arXiv:2303.16402v1 [physics.space-ph] 29 Mar 2023

,

无推进剂交会任务的最优轨迹

Mohamed Shouman[a], *Ahmed Atallah[b], [c]Mohammad S. Ramadan[b], [d]

[a]智能车辆研究中心，丰田技术学院（*TTI*），日本名古屋，爱知县[b]机械与航空航天工程系，加利福尼亚大学圣迭戈分校，美国加利福尼亚州拉霍亚，邮编*92093-0411*。[c]航空航天工程系，圣迭戈州立大学，美国加利福尼亚州圣迭戈、拉霍亚。[d]电气与计算机工程系，圣迭戈州立大学，美国加利福尼亚州圣迭戈、拉霍亚。

摘要

本文提出了一种利用空间环境力执行时间最优和能量最优无推进剂航天器交会任务的新方法。考虑相对动力学方程的非线性形式，将交会任务构建为受输入饱和约束的最优控制问题。我们采用直接最优控制方法来求取最优轨迹和控制输入。首先，仅考虑差分阻力，并全面分析高度对所需控制输入和所得代价函数的影响。随后，将洛伦兹力与差分阻力结合使用，从而缩短时间最优任务所需的时间。对于结合差分阻力和洛伦兹力的能量最优任务，在代价函数中引入加权矩阵，以调整这两种力的相对贡献。

关键词： 交会任务、差分大气阻力、洛伦兹力、轨迹优化。

1. 引言

空间碎片清除和编队飞行任务的新时代需要为轨迹跟踪问题提出创新思路。地球轨道航天器任务中减少燃料消耗的需求日益增长，因此有必要在各种轨道控制应用中利用空间环境力，例如大气阻力、洛伦兹力和太阳辐射压。

Leonard等人于1989年开展了一项开创性研究，将差分大气阻力应用于轨道控制。[1] 在他们的研究中，他们采用线性二次型调节器（LQR），控制交会任务相对动力学的线性化模型。随后，人们开发了各种控制算法，将差分大气阻力应用于不同的轨道控制场景，尤其是卫星编队飞行（SFF）任务。[2,3,4]

*通讯作者电子邮箱： Mohamed.Shouman@Toyota-ti.ac.jp（Mohamed Shouman），aatallah@eng.ucsd.edu（Ahmed Atallah），msramada@eng.ucsd.edu（Mohammad S. Ramadan）预印本已提交至爱思唯尔，*3*月 *30*日，*2023*年

在SFF任务中，动力学模型里径向与切向之间的耦合使两个平面内分量均可受到控制。然而，正如多位作者此前的研究所述，沿轨道平面法线方向的运动被认为是不可控的。[1,5,6,7,8,9,10]尽管存在可控性不足的问题，Ivanov等人[11] 仍提出了一种简单的LQR，仅利用包括升力分量在内的大气力来控制相对动力学模型。因此，原本作为外生扰动的大气阻力，如今成为构建控制问题的一部分，进而成为最优控制问题中的决策变量。然而，要在物理上实现这一控制律，必须考虑几何与设计方面的因素，这对于大多数卫星设计而言并不切实际。

为进一步利用空间环境，人们一直在持续研究利用洛伦兹力进行轨道控制。2005年，Peck等人[12] 提出了一个用于地球逃逸和阻力补偿轨道控制任务的简化线性时不变（LTI）模型。后来，利用洛伦兹力进行编队飞行和交会任务的可行性得到了广泛研究。[13,14,15] Pollock等人[16] 为相对运动方程提供了一个近似解析解，其中洛伦兹力构成了航天器推进的重要组成部分。

Tsujii等人通过使用圆轨道和椭圆轨道构型下的相对动力学状态，证实了洛伦兹力用于SFF任务的可行性。[17] Sobiesiak和Damaren基于Brouwer公式[18] 对平均轨道根数长期漂移率建立的受扰相对动力学模型，分析了编队飞行任务的可控性。Sobiesiak等人[13] 证明，对于特定的轨道构型，稳定非受控状态在李雅普诺夫意义下是可以实现的。

作为进一步的进展，Vatankhanghadim 和 Damaren 针对椭圆轨道上的编队飞行任务，采用基于相对状态[19] 的混合线性二次调节方案，并结合使用洛伦兹力和脉冲式推力器作为控制作用。[15] 随后，Shouman 等人[10] 分析了多种空间环境力组合（包括大气阻力和洛伦兹力）作用下线性化系统的可控性，并探讨了其在轨道控制应用中的用途。在其后续论文中，Shouman[20] 提出了对仅受有界差分大气力作用的相对动力学模型的有限时间可达集闭包边界进行全面分析的方案，并采用了两种方法。第一种方法通过最大化优化问题的一般性能指标，估算非线性模型的 Hamilton-Jacobi (HJ) 最优解。第二种方法则利用适用于圆轨道的线性化 Hills-Clohessy-Wiltshire (HCW) 模型的特征结构。[21,22]

本文着重解决涉及非线性相对动力学的交会任务中的时间最优和能量最优控制问题。控制输入仅限于使用差分大气阻力，可选择辅以少量洛伦兹力支持。在很大程度上，由于最优反馈控制律能够提供稳定性和可行性保证，因此备受期待。然而，获得此类控制律需要求解 Hamilton-Jacobi-Bellman（HJB）方程，而由于所谓的维数灾难，这一过程难以实现。为此，我们采用庞特里亚金极大值原理，该原理不再要求获得闭环解，从而避免了维数灾难。尽管最优轨迹是在开环意义下求解的，但可以通过滚动时域建立反馈。在特定终端条件下，该技术能够在无限时域内实现渐近稳定性和递归可行性。该方法体现了 Keerthi 和 Gilbert 提出的模型预测控制（MPC）的基础核心结论；[23] 有限时域开环控制的性质可以产生无限时域最优反馈控制的特征。本文的贡献有三点，分别是：

• 与许多参考文献不同，[3,4,5,6,10] 后者仅针对面内运动实施差分阻力，或将阻力与推力结合起来，以实现整个相对动力学的完全可控性；而本文仅使用差分大气阻力，研究整个动力学模型的能量最优和时间最优轨迹。利用大气阻力实现动力学系统的完全可控性，源于在主卫星坐标系中表示从卫星的相对速度向量。

• 全面分析了高度对最小能量方法下平均控制作用和代价函数的影响。

• 针对最小能量和最短时间方法，推导了一种实用的解决方案，仅需洛伦兹力提供少量辅助，即可应对差分阻力带来的缺点。

本文其余部分安排如下。第 2 节给出径向–切向–法向（RTN）坐标系中的非线性相对运动方程，以及差分大气阻力和洛伦兹力。第 3 节介绍无推进剂空间交会任务的最优控制问题公式。第 4 节分为两个独立的小节，分别给出仅受大气阻力作用，以及同时受大气阻力和洛伦兹力作用时的控制数值结果。第 5 节总结全文，并提出改进所述方法性能的建议。

2. 动力学模型

在反重力场中，主卫星的运动方程为

$$\ddot{r}_c = r_c\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r_c^2}, \quad \ddot{\theta} = -2\frac{\dot{r}_c\dot{\theta}}{r_c^2} \tag{1}$$

其中，r_c 表示主卫星与地球中心之间的径向距离，θ 表示其纬 argument。主卫星与从卫星之间的相对运动在径向–切向–法向（RTN）坐标系中描述如下：[24]

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= x\dot{\theta}^2 + y\ddot{\theta} + 2\dot{y}\dot{\theta} - \frac{\mu(r_c + x)}{r^3} + \frac{\mu}{r_c^2} + a_x \\
\ddot{y} &= y\dot{\theta}^2 - x\ddot{\theta} - 2\dot{x}\dot{\theta} - \frac{\mu y}{r^3} + a_y \\
\ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3} + a_z
\end{aligned} \tag{2}$$

其中，x、y 和z 分别表示径向、切向和法向上的相对位置；r 表示从卫星到地球中心的径向距离，即$r = \sqrt{(r_c + x)^2 + y^2 + z^2}$，，而$\mathbf{a} \triangleq \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$ 表示主卫星与从卫星之间空间环境力的差异。

我们将差分大气阻力和洛伦兹力视为控制输入，因此，加速度为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_d + \mathbf{a}_l \tag{3}$$

其中，$\mathbf{a}_d$ 和$\mathbf{a}_l$ 分别为它们对应的加速度。在后面的数值结果部分，首先仅考虑差分阻力分量，随后再将洛伦兹力的影响纳入其中。

2.1. 差分大气阻力

大气阻力是作用于低地球轨道卫星的最显著非引力。抵消气动阻力所需的加速度幅值会随高度增加而大幅降低。因此，利用气动阻力控制编队飞行仅适用于低地球轨道卫星。大气阻力产生的控制作用来源于主卫星与从卫星之间的大气阻力摄动差异。该大气阻力差表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_d &= \boldsymbol{a}_{d_f} - \boldsymbol{a}_{d_l} \\ &= -\frac{1}{2}\rho C_d \frac{A_f}{m_f}\boldsymbol{v}_{rel_f}\|\boldsymbol{v}_{rel_f}\| + \frac{1}{2}\rho C_d \frac{A_l}{m_l}\boldsymbol{v}_{rel_l}\|\boldsymbol{v}_{rel_l}\|\end{aligned} \tag{4}$$

其中C_d是两颗卫星的阻力系数，ρ是气动密度，$\boldsymbol{a}_{d_l}$和$\boldsymbol{a}_{d_f}$分别是主卫星和从卫星的气动阻力矢量。主卫星在RTN坐标系中的相对速度$\boldsymbol{v}_{rel_l}$为

$$\boldsymbol{v}_{rel_l} = \begin{bmatrix} \dot{r}_c \\ r_c(\dot{\theta} - \omega_e \cos i) \\ r_c \omega_e \sin i \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

从卫星在主卫星坐标系中的相对速度为[25]

$$\boldsymbol{v}_{rel_f} = \begin{bmatrix} \dot{r}_c + \dot{x} - y(\dot{\theta} - \omega_e \cos i) - z\omega_e \sin i \cos\theta \\ \dot{y} + (r_c + x)(\dot{\theta} - \omega_e \cos i) + z\omega_e \sin i \sin\theta \\ \dot{z} + (r_c + x)\omega_e \sin i \cos\theta - y\omega_e \sin i \sin\theta \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中i是主卫星的倾角，$\omega_e = 7.292 \times 10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1}$是地球自转的角速度。

在式（4）中，A_l/m和A_f/m分别表示主卫星和从卫星的面积质比。这些数值之差会产生差分阻力。我们假设两颗卫星均采用旋转阻力板：

$$\frac{A_l}{m} = \frac{A}{m}\sin(\alpha + \delta\alpha), \quad \frac{A_f}{m} = \frac{A}{m}\sin(\alpha - \delta\alpha) \tag{7}$$

其中A/m和α分别是名义阻力面积质比和阻力板角度，$\delta\alpha$是阻力板角度差。

2.2. 洛伦兹力

洛伦兹力由在地磁场中运动的带电卫星产生，而卫星被假设为在地球磁场中旋转的带电质点。[17] 作用于带电卫星的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{a}_l = \frac{q}{m}\boldsymbol{v}_{rel} \times \boldsymbol{B} \tag{8}$$

其中，分数q/m是卫星的荷质比，$\boldsymbol{v}_{rel}$是由公式（6）给出的从卫星相对速度。对于完美倾斜偶极矩，地球的地磁场$\boldsymbol{B}$表示为[10]

$$\boldsymbol{B} = \frac{B_0}{r_c^3}\left[3(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{c}})\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{c}} - \hat{\boldsymbol{n}}\right] \tag{9}$$

其中，B_0 是以韦伯·千米为单位的场强（$B_0 = 8 \times 10^{15}$），$\hat{\boldsymbol{n}}$是磁偶极子单位向量，$\hat{\boldsymbol{r}}_c$ 是主卫星惯性位置矢量的单位向量。该公式应从惯性坐标系转换到RTN坐标系。Pollock等人[26] 推导出了RTN坐标系中地磁场矢量的简单表示形式：

$$\boldsymbol{B} = \frac{B_0}{r^3}\begin{bmatrix} -2\sin\lambda_n(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\cos i\sin\theta) - 2\cos\lambda_n\sin i\sin\theta \\ \sin\lambda_n(\sin\beta\cos i\cos\theta - \cos\beta\sin\theta) + \cos\lambda_n\sin i\cos\theta \\ \cos\lambda_n\cos i - \sin\lambda_n\sin\beta\sin i \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中，β 由 $\beta = \omega_e t$ –Ω定义，而 λ_n 是地理北极与地磁极之间的余纬角（λ_n = 11.5 度）。

3. 问题表述

式（2）中的系统定义了一个状态

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T$$

以及一个控制输入$\mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} \delta\alpha \end{bmatrix}$。将式（1）和（2）重写为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_l(t), \mathbf{u}(t)) \tag{11}$$

其中$\mathbf{x}_l(t)$是主卫星的状态向量，即，

$$\mathbf{x}_l(t) = \begin{bmatrix} r_c(t) & \theta(t) & \dot{r}_c(t) & \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

我们的目标是计算交会任务的能量最优轨迹和时间最优轨迹。这些最优控制问题可以表述如下：确定状态，$\mathbf{x}(t)$，以及控制输入，$\mathbf{u}(t)$，使性能指标最小化

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathrm{d}t \tag{13}$$

满足式 (11) 和式 (2) 中的动力学约束，以及对控制输入的约束：

$$|\mathbf{u}(t)| \leq \mathbf{u}_{\max} \tag{14}$$

以及边界条件

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_l(t_0) &= \mathbf{x}_{l_0} \\ \mathbf{x}(t_f) &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{15}$$

在最小能量问题中，

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{u}(t)^T R\mathbf{u}(t) \tag{16}$$

对于某个 $R > 0$，而在最短时间问题中

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = 1 \tag{17}$$

使用 CasADi工具箱，[27] 我们采用多重打靶法，将上述最优控制问题转化为有限维近似，从而得到非线性规划问题。随后使用 IPOPT[28] 求解这些非线性规划问题。

表1：主卫星的轨道参数

参数	符号	Unit	数值
半长轴	a	km	6778
倾角	i	deg	30
偏心率	e	−−	0.001
RAAN	Ω	deg	10
近地点幅角	ω	deg	10
真近点角	ν	deg	10

4. 数值结果

先前的研究[1,8,10]表明，仅考虑差分大气阻力时，方程（2）中的系统仅在面内运动方面可控。在第一小节中，我们分析仅依靠差分大气阻力控制相对动力学方程的面内分量和面外分量的能力。接下来的小节则进一步将洛伦兹力与差分大气阻力结合起来。每个小节均给出能量最优和时间最优情形下的结果。我们还进一步分析了高度的影响。

假设主卫星和从卫星的名义阻力面积质比 $A/m = 0.1\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}$，名义阻力板角度分别为 $\alpha = \pi/4$。主卫星的轨道参数见表1。距地球表面的等效高度为$h_{ellp} = 400$ 千米。上层空气动力层中的密度很难确定准确值，许多国际标准试图通过指定大量参数来选择最适合特定任务的密度模型，从而推动一种密度模型优于其他模型。[29,30] 在这些模型中，我们基于简化指数密度模型（CIRA 72）估算密度。[24]

$$\rho = \rho_0 e^{\left(-\frac{h_{ellp}-h_0}{H}\right)} \tag{18}$$

其中，h_0、 ρ_0和H 分别为实际高度、基准高度、基准高度处的名义密度和尺度高度。[24] 根据公式（18），该高度处的密度为 3。7250×10^{-12} 所有情况下的初始位置和速度差如下所示：

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 100 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{19}$$

仅考虑差分大气阻力时，

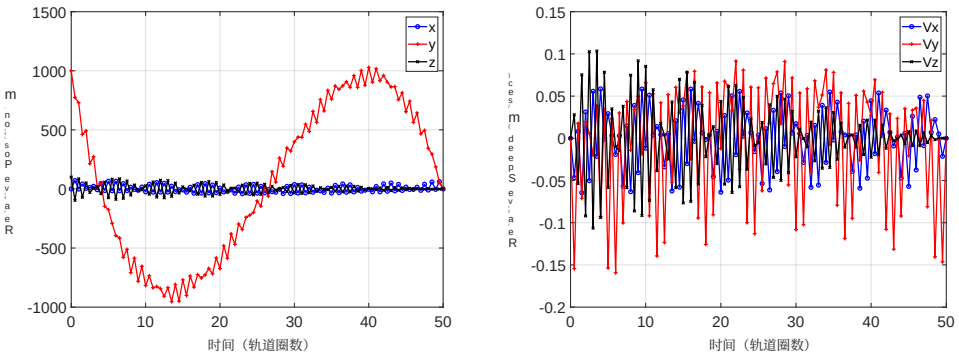
$$\mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} \pi/4 & 0.0 \end{bmatrix}^T \tag{20}$$

以及考虑大气阻力和洛伦兹力时

$$\mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} \pi/4 & 0.01 \end{bmatrix}^T \tag{21}$$

4.1. 利用大气阻力进行控制

据作者所知，目前尚未有研究仅通过差分阻力，为完整的相对动力学模型设计最优轨迹。本小节给出仅考虑大气差分阻力时，最小能量最优控制问题和最优时间控制问题的仿真结果。



(a) 位置 (b) 速度

图 1：最小能量方法（阻力）下的位置和速度误差。

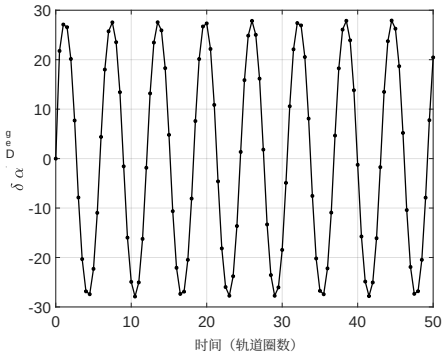
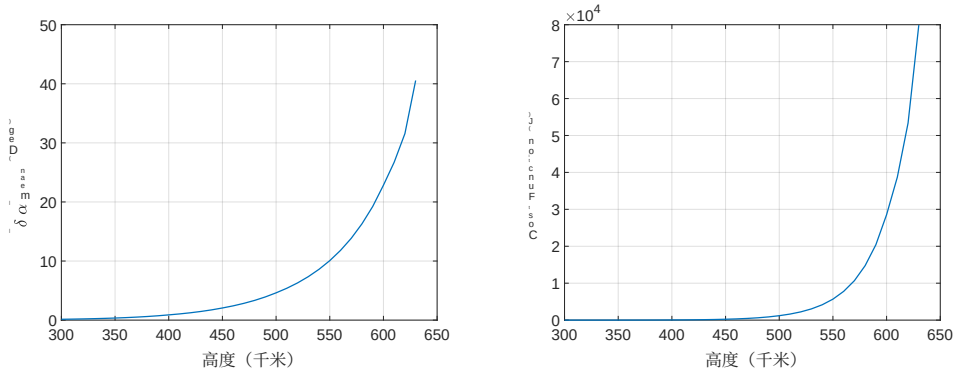


图 2：最小能量方法的控制作用（Dr ag).

1. 最小能量。

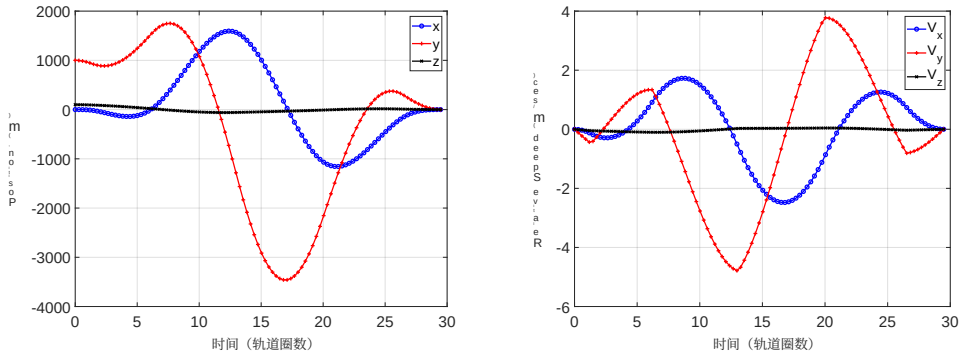
本部分仅介绍考虑差分大气阻力时最小能量最优控制问题的结果。图 1(a) 展示了径向和切向方向随时间的变化，图 1(b) 则描绘了速度分量随时间的变化。图 2 展示了控制输入 ($\delta\alpha$) 的轨迹，其终止时间为$t_f = 50$个轨道周期，约为 3.5 天。大气阻力板角度的控制作用 $\delta\alpha$ 变化至高于 25 度。该情形下的总成本函数为$J = 1.88 \times 10^4$，加权矩阵为$R = I$，如式 (16) 所示。

大气阻力取决于密度数值，因此也取决于卫星高度。因此，我们需要分析高度对最小能量问题中代价函数的影响。图3展示了差分大气阻力的平均控制作用 $|\delta\alpha|_{mean}$ 与代价函数 J 随 $t_f = 1000$ 个轨道周期的变化，该时间约等于 70 天。任务持续时间经过选择，以满足不同高度的大多数情况下的最低要求，高度范围从$h_{ellp} = 300$ 千米到$h_{ellp} = 650$ 千米，大气密度范围为 $\rho = 2.418 \times 10^{-11}$ 千克/米 ^{3} 至 $\rho = 7.249 \times 10^{-14}$



（a）平均控制作用　　（b）总成本函数

图3：不同高度下的平均控制输入和总成本函数h^{ellp}（阻力）。



（a）位置　　（b）速度

图4：最短时间方法下的位置和速度误差（阻力）。

千克/米 ^{3}。图3(a)显示，在整个任务持续时间内，阻力板角度差的平均绝对值从$h_{ellp} = 300$ 千米处的0.14度大幅增加到$h_{ellp} = 630$ 千米处的41度。同时，仅靠大气阻力无法在给定的任务持续时间和卫星参数下，为更高高度完成此任务。图3(b)表明，随着高度的微小变化，代价函数大幅增加，从$J \approx 1.11$（在$h_{ellp} = 300$ 千米处）增加到$J \approx 8 \times 10^4$（在$h_{ellp} = 630$ 千米处）。

2. 最短时间

图 4 分别显示了最短时间方法下相对位置和速度分量的时间历程。结果表明，若仅利用差分大气阻力实现该任务，并采用现实的阻力板面积质比，则任务大约需要 177000 秒，即 29.5 个轨道。最短时间轨迹优化得到的控制轨迹呈现出近似的开关特性，如图 5 所示。

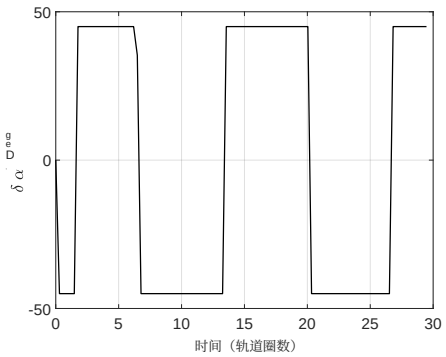
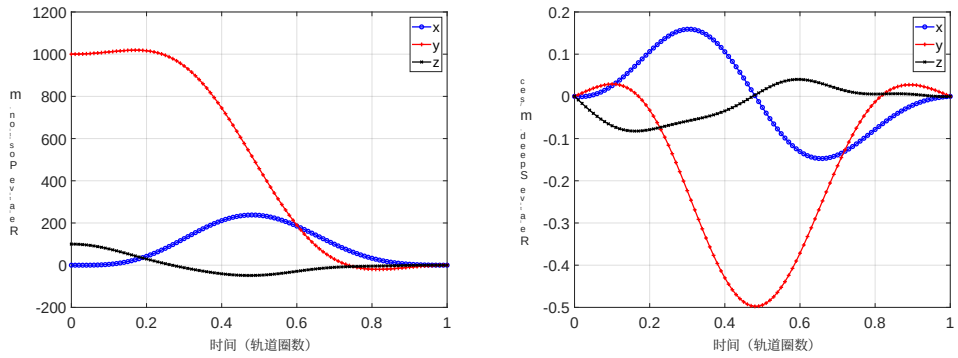


图 5：最短时间问题（阻力）的控制作用。



（a）位置　　（b）速度

图 6：误差 i　n 最小能量方法中的位置和速度（阻力　　+ 洛伦兹力）。

4.2. 大气阻力和洛伦兹力控制

在本小节中，针对采用最小能量和最短时间两种不同方法的径向-切向-法向交会任务，利用差分大气阻力与洛伦兹力组合控制作用，对整个轨迹的最优解进行了仿真。加权矩阵R 选取如下：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.6 \times 10^{7} \end{bmatrix} \tag{22}$$

方程（22）表明，差分阻力是主要的控制作用，而洛伦兹力则作为次要的辅助作用来支持差分阻力。

1. 最小能量。本部分展示了在整个动力学运动中，结合差分大气阻力与洛伦兹力的最小能量最优控制问题的结果。图 6(a) 展示了相对位置分量随时间的变化，而图 6(b) 展示了

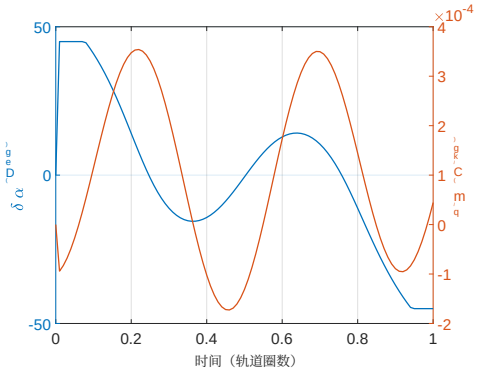
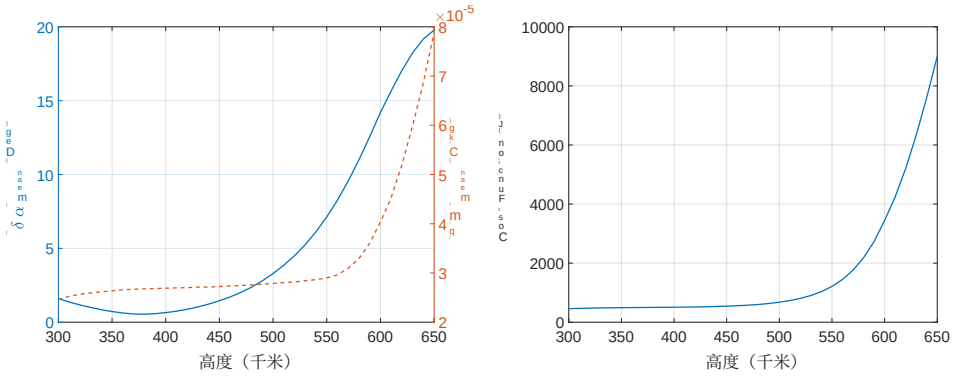


图7：最小能量方法的控制作用（阻力 + 洛伦兹力）。



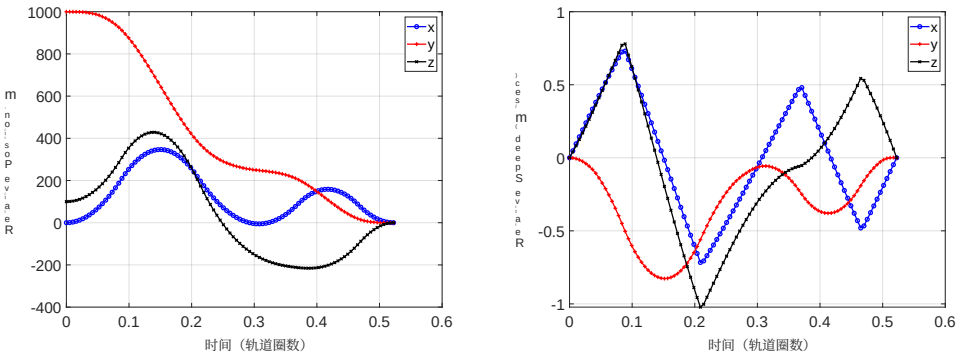
(a) 平均控制作用　　(b) 总成本函数

图8：平均控制　　输入和不同高度下的总成本函数小时$ellp$　　（阻力 + 洛伦兹力）。

速度分量随时间的变化。结果表明，洛伦兹力能够弥补仅依靠差分阻力完成此任务所需时间过长这一缺点。

图7展示了控制输入（$\delta\alpha$）和q/m 随时间$t_f = 6000$秒的变化轨迹，该时长约等于一个轨道周期。图中表明，洛伦兹荷质比q/m 远低于其饱和值，而阻力板角度则接近其最大值。这一结果表明，加权矩阵选择得当；该任务可在不到一个轨道周期内通过大气阻力完成，仅需洛伦兹力提供微不足道的辅助，且该任务的总成本函数为$J = 1.11 \times 10^3$。

图8所示结果展示了在五个轨道周期内，最小能量问题中不同高度从$h_{ellp} = 300$ 到$h_{ellp} = 650$ 时，组合差分大气阻力与洛伦兹力的平均控制作用和代价函数的变化。图8(a)表明，大气阻力和洛伦兹力的平均控制作用随高度平滑变化。图8(b)显示，代价函数的增幅低于



（a）位置　　（b）速度

图9：最短时间方法下的位置和速度误差（阻力 + 洛伦兹力）。

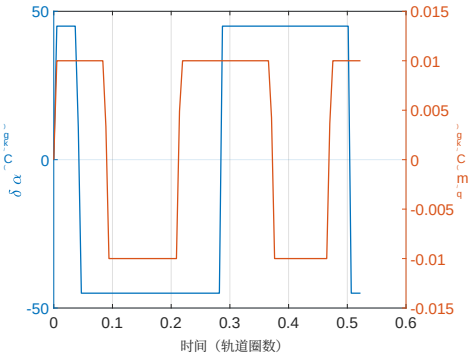


图10：最短时间方法的控制作用（阻力 +洛伦兹力）。

仅有阻力时的增幅，从$J \approx 450$（高度为$h_{ellp} = 300$ 千米）增至$J \approx 9000$（高度为$h_{ellp} = 650$千米）。

2. 最短时间

图9(a)展示了采用最短时间方法时的位置轨迹随时间的变化，图9(b)则显示了速度分量的数值。从这些图中可以得出，满足边界条件所需的最短时间约为0.52个轨道周期，即约3100秒。控制输入轨迹（$\delta\alpha$（t）和q（t）/m）呈现出开关特性，如图10所示。

研究表明，综合控制作用——大气阻力和洛伦兹力——在实际参数下能够于较短时间内（小于 0.52 个轨道周期）完成交会任务。与仅使用差分大气阻力完成相同任务所需的时间相比，所需时间缩短至不足其 2%。因此可以得出结论，在低地球轨道的交会任务中，采用差分阻力和洛伦兹力的混合控制作用具有较高的可靠性。

5. 结论

本文证实了空间环境力控制无推进剂交会任务非线性相对运动的能力。研究表明，仅利用差分大气阻力即可获得整个相对运动过程中的能量最优和时间最优轨迹。对地球表面以上高度影响的详细分析表明，控制作用和代价函数会随高度增加而显著增大。由于所需时间间隔相对较长，大气阻力可能仅适用于某些交会机动，尤其是在高高度条件下。即使电荷量微不足道，洛伦兹力也能为差分阻力提供支持，从而提高获得最小能量问题可行解的可能性，并将最短时间问题所需的时间从数天大幅缩短至几分钟。未来的研究将通过加入反馈控制作用来应对所生成的轨迹，从而在存在未建模动力学的情况下改善控制性能。

参考文献

[1] C. L. Leonard, W. M. Hollister, E. V. Bergmann，利用差分阻力进行轨道编队保持，《制导、控制与动力学杂志》12 (1) (1989) 108–113。doi:10.2514/3.20374。[2] H. Cho, L. Dell'Elce, G. Kerschen，利用差分阻力实现无抖振滑模控制的无推进剂交会，载于：第六届国际天体动力学工具与技术会议（ICATT），德国达姆施塔特，2016年，页码：""，论文 –AAS 07-410。[3] L. Mazal, D. P´erez, R. Bevilacqua, F. Curti，不确定性条件下利用差分阻力进行航天器交会，《制导、控制与动力学杂志》39 (8) (2016) 1721–1733。doi:10.2514/1.G001785。[4] M. Shouman, A. M. Atallah，利用气动阻力控制卫星编队飞行的高保真线性化模型，载于：AAS/AIAA天体动力学专家会议，美国加利福尼亚州纳帕，2016年，页码：""，论文 –AAS 16-347。[5] R. Bevilacqua, J. S. Hall, M. Romano，利用差分阻力和低推力发动机实施多航天器交会机动，《天体力学与动力天文学》106 (1) (2010) 69–88。doi:10.1007/ s10569-009-9240-3。[6] T. Reid, A. K.Misra，存在大气阻力时的卫星编队飞行，《航空航天工程、科学与应用杂志》3 (1) (2011) 64–91。doi:10.7446/jaesa.0301.05。[7] B. S. Kumar, A. Ng, K. Yoshihara, A. D. Ruiter，差分阻力作为航天器编队控制手段，载于：2007年IEEE航空航天会议论文集，美国蒙大拿州比格斯凯，2007年，页码：""，论文 –AAS 07-410。doi: 10.1109/AERO.2007.352790。[8] S. Varma, K. D. Kumar，利用差分阻力实现多卫星编队飞行，《航天器与火箭杂志》49 (2) (2012) 325–336。doi:10.2514/1.52395。[9] M. Shouman, M. Bando, S. Hokamoto，利用差分阻力实现卫星编队飞行的输出调节控制，《制导、控制与动力学杂志》42 (10) (2019) 2220–2232。doi:10.2514/1.G004219。[10] M. Shouman, M. Bando, S. Hokamoto，无推进剂卫星编队飞行的可控性分析，《制导、控制与动力学杂志》44 (12) (2021) 2214–2224。doi:10.2514/1.G006035。[11] D. Ivanov, M. Kushniruk, M. Ovchinnikov，利用差分升力和阻力研究卫星编队飞行控制，《宇航学报》152 (2018) 88–100。doi:https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018. 07.047。[12] M. Peck，洛伦兹力增强轨道的前景与挑战，载于：AIAA制导、导航与控制会议及展览会，制导、导航与控制及同期会议，2005年，页码15—18。[13] L. A. Sobiesiak, C. J. Damaren，洛伦兹力增强航天器编队的可控性，《制导、控制与动力学杂志》38 (11) (2015) 2188–2195。doi:10.2514/1.G001148。[14] X. Huang, Y. Yan, Y. Zhou，椭圆轨道上的洛伦兹力增强航天器最优编队飞行，《宇航学报》111 (2015) 37–47。doi:10.1016/j.actaastro.2015.02.012。[15] B. Vatankhahghadim, C. J. Damaren，利用洛伦兹力和脉冲推力实现最优编队飞行的笛卡尔相对运动方法，《宇航学报》140 (2017) 256–263。doi:10.1016/j.actaastro.2017. 08.023。[16] G. E. Pollock, J. W. Gangestad, J. M. Longuski，受洛伦兹力摄动航天器相对运动的解析解，《宇航学报》68 (2011) 204–217。doi:10.1016/j.actaastro.2010. 07.007。

[17] S. Tsujii, M. Bando, H. Yamakawa，利用地磁洛伦兹力实现航天器编队飞行动力学与控制，《制导、控制与动力学杂志》36 (1) (2013) 136–148。doi:10.2514/1.57060。[18] D. Brouwer，无阻力人造卫星理论问题的解，《天文学杂志》64 (1959) 378。doi:10.1086/107958。[19] L. A. Sobiesiak, C. J. Damaren，洛伦兹力增强航天器编队的最优连续/脉冲控制，《制导、控制与动力学杂志》38 (1) (2015) 151–156。doi:10.2514/1.G000334。[20] M. Shouman，输入约束下无推进剂编队飞行的有限时间可达性，载于：第71届国际宇航大会（IAC 2020网络空间版），阿联酋迪拜，2020年，页码：""，论文 –IAC-20.C1.3.9。[21] G. W. Hill，月球理论研究，《美国数学杂志》1 (1) (1878) 5–26。[22] W. H. Clohessy, R. S. Wiltshire，卫星交会末制导系统，《航空航天科学杂志》27 (9) (1960) 653–658。doi:10.2514/8.8704。[23] S. S. Keerthi, E. G. Gilbert，一般类别受约束离散时间系统的最优无限时域反馈律：稳定性与移动时域近似，《优化理论与应用杂志》(1988) 265–293。[24] D. A.Vallado，《天体动力学与应用基础》，载于：""，第4版，Microcosm Press, Inc，美国加利福尼亚州霍桑，2013年，第6章，第388–411页。[25] X. Huang, Y. Yan, Y. Zhou, H. Zhang，利用地磁洛伦兹力实现最优无推进剂交会的伪谱方法，《应用数学和力学》36 (5) (2015) 609–618。[26] G. E. Pollock, J. W. Gangestad, J. M. Longuski，利用地磁洛伦兹力改变近地轨道倾角，《制导、控制与动力学杂志》33 (5) (2010) 1387–1395。doi:10.2514/1.48610。[27] J. A. Andersson, J. Gillis, G. Horn, J. B. Rawlings, M. Diehl，Casadi：用于非线性优化和最优控制的软件框架，《数学规划计算》11 (1) (2019) 1–36。[28] A. W¨achter, L. T. Biegler，关于大规模非线性规划内点滤波线搜索算法的实现，《数学规划》106 (1) (2006) 25–57。[29] D. A.Vallado, D. Finkleman，卫星阻力和大气密度建模的批判性评估，《宇航学报》95 (2014) 141–165。doi:10.2514/6.2008-6442。[30] D. Perez, R. Bevilacqua，利用密度预报进行航天器相对机动的基于差分阻力的参考轨迹，《航天器与火箭杂志》53 (1) (2016) 234–239。doi:10.2514/1.A33332。