。 s_i 是一个非递减函数。

这些是第一价格拍卖文献中的常见假设 [MR03、Leb06、FRGH$^+$21]，并且它们排除了贝叶斯拍卖中的虚假均衡 [CP14]。由于单调性假设，可以将策略 s_i 表示为 m 个阈值 $0 \le \tau_{i,1} \le \cdots \le \tau_{i,m} \le 1$，其中玩家 i 在区间（$\tau_{i,j}$、$\tau_{i,j+1}$][3]）内出价 b_j。在此默认设定 $\tau_{i,0} = 0$ 和 $\tau_{i,m+1} = 1$。

FPA 的 ϵ 近似贝叶斯纳什均衡（ϵ 近似贝叶斯纳什均衡）定义如下。

定义 2.2 （ϵ-近似贝叶斯纳什均衡）。 设 n， $m \ge 2$。给定一个第一价格拍卖（$\mathcal{N}$， $\mathcal{B}$， $\mathcal{D}$， Γ），策略组合 $s =$ （s_1，.....，s_n）是一个 ϵ- 近似贝叶斯纳什均衡（ϵ- 近似贝叶斯纳什均衡），如果对于任意玩家 $i \in [n]$，都有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i})) \right] \ge \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] - \epsilon,$$

其中 bs （v_i， s_{-i}） $\in \mathcal{B}$ 是在其他玩家的策略 s_{-i} 给定时玩家 i 的最佳响应，即。 $e.$

$$\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}) \in \arg\max_{b \in \mathcal{B}} \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}} \left[u_i(v_i; b, s_{-i}(v_{-i})) \right].$$

通过与 [FRGH$^+$21] 类似的方法，可以证明寻找 $1/\mathrm{poly}(n)$-近似贝叶斯纳什均衡的存在性及其属于 PPAD（特别是 [FRGH$^+$21] 的定理 4.1 和定理 4.4），此处省略标准证明。

我们还将使用另一种均衡概念，它在我们的困难性归约中更为方便。 ϵ-近似良支撑贝叶斯纳什均衡（ϵ-BNE）定义如下：[4]

定义 2.3 (ϵ-近似良支撑贝叶斯纳什均衡)。 令 $n, m \ge 2$。给定一个第一价格拍卖（$\mathcal{N}, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \Gamma$），策略组合 $s = (s_1, \ldots, s_n)$ 是一个 ϵ-近似良支撑贝叶斯纳什均衡（ϵ-*BNE*），如果对任意玩家 $i \in [n]$ 和 $v_i \in [0,1]$，都有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}} \left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i})) \right] \ge \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}} \left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] - \epsilon.$$

ϵ-BNE 和 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡这两种概念可以在多项式时间内相互归约，精度损失至多为多项式因子。显然， ϵ-BNE 也是一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡。引理2.4陈述了反方向的结论，其证明留待附录给出。

引理2.4。 给定一个第一价格拍卖（$\mathcal{N}$， $\mathcal{B}$， $\mathcal{D}$， Γ）和一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡 s，存在一个多项式时间算法，可将 s 映射为一个 ϵ'-贝叶斯纳什均衡，其中 $\epsilon' = (2n + 10)\sqrt{\epsilon}$。

[3]如果估值分布包含点质量，那么在该点质量处的策略可能是随机化的。[4]我们指出， ϵ-近似贝叶斯纳什均衡也称为事前近似贝叶斯纳什均衡，而在部分文献中， ϵ-贝叶斯纳什均衡则称为中期近似贝叶斯纳什均衡。

3 PPAD-困难性

回顾我们的主要困难性结果

定理 1.1 (计算困难性)。 在采用三方平局处理规则的第一价格拍卖中，寻找一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡是 *PPAD* 完全的，其中 $\epsilon = 1/\mathrm{poly}(n)$。

本节余下部分中，我们将在第3.1节构造第一价格拍卖的困难实例，并在第3.2节给出一些基本性质。我们将在第3.3节从 ϵ-广义电路问题进行归约。

3.1 第一价格拍卖的构造

根据引理2.4，只需证明对于某个 $\epsilon = 1/\mathrm{poly}(n)$，寻找 ϵ-贝叶斯纳什均衡是困难的。构造中将使用以下三个参数:

$$\epsilon = \frac{1}{n^{40}}, \quad \delta = \frac{1}{n^{10}} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{1}{n^4}.$$

我们描述 分别为出价空间 $\mathcal{B}$、估值分布 $\mathcal{D}$ 和 tie-breaking rule Γ .

出价空 间。 出价空间 $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, b_2\}$ 总共包含 3 个出价，其中 $b_0 =$ 0,

$$b_1 = \frac{\delta^2}{n^4} \quad \text{and} \quad b_2 = \frac{\delta}{n^2}.$$

估值分布。 共有 $n+1$ 位玩家—— n 位普通玩家，编号为 $[n]$，以及一位枢轴玩家 $n+1$。我们通过指定玩家 i 的密度函数 p_i 来描述其价值分布 $\mathcal{D}_i$： $[0,1] \to \mathbb{R}^+$。枢轴玩家的密度函数 p_{n+1} 定义如下:

$$p_{n+1}(v) = \begin{cases} 1/(2\epsilon) & v \in [0, \epsilon] \\ 1/(2\epsilon) & v \in [1-\epsilon, 1] \end{cases}.$$

换句话说， $\mathcal{D}_{n+1}$ 在 0 附近有 0.5 的概率质量，在 1 附近也有 0.5 的概率质量。

每位普通玩家 $i \in [n]$ 的密度函数 p_i 定义如下:

$$p_i(v) = \begin{cases} (1-(2+\beta)\delta)/\epsilon & v \in [0, \epsilon] \\ \delta/\epsilon & v \in [b_2 - \epsilon, b_2] \\ \widetilde{p}_i(v) & v \in (b_2, 1-\epsilon) \\ \delta/\epsilon & v \in [1-\epsilon, 1] \end{cases}$$

其中， $\widetilde{p}_i(v)$定义在$(b_2, 1-\epsilon)$上，满足 $\int_{b_2}^{1-\epsilon} \widetilde{p}_i(v)\mathrm{d}v = \beta\delta$，但将在第3.3节的归约中具体说明。简而言之，标准玩家 i的大部分概率质量集中在0附近， δ的概率质量集中在 b_2附近， δ 的概率质量集中在1附近，而 $\beta\delta$ 的概率质量位于$(b_2, 1-\epsilon)$内，具体范围将在稍后说明。

平局处理规则。 我们将三方平局处理规则 Γ描述如下。对于任意出价组合 β，若 $2 \le |W(\beta)| \le 3$，则平局处理规则取决于 $n+1$是否出现在 $W(\beta)$中:

- 假设 $n+1 \notin W(\beta)$。那么

– 如果 $|W(\beta)| = 2$，即 $W(b) = \{i, j\}$，则平局处理规则由矩阵$\Sigma^A \in [0,1]^{n\times n}$ 给出，使玩家 i 获得物品的$\Sigma^A_{i,j}$ 单位，而玩家 j 获得物品的$\Sigma^A_{j,i}$单位。因此，矩阵 Σ^A 需要满足 $\Sigma^A + (\Sigma^A)^\top = (J_n - I_n)$。我们将在后续的归约中指定 Σ^A，但会保证其所有非对角元素都属于 $[1/4, 3/4]$。– 如果 $|W(\beta)| = 3$，则采用均匀分配。

- 假设 $n+1 \in W(\beta)$。则

  – 如果 $|W(\beta)| = 2$，则该物品将全部分配给枢轴玩家 $n+1$。–如果 $|W(\beta)| = 3$，即 $W(b) = \{i, j, n+1\}$，则平局打破规则由一个矩阵$\Sigma_B \in [0,1]^{n\times n}$ 给出，使得玩家 i 获得该物品的 $\Sigma^B_{i,\ j}$ 单位，玩家 j 获得 $\Sigma^B_{j,\ i}$ 单位，玩家 $n+1$ 获得 $1 - \Sigma^B_{i,\ j} - \Sigma^B_{j,\ i}$ 单位。因此，矩阵 Σ^B 需要满足$\Sigma^B + (\Sigma^B)^\top \le J_n - I_n$，即 $\Sigma^B + (\Sigma^B)^\top$ 逐元素不大于 $J_n - I_n$。

3.2 基本性质

设 $s = (s_1, \dots, s_{n+1})$ 是该实例的 ϵ-贝叶斯纳什均衡（BNE）。我们将在本小节中证明 s 的一些性质。给定 s，对于每个玩家 i，我们定义 $f_i : \mathcal{B} \to [0,1]$ 和 $F_i : \mathcal{B} \to [0,1]$ 如下：

$$f_i(b) = \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}[s_i(v_i) = b] \quad \text{and} \quad F_i(b) = \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}[s_i(v_i) \le b].$$

在本节余下部分中，我们将

$$\Gamma_i(b, s_{-i}) := \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}[\Gamma_i(b, s_{-i}(v_{-i}))] \quad \text{and} \quad u_i(v_i; b, s_{-i}) := \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; b; s_{-i}(v_{-i}))]$$

在不引起混淆时。

我们先给出以下引理。

引理 3.1（可分离出价）。 在任何 ϵ-贝叶斯纳什均衡中，均衡策略 s 满足

- 对于标准玩家 $i \in [n]$，其均衡策略满足
  - *when* $v_i \in [0, \epsilon]$, $s_i(v_i) = b_0$;
  - *when* $v_i \in [b_2 - \epsilon, b_2]$, $s_i(v_i) = b_1$; *and*
  - *when* $v_i \in [1 - \epsilon, 1]$, $s_i(v_i) = b_2$.
- 对于枢轴玩家，其均衡策略满足
  - *when* $v_{n+1} \in [0, \epsilon]$, $s_{n+1}(v_{n+1}) = b_0$; *and*
  - *when* $v_{n+1} \in [1 - \epsilon, 1]$, $s_{n+1}(v_{n+1}) = b_2$.

证明。 根据不超额出价假设，对于所有 $i \in [n+1]$， $s_i(\epsilon) = 0$这一结论显然成立。标准玩家 i 在 $v_i \in [b_2 - \epsilon, b_2]$中选择 b_0 或 b_1。出价 b_0的分配概率$\Gamma_i(b_0, s_{-i})$满足 $\Gamma_i(b_0, s_{-i}) \le \frac{1}{n+1}$，因此，出价 $b_0 = 0$的效用至多为

$$u_i(v_i; b_0, s_{-i}) = (v_i - b_0) \cdot \Gamma_i(b_0, s_{-i}) \le \frac{1}{n} b_2.$$

出价 b_1 的分配概率至少为

$$\Gamma_i(b_1, s_{-i}) \ge \prod_{i \in [n+1]} f_i(b_0) \ge (1 - (2+\beta)\delta)^n \cdot \frac{1}{2} \ge \frac{1}{3}$$

因此，出价 b_1 的效用至少为

$$u_i(v_i; b_1, s_{-i}) = (v_i - b_1) \cdot \Gamma_i(b_1, s_{-i}) \geq (b_2 - \epsilon - b_1) \cdot \frac{1}{3} > u_i(v; b_0, s_{-i}) + \epsilon.$$

最后，我们分析所有 $n+1$ 玩家在 $v \in [1-\epsilon, 1]$ 附近的均衡策略。通过类似于上述论证的分析，可以明确看出，普通玩家和枢轴玩家都会在 b_1 和 b_2之间进行选择。对于普通玩家 $i \in [n]$，出价b_2 的分配概率满足

$$\begin{aligned}
\Gamma_i(b_2, s_{-i}) &\geq F_{n+1}(b_1) \cdot \prod_{j \in [n] \setminus [i]} F_j(b_1) \\
&\geq F_{n+1}(b_1) \cdot \left(\prod_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_0) + \sum_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_1) \prod_{r \in [n] \setminus \{i,j\}} f_r(b_0) \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\prod_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_0) + \sum_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_1) \prod_{r \in [n] \setminus \{i,j\}} f_r(b_0) \right) + \frac{1}{2} f_{n+1}(b_1), \qquad (5)
\end{aligned}$$

其中，最后一步成立是因为 $f_{n+1}(b_0) = \frac{1}{2}$，并且

$$\prod_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_0) \geq (1 - (2+\beta)\delta)^{n-1} \geq \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

出价 b_1 的分配概率满足

$$\begin{aligned}
\Gamma_i(b_1, s_{-i}) &\leq f_{n+1}(b_0) \cdot \left(\prod_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_0) + \sum_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_1) \cdot \Sigma^A_{i,j} \prod_{r \in [n] \setminus \{i,j\}} f_r(b_0) + 9n^2\delta^2 \right) \\
&\quad + f_{n+1}(b_1) \cdot \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} f_j(b_1) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\prod_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_0) + \sum_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_1) \cdot \Sigma^A_{i,j} \prod_{r \in [n] \setminus \{i,j\}} f_r(b_0) \right) + f_{n+1}(b_1) \cdot 3n\delta + 9n^2\delta^2. \qquad (7)
\end{aligned}$$

这里第一步成立是因为：(1) 当枢轴玩家出价 b_0时，如果（仅有）玩家 j 出价 b_1，玩家 i将获得$\Sigma^A_{i,j}$ 单位物品，并且至少有两名玩家出价 b_1 的概率满足上界

$$\sum_{j,r \in [n] \setminus \{i\}} \Pr[s_r(v_r) = b_1 \wedge s_j(v_j) = b_1] \leq n^2 \cdot 9\delta^2,$$

(2) 当枢轴玩家出价 b_1时，仅当存在至少一名其他普通玩家 j 出价 b_1 时，玩家 i 才能获得物品，因为平局处理规则规定，当只有两名获胜者时，将物品全部分配给玩家 $n+1$。第二步由 $f_j(b_1) \leq 3\delta$ 以及枢轴玩家在 $[1-\epsilon, 1]$ 中不出价 b_0 这一事实推出，因此 $f_{n+1}(b_0) = 1/2$。

将式（7）减去式（5），可得

$$\begin{aligned}
&\Gamma_i(b_2, s{-}i) - \Gamma_i(b_1, s_{-i}) \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{j \in [n] \setminus [i]} f_j(b_1) \cdot (1 - \Sigma^A_{i,j}) \prod_{r \in [n] \setminus \{i,j\}} f_r(b_0) + \frac{1}{2} f_{n+1}(b_1) - 3n\delta f_{n+1}(b_1) - 9n^2\delta^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot \delta \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n+1}(b_1) - 3n\delta f_{n+1}(b_1) - 9n^2\delta^2 \geq \frac{n\delta}{32}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

第二步成立是因为 $f_j(b_1) \geq \delta$，$\Sigma_{i,\,j}^{A} \in [1/4, 3/4]$ 以及式（6）。因此我们声称玩家 i在取值为 $v_i \in [1-\epsilon, 1]$时更偏好 b_2 而非 b_1，因为

$$\begin{aligned} u_i(v_i; b_2, s_{-i}) - u_i(v_i; b_1, s_{-i}) &= (v_i - b_2) \cdot \Gamma_i(b_2, s_{-i}) - (v_i - b_1) \cdot \Gamma_i(b_1, s_{-i}) \\ &\geq v_i \cdot (\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})) - b_2 \\ &\geq (1-\epsilon) \cdot \frac{n\delta}{32} - b_2 > \epsilon. \end{aligned}$$

Fi最后，对于枢轴玩家 $n+1$，出价 b_1 的分配概率满足 s

$$\Gamma_{n+1}(b_1, s_{-i}) \leq \prod_{i \in [n]} F_i(b_1) \tag{9}$$

而 b_2 的分配概率满足

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1}(b_2, s_{-i}) &\geq \prod_{i \in [n]} F_i(b_1) + \sum_{i \in [n]} f_i(b_2) \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} F_i(b_1) \\ &\geq \prod_{i \in [n]} F_i(b_1) + \frac{n\delta}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

第一步成立，是因为当 $[n]$ 中至多有一名玩家出价 b_2 时，平局处理规则会优先选择玩家 $n+1$；第二步则由 $f_i(b_2) \geq \delta$ 和式 (6) 得出。因此，对于任意 $v_{n+1} \in [1-\epsilon, 1]$，我们都有

$$\begin{aligned} u_{n+1}(v_{n+1}; b_2, s_{-i}) - u_{n+1}(v; b_1, s_{-i}) &= (v_{n+1} - b_2) \cdot \Gamma_{n+1}(b_2, s_{-i}) - (v_{n+1} - b_1) \cdot \Gamma_{n+1}(b_1, s_{-i}) \\ &\geq v_{n+1} \cdot (\Gamma_{n+1}(b_2, s_{-i}) - \Gamma_{n+1}(b_1, s_{-i})) - b_2 \\ &\geq (1-\epsilon) \cdot \frac{n\delta}{2} - b_2 > \epsilon. \end{aligned}$$

至此，我们完成了引理的证明。 □

引理 3.1 表明，对于每位玩家 $i \in [n]$，b_0、b_1、b_2 都会出现在一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡策略组合中。接下来仍需确定标准玩家 $i \in [n]$ 在 s_i 中从 b_1 跳至 b_2 的价值点。设 $\tau_i \in (b_2, 1-\epsilon)$ 为标准玩家 i 从 b_1 跳至 b_2 的跳跃点。以下公式便于使用。

引理 3.2（跳跃点公式）。 标准玩家 $i \in [n]$ 的跳跃点 τ_i 满足

$$\tau_i = b_2 + \frac{\Gamma_i(b_1, s_{-i}) \cdot (b_2 - b_1)}{\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})} \pm O\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right).$$

证明。 对于任意价值点 $v \in [0, 1]$，回顾一下，出价 b_1 的效用等于

$$u_i(v_i; b_1, s_{-i}) = (v_i - b_1)\Gamma_i(b_1, s_{-i})$$

出价 b_2 的效用等于

$$u_i(v_i; b_2, s_{-i}) = (v_i - b_2)\Gamma_i(b_2, s_{-i}).$$

对 $u_i(\tau_i, b_1, s_{-i}) = u_i(\tau_i, b_2, s_{-i}) \pm \epsilon$ 求解，可得

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{\Gamma_i(b_2, s_{-i})b_2 - \Gamma_i(b_1, s_{-i})b_1 \pm \epsilon}{\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})} \\ &= b_2 + \frac{\Gamma_i(b_1, s_{-i}) \cdot (b_2 - b_1) \pm \epsilon}{\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})} \\ &= b_2 + \frac{\Gamma_i(b_1, s_{-i}) \cdot (b_2 - b_1)}{\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})} \pm O\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right). \end{aligned}$$

最后一步由式（8）得出，由此完成引理的证明。 □

令 $x_i \in [0, \beta\delta]$ 表示区间 (b_2, τ_i) 上的概率质量，即 $x_i = \int_{b_2}^{\tau_i} p_i(v)\mathrm{d}v$，我们将其称为 s_i 的跳跃概率。下面陈述几个将反复用到的事实。

引理 3.3 (基本事实)。

- 对于任意标准玩家 $i \in [n]$，我们有

$$\prod_{j\in[n]\setminus\{i\}} f_j(b_0) = 1 - (n-1)(2+\beta)\delta \pm O(n^2\delta^2)$$

and

$$\prod_{j\in[n]\setminus\{i\}} F_j(b_1) = 1 - (n-1)(\beta+1)\delta + \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} x_j \pm O(n^2\delta^2).$$

- 对于任意 $e \in \{1, 2\}$，我们有

$$\sum_{i\neq j\in[n]} \Pr\left[s_i(v_i) = b_e \wedge s_j(v_j) = b_e\right] = O(n^2\delta^2).$$

证明。对于第一个断言，我们有

$$\prod_{j\in[n]\setminus\{i\}} f_j(b_0) = (1-(2+\beta)\delta)^{n-1} = 1 - (n-1)(2+\beta)\delta \pm O(n^2\delta^2)$$

这归因于 δ 的选择。类似地，我们有（使用 $x_i \in [0, \beta\delta]$

$$\begin{aligned}\prod_{j\in[n]\setminus\{i\}} F_j(b_1) &= \prod_{j\in[n]\setminus\{i\}} (1-(1+\beta)\delta + x_i) \\ &= 1 - (n-1)(1+\beta)\delta + \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} x_j \pm O(n^2\delta^2).\end{aligned}$$

对于第二个断言，对于任意 $e \in \{1, 2\}$，我们有

$$\sum_{i\neq j\in[n]} \Pr\left[s_i(v_i) = b_e \wedge s_j(v_j) = b_e\right] \leq \sum_{i\neq j\in[n]} (1+\beta)\delta^2 = O(n^2\delta^2).$$

我们在此结束证明。 □

关键步骤是确定跳跃点，这里我们使用近似。

引理 3.4 (跳跃点). 标准玩家 τ_i 的跳跃点 $i \in [n]$ 满足

$$\tau_i = \left(\frac{\Delta_{i,1} - \Delta_{i,2}}{\Delta_{i,1}^2} \pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{i,1}}\right)\right) \cdot b_2$$

其中

$$\Delta_{i,1} := (n-1)\delta + \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \left(\beta\delta \cdot \Sigma_{i,j}^A + (1+\beta)\delta \cdot \Sigma_{i,j}^B\right) \in \left[(n-1)\delta, 2n\delta\right] \quad \textit{and}$$

$$\Delta_{i,2} := \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} \left(1 - 2\Sigma_{i,j}^A - \Sigma_{i,j}^B\right) x_j \in \left[-2n\beta\delta, n\beta\delta\right].$$

证明。 对于任意标准玩家 $i \in [n]$，我们使用引理 3.2 中的公式计算其从 b_1 跳转到 b_2 的情况。为此，我们首先计算 $\Gamma_i(b_1, s_{-i})$ 和 $\Gamma_i(b_2, s_{-i})$。

$$\begin{aligned}\Gamma_i(b_1, s_{-i}) &= f_{n+1}(b_0) \cdot \left(\prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} f_j(b_0) + \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} f_j(b_1) \prod_{j \in [n] \setminus \{i,j\}} f_j(b_0) \cdot \Sigma^A_{i,j} \pm O(n^2\delta^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - (n-1)(2+\beta)\delta + \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} (\delta + x_j) \Sigma^A_{i,j} \right) \pm O(n^2\delta^2). \end{aligned} \tag{11}$$

这里的第一步依据平局处理规则和引理 3.3 的第二个断言，第二步依据 $f_j(b_1) = \delta + x_j$ 以及引理 3.3 的第一个断言。

出价为 b_2 时的分配概率满足

$$\begin{aligned}\Gamma_i(b_2, s_{-i}) &= f_{n+1}(b_0) \cdot \left(\prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} F_j(b_1) + \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} f_j(b_2) \prod_{j \in [n] \setminus \{i,j\}} F_j(b_1) \cdot \Sigma^A_{i,j} \pm O(n^2\delta^2) \right) \\ &\quad + f_{n+1}(b_2) \cdot \left(\sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} f_j(b_2) \prod_{k \in [n] \setminus \{i,j\}} F_k(b_1) \cdot \Sigma^B_{i,j} \pm O(n^2\delta^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - (n-1)(1+\beta)\delta + \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} x_j + \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} (\delta + \beta\delta - x_j) \Sigma^A_{i,j} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} (\delta + \beta\delta - x_j) \Sigma^B_{i,j} \pm O(n^2\delta^2). \end{aligned}$$

第一步使用了平局处理规则，需要作一些说明。具体而言：（1）当枢轴玩家 $n+1$ 出价 b_0时，如果其他玩家的出价低于 b_2，玩家 i 获得 1 单位物品；当只有玩家 j 出价 b_2时，玩家 i 获得 $\Sigma_{A,\ i,\ j}$ 单位物品；我们还利用引理 3.3 的第二个断言省略了其他情况；（2）当玩家 $n+1$ 出价 b_2时，如果没有其他玩家出价 b_0 ，玩家 i 获得 0 单位商品；当另一名玩家 j 出价 b_2时，玩家 i 获得 $\Sigma_{B,\ i,\ j}$ 单位商品；我们利用引理 3.3 省略了其他情况。第二步依据引理 3.3 和 $f_j(b_2) = \delta + \beta\delta - x_j$。

结合上述表达式，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i}) &= \frac{1}{2}(n-1)\delta + \frac{1}{2} \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} \left(\beta\delta \cdot \Sigma^A_{i,j} + (1+\beta)\delta \cdot \Sigma^B_{i,j} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} \left(1 - 2\Sigma^A_{i,j} - \Sigma^B_{i,j} \right) x_j \pm O(n^2\delta^2). \end{aligned} \tag{12}$$

令 $\Delta_{i,1}$ 和 $\Delta_{i,2}$ 如引理陈述所定义。注意，$\Delta_{i,1}$ 不依赖于$\{x_j\}_{j \neq i}$，而 $\Delta_{i,2}$依赖于 $\{x_j\}_{j \neq i}$。容易看出

$$\Delta_{i,1} \in \big[(n-1)\delta, 2n\delta\big] \quad \text{and} \quad \Delta_{i,2} = \big[-2(n-1)\beta\delta, (n-1)\beta\delta\big]. \tag{13}$$

最后，我们可以如下使用引理 3.2 计算跳跃点 τ_i：

$$\begin{aligned}\tau_i &= b_2 + \frac{\Gamma_i(b_1, s_{-i}) \cdot (b_2 - b_1)}{\Gamma_i(b_2, s_{-i}) - \Gamma_i(b_1, s_{-i})} \pm O\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right) \\ &= b_2 + \frac{1 \pm O(n\delta)}{\Delta_{i,1} + \Delta_{i,2}} \cdot b_2 \pm O\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right) \\ &= \left(\frac{\Delta_{i,1} - \Delta_{i,2}}{\Delta_{i,1}^2} \pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{i,1}}\right)\right) \cdot b_2\end{aligned}$$

第二步由公式（12）、 $\Gamma_i(b_1, \beta_i) = (1/2) \pm O(n\delta)$（见公式（11））以及$b_1, b_2$的选择得出。最后一步由公式（13）得出。 □

3.3 从广义电路归约

给定 $\alpha < \beta$，我们记 $\mathsf{T}^{[\alpha,\beta]}: \mathbb{R} \to [\alpha, \beta]$ 表示截断函数，其中

$$\mathsf{T}_{[\alpha,\beta]}(x) = \min\big\{\max\{x, \alpha\}, \beta\big\}.$$

我们回顾广义电路问题 [CDT09]，并介绍来自 [FRGH+21]的一个简化版本。

定义 3.5 （（简化的）广义电路）。广义电路是一个元组 (V, G)，其中 V 是一个节点集合，G 是一个门的集合。每个节点 $v \in V$ 都关联一个门 G_v，该门分为两种类型 $\{G_{1-}, G_+\}$：如果 G_v 是一个 G_+ 门，则它有两个输入节点 $v_1, v_2 \in V \setminus \{v\}$；如果它是一个 G_{1-} 门，则它有一个输入节点 $v_1 \in V \setminus \{v\}$。给定 $\kappa > 0$，(V, G) 的 κ-近似解是一个赋值 $x \in [0,1]^V$，满足对每个节点 v：

- 如果 G_v 是一个 G_+ 门，且输入节点为 v_1，$v_2 \in V \setminus \{v\}$，那么 $x_v = \mathsf{T}^{[0,1]}(x_{v_1} + x_{v_2} \pm \kappa)$
- 如果 G_v 是一个 G_{1-} 门，且有一个输入节点 $v_1 \in V \setminus \{v\}$，那么 $x_v = \mathsf{T}^{[0,1]}(1 - x_{v_1} \pm \kappa)$。

已知对于常数 κ，广义电路问题是 PPAD 困难的。

定理 3.6 ([Rub15, DFHM22a])。存在一个常数 $\kappa > 0$，使得求解一个广义电路的 κ-近似解是 ***PPAD*** 困难的。

我们通过从广义电路问题进行归约来证明定理 1.1。

给定一个定义在节点集 V ($|V| = m$) 上的广义电路实例，我们令 $V_1 = [m_1]$为具有门 G_+ 的节点集合，$V_2 = [m_1 + 1 : m]$ 为具有门 G_{1-}的节点集合。我们构造一个第一价格拍卖实例，其中有 $n = m_1 + 2(m - m_1) = 2m - m_1$ 个标准玩家和一个枢轴玩家。

令 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_3$ 为普通玩家集合，其中 $\mathcal{N}_1 = [m_1]$、$\mathcal{N}_2 = [m_1 + 1 : m]$，且 $\mathcal{N}_3 = [m + 1 : 2m - m_1]$。从宏观上看，我们使用 $\mathcal{N}_1$ 中的玩家表示具有 G_+ 门的节点集合，使用 $\mathcal{N}_2$ 中的玩家表示具有 G_{1-} 门的节点集合。$\mathcal{N}_3$ 中的玩家用于构造 G_{1-}。我们首先指定区间（b_2，$1 - \epsilon$）上的概率密度 $\widetilde{p}$ 以及平局裁决矩阵 Σ^A 和 Σ^B，以完整描述该第一价格拍卖实例。

- 对于玩家 i 属于 $\mathcal{N}_1$（即 $i \in [m_1]$）的玩家，其估值分布 $\widetilde{p}_i$ 在区间上服从均匀分布

$$\left[\frac{1}{\Delta_{i,1}} \cdot b_2, \left(\frac{1}{\Delta_{i,1}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\beta\delta}{\Delta_{i,1}^2}\right) \cdot b_2\right]$$

总概率质量为 $\beta\delta$。令 $i(1)$ $i(2)$ $\in [m] = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ 为G_+ 门的输入节点，我们设定 $\Sigma^B_{i,}$ $_{i(1)} = \Sigma^B_{i,}$ $_{i(2)} = 1/10$。

- 对于玩家 $m_1+j\in\mathcal{N}_2$(即 $j\in[m-m_1]$)，其估值分布 $\widetilde{p}_{m_1+j}$ 均匀分布于

$$\left[\left(\frac{1}{\Delta_{m_1+j,1}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{\beta\delta}{\Delta^2_{m_1+j,1}}\right)\cdot b_2,\frac{1}{\Delta_{m_1+j,1}}\cdot b_2\right]$$

总概率质量为 $\beta\delta$。我们设定 $\Sigma^A_{m_1+j,\ m+j}=9/20.$

- 对于玩家 $m+j\in\mathcal{N}_3$（即 $j\in[m-m_1]$），其估值分布 $\widetilde{p}_{m+j}$ 在.....上均匀分布

$$\left[\left(\frac{1}{\Delta_{m+j,1}}+\frac{1}{10}\cdot\frac{\beta\delta}{\Delta^2_{m+j,1}}\right)\cdot b_2,\left(\frac{1}{\Delta_{m+j,1}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{\beta\delta}{\Delta^2_{m+j,1}}\right)\cdot b_2\right]$$

总概率质量为 $\beta\delta$。我们设定 $\Sigma^A_{m+j,\ m_1+j}=11/20$。设 $j(1)\in[m]$ 为 G_1_的输入节点，则设定 $\Sigma^B_{m+j,\ j(1)}=1/5$。

- 对于 Σ^A 中上述尚未确定的任何元素，我们将其设为 $1/2$；对于 Σ^B 中尚未确定的任何元素，我们将其设为 0。

不难验证，Σ^A 和 Σ^B 满足此前承诺的以下性质：(1) Σ^A的非对角元素属于 $[1/4,3/4]$；(2) $\Sigma^A+(\Sigma^A)^\top=J_n-I_n$；以及 (3) Σ^B 的非对角元素属于 $[0,1/2]$。

令 $\kappa:=n\beta=1/n^3$，我们证明，第一价格拍卖的任意 ϵ-贝叶斯纳什均衡都能为广义电路给出一个 $O(\kappa)$-近似解。事实上，下面的引理表明，取$x'_i=x_i/(\beta\delta)$，其中 x_i 是 s_i的跳跃概率，我们便可得到输入广义电路的一个 $O(\kappa)$-近似解 $(x'_1,\dots,x'_m)$。至此，定理 1.1 的证明完成。

引理 3.7。给定第一价格拍卖的一个 ϵ-贝叶斯纳什均衡，并令 $(x_1,\dots,x_n)\in[0,\beta\delta]^n$ 为跳跃概率组成的元组，则有

- 对于任意 $i\in[m_1]$，$x_i=\mathsf{T}_{[0,\beta\delta]}(x_{i(1)}+x_{i(2)}\pm O(\kappa\beta\delta))$
- 对于任意 $j\in[m-m_1]$，$x_{m_1+j}=\mathsf{T}_{[0,\beta\delta]}(\beta\delta-x_{j(1)}\pm O(\kappa\beta\delta))$

证明。对于第一个结论，对于任意 $i\in[m_1]$，有

$$\Delta_{i,2}=\sum_{r\in[n]\backslash\{i\}}\Big(1-2\Sigma^A_{i,r}-\Sigma^B_{i,r}\Big)x_r=-\frac{1}{10}x_{i(1)}-\frac{1}{10}x_{i(2)},$$

其中，第二步由 $\Sigma^A_{i,\ r}=1/2$对所有 $r\in[n]\backslash\{i\}$，$\Sigma^B_{i,\ i(1)}=\Sigma^B_{i,\ i(2)}=1/10$ 和$\Sigma^B_{i,\ r}=0$ 以及对所有其他 $r\in[n]\backslash\{i,i_1,i_2\}$成立可得。根据引理 3.4，有

$$\tau_i=\left(\frac{\Delta_{i,1}-\Delta_{i,2}}{\Delta^2_{i,1}}\pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{i,1}}\right)\right)\cdot b_2=\left(\frac{1}{\Delta_{i,1}}+\frac{1}{10}\cdot\frac{x_{i(1)}+x_{i(2)}}{\Delta^2_{i,1}}\pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{i,1}}\right)\right)\cdot b_2.$$

由于 $\mathcal{D}_i$在 $[\frac{1}{\Delta_{i,1}}\cdot b_2,(\frac{1}{\Delta_{i,\ 1}}+\frac{1}{10}\cdot\frac{\beta\delta}{\Delta^2_{i,\ 1}})\cdot b_2]$ 上均匀分布，且概率质量为 $\beta\delta$，因此我们有

$$x_i=\mathsf{T}_{[0,\beta\delta]}(x_{i(1)}+x_{i(2)}\pm O(\kappa\beta\delta)).$$

对于第二个断言，我们首先分析玩家 m_1+j 的跳跃概率。我们有

$$\Delta_{m_1+j,2}=\sum_{r\in[n]\backslash\{m_1+j\}}\Big(1-2\Sigma^A_{m_1+j,r}-\Sigma^B_{m_1+j,r}\Big)x_r=\frac{1}{10}x_{m+j},$$

其中，第二个等式由以下事实得出：对于所有 $r \in [n]\backslash\{m_1+j, m+j\}$，有 $\Sigma^A_{m_1+j,\ m+j} = 9/20$，$\Sigma^A_{m_1+j,\ r} = 1/2$；对于所有 $r \in [n]\backslash\{m_1+j\}$，有 $\Sigma^B_{m_1+j,\ r} = 0$。因此，根据引理 3.4，我们有

$$\begin{aligned}\tau_{m_1+j} &= \left(\frac{\Delta_{m_1+j,1} - \Delta_{m_1+j,2}}{\Delta^2_{m_1+j,1}} \pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{m_1+j,1}}\right)\right) \cdot b_2 \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_{m_1+j,1}} - \frac{1}{10} \cdot \frac{x_{m+j}}{\Delta^2_{m_1+j,1}} \pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{m_1+j,1}}\right)\right) \cdot b_2\end{aligned}$$

鉴于 $\mathcal{D}_{m_1+j}$ 在 $[(\frac{1}{\Delta_{m_1+j,1}} - \frac{1}{10} \cdot \frac{\beta\delta}{\Delta^2_{m_1+j,1}}) \cdot b_2, \frac{1}{\Delta_{m_1+j,1}} \cdot b_2]$ 上均匀分布，且质量为 $\beta\delta$，我们有

$$x_{m_1+j} = \mathsf{T}_{[0,\beta\delta]}(\beta\delta - x_{m+j} \pm O(\kappa\beta\delta)). \tag{14}$$

接下来需要分析玩家 $m+j$的跳跃概率，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{m+j,2} &= \sum_{r\in[n]\backslash\{m+j\}} \left(1 - 2\Sigma^A_{m+j,r} - \Sigma^B_{m+j,r}\right) x_r \\ &= -\frac{1}{10}x_{m_1+j} - \frac{1}{5}x_{j(1)} = -\frac{1}{10}\left(\beta\delta - x_{m+j} + 2x_{j(1)}\right) \pm O(\kappa\beta\delta).\end{aligned}$$

这里第二步由 $\Sigma^A_{m+j,m_1+j} = 11/20$, $\Sigma^A_{m+j,r} = 1/2$ 对 $r \in [n]\backslash\{m_1+j, m+j\}$,$\Sigma^B_{m+j,j(1)} = 1/5$ 成立，以及 $\Sigma^B_{m+j,r} = 0$ 对任意 $r \in [n]\backslash\{m+j, j(1)\}$成立可得。最后一步由公式 (14) 得出。现在，根据引理 3.4，有

$$\begin{aligned}\tau_{m+j} &= \left(\frac{\Delta_{m+j,1} - \Delta_{m+j,2}}{\Delta^2_{m+j,1}} \pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{m+j,1}}\right)\right) \cdot b_2 \\ &= \left(\frac{1}{\Delta_{m+j,1}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\beta\delta - x_{m+j} + 2x_{j(1)} \pm O(\kappa\beta\delta)}{\Delta^2_{m+j,1}} \pm O\left(\frac{\beta^2}{\Delta_{m+j,1}}\right)\right) \cdot b_2\end{aligned}$$

鉴于 $\mathcal{D}_{m+j}$在 $[(\frac{1}{\Delta_{m+j,1}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\beta\delta}{\Delta^2_{m+j,1}}) \cdot b_2, (\frac{1}{\Delta_{m+j,1}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\beta\delta}{\Delta^2_{m+j,1}}) \cdot b_2]$ 上均匀分布，且质量为 $\beta\delta$，我们得出

$$x_{m+j} = \mathsf{T}_{[0,\beta\delta]}(x_{j(1)} \pm O(\kappa\beta\delta)).$$

代入公式 (14)，我们得到

$$x_{m_1+j} = \mathsf{T}_{[0,\beta\delta]}(\beta\delta - x_{j(1)} \pm O(\kappa\beta\delta)).$$

这就完成了第二个断言的证明。 □

4 多项式时间

近似方案

我们提出了一种多项式时间近似方案，用于在均匀随机破同分规则下的第一价格拍卖中计算 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡。

定理 1.2（均匀随机破同分下的多项式时间近似方案）。对于任意 $\epsilon > 0$, n, $m \geq 2$，存在一种算法，可在 $O(n^4 \cdot g(1/\epsilon)$ 时间内，在均匀随机破同分规则下找到一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡。

我们的方法分为以下四个步骤。给定一个第一价格拍卖 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}, \mathcal{D}, \Gamma)$，其中 Γ 是均匀随机破同分规则，我们首先对出价空间 $\mathcal{B}$ 进行舍入，并将其规模缩减至 $O(1/\epsilon)$。随后，我们对估值分布 $\mathcal{D}$ 进行剪枝，并采用一种较弱的 (ϵ, δ)-近似贝叶斯纳什均衡概念，该概念放宽了不超价要求。第三步，我们论证在离散化空间上存在一个 (ϵ, δ)-近似贝叶斯纳什均衡策略组合；最后，我们为离散化空间中的 (ϵ, δ)-近似贝叶斯纳什均衡设计一种合适的搜索算法。

步骤 1：对出价进行舍入。给定一个出价空间为 $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, \ldots, b_m\}$且具有 $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m \le 1$ 的第一价格拍卖，我们定义 $\mathcal{B}_\epsilon = \{b_{0,\max}, b_{1,\max}, \ldots, b_{10\epsilon^{-1},\text{最大值}}\}$ 如下。首先，我们取 $b_{0,\ \max} = b_0 = 0$。然后，对每个 $t \in [10\epsilon^{-1}]$，令 $b_{t,\ \max}$ 为.....中的最大出价

$$\mathcal{B}_t := \mathcal{B} \cap \left(\frac{(t-1)\epsilon}{10}, \frac{t\epsilon}{10} \right]$$

如果 $\mathcal{B}_t$ 不为空；如果 $\mathcal{B}_t$ 为空，则令 $b_{t,\ \max}$ =为 nil（表示我们不向 $\mathcal{B}_\epsilon$中添加元素）。我们证明，只需在出价空间 $\mathcal{B}_\epsilon$上找到一个 $(\epsilon/2)$-近似贝叶斯纳什均衡。

引理 4.1。给定任意第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B},\ \mathcal{D},\ \Gamma)$，令 B_ϵ 为上文定义的舍入出价空间。那么，$(\epsilon/2)$-近似贝叶斯纳什均衡 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B}_\epsilon,\ \mathcal{D},\ \Gamma)$ 也是$(\mathcal{N},\ \mathcal{B},\ \mathcal{D},\ \Gamma)$的 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡。

证明。设 $s = (s_1, \ldots, s_n)$ 是 $(\epsilon/2)$-近似贝叶斯纳什均衡（BNE），对应于 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}, \Gamma)$。根据定义，每个 s_i 都满足

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}} \left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; \mathsf{bs}_\epsilon(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] \ge -\frac{\epsilon}{2},$$

其中

$$\mathsf{bs}_\epsilon(v_i, s_{-i}) := \arg\max_{b\in\mathcal{B}_\epsilon} \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}} u_i(v_i; b, s_{-i}(v_{-i}))$$

是 $\mathcal{B}_\epsilon$ 中的最佳响应。对于每个价值 $v_i \in [0,1]$，令

$$\epsilon_i(v_i) := \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}} \left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; \mathsf{bs}_\epsilon(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right]$$

表示价值点 v_i 处的效用亏损，并且我们知道 $\mathbb{E}_{v_i}[\epsilon_i(v_i)] \ge -\epsilon/2$。

令 $\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}) \in \mathcal{B}$ 表示原始出价空间 $\mathcal{B}$ 中的最佳响应。鉴于 $\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}) = 0$ 的情况是显然的，不失一般性，我们可以假设

$$\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}) \in \left(\frac{(t-1)\epsilon}{10}, \frac{t\epsilon}{10} \right], \quad \text{for some } t \in [10\epsilon^{-1}];$$

因此 $\mathcal{B}_t \neq \emptyset$。我们的目标是证明，与 $\mathsf{bs}(v_i, s_{-i})$ 相比，采用出价 $b_{t,\ \max}$ 或 0（两者均属于 $\mathcal{B}_\epsilon$）所获得的收入至多差 $\epsilon/10$ 。

情形 1. 假设 $v_i \ge t\epsilon/10$。那么，出价 $b_{t,\max}$ 是有效的，并且我们有

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}} \left[u_i(v_i; \mathsf{bs}_\epsilon(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] \\
&\quad\ge \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}} \left[u_i(v_i; b_{t,\max}, s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] \\
&\quad= \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}} [(v_i - b_{t,\max})\Gamma_i(b_{t,\max}, s_{-i}(v_{-i})) - (v_i - \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}))\Gamma_i(\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))] \\
&\quad\ge \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}) - b_{t,\max} \ge -\epsilon/10
\end{aligned} \tag{15}$$

其中第一步由 $b_{t,\max} \in \mathcal{B}_\epsilon$ 得出，第三步由 $v_i \geq b_{t,\max}$ 得出，并且

$$\Gamma_i(b_{t,\max}, s_{-i}(v_{-i})) \geq \Gamma_i(\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})).$$

情况 2. 假设 $v_i \in (\frac{(t-1)\epsilon}{10}, \frac{t\epsilon}{10}]$(注意，由于不超额出价假设，我们不能有 $v_i < (t-1)\epsilon/10$。在这种情况下，竞标者 i 可能无法出价 $b_{t,\max}$ ，这是由于不超额出价假设。不过，此时效用无论如何都很小，因此我们可以让竞标者如下出价$b_0 = 0$：

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}_\epsilon(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] \\
&\quad \geq 0 - \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] \\
&\quad = \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[(-v_i + \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}))\Gamma_i(\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_i))\right] \geq -\epsilon/10. \qquad (16)
\end{aligned}$$

结合公式（15）和公式（16），我们证明了

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] \geq \epsilon_i(v_i) - \frac{\epsilon}{10}.$$

对 v_i 取期望，便完成了引理的证明。 □

步骤 2：分布取整。 给定一个第一价格拍卖 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}, \Gamma)$，我们希望将价值分布 $\mathcal{D}_i$ 取整，使其仅在离散取值上有支持，并在概率质量过小时将其截去。形式化地，令 $\delta \in (0, \frac{\epsilon}{20})$ 为稍后指定的参数[5]，，我们对每个 $i \in [n]$ 定义 $\mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta}_{\cdot i}$ 如下：

$$p_i^{\epsilon,\delta}(t) = \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i^{\epsilon,\delta}}\left[v_i = \frac{t\epsilon}{10}\right] = \max\left\{0,\ \int_{\frac{t\epsilon}{10}}^{\frac{(t+1)\epsilon}{10}} \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i}[v_i = v]\,\mathsf{d}v - \delta\right\}$$

对于每个 $t \in [10\epsilon^{-1} - 1]$，并定义

$$p_i^{\epsilon,\delta}(0) = \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i^{\epsilon,\delta}}\left[v_i = 0\right] = 1 - \sum_{t=1}^{10\epsilon^{-1}-1} \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i^{\epsilon,\delta}}\left[v_i = \frac{t\epsilon}{10}\right].$$

也就是说，将估值分布向下取整为离散取值 $V_\epsilon := \{0, \epsilon/10, \ldots, 1-\epsilon/10\}$，并在 δ 处截断；额外的概率质量放在 0 上。从现在起，我们将同时考虑竞标者的连续估值分布和离散估值分布。

设 $\mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta} = \mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}^{\epsilon,\ n}$。接下来，我们定义（$\epsilon$，$\delta$）-近似贝叶斯纳什均衡的概念——这是一种较弱的均衡表述，对出价过高放宽了约束；并证明，只需找到取整后的第一价格拍卖（$\mathcal{N}$，$\mathcal{B}_\epsilon$，$\mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta}$，$\Gamma$）的（$\epsilon$，$\delta$）-近似贝叶斯纳什均衡即可。

定义 4.2 （(ϵ，δ)-近似贝叶斯纳什均衡)。 令 n，$m \geq 2$。给定一个贝叶斯第一价格拍卖 $(\mathcal{N}$，$\mathcal{B}_\epsilon$，$\mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta}$，$\Gamma)$，若策略组合 $s = (s_1, \ldots, s_n)$ 满足以下条件，则称其为(ϵ，δ)-近似贝叶斯纳什均衡（(ϵ，δ)-近似贝叶斯纳什均衡）：对于任意玩家 $i \in [n]$，其策略 s_i 是单调的，且与最佳响应相比至多差 ϵ:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}}\left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \epsilon,$$

[5]展望未来，参数 δ 应当远小于 ϵ

此外，令 $v_{i,\ \max} =$ 最大值$_{v_i \in V_\epsilon,\ p_i(v_{i,\ \max})>0}\, v_i$，玩家 i 的出价绝不会高于 $v_{i,\ \max}$，且其超额出价概率总和至多为 δ，即：

$$\Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i^{\epsilon,\delta}}\left[s_i(v_i) > v_{i,\max}\right] = 0 \quad \textit{and} \quad \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i^{\epsilon,\delta}}\left[s_i(v_i) > v_i\right] < \delta.$$

我们证明，只需在取整后的第一价格拍卖 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta}, \Gamma)$ 中找到一个 (ϵ, δ)-近似贝叶斯纳什均衡。在证明中，我们将执行如下操作：将出价策略 s_i（其出价空间为 $\mathcal{B}_\epsilon$，价值分布为 $\mathcal{D}_i$）转换为一个（唯一的）单调出价策略 s_i'，其出价空间相同$\mathcal{B}_\epsilon$，但价值分布不同 $\mathcal{D}_i'$，使得它们在 $\mathcal{B}_\epsilon$ 上的诱导分布相同：

定义 4.3（单调对应策略）。设 $s = (s_1, \ldots\ldots, s_n)$ 是出价空间为 $\mathcal{B}_\epsilon$、价值分布为 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_n$ 的一个策略组合，另设 $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1' \times \cdots \times \mathcal{D}_n'$ 是另一个价值分布。s 关于 $\mathcal{D}'$ 的单调对应策略（记为 s^{m}）定义为满足以下条件的唯一单调策略组合 $s^{\mathsf{m}} = (s_1^{\mathsf{m}}, \ldots\ldots, s_n^{\mathsf{m}})$：

$$\Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i'}\left[s_i^{\mathsf{m}}(v_i) = b\right] = \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}\left[s_i(v_i) = b\right], \quad \textit{for all } i \in [n] \textit{ and } b \in \mathcal{B}_\epsilon.$$

引理 *4.4.* 给定任意第一价格拍卖 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}, \Gamma)$，令 $\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}$ 为上述定义的舍入分布。那么，(ϵ, δ)-近似贝叶斯纳什均衡在 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}^{\epsilon,\delta}, \Gamma)$ 中的单调对应策略，是 $(2\epsilon + 22\delta/\epsilon)$-近似贝叶斯纳什均衡，在 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}, \Gamma)$ 中成立。

证明。为便于说明，我们将证明分为两部分。

第一部分。对每个 $i \in [n]$，定义分布 $\mathcal{D}_i^\epsilon$ 如下：

$$p_i^\epsilon(t) = \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}\left[v_i = \frac{t\epsilon}{10}\right] = \int_{\frac{t\epsilon}{10}}^{\frac{(t+1)\epsilon}{10}} \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}[v_i = v]\,\mathsf{d}v, \qquad \text{for each } t \in [10\epsilon^{-1} - 1]$$

and

$$p_i^\epsilon(0) = \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}\left[v_i = 0\right] = 1 - \sum_{t=1}^{10\epsilon^{-1}-1} \Pr_{v_i \sim \mathcal{D}_i}\left[v_i = \frac{t\epsilon}{10}\right].$$

分布 $\mathcal{D}_i^\epsilon$ 将 $\mathcal{D}_i$ 向下舍入为离散取值 V_ϵ。给定第一价格拍卖 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}^\epsilon, \Gamma)$ 的任意 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡策略 s，我们证明其单调对应策略 s^{m}（相对于 $\mathcal{D}$）是第一价格拍卖 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_\epsilon, \mathcal{D}, \Gamma)$ 的一个 $\frac{11}{10}\epsilon$-近似贝叶斯纳什均衡。对于任意 $v \in [0,1]$，令 $v^\epsilon = \lfloor \frac{10v}{\epsilon} \rfloor \cdot \frac{\epsilon}{10}$ 为 V_ϵ 中最接近且小于它的离散取值。对于任意玩家 $i \in [n]$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i; s_i^{\mathsf{m}}(v_i), s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i}))\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}^{\mathsf{m}}), s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i}))\right] \\
&\quad \geq \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i^\epsilon; s_i^{\mathsf{m}}(v_i), s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i}))\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v_i^\epsilon; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}^{\mathsf{m}}), s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i}))\right] - \frac{\epsilon}{10} \\
&\quad = \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}^\epsilon}\left[u_i(v_i^\epsilon; s_i^{\mathsf{m}}(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}^\epsilon}\left[u_i(v_i^\epsilon; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \frac{\epsilon}{10} \\
&\quad \geq \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}^\epsilon}\left[u_i(v_i^\epsilon; s_i^{\mathsf{m}}(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}^\epsilon}\left[u_i(v_i^\epsilon; \mathsf{bs}(v_i^\epsilon, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \frac{\epsilon}{10}.
\end{aligned}$$

第一步成立，因为 $u_i(v_i;\ s_i^{\mathsf{m}}(v_i)\ s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i})) \geq u_i(v_i^\epsilon;\ s_i^{\mathsf{m}}(v_i)\ s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i}))$ $(v_i \geq v_i^\epsilon)$，并且

$$u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}^{\mathsf{m}}), s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i})) - u_i(v_i^\epsilon; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}^{\mathsf{m}}), s_{-i}^{\mathsf{m}}(v_{-i})) \leq (v_i - v_i^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{10}.$$

第二步成立，因为当 $v_{-i} \sim \mathcal{D}^{\epsilon}_{-i}$ 时，出价组合 $s_{-i}(v_{-i})$ 与当 $v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}$ 时的 $s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i})$ 相同。

对 $v_i \sim \mathcal{D}_i$ 取期望，得到

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}}[u_i(v_i; s^{\mathsf{m}}_i(v_i), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))] - \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s^{\mathsf{m}}_{-i}), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))\right] \\
&\geq \mathop{\mathbb{E}}_{v_i\sim\mathcal{D}_i}\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}^{\epsilon}_{-i}}\left[u_i(v^{\epsilon}_i; s^{\mathsf{m}}_i(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{v_i\sim\mathcal{D}_i}\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}^{\epsilon}_{-i}}\left[u_i(v^{\epsilon}_i; \mathsf{bs}(v^{\epsilon}_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \frac{\epsilon}{10} \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon}_i}\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}^{\epsilon}_{-i}}\left[u_i(v_i; s^{\mathsf{m}}_i(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon}_i}\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}^{\epsilon}_{-i}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] - \frac{\epsilon}{10} \\
&\geq -\epsilon - \frac{\epsilon}{10} = -\frac{11}{10}\epsilon.
\end{aligned}$$

其中，第二步成立是因为 $v^{\epsilon}_i(v_i \sim \mathcal{D}_i)$ 与 $v_i(v_i \sim \mathcal{D}^{\epsilon}_i)$ 服从相同分布。容易验证，鉴于 s 作为一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡不会出价过高，s^{m} 也不会出价过高。由此可得，s^{m} 是第一价格拍卖（FPA）$(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{\epsilon}, \mathcal{D}^{\epsilon}, \Gamma)$ 的一个 $\frac{11}{10}\epsilon$-近似贝叶斯纳什均衡。

第二部分。我们证明，对于第一价格拍卖（FPA）$(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{\epsilon}, \mathcal{D}^{\epsilon,\delta}, \Gamma)$ 的任意一个 (ϵ, δ)-近似贝叶斯纳什均衡 s，其相对于分布 $\mathcal{D}^{\epsilon}$ 的单调对应策略 s^{m} 必定是 $(\epsilon + 20\delta/\epsilon)$-近似贝叶斯纳什均衡 $(\mathcal{N}, \mathcal{B}_{\epsilon}, \mathcal{D}^{\epsilon}, \Gamma)$。

为了证明其正确性，需要对每个玩家 $i \in [n]$ 验证，

1. s^{m}_i 是单调的，
2. s^{m}_i比最佳响应至多差（$\epsilon + 20\delta/\epsilon$）；并且
3. s^{m}_i不会出价过高。

单调性的第一个断言直接由定义得出：s^{m} 是 s的单调类比。为证明第二个断言，一个关键观察是，出价组合始终保持不变，即 $s(v)$（$v \sim \mathcal{D}^{\epsilon,\ \delta}$）与 $s^{\mathsf{m}}(v)$（$v \sim \mathcal{D}^{\epsilon}$）相同。因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[u_i(v_i; s^{\mathsf{m}}_i(v_i), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))\right] &= \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[(v_i - s^{\mathsf{m}}_i(v_i))\Gamma_i(s^{\mathsf{m}}_i(v_i), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))\right] \\
&\geq \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[(v_i - s_i(v_i))\Gamma_i(s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right] \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[u_i(v_i; s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right]. \qquad (17)
\end{aligned}$$

第二步成立，因为（i）在 s^{m} 和 s下的期望支付相同，即，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[s^{\mathsf{m}}_i(v_i)\Gamma_i(s^{\mathsf{m}}_i(v_i), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))\right] = \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[s_i(v_i)\Gamma_i(s_i(v_i), s_{-i}(v_{-i}))\right]$$

并且（ii）分布 $\mathcal{D}^{\epsilon}_i$ 随机占优于分布 $\mathcal{D}^{\epsilon,\ {}^{\delta}}_{\ i}$。类似地，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s^{\mathsf{m}}_{-i}), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))\right] &= \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[(v_i - \mathsf{bs}(v_i, s^{\mathsf{m}}_{-i}))\Gamma_i(\mathsf{bs}(v_i, s^{\mathsf{m}}_{-i}), s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i}))\right] \\
&\leq \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[(v_i - \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}))\Gamma_i(\mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] + 20\delta/\epsilon \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))\right] + 20\delta/\epsilon. \qquad (18)
\end{aligned}$$

其中第二步成立，是因为 $\mathcal{D}^{\epsilon}$ 与 $\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}$ 之间的总变差距离不超过 $20\delta/\epsilon$，且$s^{\mathsf{m}}_{-i}(v_{-i})$ $(v_{-i} \sim \mathcal{D}^{\epsilon}_{-i})$与 $s_{-i}(v_{-i})$ $(v_{-i} \sim \mathcal{D}^{\epsilon,\ {}^{\delta}}_{-i})$具有相同的分布。结合式（17）和式（18），我们得出，s^{m} 比最佳响应至多差 $(\epsilon + 20\delta/\epsilon)$。

最后，我们证明最后一项，即 s_i^{m}不会出价过高。我们用反证法，假设在某个出价 $b \in \mathcal{B}_\epsilon^\delta$ 下，有 $\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i^\epsilon}[s_i^{\mathsf{m}}(v_i) = b > v_i] > 0$。令 $\nu_i \in [0,1]$ 为满足 $\Pr[s_i^{\mathsf{m}}(\nu_i) = b] > 0$的最小值，并令 $v^{\epsilon,i}{}_{,\max}^{\delta} = \max_{v_i\in V_\epsilon, p^\epsilon{}_{,i}{}^{\delta}(v^{\epsilon,i}{}_{,\max}^{\delta})>0} v_i$。注意，由 (ϵ,δ)-近似贝叶斯纳什均衡的定义，$\nu_i < b \le v^{\epsilon,i}{}_{,\max}^{\delta}$，也就是说，在 $v^{\epsilon,i}{}_{,\max}^{\delta}$范围内不会发生过度出价。因此，我们有

$$\begin{aligned}\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[s_i(v_i)\ge b\right] = \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[s_i^{\mathsf{m}}(v_i)\ge b\right] &\ge \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon}}\left[v_i\ge \nu_i\right] \ge \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[v_i\ge \nu_i\right]+\delta \\ &\ge \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}\left[v_i\ge b\right]+\delta \end{aligned} \tag{19}$$

第一步根据单调对应策略的定义得出，第二步成立，因为 s_i^{m}是单调的。第三步成立，因为 $\nu_i < v^{\epsilon}{}_{,i}{}^{\delta}$、最大值 和 $\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}$ 在$v^{\epsilon}{}_{,i}{}^{\delta}$、最大值处截去了至少 δ 的概率质量。公式（19）意味着

$$\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}^{\epsilon,\delta}}[v_i < b \wedge s_i(v_i)\ge b] \ge \delta,$$

也就是说，超额出价概率至少为 δ。这与 s 是第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\mathcal{B}_\epsilon,\mathcal{D}^\epsilon,\Gamma)$ 的 (ϵ,δ)-近似贝叶斯纳什均衡这一事实相矛盾。证明至此完成。 □

步骤 3：离散化 (ϵ,δ)-近似贝叶斯纳什均衡的存在性。 给定一个第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\mathcal{B},\mathcal{D},\Gamma)$，我们证明存在一个（适当）离散化的 (ϵ,δ)-近似贝叶斯纳什均衡。我们使用一般的第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\mathcal{B},\mathcal{D},\Gamma)$ 来描述这一步，但稍后会将其应用于取整后的第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\mathcal{B}_\epsilon,\mathcal{D}^\epsilon{}^{,\delta},\Gamma)$。对于任意 $j\in[0:m]$, $i\in[n]$，令 $p_{i,\ j} = \Pr[s_i(v_i) = b_j]$ 表示玩家 i 在策略组合 s 中出价 b_j 的概率。

引理 4.5（离散化）。令 m，$n\ge 2$，给定任意第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B},\ \mathcal{D},\ \Gamma)$ 以及 $\mathcal{B}=\{b_0,b_1,\dots,b_m\}$ 且满足 $0=b_0<b_1<\cdots<b_m\le 1$，则存在一个（$\epsilon$，$\delta$）-近似贝叶斯纳什均衡策略组合 s，使得 $p_{i,\ j}$ 是以下数的整数倍

$$\ell(m)\cdot\frac{1}{\epsilon^6\delta}$$

对于任意 $i\in[n]$ 和 $j\in[0:\ m]$，其中 $\ell(m)$ 是 m的某个指数函数。

我们使用 [DP15]中的以下结果。需要指出的是，这是我们需要均匀随机破同分规则的主要部分。

定理 4.6（[DP15]的定理 3）。令 $p_i\in\Delta_{m+1}$ 对于 $i\in[n]$，并令 $\{X_i\in\mathbb{R}^{m+1}\}_{i\in[n]}$ 为一组相互独立的 $(m+1)$ 维随机单位向量，使得对于所有 $i\in[n]$、$j\in[0:\ m]$，$\Pr[X_i=1_j]=p_{i,\ j}$。令 $z>0$ 为一个整数。则存在另一组概率向量$\{\widehat{p}_i\in\Delta_{m+1}\}_{i\in[n]}$，使得以下条件成立：

- $|\widehat{p}_{i,\ j}-p_{i,\ j}| = O(1/z)$，对于所有 $i\in[n]$ 和 $j\in[0:\ m]$;
- $\widehat{p}_{i,\ j}$ 是 $\frac{1}{2^m}\cdot\frac{1}{z}$ 的整数倍，对于所有 $i\in[n]$ 和 $j\in[0:\ m]$;
- 如果 $p_{i,\ j}=0$，那么 $\widehat{p}_{i,\ j}=0$;
- 令 $\{\widehat{X}_i\in\mathbb{R}^{m+1}\}_{i\in[n]}$ 为一组相互独立的$(m+1)$维随机单位向量，使得对所有 $i\in[n]$，$j\in[0:\ m]$，均有$\Pr[X_i=1_j]=\widehat{p}_{i,j}$。

$$\left\|\sum_{i\in[n]}X_i-\sum_{i\in[n]}\widehat{X}_i\right\|_{\mathsf{TV}} = O\left(h(m)\cdot\frac{\log z}{z^{1/5}}\right). \tag{20}$$

此外，对于所有 $i' \in [n]$，我们有

$$\left\| \sum_{i \in [n] \setminus \{i'\}} X_i - \sum_{i \in [n] \setminus \{i'\}} \widehat{X}_i \right\|_{\mathsf{TV}} = O\left(h(m) \cdot \frac{\log z}{z^{1/5}} \right). \tag{21}$$

其中 $h(m)$ 是某个指数函数

*Pr*引理 *4.5* 的证明。给定第一价格拍卖 s 的贝叶斯纳什均衡策略剖面（$\mathcal{N}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{D}$、Γ），我们取

$$z = \Omega\Big(\max\left\{ 2h(m)^6 \epsilon^{-6}, 2m^2 \delta^{-1} \right\} \Big) \quad \text{and} \quad \gamma = h(m) \cdot \frac{\log z}{z^{1/5}}.$$

令 $\{p_i \in \Delta^{m+1}\}_{i \in [n]}$ 为与 s对应的概率向量，即 $p_{i,\ j} = \Pr[s_i(v_i) = b_j]$。利用定理 4.6，令 $\{\widehat{p}_i \in \Delta^{m+1}\}_{i \in [n]}$ 为离散化概率向量的集合，并令 $\widehat{s}$ 为由 $\widehat{p}$ 确定的唯一单调策略（关于相同的价值分布 $\mathcal{D}$）。我们证明，$\widehat{s}$ 构成该拍卖的（ϵ、δ）-近似贝叶斯纳什均衡。我们需要验证，对于每个玩家 $i \in [n]$，（1）$\widehat{s}_i$ 至多比最佳响应差 ϵ；以及（2）过度出价概率很小。

根据式 (21)，对于任意 $j \in [0:\ m]$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}} \left[\Gamma_i(b_j, s_{-i}(v_{-i})) \right] = \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i} \sim \mathcal{D}_{-i}} \left[\Gamma_i(b_j, \widehat{s}_{-i}(v_{-i})) \right] \pm \gamma. \tag{22}$$

由于（采用均匀随机破同分时的）分配概率由其他玩家的出价直方图决定，而该直方图在总变差距离下从 s_{-i} 到 $\widehat{s}_{-i}$ 的变化至多为 γ。

对于效用，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i; \widehat{s}_i(v_i), \widehat{s}_{-i}(v_{-i})) \right] &= \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[(v_i - \widehat{s}_i(v_i)) \cdot \Gamma_i(\widehat{s}(v_i), \widehat{s}_{-i}(v_{-i})) \right] \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[(v_i - \widehat{s}_i(v_i)) \cdot \Gamma_i(\widehat{s}_i(v_i), s_{-i}(v_i)) \right] \pm \gamma \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[(v_i - s_i(v_i)) \cdot \Gamma_i(s_i(v_i), s_{-i}(v_i)) \right] \pm O\left(m^2 \cdot \frac{1}{z} + \gamma \right) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i; s(v_i), s_{-i}(v_{-i})) \right] \pm \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{23}$$

第二步由式 (22) 得出；第三步成立是因为 $(v_i, s_i(v_i))$ 与 $(v_i, \widehat{s}_i(v_i))$ 之间的总变差距离至多为 $O(m^2 \cdot \frac{1}{z})$。最后一步由 z 的选取得出。

同时，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, \widehat{s}_{-i}), \widehat{s}_{-i}(v_{-i})) \right] &\le \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i, \mathsf{bs}(v_i, \widehat{s}_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] + \gamma \\
&\le \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i, \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] + \gamma \\
&\le \mathop{\mathbb{E}}_{v \sim \mathcal{D}} \left[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) \right] + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{24}$$

这里，第一步是因为出价直方图在总变差距离下从 s_{-i} 到 $\widehat{s}_{-i}$ 的变化至多为 γ。最后一步由参数的选取得出。

结合式（23）和式（24），可知 $\widehat{s}_i$ 最多比最佳响应差 ϵ-worse。

为了界定出价过高的概率，令 $j(i) \in [0:\ m]$ 表示在 $\widehat{s}_i$ 下获得非零概率的最高出价，那么很容易验证 $b_{j(i)} \le v_{i,\ \max}$：否则 $b_{j(i)} > v_{i,\ \max}$和 $p_{i,\ j(i)} > 0$ 将与 s 上贝叶斯纳什均衡的不超额出价假设相矛盾。

最后，我们得到

$$\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i}\left[\widehat{s}_i(v_i) > v_i\right] \le \Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i}\left[s_i(v_i) > v_i\right] + O\left(m^2\cdot\frac{1}{z}\right) = 0 + O\left(m^2\cdot\frac{1}{z}\right) \le \delta$$

因为 $(v_i, s_i(v_i))$ 与 $(v_i, \widehat{s}_i(v_i))$ 之间的全变差距离至多为 $O(m^2\cdot\frac{1}{z})$。 □

步骤 4：搜索一个 (ϵ,δ)-近似贝叶斯纳什均衡。 最后，我们针对离散化空间提供一种简单的搜索算法，用于寻找 (ϵ,δ)-近似贝叶斯纳什均衡。关键观察来自第一价格拍卖的分配规则，即只有出价最高的玩家才可能赢得物品。对于某个 $\omega\in(0,1)$，如果 $p_{i,\ j}=\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i}[s_i(v_i)\ =b_j]$ 对于每个 $i\in[n]$ 和 $j\in[0$ 都是 ω 的倍数，则称策略组合 s 位于网格 S_ω 中： $m]$。

引理 4.7。 给定一个第一价格拍卖 $(\mathcal{N},\mathcal{B},\mathcal{D},\Gamma)$，并假设在网格 S_ω上至少存在一个 (ϵ,δ)-~近似贝叶斯纳什均衡，那么存在一个算法，该算法在 $n^4m\cdot 2^{O(m/\epsilon\omega)}$ 时间内运行，并在均匀随机破同分规则下返回一个 $(2\epsilon,\delta)$-近似贝叶斯纳什均衡。

证明。令 $R=100(m+1)/\epsilon\omega$。离散化策略组合 $\mathsf{E}_\omega\subseteq[\Delta_{m+1}]^R$ 定义如下。策略组合 $(p_1,\ldots,p_R)\in\mathsf{E}_\omega$ 由一个出价等级 $j^*\in[0$ 参数化： $m-1]$ 且$k_0,k_1,\ldots,k_{j^*}\in[0\colon 10\epsilon^{-1}]$，使得 $p_{i,\ j}$对于所有 $i\in[n]$, $j\in[0\colon m]$均为 ω的倍数，并且

$$\sum_{r=1}^{R} p_{r,m-j}=k_j,\ \forall j\in[0:j^*]\quad\text{and}\quad p_{r,m-j}=0,\ \forall r\in[R], j\in[j^*+1:m-1].$$

E_ω 的大小满足

$$|\mathsf{E}_\omega|\le(m+1)\cdot(10/\epsilon\omega+1/\omega)^{m+1}\cdot\binom{R}{10/\epsilon\omega+1/\omega}\le 2^{\widetilde{O}(m/\epsilon\omega)}.$$

对于任意策略组合 $(p_1,\ldots,p_R)\in\mathsf{E}_\omega$，可以添加 $(n-R)$ 个默认策略 $(1,0,\ldots,0)$（即以概率 1 出价 $b_0=0$）。稍微滥用记号，我们也用 $\mathsf{E}_\omega\subseteq[\Delta_{m+1}]^n$ 表示扩充后的策略组合。我们将证明

- 在 E_ω 中存在一个（2ϵ， δ）-近似贝叶斯纳什均衡（至多差一个与玩家的匹配），并且
- 可以高效地确定该匹配。

存在性：（2ϵ， δ）-近似贝叶斯纳什均衡 回顾一下，存在一个（ϵ， δ）-近似贝叶斯纳什均衡策略 s，定义在网格 S_ω 上。令 j^* 为 $[0$ 上满足以下条件的第一个索引： $m]$，使得 $\sum_{i\in[n]}p_{i,\ m-j}\le 10/\epsilon$ $(\forall j<j^*)$ 且 $\sum_{i\in[n]}p_{i,\ m-j^*}\ge 10/\epsilon$。若 $j^*=m$，则有 $s\in\mathsf{E}_\omega$（至多差一个玩家之间的匹配）。若 $j^*\le m-1$，则令 $n^*\in[n]$ 为满足 $\sum_{i\in[n^*]}p_{n,\ m-j^*}\ge 10/\epsilon$的最小玩家（不失一般性，假设取等号）。将策略组合截断为 s'，使得

$$p'_{i,j}=\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i}[s'_i(v_i)=b_j]=\begin{cases}p_{i,j} & j>m-j^*\vee(j=m-j^*\wedge i\le n^*)\\ 0 & j\in[1:m-j^*-1]\vee(j=m-j^*\wedge i>n^*)\\ 1-\sum_{j'=1}^{m}p'_{i,j'} & j=0.\end{cases}$$

显然，新策略 $s'\in\mathsf{E}_\omega$ （在玩家之间进行匹配的情况下）对每个玩家 $i\in[n]$ 都成立；新策略 s'_i 是单调的，且出价过高的概率不超过 δ（因为我们只将出价概率转移到 $b_0=0$）。只需证明它比最佳响应至多差 2ϵ

。关键观察是，出价 b_j with$j > m - j^*$ 的分配概率保持不变，即:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[\Gamma_i(b_j, s'_{-i}(v_{-i}))] = \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[\Gamma_i(b_j, s_{-i}(v_{-i}))] \quad \forall j \in [m - j^* + 1 : m]$$

此外，出价不超过 b_{m-j^*} 的分配概率很小 1

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[\Gamma_i(b_j; s'_{-i}(v_{-i}))] \le \epsilon/4 \quad \forall j \in [0 : m - j^*].$$

这是因为根据切尔诺夫界，至少有 $5/\epsilon$ 个玩家出价不低于 b_{m-j^*} 的概率至少为 $1 - \exp(-5/3\epsilon)$。

因此，对于任意价值点 v_i，如果 $s'_i(v_i) > b_{m-j^*}$，那么 $s_i(v_i) = s'_i(v_i)$，并且

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; s'_i(v_i); s'_{-i}(v_{-i}))] = \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; s_i(v_i); s_{-i}(v_{-i}))] \tag{25}$$

如果 $s'_i(v_i) \le b_{m-j^*}$，那么 $s_i(v_i) \le b_{m-j^*}$，并且

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; s'_i(v_i); s'_{-i}(v_{-i}))] \ge -\epsilon/4 \quad \text{and} \quad \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; s_i(v_i); s_{-i}(v_{-i}))] \le \epsilon/4. \tag{26}$$

结合式 (25) 和式 (26)，对于任意 $v_i \in [0, 1]$，有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; s'_i(v_i); s'_{-i}(v_{-i})) - u_i(v_i; s_i(v_i); s_{-i}(v_{-i}))] \ge -\epsilon/2. \tag{27}$$

类似地，可以证明

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s'_{-i}), s'_{-i}(v_{-i}))] \le \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v_i; \mathsf{bs}(v_i, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))] + \epsilon/2. \tag{28}$$

组合 结合式（27）和（28），我们证明了s'_i 最多比最佳响应差 2ϵ。 .

寻找匹配给定一个策略组合（$p_1, \ldots, p_n$） $\in \mathrm{E}_\omega$，我们展示如何定义一个二分匹配问题，使得（2ϵ, δ）-近似贝叶斯纳什均衡与该图的完美二分匹配一一对应。这个二分匹配问题定义在玩家$[n]$ 和策略 $\{p_i\}_{i\in[n]}$之间。如果 p_{i_2} 最多比最佳响应差 2ϵ（注意，其他玩家的竞价组合直方图已确定），且超额出价概率至多为 δ，我们就在玩家 i_1 和策略 p_{i_2}之间连一条边。我们注意到，最佳响应可以在 $O(mn^2)$时间内计算，并且可以使用动态规划在 $O(n^2)$时间内估计一次出价的效用（类似于 [FRGH+21]）。因此，构造二分图需要 $n^2 \cdot O(mn^2)$时间，而找到一个完美匹配需要 $O(n^3)$时间。

□

结合上述四个步骤（引理 4.1、引理 4.4、引理 4.5 和引理 4.7），我们完成了定理 1.2 的证明。

致谢

X.C. 和 B.P. 感谢 Aviad Rubinstein 以及匿名 STOC 审稿人对本文提出的有益建议。X.C. 和 B.P. 的研究获得美国国家科学基金会资助，项目编号为 CCF-1703925、IIS-1838154、CCF-2106429 和 CCF-2107187、CCF-1763970、CCF-2212233、COLL2134095、COLL2212745。

参考文献

[AKV05] Tim Abbott、Daniel Kane 和 Paul Valiant。关于双人胜负博弈的复杂性。载于第*46*届*IEEE*计算机科学基础年会（*FOCS'05*），第113–122页。IEEE，2005年。[Ath01] Susan Athey。不完全信息博弈中单交叉性质与纯策略均衡的存在性。《计量经济学》，69(4)：861–889，2001年。[BBM17] Dirk Bergemann、Benjamin Brooks 和 Stephen Morris。具有一般信息结构的第一价格拍卖：对竞价和收入的影响。《计量经济学》，85(1)：107–143，2017年。[CCPY22] Thomas Chen、Xi Chen、Binghui Peng 和 Mihalis Yannakakis。Hylland-Zeckhauser机制的计算复杂性。载于*2022*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第2253–2268页。SIAM，2022年。[CDDT09] Xi Chen、Decheng Dai、Ye Du 和 Shang-Hua Teng。解决具有可加可分效用的市场中Arrow-Debreu均衡的复杂性问题。载于*2009*年第*50*届*IEEE*计算机科学基础年会，第273–282页。IEEE，2009年。[CDIZ22] Yeshwanth Cherapanamjeri、Constantinos Daskalakis、Andrew Ilyas 和 Manolis Zampetakis。标准拍卖模型的估计。载于第*23*届*ACM*经济学与计算会议论文集，2022年。[CDO15] Xi Chen、David Durfee 和 Anthi Orfanou。匿名博弈中纳什均衡的复杂性。载于第*47*届*ACM*计算理论年会论文集，第381–390页，2015年。[CDT09] Xi Chen、Xiaotie Deng 和 Shang-Hua Teng。解决计算双人纳什均衡的复杂性问题。《*ACM* 杂志》（*JACM*），56(3)：1–57，2009年。[CGMM21] Bhaskar Ray Chaudhury、Jugal Garg、Peter McGlaughlin 和 Ruta Mehta。混合禀赋的竞争性分配。载于*2021*年*ACM-SIAM*离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第1405–1424页。SIAM，2021年。[CH13] Shuchi Chawla 和 Jason D Hartline。具有唯一均衡的拍卖。载于第*14*届*ACM*电子商务会议论文集，第181–196页，2013年。[CKP+22] Vincent Conitzer、Christian Kroer、Debmalya Panigrahi、Okke Schrijvers、Nicolas E Stier-Moses、Eric Sodomka 和 Christopher A Wilkens。第一价格拍卖市场中的节奏均衡。《管理科学》，2022年。[CP14] Yang Cai 和 Christos Papadimitriou。同时贝叶斯拍卖与计算复杂性。载于第*15*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第895–910页，2014年。[CPY13] Xi Chen、Dimitris Paparas 和 Mihalis Yannakakis。非单调市场的复杂性。载于第*45*届*ACM*计算理论年会论文集，第181–190页，2013年。

[CT09] Xi Chen 和 Shang-Hua Teng。交易并不比交换更容易：关于 Fisher 均衡与 Arrow-Debreu 均衡的计算等价性。载于《国际算法与计算研讨会》，第647–656页。Springer，2009年。[CTV07] Xi Chen、Shang-Hua Teng 和 Paul Valiant。胜负博弈的近似复杂性。载于 SODA，第7卷，第159–168页，2007年。[DFHM22a] Argyrios Deligkas、John Fearnley、Alexandros Hollender 和 Themistoklis Melissourgos。Pure-Circuit：PPAD 的强不可近似性。载于2022年 IEEE 第63届计算机科学基础年会（FOCS），2022年。[DFHM22b] Argyrios Deligkas、John Fearnley、Alexandros Hollender 和 Themistoklis Melissourgos。Pure-Circuit：PPAD 的强不可近似性。载于第53届 IEEE 计算机科学基础年会（FOCS'22）。IEEE，2022年。[DGP09] Constantinos Daskalakis、Paul W Goldberg 和 Christos H Papadimitriou。计算纳什均衡的复杂性。《SIAM 计算杂志》，39(1):195–259，2009年。[DGZ22] Constantinos Daskalakis、Noah Golowich 和 Kaiqing Zhang。随机博弈中马尔可夫均衡的复杂性。arXiv 预印本 arXiv:2204.03991，2022年。[DMM+22] Yuan Deng、Jieming Mao、Vahab Mirrokni、Hanrui Zhang 和 Song Zuo。自动竞价环境中第一价格拍卖的效率。arXiv 预印本 arXiv:2208.10650，2022年。[DP15] Constantinos Daskalakis 和 Christos H Papadimitriou。匿名博弈中的近似纳什均衡。经济理论杂志，156:207–245，2015年。[DSZ21] Constantinos Daskalakis、Stratis Skoulakis 和 Manolis Zampetakis。约束极小极大优化的复杂性。载于第53届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，2021年。[FFGL13] Michal Feldman、Hu Fu、Nick Gravin 和 Brendan Lucier。同时拍卖（几乎）是有效率的。载于第45届 ACM 计算理论研讨会论文集，第201–210页，2013年。[FRGH+21] Aris Filos-Ratsikas、Yiannis Giannakopoulos、Alexandros Hollender、Philip Lazos 和 Diogo Poças。第一价格拍卖中均衡计算的复杂性。载于第22届 ACM 经济学与计算会议论文集，第454–476页，2021年。[GPV00] Emmanuel Guerre、Isabelle Perrigne 和 Quang Vuong。第一价格拍卖的最优非参数估计。《计量经济学》，68(3):525–574，2000年。[HHT14] Jason Hartline、Darrell Hoy 和 Sam Taggart。拍卖收益的无政府状态代价。载于第15届ACM经济学与计算会议论文集，第693–710页，2014年。[HTW18] Darrell Hoy、Samuel Taggart 和 Zihe Wang。第一价格拍卖更紧致的福利保证。载于第50届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，第132–137页，2018年。

[JL22] Yaonan Jin 和 Pinyan Lu。第一价格拍卖是 $1-1/e^2$ 有效率的。载于2022年 IEEE 第63届计算机科学基础年会（FOCS），2022年。[JL23] Yaonan Jin 和 Pinyan Lu。第一价格拍卖的稳定性价格。载于 SODA，2023年。[JMS22] Yujia Jin、Vidya Muthukumar 和 Aaron Sidford。无限期一般和随机博弈的复杂性。arXiv 预印本 arXiv:2204.04186，2022年。[KZ12] Todd R Kaplan 和 Shmuel Zamir。均匀分布下的非对称第一价格拍卖：一般情形的解析解。《经济理论》，50(2):269–302，2012年。[Leb96] Bernard Lebrun。第一价格拍卖中均衡的存在性。《经济理论》，7(3):421–443，1996年。[Leb99] Bernard Lebrun。非对称竞标者情形下的第一价格拍卖。《国际经济评论》，40(1):125–142，1999年。[Leb06] Bernard Lebrun。第一价格拍卖均衡的唯一性。《博弈与经济行为》，55(1):131–151，2006年。[LP00] Alessandro Lizzeri 和 Nicola Persico。设有保留价的拍卖中均衡的唯一性与存在性。《博弈与经济行为》，30(1):83–114，2000年。[Meh14] Ruta Mehta。常秩双矩阵博弈是 PPAD 困难的。载于第46届 ACM 计算理论研讨会论文集，第545–554页，2014年。[MMRS94] Robert C Marshall、Michael J Meurer、Jean-Francois Richard 和 Walter Stromquist。非对称第一价格拍卖的数值分析。《博弈与经济行为》，7(2):193–220，1994年。[MR00] Eric Maskin 和 John Riley。密封高价拍卖中的均衡。《经济研究评论》，67(3):439–454，2000年。[MR03] Eric Maskin 和 John Riley。密封高价拍卖均衡的唯一性。《博弈与经济行为》，45(2):395–409，2003年。[OPR16] Abraham Othman、Christos Papadimitriou 和 Aviad Rubinstein。通过均衡实现公平性的复杂性。《ACM经济学与计算汇刊》（TEAC），4(4):1–19，2016年。[Pap94] Christos H Papadimitriou。关于奇偶性论证及其他低效存在性证明的复杂性。《计算机与系统科学杂志》，48(3):498–532，1994年。[Plu92] Michael Plum。具有不完全信息的拍卖中纳什均衡的刻画与计算。《国际博弈论杂志》，20(4):393–418，1992年。[PP21] Christos Papadimitriou 和 Binghui Peng。有向网络中的公共物品博弈。载于第22届 ACM 经济学与计算会议论文集，第745–762页，2021年。

[Rou10] Tim Roughgarden。《算法博弈论》。*ACM* 通讯，53(7):78–86，2010年。[RS81] John G Riley 和 William F Samuelson。《最优拍卖》。《美国经济评论》，71(3):381–392，1981年。[Rub15] Aviad Rubinstein。《纳什均衡的不可近似性》。载于第四十七届 *ACM* 计算理论研讨会论文集，第409–418页，2015年。[Rub16] Aviad Rubinstein。《近似双人纳什均衡计算复杂性的确定》。载于*2016 IEEE* 第*57*届计算机科学基础年会（*FOCS*），第258–265页。IEEE，2016年。[Rub18] Aviad Rubinstein。《纳什均衡的不可近似性》。《*SIAM* 计算杂志》，47(3):917–959，2018年。[Rub19] Aviad Rubinstein。《P 与 NP 之间的近似困难性》。Morgan & Claypool，2019年。[RZ04] Philip J Reny 和 Shmuel Zamir。关于非对称第一价格拍卖中纯策略单调均衡的存在性。《计量经济学》，72(4):1105–1125，2004年。[ST13] Vasilis Syrgkanis 和 Eva Tardos。可组合且高效的机制。载于第四十五届 *ACM* 计算理论研讨会论文集，第211–220页，2013年。[Syr14] Vasileios Syrgkanis。《复杂市场中的机制效率》。康奈尔大学，2014年。[Vic61] William Vickrey。反投机、拍卖与竞争性密封投标。《金融学杂志》，16(1):8–37，1961年。[VY11] Vijay V Vazirani 和 Mihalis Yannakakis。可分、分段线性凹效用下的市场均衡。《*ACM* 杂志》（*JACM*），58(3):1–25，2011年。[WSZ20] Zihe Wang、Weiran Shen 和 Song Zuo。具有离散估值分布的第一价格拍卖中的贝叶斯纳什均衡。载于 第*19*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集，第1458–1466页，2020年。

第2节中遗漏的证明

我们给出引理2.4的证明。

引理*2.4*的证明。 给定一个 ϵ-近似贝叶斯纳什均衡策略 s，我们将每个个体策略 s_i 转换为另一个策略 s'_i，使得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}[u_i(v; s'_i(v_i), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v; \mathsf{bs}(v_i; s_{-i}), s_{-i}(v_{-i}))] \le 10\sqrt{\epsilon} \quad \forall v \in [0,1], i \in [n], \tag{29}$$

and

$$\Pr_{v_i\sim\mathcal{D}_i}[s'_i(v_i) \neq s_i(v_i)] \le \sqrt{\epsilon} \quad \forall i \in [n]. \tag{30}$$

根据上述性质，可以很容易得出， $s' = (s'_1, \ldots, s'_n)$ 是一个具有 $\epsilon' = 10\sqrt{\epsilon} + 2n\sqrt{\epsilon}$ 的 ϵ'-贝叶斯纳什均衡，因为出价直方图的总变差距离变化至多为 $n\sqrt{\epsilon}$。

令 $\mathsf{bs}_\delta(v_i, s_{-i}) \subseteq \mathcal{B}$ 表示 δ-最佳响应的集合（注意，我们稍微滥用了符号，其含义不同于第4节），即

$$\mathsf{bs}_\delta(v, s_{-i}) := \left\{b \in \mathcal{B} : \mathop{\mathbb{E}}_{v_{-i}\sim\mathcal{D}_{-i}}\left[u_i(v; \mathsf{bs}(v, s_{-i}), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v; b, s_{-i}(v_{-i}))\right] \le \delta, b \le v\right\}.$$

为得到所需的策略 s'_i，我们按降序修改策略 s_i，从 $s_i(1)$ 到 $s_i(0)$。虽然用连续方式描述会更方便，但需要注意的是，它可以在多项式时间内轻松实现。对于每个值 $v \in [0,1]$，令 $b^+(v)$ 表示私人价值高于 v 时给出的最小出价，即 $b^+(v) := \min_{b\in\mathcal{B},\ v'>v} s'_i(v')$。我们分情况讨论。

1. 如果 $s_i(v) \in \mathsf{bs}_{4\sqrt{\epsilon}}(v; s_{-i})$ 且 $s_i(v) \le b^+(v)$，则保持策略不变，即 $s'_i(v) = s_i(v)$；

2. 否则，令 $B_\delta(v) := \mathsf{bs}_\delta(v_i, s_{-i}) \cap [0, b^+(v)]$ be 表示在 v 处可用的 δ-最佳响应集合，则

   (a) 如果 $B_{4\sqrt{\epsilon}}(v) \neq \emptyset$，则取 $s'_i(v) = \max_{b\in B_{5\sqrt{\epsilon}}(v)} b$；否则
   (b) 令 $s'_i(v) = b^+(v)$ 为可能的最大出价。

容易验证该策略是单调的。在情况 (2-b) 中不存在过度出价，因为 $b^+(v) \le \mathsf{bs}(v, s_{-i}) \le v$。接下来我们验证策略 s' 满足上述性质。

为证明公式 (29)，只需考虑满足 $s'_i(v) = b^+(v)$ 且 $b^+(v) < b_{\min}(v)$ 的值 $v \in [0,1]$ （即情况 2-b），此时 $b_{\min}(v) = \min_{b\in\mathsf{bs}_{4\sqrt{\epsilon}}(v,\ s_{-i})} b$。令 $v^+ > v$ 为满足 $s'_i(v^+) = b^+(v)$ 的最大值；由于不失一般性地假设策略是右闭的，该最大值存在。于是我们知道 $b^+(v) \in \mathsf{bs}_{5\sqrt{\epsilon}}(v^+, s_{-i})$（即它必然属于情况 1 或情况 2-a），因此，

$$\begin{aligned} 5\sqrt{\epsilon} \ge\ & \mathbb{E}[u_i(v^+; b_{\min}(v), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v^+; s'_i(v^+), s_{-i}(v_{-i}))] \\ \ge\ & \mathbb{E}[u_i(v; b_{\min}(v), s_{-i}(v_{-i})) - u_i(v; s'_i(v^+), s_{-i}(v_{-i}))]. \end{aligned}$$

这里第二步成立，是因为 $v^+ \ge v$, $b_{\min}(v) > s'_i(v^+) = b^+(v)$，以及效用差的单调性。

因此，我们有

$$\mathbb{E}[u_i(v;\mathsf{bs}(v,s_{-i})\ s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v;s_i'(v)\ s_{-i}(v_{-i}))]\leq \mathbb{E}[u_i(v;\mathsf{bs}(v,s_{-i})\ s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v;\ b_{\min}(v)\ s_{-i}(v_{-i}))+u_i(v;\ b_{\min}(v)\ s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v;\ s_i'(v^+)\ s_{-i}(v_{-i}))]\leq 4\sqrt{\epsilon}+5\sqrt{\epsilon}=9\sqrt{\epsilon}.$$

第二步成立是因为 $b_{\min}(v)\in\mathsf{bs}^{4\sqrt{\epsilon}}(v,s_{-i})$。这证明了公式 (29)。

为证明公式 (30)，令 $V_i=\{v:\ s_i(v)\notin\mathsf{bs}^{\sqrt{\epsilon}}(v;s_{-i})\}$。根据马尔可夫不等式，$V_i$ 上的概率很小，即

$$\Pr[v\in V_i]\leq\sqrt{\epsilon}.$$

接下来，我们证明对于任意 $v\in[0,1]\backslash V_i,\ \ s_i'(v)=s_i(v)$ 成立。我们采用反证法，并假设公式 (30) 在取值 $v\in[0,1]\backslash V_i$ 处不成立。于是有 $s_i(v)>b^+(v)$（即不是情况 1）。令 $v^+>v$ 为满足 $s_i'(v^+)<s_i(v)$ 的最大取值；同样，最大值存在，因为不失一般性可以假设该策略是右闭的。在取值 v^+ 处，出价 $s_i(v)$ 是可行的（即 $s_i(v)\leq b^+(v^+)$），并且由于最大值假设，我们不处于情况 2-b。若我们处于情况 1，则由于 s 的单调性，有 $s_i'(v^+)=s_i(v^+)\geq s_i(v)$，这与 $s_i'(v^+)<s_i(v)$ 的假设矛盾。因此，唯一可能是我们处于情况 2-a，而要得到矛盾，只需证明 $s_i(v)\in\mathsf{bs}^{5\sqrt{\epsilon}}(v^+,s_{-i})$。

在情况 2-a 中，令 $b'\in B_{4\sqrt{\epsilon}}(v^+)$ 为任意可行的 $4\sqrt{\epsilon}$ 最佳响应。我们有 $b'\leq s_i'(v_1)$，并且

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[u_i(v^+;\mathsf{bs}(v^+;s_{-i}),s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v^+;s_i(v),s_{-i}(v_{-i}))]\\
=\ &\mathbb{E}[u_i(v^+;\mathsf{bs}(v^+;s_{-i}),s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v^+;b',s_{-i}(v_{-i}))+u_i(v^+;b',s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v^+;s_i(v),s_{-i}(v_{-i}))]\\
\leq\ &4\sqrt{\epsilon}+\mathbb{E}[u_i(v^+;b',s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v^+;s_i(v),s_{-i}(v_{-i}))]\\
\leq\ &4\sqrt{\epsilon}+\mathbb{E}[u_i(v;b',s_{-i}(v_{-i}))-u_i(v;s_i(v),s_{-i}(v_{-i}))]\leq 5\sqrt{\epsilon}.
\end{aligned}$$

这里，第二步由 $b'\in B_{4\sqrt{\epsilon}}(v^+)\subseteq\mathsf{bs}^{4\sqrt{\epsilon}}(v^+,s_{-i})$ 得出，第三步由 $v^+>v$, $b'\leq s_i(v)$ 以及效用差的单调性成立，最后一步则由 $v\notin V_1$ 得出。至此，证明完成。

□