arXiv:2303.16419v1 [math.CT] 29 Mar 2023

带对合的弱球状 ω-范畴

Paratat Bejrakarbum[a]，Paolo Bertozzini[b]法政大学理学与技术学院数学与统计学系，泰国巴吞他尼12121 电子邮件：
[a]paratat.bejr@dome.tu.ac.th [b] paolo.th@gmail.com

2023年3月26日开始：2020年10月01日

谨以此文纪念 Francis William Lawvere

摘要

我们通过 T. Leinster 的方法研究带对合的弱球状 ω-范畴这一概念：将其视为由球状集合上的自由带对合严格 ω-范畴函子所诱导的笛卡尔单子，在球状集合双范畴中定义的初始收缩球状算子的代数。我们还考察了一个表面上限制更严格的带对合弱球状 ω-范畴概念，将其视为由前述笛卡尔单子在球状收缩集族双范畴中定义的初始算子收缩的代数（此处运算子乘法和单位还须满足与收缩相关的额外相容性公理）。

关键词：高阶范畴、对合范畴、幺半群算子、单子。
MCS-2020：18N65，18N70，18M40，18N30，18N99。

目录

1 引言与动机 **2**

2 预备知识 **3**
2.1 严格球状 ω-范畴.4 2.2 双范畴中的单子与笛卡尔单子.6 2.2.1 双范畴.6 2.2.2 双范畴中的单子.7 2.3 Leinster 弱球状 ω-范畴.10 2.3.1 广义多范畴与广义运算子.10 2.3.2 收缩与球状集合.13 2.3.3 弱 ω-范畴.15 2.3.4 例子.16

3 具对合的 Leinster 弱球状 ω-范畴 **17**
3.1 对合严格球状 ω-范畴.17 3.2 对合弱球状 ω-范畴.21 3.3 例子.33

4 展望 **34**

1 引言与动机

范畴论自 [Eilenberg Mac Lane 1945], 创立以来，始终与代数拓扑密切联系、共同发展。随着高阶范畴论的发展，这两个领域之间的联系变得更加紧密（关于入门讨论，可参见现有的多种资料中的 [Cheng Lauda2004], [Leinster 2004，第 19-30] 页；关于最初的动机，也可参见来自物理学的 [Baez 1997,Baez Dolan 1995] ；更多详情请见维基网站 http://ncatlab.org/nlab）。

在非交换拓扑中检验高阶范畴论架构的尝试仍处于初始阶段（例如参见 [Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul Suthichitranont 2020] ，其中仅考察了严格 n-范畴的一些“非交换”变体）。

众所周知，非交换拓扑由 C*-代数的核心作用所主导，C*-代数构成了推广著名 Gel’fand-Naĭmark 对偶性的领域；该对偶性建立在交换含幺 C*-代数与紧 Haus- dorff 拓扑之间。作为构建能够支持非交换同伦/配边并定义弱（高阶）C*-范畴的范畴环境的首个最低限度尝试，人们希望将（高阶）对合的存在性公理化，即在弱环境中对带对合范畴的若干已知概念进行垂直范畴化（进一步参考文献见 [Yau 2020] 以及 [Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul Suthichitranont 2020年，第 4] 节）。

在我们此前的合作论文 [Bejrakarbum Bertozzini 2017] 中，我们仿照 J.Penon 对弱-ω-范畴的代数定义，给出了弱对合 ω-范畴的定义，将其视为自由对合 ω-范畴单子的代数 [Penon 1999]。我们的理念是，不应仅将对合作为（高阶）范畴结构的对称性来看待，而应将其视为一元运算，与普通范畴中的二元复合和零元恒等处于同等地位。

> 本工作的目的是仿照 *[*Leinster *2004]*，通过拟运算子定义，为对合弱球状 ω-范畴给出代数定义。

目前（为求简便），我们仅限于采用（弱）高阶范畴通常的公理化框架；不过，我们计划进一步沿着非交换交换律的方向拓展工作 [Bertozzini Conti LewkeeratiyutkulSuthichitranont 2020年，第 3 节。3] ，以期将其应用于算子代数结构。

在 T. Leinster 的原始处理方式中，拟算子结构与收缩结构被引入给定的球状 T-集合后，二者本质上彼此独立；另一方面，球状 T-集合范畴中的终对象似乎自然就是收缩的 T-幺半群算子，并且还满足拟算子乘法/单位与收缩之间的相容性公理。

> 我们提出一种限制更严格的弱（对合）球状 ω-范畴概念，将其定义为一个初始“拟算子-收缩”的代数；该初始对象在乘法和单位与收缩满足额外相容条件的收缩拟算子中具有普遍性。

作为对可能不熟悉弱 ω-范畴拟算子定义复杂性的读者的一点入门说明，我们在下面简要概述这一构造：

► 首先引入严格（对合） ω-范畴，并构造由自由（对合） ω-范畴函子诱导的笛卡尔单子 $\hat{T}$（在对合情形下分别为 $\hat{T}^{\star}$），► 将单子 $\hat{T}$（分别为 $\hat{T}^{\star}$）作用于终端球状 ω-集合 $\bullet$，即可确定将通过幺半群算子公理化的一般运算的输入类型“元数”，► 对于笛卡尔单子 $\hat{T}$（分别为 $\hat{T}^{\star}$），可关联一个双范畴 $\mathscr{E}^{\hat{}}_{T}$（分别为 $\mathscr{E}^{\hat{}}_{T^{\star}}$），其 1-胞腔 $\mathrm{E}_t \xleftarrow{M} \mathrm{M}_s \xrightarrow{M} \hat{T}(\mathrm{E})$（分别为 $\mathrm{E}_t \xleftarrow{M} \mathrm{M}_s \xrightarrow{M} \hat{T}^{\star}(\mathrm{E})$）表示一组“标记多输入单目标运算”的系统，其源由 $\hat{T}(\mathrm{E})$（分别由 $\hat{T}^{\star}(\mathrm{E})$）参数化，目标则位于 E 中，

▸广义 ˆT-多范畴（分别为 ˆT⋆-多范畴）定义为前述双范畴中的单子，而广义 ˆT-幺半群算子正是其标记由 ˆT (•)（分别由 ˆT⋆(•)）提供的广义 ˆT-多范畴，▸ 弱球状 ω-范畴定义中涉及的所有运算的求值及其相容结构的实际无偏描述，都由 ˆT-幺半群算子（分别为 ˆT⋆-幺半群算子）上的一个收缩唯一确定，▸ 单子 L（分别为 L⋆）是初始/泛收缩 ˆT-幺半群算子（分别为收缩 ˆT⋆-幺半群算子），它旨在规定弱（对合）球状 ω-范畴中具有特定 ˆT (•)（分别为 ˆT⋆(•)）输入的运算的标记，并描述它们的形式复合与恒等元，▸初始收缩 ˆT-幺半群算子 L（分别为初始收缩 ˆT ⋆-幺半群算子 L⋆ ）的代数，正是实际的弱（对合） ω- 范畴，▸ 任意收缩 ˆT- 幺半群算子（分别为收缩 ˆT ⋆- 幺半群算子）P 都会给出一个从 P 上的代数到 L（分别到 L⋆）上的代数的严格函子；按定义，后者就是弱（对合）ω-范畴：举例说明一个弱（对合） ω-范畴，等价于提供一个收缩 ˆT-幺半群算子（分别为收缩 ˆT⋆-幺半群算子）P 的代数。

请注意，在我们的对合情形中：对合用于指定输入类型单子 ˆT⋆，而不用于复合形式标记运算，因此（除标记输入 ˆT⋆(•) 外）它不会修改构成初始幺半群算子 L⋆ 定义基础的单子的定义：构成 L⋆ 的运算集合通常没有对合（幺半群算子只负责运算的嵌套）；相反，对合及其求值隐藏在收缩的选择中，该收缩通过 ˆT⋆(•) 显式依赖于基础标记，而不是 ˆT(•)。

本文内容包括第 1 节这一简短的动机性引言，随后是第 2 节预备知识；在预备知识部分，我们回顾了（采用与我们先前工作兼容的记号）关于严格 ω-范畴、双范畴中的单子，以及 T. Leinster 将弱 ω-范畴构造为某个广义算子的代数的已有材料。

本文第 3 节首先回顾我们此前提出的对合严格 ω-范畴定义，随后介绍关于对合弱 ω-范畴的新的幺半群算子定义：它们是双范畴中由广义初始 ˆT⋆-幺半群算子所对应的 ˆT ⋆-集合族上的代数，其中 ˆT ⋆是自由对合严格 ω-范畴构造的单子，该构造见 [Bejrakarbum Bertozzini 2017，命题 3.1 和 3.2]。

我们的主要存在性定理 3.12 通过一个直接过程得到；该过程在定理 3.16 中有详细说明：通过递归显式构造一个自由收缩 ˆT⋆-拟运算子岩浆，并对其取商，从而得到一个基于 ˆT ⋆-集合族的自由收缩 ˆT⋆-歌剧集。

在注 2.22 中引入了更具限制性的拟运算子-收缩概念，以取代 [Leinster 2004，定义 9.2.1] 中所考虑的更一般的收缩运算子；我们还在那里提到，可以利用它们来定义 Leinster 关于弱球状 ω-范畴的代数概念的一个更严格变体。注 3.10 和 3.19 描述了对合情形下对这一问题的平行处理；终端拟运算子-收缩 ˆT⋆(•) 则在注 3.11 中进行了详细考察。

我们以 第 4 节的工作收尾，并展望弱高阶
C*-范畴 以及高阶范畴非交换几何方向上可能的进一步研究。

2 预备知识

本节旨在介绍构造弱 ω-范畴的代数运算子概念所需的全部背景知识；其中大部分内容直接受 [Leinster 2004] 启发。

开始之前，先作一项基础性免责声明：尽管本文不会出现集合论矛盾，但从形式上讲（尤其是在第 2.3.1 节），我们将使用非小范畴双范畴中的单子 [1]

2.1 严格球状 ω-范畴

我们回顾 [Bejrakarbum Bertozzini 2017] 中所使用的严格球状 ω-范畴的形式体系与定义。

定义 2.1。一个 ω-箭图 $\mathrm{Q}^0 \underset{\mathrm{t}^0}{\overset{\mathrm{s}^0}{\leftleftarrows}} \mathrm{Q}^1 \underset{\mathrm{t}^1}{\overset{\mathrm{s}^1}{\leftleftarrows}} \cdots \underset{\mathrm{t}^{n-1}}{\overset{\mathrm{s}^{n-1}}{\leftleftarrows}} \mathrm{Q}^n \underset{\mathrm{t}^n}{\overset{\mathrm{s}^n}{\leftleftarrows}} \cdots$ 由一个集合序列 $(\mathrm{Q}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 构成，并配备一列源映射 $(\mathrm{s}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和目标映射 $(\mathrm{t}^k)_{k\in\mathbb{N}}$。

球状 ω-集合是满足以下球面性条件的 ω-箭图：

$$s^k \circ s^{k+1} = s^k \circ t^{k+1}, \quad t^k \circ s^{k+1} = t^k \circ t^{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

对于任意 $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$，元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{Q}^k$ 被称为该球状 ω-集合的球面 k-胞腔。

如果一个球状 ω-集合配备了一个映射序列 $(\iota^k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\mathrm{Q}^0 \xrightarrow{\iota^0} \mathrm{Q}^1 \xrightarrow{\iota^1} \cdots \xrightarrow{\iota^{n-1}} \mathrm{Q}^n \xrightarrow{\iota^n} \cdots$，并且对于每个 $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$ 都有 $\mathrm{s}^k \circ \iota^k = \mathrm{Id}_{Q^k} = \mathrm{t}^k \circ \iota^k$，则称其为自反的。

一个（自反）球状 ω-岩浆是一个配备了一族复合运算的（自反）球状 ω-集合 ***ns***

$$\circ_p^m : Q^m \times_{Q^p} Q^m \to Q^m, \quad (x', x) \mapsto x' \circ_p^m x, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \le p < m, \quad \textit{defined on the sets}$$
$$Q^m \times_{Q^p} Q^m := \left\{(x', x) \in Q^m \times Q^m \mid t^p \circ t^{p+1} \circ \cdots \circ t^{m-1}(x) = s^p \circ s^{p+1} \circ \cdots \circ s^{m-1}(x')\right\},$$

使得以下条件成立：若 $\mathrm{m} \in \mathrm{N}_0, 0 \le \mathrm{p} < \mathrm{m}$ 且 $(\mathrm{x}', \mathrm{x}) \in \mathrm{Q}^m \times_{Q^p} \mathrm{Q}^m$,

- $$(s^q \circ s^{q+1} \circ \cdots \circ s^{m-1})(x' \circ_p^m x) = \begin{cases} (s^q \circ s^{q+1} \circ \cdots \circ s^{m-1})(x') \circ_p^q (s^q \circ s^{q+1} \circ \cdots \circ s^{m-1})(x), & q > p; \\ (s^q \circ s^{q+1} \circ \cdots \circ s^{m-1})(x'), & q \le p. \end{cases}$$
- $$(t^q \circ t^{q+1} \circ \cdots \circ t^{m-1})(x' \circ_p^m x) = \begin{cases} (t^q \circ t^{q+1} \circ \cdots \circ t^{m-1})(x') \circ_p^q (t^q \circ t^{q+1} \circ \cdots \circ t^{m-1})(x), & q > p; \\ (t^q \circ t^{q+1} \circ \cdots \circ t^{m-1})(x), & q \le p. \end{cases}$$

一个严格球状 ω-范畴 $(\mathcal{C}, \mathrm{s}, \mathrm{t}, \iota, \circ)$ 是一个自反球状 ω-岩浆

$$\mathcal{C}^0 \underset{t^0}{\overset{s^0}{\leftleftarrows}} \mathcal{C}^1 \underset{t^1}{\overset{s^1}{\leftleftarrows}} \mathcal{C}^1 \cdots\cdots \mathcal{C}^n \underset{t^n}{\overset{s^n}{\leftleftarrows}} \mathcal{C}^{n+1} \cdots\cdots, \qquad \mathcal{C}^n \times_{\mathcal{C}^p} \mathcal{C}^n \xrightarrow{\circ_p^n} \mathcal{C}^n,$$

它满足以下代数公理：

- （结合性）对于所有满足 $0 \le \mathrm{p} < \mathrm{m}$ 的 $\mathrm{p}, \mathrm{m} \in \mathrm{N}$，以及所有满足 $(\mathrm{z}, \mathrm{y}), (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in \mathcal{C}^m \times_{\mathcal{C}^p} \mathcal{C}^m$ 的 $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathcal{C}^m$：

  $$(z \circ_p^m y) \circ_p^m x = z \circ_p^m (y \circ_p^m x),$$

- （单位性）对于所有满足 $0 \le \mathrm{p} < \mathrm{m}$ 的 $\mathrm{p}, \mathrm{m} \in \mathrm{N}$，以及所有 $\mathrm{x} \in \mathcal{C}^m$：

  $$(\iota^{m-1} \circ \cdots \circ \iota^p \circ t^p \circ \cdots \circ t^{m-1})(x) \circ_p^m x = x = x \circ_p^m (\iota^{m-1} \circ \cdots \circ \iota^p \circ s^p \circ \cdots \circ s^{m-1})(x),$$

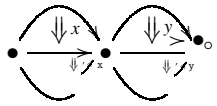
- （恒等态射的函子性）对于所有 $\mathrm{q}、\mathrm{p} \in \mathrm{N}$，满足 $0 \le \mathrm{q} < \mathrm{p}$，以及所有 $(\mathrm{x}', \mathrm{x}) \in \mathcal{C}^p \times_{\mathcal{C}^q} \mathcal{C}^p$：

  $$\iota^p(x') \circ_q^{p+1} \iota^p(x) = \iota^p(x' \circ_q^p x),$$

[1] 一个简单的解决方案是考虑一种基于至少“3 种类型”的类的集合论（2-类由称为 1-类的元素组成，而 1-类的元素又称为 0-类，并被认定为集合），并以适当的方式表述“类形成”公理，使得对于 $\mathrm{k} \in \{2, 1, 0\}$，k 级的“真类”不能成为严格低于 k 级的类的元素。

► （二元交换）对于所有 q、p、m ∈ N，满足 0 ≤ q < p < m，以及所有 x、x′、y、y′ ∈ $\mathcal{C}^m$，其中 (y′, y)、(x′, x) ∈ $\mathcal{C}^m \times_{\mathcal{C}^p} \mathcal{C}^m$ 以及 (y′, x′)、(y, x) ∈ $\mathcal{C}^m \times_{\mathcal{C}^q} \mathcal{C}^m$：

$$(y' \circ_p^m y) \circ_q^m (x' \circ_p^m x) = (y' \circ_q^m x') \circ_p^m (y \circ_q^m x),$$



从 ω-箭图 Q 到 $\xrightarrow{\phi}$ ̂Q（分别地，从球状 ω-集合到相应集合）的态射是一列映射 $(\phi^k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $Q^k \xrightarrow{\phi^k}$ ̂Q^k，并且对任意 q ∈ N，满足以下两种性质之一：

$$\textit{q-covariance}: \qquad \hat{s}^q \circ \phi^{q+1} = \phi^q \circ s^q, \qquad \hat{t}^q \circ \phi^{q+1} = \phi^q \circ t^q, \tag{2.1}$$

$$\textit{q-contravariance}: \qquad \hat{t}^q \circ \phi^{q+1} = \phi^q \circ s^q, \qquad \hat{s}^q \circ \phi^{q+1} = \phi^q \circ t^q. \tag{2.2}$$

满足 (2.1)（分别地，(2.2)）的指标 q ∈ N 称为 φ-协变（分别地，φ-逆变）指标。

A ***m*** 自反 ω-箭图的态射（分别地，自反球状 ω-集合的态射）还必须满足：

$$\forall k \in \mathbb{N} : \hat{\iota}^k \circ \phi^k = \phi^{k+1} \circ \iota^k.$$

（自反）球状 ω-岩浆的一个态射，是（自反）球状 ω-集合的一个态射，并且对于所有满足 0 ≤ q < k 的 k,q ∈ N，进一步满足：

$$\textit{whenever q is } \phi\textit{-covariance index:} \qquad \phi^k(x \circ_q^k x') = \phi^k(x) \,\hat{\circ}_q^k\, \phi^k(x'), \quad \forall (x, x') \in Q^k \times_{Q^q} Q^k,$$

$$\textit{whenever q is } \phi\textit{-contravariance index:} \qquad \phi^k(x \circ_q^k x') = \phi^k(x') \,\hat{\circ}_q^k\, \phi^k(x), \quad \forall (x, x') \in Q^k \times_{Q^q} Q^k.$$

一个 ω-函 数，介于两个严格球状 ω-范畴之间，是它们的自反球状 ω-岩浆的一个态射 .

注记 2.2. 前述“态射”的每一个概念都给出一个严格 1-范畴；其中，对于给定的“可复合态射对” Q $\xrightarrow{\psi}$ ̂Q $\xrightarrow{\phi}$ ̃Q，它们的复合 Q $\xrightarrow{\phi\circ\psi}$ ̃Q 逐分量定义为：$(\phi^k)_{k\in\mathbb{N}} \circ (\psi^k)_{k\in\mathbb{N}} := (\phi^k \circ \psi^k)_{k\in\mathbb{N}}$；并且对于任意对象 Q := $(Q^k)_{k\in\mathbb{N}}$，其“恒等态射”定义为 $\iota(Q) := (\mathrm{Id}_{Q^k})_{k\in\mathbb{N}}$。 ⌟

以下结果是众所周知的，例如可参见 [Penon 1999] 或 [Leinster 2004年，附录 F].

命题 2.3。设 $\mathscr{Q}$ 表示球状 ω-集合之间协变态射所构成的严格 1-范畴，并设 $\mathscr{C}$ 表示严格球状 ω-范畴之间协变 ω-函子所构成的严格 1-范畴。

对于 $\mathscr{Q}$ 中任意球状 ω-集合 Q，Q 上的自由严格球状 ω-范畴是一个球状 ω-集合的态射 Q $\xrightarrow{\eta_Q}$ U(℃)，其映入严格球状 ω-范畴 ℃ 的底层球状 ω-集合 U(℃)，并满足如下泛因子分解性质：对于任意球状 ω-集合的态射 Q $\xrightarrow{\phi}$ U(̂℃)，其映入严格球状 ω-范畴 ̂℃ 的底层球状 ω-集合 U(̂℃)，存在唯一的 ω-函子 ℃ $\xrightarrow{\hat{\phi}}$ ̂℃，使得 $\phi = \hat{\phi} \circ \eta_Q$。

遗忘函子 $\mathscr{C} \xrightarrow{\mathfrak{U}} \mathscr{Q}$（忘去 $\mathscr{C}$ 中对象的复合与恒等元）有一个左伴随 F ⊣ U，即自由严格球状 ω-范畴函子 $\mathscr{C} \xleftarrow{\mathfrak{F}} \mathscr{Q}$，它由上述球状 ω-集合 Q 的自由严格球状 ω-范畴 Q $\xrightarrow{\eta}$ U(℃) 的特定构造唯一确定。

2.2 双范畴中的单子与笛卡尔单子

代数 Leinster 1 若干现有方法中弱 ω-范畴的定义 [Penon 1999、Batanin 1998, 998，Batanin 2022] 使用某些（广义）单子上的代数/模。

本小节回顾双范畴的基本预备知识，将单子（以及其上的代数）分别引入为双范畴中的内部幺半群（以及这类幺半群上的模）。为求完备起见，我们也回顾范畴伴随，以及它们与范畴的双范畴中的单子之间的一些众所周知的关系，遵循 [Riehl 2016]。最后介绍 Leinster 对笛卡尔单子的定义。

2.2.1 双范畴

双范畴 [B´enabou 1967], [Borceux 1994年，第 I.7 节。7], [Leinster 1998], [Leinster 2004，第 I.1 节。5], 是著名的弱幺半范畴概念的一种水平范畴化（其中，幺半范畴就是只有一个对象的严格2-范畴）。这种结构还有其他可能等价的定义；这里我们给出一个适用于定义 2.1 中球状 ω-图的记法的版本。

定义 2.4。双范畴 $(\mathscr{B}, \circ, \iota, \alpha, \lambda, \rho)$ 是一个自反球状2-岩浆 $\mathscr{B}^0 \leftleftarrows \mathscr{B}^1 \leftleftarrows \mathscr{B}^2$，满足：

- 1 -岩浆 $\mathscr{B}^1 \leftleftarrows \mathscr{B}^2$ 是一个严格 1-范畴，具有垂直复合 $\circ_1^2$ 和垂直恒等 ι^1； [2]
- $(\circ_0^2, \circ_0^1) : \mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2 \to \mathscr{B}^2$ 是一个协变1-函子； [3]

并且还配备了：

- *an* ***associator natural isomorphism*** $\left((-\circ_0^2-)\circ_0^2-\right) \overset{\alpha}{\Rightarrow} \left(-\circ_0^2(-\circ_0^2-)\right)$ *between the functors*

$$(\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2) \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2 \xrightarrow{(-\circ_0^2-)\circ_0^2-} \mathscr{B}^2, \quad \mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} (\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2) \xrightarrow{-\circ_0^2(-\circ_0^2-)} \mathscr{B}^2,$$

  定义在自然同构的1-范畴 $(\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2) \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2 \xrightarrow{\alpha} \mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} (\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2)$ 上；
- 一个右单位自然同构 $\left(-\circ_0^2-\right) \overset{\rho}{\Rightarrow} \mathrm{I}_{\mathscr{B}^2}$，位于两个1-函子之间 [4]

$$\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \iota(\mathscr{B}^1) \xrightarrow{-\circ_0^2-} \mathscr{B}^2, \qquad \mathscr{B}^2 \xrightarrow{\Im_{\mathscr{B}^2}} \mathscr{B}^2,$$

  定义在自然同构的1-范畴 $\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \iota(\mathscr{B}^1) \xrightarrow{\rho} \mathscr{B}^2$ 上； [5]
- 一个左单位自然同构 $\left(-\circ_0^2-\right) \overset{\lambda}{\Rightarrow} \mathrm{I}_{\mathscr{B}^2}$，位于两个1-函子之间

$$\iota(\mathscr{B}^1) \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2 \xrightarrow{-\circ_0^2-} \mathscr{B}^2, \qquad \mathscr{B}^2 \xrightarrow{\Im_{\mathscr{B}^2}} \mathscr{B}^2,$$

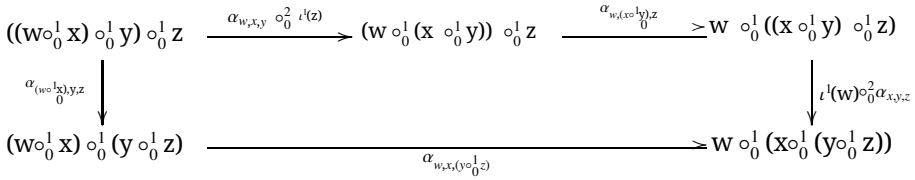
  在自然同构的1-范畴 $\iota(\mathscr{B}^1) \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2 \xrightarrow{\lambda} \mathscr{B}^2$ 之上；

使得任何涉及对结合子同构 α、左/右单位同构 λ, ρ 及其逆进行（迭代）应用 $\circ_0^2$ 复合函子所构成的图表都交换。

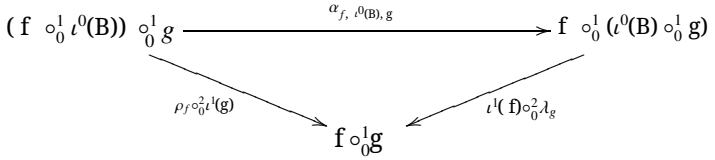
[2] 此条件意味着 $\mathscr{B}^2$ 和 $\mathscr{B}^2 \times_{\mathscr{B}^0} \mathscr{B}^2$ 都是离散范畴乘积 $\mathscr{B}^0 \times \mathscr{B}^0$ 之上的1-范畴丛（其投影为1-函子），并且 $(\iota^1 \circ \iota^0)$: $\mathscr{B}^0 \to \mathscr{B}^2$ 也是一个函子，其中 $\mathscr{B}^0$ 被视为离散范畴。[3] 此条件等价于交换律和恒等元的函子性的严格公理。[4] 这里，$\mathrm{I}_{\mathscr{B}}$ 表示范畴 $\mathscr{B}$ 的恒等函子。[5] 这里，$\iota(\mathscr{B}^1)$ 是 $\mathscr{B}^0 \times \mathscr{B}^0$ 之上的离散范畴丛（仅由 $\mathscr{B}^2$ 中的恒等态射组成）；它是以纤维上的1-函子为态射的、$\mathscr{B}^0 \times \mathscr{B}^0$ 之上的1-范畴丛范畴中的一个指定终对象。

注 2.5. 弱幺半群和双范畴的相干定理保证，只要下列五边形图和三角形图在 $\circ_1^2$-复合下可交换，前一定义中的交换图条件就成立：

结合子相干性：对于所有 $\mathscr{B}^1$ 中的 $A \xrightarrow{z} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{x} D \xrightarrow{w} E$



单位子相干性：forall $A \; g \to B \xrightarrow{f} C$ 在 $\mathscr{B}^1$



我们参见n-Lab 中相应的词条 [coherence in n-Lab]，以获取关于该结果证明的参考文献和细节。」

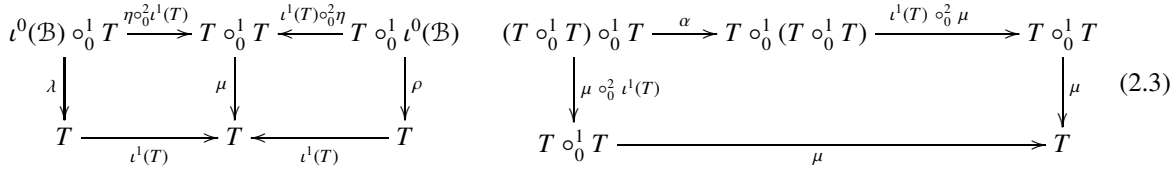
2.2.2 双范畴中的单子

单子（在严格2-范畴中）的概念起源于 [Godement 1958], 中的一个具体伴随情形，当时称为“标准构造”；它是一种强有力的工具，可用于推广代数结构。严格2-范畴中对象上的形式单子以及双范畴中的形式单子的抽象概念在 [Street 1972] 中被引入，随后又在例如 [Chikhladze 2015]中得到了讨论。

定义 2.6. 设 $(\mathscr{B}, \circ, \iota, \alpha, \lambda, \rho)$ 是一个双范畴，且 $\mathcal{B} \in \mathscr{B}^0$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个对象。
关于 $\mathcal{B}$ 的单子 (T, μ, η) 由一个 1-胞腔 $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{B}$ 以及一对 2-胞腔 $\mu, \eta \in \mathscr{B}^2$ 组成：

► 单子乘法 $T \circ_0^1 T \; \mu \Longrightarrow T$, ► 单子单位 $\iota^0(\mathcal{B}) \overset{\eta}{\Longrightarrow} T$,

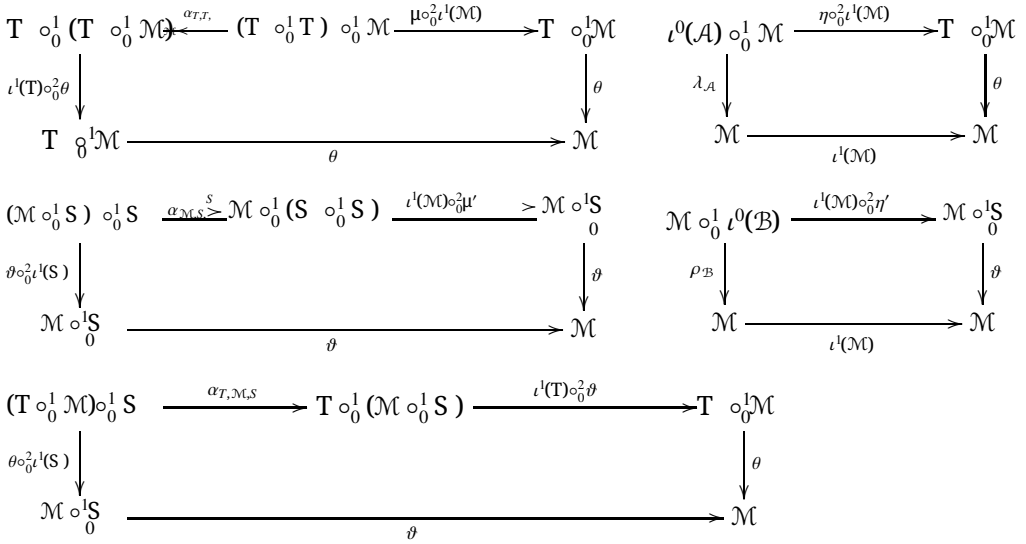
*suc*使得由 2-胞腔的 $\circ_1^2$-复合构成的以下单位性与结合性图表均交换 ：



(2.3)

给定两个对象 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \mathscr{B}^0$ 和两个单子：$\mathcal{A}$ 上的 (T, μ, η) 以及 $\mathcal{B}$ 上的 (S, μ', η')，T-S 双模是 $\mathscr{B}^1$ 中的一个 1- 胞腔 $\mathcal{A} \xleftarrow{\mathcal{M}} \mathcal{B}$，并带有一对左 / 右作用 2- 胞腔 $T \circ_0^1 \mathcal{M} \overset{\theta}{\Rightarrow} \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M} \circ_0^1 S \overset{\vartheta}{\Rightarrow} \mathcal{M}$

使得下列涉及 2-胞腔垂直复合的图表全部交换：



我们需要连续两次应用单子：第一种情况下，它是严格双范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个单子 $\hat{}\mathrm{T}$，作用于 $\mathscr{D}$（分别是 $\hat{}\mathrm{T}^{\star}$，作用于 $\mathscr{D}^{\star}$）；该双范畴由自然变换构成，这些自然变换连接从（不一定是小的）严格 1-范畴出发的协变函子；第二种情况下，它将是稍后在命题 2.12 中定义的双范畴 $\mathscr{E}\hat{}_{T}$（分别是 $\mathscr{E}_{\hat{T}^{\star}}$）中终对象上的一个单子。

注记 2.7. 将先前关于对象 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}^0$ 上的单子的定义应用于由从（小）严格 1-范畴出发的协变函子之间的自然变换构成的 2-范畴 $\mathscr{C}$ 时，便得到传统的单子自函子 $\mathrm{T} \in [\mathcal{C};\ \mathcal{C}]$ 及其乘法和单位自然变换。

给定一个小严格 1-范畴 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}^0$，$\mathcal{C}$ 上的单子 (T, μ, η) 是一个自函子 $\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}$，$\mathrm{T} \in \mathscr{C}^1$ 配备了自变换 $\mathrm{T} \circ \mathrm{T} \xRightarrow{\mu} \mathrm{T}$（即单子乘法 $\mu^T \in \mathscr{C}^2$）以及 $\iota^1(\mathcal{C}) \xRightarrow{\eta^T} \mathrm{T}$（即单子单位 $\eta^T \in \mathscr{C}^2$），并且对每个对象 $\mathrm{X} \in \mathcal{C}^0$，满足以下性质：

$$\mu^T_X \circ T^1(\eta^T_X) = \iota^0_{T^0(X)} = \mu^T_X \circ \eta^T_{T^0(X)}, \qquad \mu^T_X \circ T^1(\mu^T_X) = \mu^T_X \circ \mu^T_{T^0(X)}. \tag{2.4}$$

1-范畴 $(\mathcal{C}, \circ, 1)$ 上单子 $(\mathrm{T}, \mu^T, \eta^T)$ 的代数由一个对象 $\mathrm{A} \in \mathcal{C}^0$ 以及一个求值态射 $\mathrm{T}(\mathrm{A}) \xrightarrow{\theta^A} \mathrm{A}$，$\theta^A \in \mathcal{C}^1$ 构成，并满足 $\theta^A \circ \eta^A = \iota^0_A$ 和 $\theta^A \circ \mathrm{T}^1(\theta^A) = \theta^A \circ \mu^A$。

考虑一个从终端 1-范畴 $\bullet \in \mathscr{C}^0$ 出发的函子 $\bullet \xrightarrow{A} \mathcal{C}$，则关于单子 T $\mathcal{C}$ 的左双模、关于 $\bullet$ 的恒等自函子的右双模定义，还原了通常的 T-代数定义。⌟

We 回顾单子与伴随的这些重要性质，例见 [Riehl 2016年，第 5] 章 .

u注记 2.8. 小 1-范畴 $\mathscr{D}$、$\mathscr{C}$ 之间的每个伴随 $\mathscr{C} \rightleftarrows \mathscr{D}$、$\mathrm{F} \dashv \mathrm{U}$，若其单位为 $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}} \xRightarrow{\eta} \mathrm{U} \circ \mathrm{F}_{\mathfrak{F}}$，余单位为 $\mathrm{F} \circ \mathrm{U} \xRightarrow{\epsilon} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$，则会在函子之间自然变换构成的严格2-范畴中，在 1-范畴 $\mathscr{D}$ 上诱导一个单子 $\mathrm{T} := \mathrm{U} \circ \mathrm{F}$，其乘法为 $\mu := \mathrm{U} \circ \varrho \circ \mathrm{F}$，单位为 η（更多细节见例如 [Riehl 2016年，引理 5.1.3]）。

u^{T}每个范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子 (T, μ, η) 都会导出一个伴随 $\mathcal{C}^T \rightleftarrows \mathcal{C}$，其中 F^T 是自由 T-代数 $\xleftarrow{\mathcal{F}^T}$

函子，它是定义在 T-代数范畴 $\mathcal{C}^T$ 上的遗忘函子 U^T 的左伴随。单子 T 与上述伴随 $F^T \dashv U^T$ 所导出的单子相同（例如参见 [Riehl 2016, 引理 5.2.8]）。U^T给定 $\mathcal{C}$ 上的单子 (T, μ, η)，伴随 $\mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$ 是一个终对象（参见 [Riehl 2016，命题 5.2.12]），它位于这样一个范畴中：该范畴的对象是 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 上的伴随 $F \dashv U$、$F \dashv U$，而态射是函子 $\mathcal{D} \xrightarrow{H} \hat{\mathcal{D}}$，满足 $\hat{F} = H \circ F$ 且 $\hat{U} \circ H = U$。

$\dashv U\ \hat{F}$

u单子伴随 $F \dashv U$ 是一个伴随 $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$，其中，在$\mathcal{S}$前述伴随范畴中，$\mathcal{D} \xrightarrow{!} \mathcal{C}^T$这一终态态射是范畴等价（参见 [Riehl 2016，定义 5.3.1]）。单子函子是一个函子 $\mathcal{D} \xrightarrow{u} \mathcal{C}$，它有一个左伴随 $\mathcal{D} \xleftarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}$，且伴随 $F \dashv U$ 是单子性的。」

由前述命题 2.3 中描述的伴随，我们得到如下结论。

推论 2.9。在球状 ω-集合的态射构成的 1-范畴 $\mathcal{Q}$ 上，有如下结论

► 自由严格球状 ω-范畴单子 $\hat{T} := U \circ F$。

定义 Leinster 的广义算子需要满足某些“对拉回封闭”的条件 s.

定义 2.10。 [Leinster 2004，定义 II.4.4.1]若一个范畴 $\mathcal{E}$具有所有拉回，则称其为笛卡尔的：对于{style id='4'>$\hat{}$任意的余跨度 $A \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{\beta} B$（其中对象属于 $\mathcal{E}$），都存在一个跨度 $A \xleftarrow{\hat{\alpha}} \hat{X} \xrightarrow{\hat{\beta}} B$（其中对象属于 $\mathcal{E}$），使得 $\alpha \circ \hat{\alpha} = \beta \circ \hat{\beta}$，并满足以下泛因子分解性质：对于任意其他跨度 $A \xleftarrow{\alpha'} P \xrightarrow{\beta'} B$（其中对象属于 $\mathcal{E}$），若 $\alpha \circ \alpha' = \beta \circ \beta'$，则存在唯一的 $P \xrightarrow{\gamma} \hat{X}$，使得 $\alpha' = \hat{\alpha} \circ \gamma$ 且 $\beta' = \hat{\beta} \circ \gamma$。

1-范畴之间的函子 $\mathcal{E} \xrightarrow{\mathfrak{G}} \hat{\mathcal{E}}$ 若保留拉回，则称为笛卡尔函子。

$\mathfrak{G}$自然变换 $\mathcal{E} \Downarrow \zeta \hat{\mathcal{E}}$ 若对 $\mathcal{E}$ 中任意 1-箭头 $A \times \to B$，$\hat{}\mathfrak{G}$跨度 $G(B) \mathfrak{G}(X) \longleftarrow G(A) \xrightarrow{\zeta_A} \hat{G}(A)$ 在 $\hat{\mathcal{E}}$ 中是余跨度 $G(B) \xrightarrow{\zeta_B} \hat{G}(B) \hat{}\mathfrak{G}(X) \longleftarrow \hat{G}(A)$ 在 $\hat{\mathcal{E}}$ 中的拉回，则称为笛卡尔自然变换。

范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子 (T, μ, η) 若范畴 $\mathcal{C}$、函子 T 以及两个自然变换 μ 和 η 按照先前定义的意义全都是笛卡尔的，则称为笛卡尔单子。

对于命题 2.3 中自由严格球状 ω-范畴的伴随及其在推论 2.9 中对应的单子，根据 Leinster 2004，定理 F.2.2], 可得这些笛卡尔性条件。

命题 2.11。小球状 ω-集合及其态射构成的 1-范畴 $\mathcal{Q}$ 是笛卡尔的。小严格球状 ω-范畴及其 ω-函子构成的 1-范畴 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔的。遗忘 1-函子$\mathcal{C} \xrightarrow{u} \mathcal{Q}$ 和自由严格球状 ω-范畴 1-函子 $\mathcal{C} \xleftarrow{\mathcal{F}} \mathcal{Q}$ 都是笛卡尔的。自由严格球状 ω-范畴函子的单位 $I_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\eta} U \circ F$ 是一个笛卡尔自然变换。自由严格球状ω-范畴单子 $\hat{T} := U \circ F$ 是笛卡尔的。

2.3 Leinster 弱球状 ω-范畴

Leinster 方法中的弱 ω-范畴 [Leinster 2004，第 III.9 节2]是某个单子 L 的代数；此处使用的单子 L 是一个特定的普适（初始）广义收缩 T-运算子，其中 T 是推论 2.9 中的笛卡尔自由严格球状 ω-范畴单子 $\hat{}$T。

这里我们继续回顾上述尚未介绍的所有必要要素。

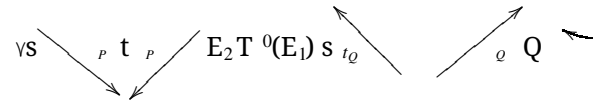
2.3.1 广义多范畴与广义运算子

笛卡尔范畴 $\mathscr{E}$ 上的单子 T 允许我们定义一种广义多范畴的概念，其中多范畴箭头的"元数"由 T(•) 指定，•是 $\mathscr{E}$中的一个对象。这一定义背后的策略源自 [Burroni 1971], [Hermida 1997]，并在 [Leinster 2004 第 II.4]节中得到了进一步阐述；我们在此密切遵循其论述。

命题 2.12。 *[*Leinster 2004，第 II.4 节。*2]*设 T 是笛卡尔范畴 $\mathscr{E}$上的一个笛卡尔单子。给定一个跨度 $E_1 \xrightarrow{i_1} X \xleftarrow{i_2} E_2$，其中对象属于 $\mathscr{E}$，记 $E_1 \xleftarrow{\pi_1} E_1 \diamond_X E_2 \xrightarrow{\pi_2} E_2$ 为一个选定的拉回。[6]

定义如下一个双范畴（$\mathscr{E}_T$、$\circ_T$、ι_T、α_T、λ_T、ρ_T）：

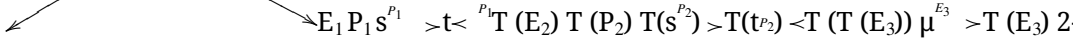
► 0-$\mathscr{E}_T^0$中的胞只是 $\mathscr{E}^0$中的对象 E，► 1-胞 $E_2\,(t_P,P,s_P)\longleftarrow E_1$ 在 $\mathscr{E}^1$T中是 $\mathscr{E}$中的如下形式的跨度：$E_2\ t\xleftarrow{P} P\ s\xrightarrow{P} T^0(E_1)$ P► 2-胞 $E_2E_1\,(t_Q,Q,s_Q)_{(t_P,P,s_P)} \swarrow\!\Downarrow\phi$ 由 $\mathscr{E}$中的如下形式的交换图组成：



► 垂直复合 $\circ_1^2$ 只是 $\mathscr{E}$中 1-箭头的通常复合，
► 垂直恒等态射 $\iota^1_{\mathscr{E}_T}\left(E_2\,t\xleftarrow{P} P\ s\xrightarrow{P} T(E_1)\right)$只是 $\mathscr{E}$中的恒等元 $\iota^0_{\mathscr{E}}(P)$,

► 1-箭头的水平复合 $\left(E_1\,t\xleftarrow{P_1} P_1\ s\xrightarrow{P_1} T\,(E_2)\right)\circ_0^1\left(E_2\,t\xleftarrow{P_2} P_2\ s\xrightarrow{P_2} T\,(E_3)\right)$ 在 $\mathscr{E}_T$ 中定义为：

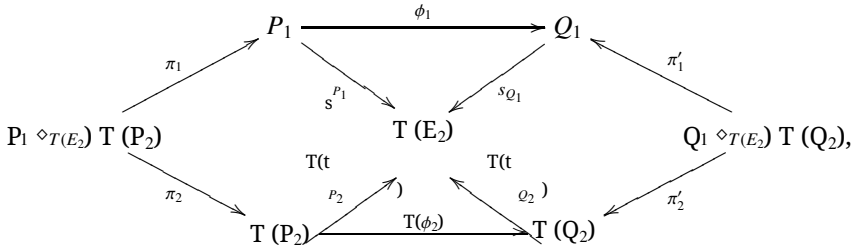
$\left(E_1\,t\xleftarrow{P_1\circ\pi_1} P_1\diamond_{T(E_2)} T\,(P_2)\ \mu^T_{E_3}\circ T(s\xrightarrow{P_2\circ\pi_2})\ T\,(E_3)\right)$，如下面的图所示：$P_1\diamond_{T(E_2)} T\,(P_2)$



2-胞的水平复合 $E_1E_2\,(t_{Q_1},Q_1,s_{Q_1})_{(t_{P_1},P_1,s_{P_1})} \swarrow\!\Downarrow\phi_1 E_3\,(t_{Q_2},Q_2,s_{Q_2})_{(t_{P_2},P_2,s_{P_2})} \swarrow\!\Downarrow\phi_2$ 由以下 2-胞给出：$E_1 \overset{(t_{P_1},}{\leftarrow} E_3\,(t_{Q_1},Q_1,s_{Q_1})\circ_0^1(t_{Q_2},Q_2,s_{Q_2})\ P_1,s_{P_1})\circ_0^1(t_{P_2},P_2,s_{P_2}) \swarrow\!\Downarrow\phi_1\circ_0^2\phi_2$，其中 $\phi_1\circ_0^2\phi_2$ 由 $\mathscr{E}$ 中以下拉回诱导的唯一态射 $P_1\diamond_{T(E_2)} T(P_2) \xrightarrow{\phi_1\circ_0^1\phi_2} Q_1\diamond_{T(E_2)} T(Q_2)$ 定义：[6]A

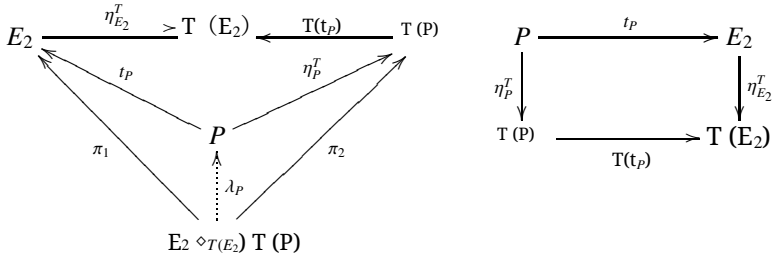
假设 that 一个规格 ific choice of pull-backs has been d 一个v ia axiom of choice, f例如 l我们 ill use $E_1\diamond_X E_2 := E_1\times_X E_2$.

它由拉回 $Q_1 \xleftarrow{\pi_1'} Q_1 \diamond_{T(E_2)} T(Q_2) \xrightarrow{\pi_2'} T(Q_2)$ 关于跨度 $Q_1 \xleftarrow{\phi_1\circ\pi_1} P_1 \diamond_{T(E_2)} T(P_2) \xrightarrow{T(\phi_2)\circ\pi_2} T(Q_2)$ 的泛因子分解性质给出，如以下交换图所示：



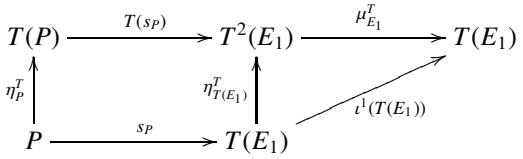
▶水平恒等式 $\iota_T^0(E) := \left(E \xrightarrow{\iota^0(E)} E \xrightarrow{\eta_E^T} T(E)\right.!$，对所有对象 $E \in \mathscr{E}^0 T$ 均成立。

$\iota^1(E_2)\circ_0^1 P$ ▶ E 的左单位约束 $_2E \Downarrow \lambda_P$ $_1$由拉回的泛因子分解性质唯一确定：P



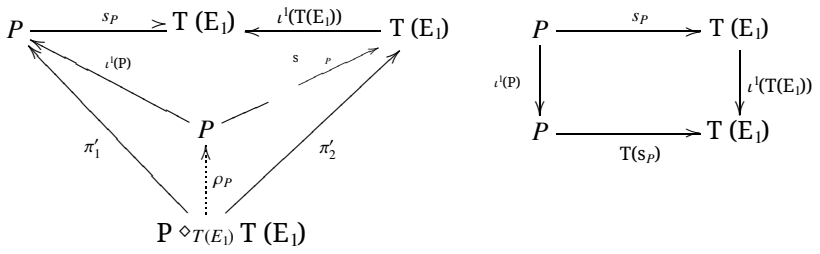
(2.5)

（其中，上面的第二个拉回图由 η^T 的笛卡尔性保证），以及由图表



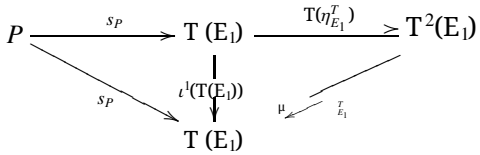
该图表因 η^T 的笛卡尔性以及单子 T 的幺元性质而交换；

$P\circ_0^1 \iota^1(E_1)$ ▶ 右幺元约束 $_2E \Downarrow \rho_P$ $_1$也由拉回的泛因子分解性质确定：P

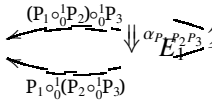


(2.6)

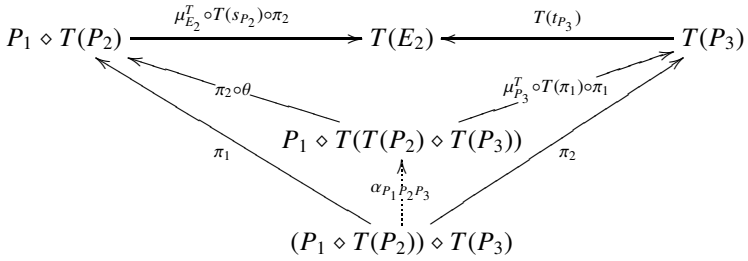
（其中第二个拉回图源于 T 的笛卡尔性），以及交换图



由于单子 T 的幺元性质，它再次交换；

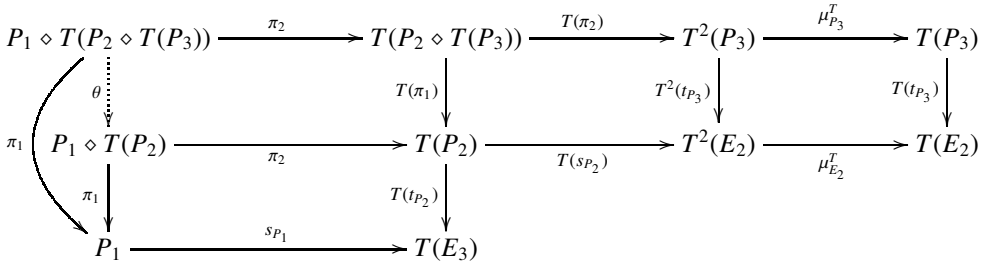
► 结合子 E_4  复合 $E_4 \overset{1}{\leftarrow} E_3 \overset{2}{\leftarrow} E_2 \overset{3}{\leftarrow} E_1$ 由下述唯一确定

关于 $T(E_2)$ 的以下一对拉回的泛因子分解性质：[7]

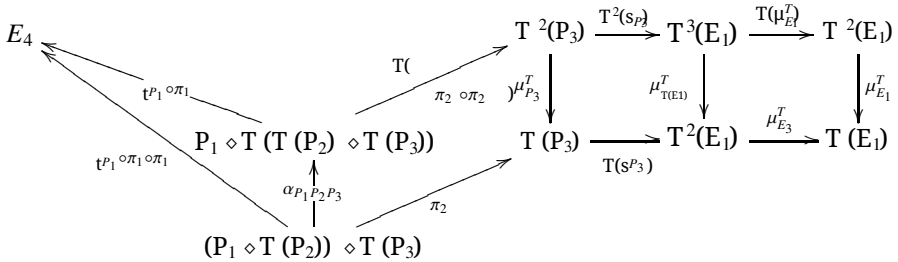


(2.7)

其中态射 θ 由以下图表中的泛因子分解性质唯一确定；所有方块（由复合或 T 和 μ^T 的笛卡尔性所致）都是拉回：



并且以下三角形图表的目标为 E_4，源为 $T(E_1)$



(2.8)

由于 T 的笛卡尔性和 μ^T，并且根据单子 T 的结合律性质，它们是可交换的。

定义 2.13. 给定笛卡尔范畴 $\mathscr{E}$ 上的笛卡尔单子 (T, μ^T, η^T)，E 上的 T-多范畴是命题 2.12 中定义的双范畴 $\mathscr{E}_T$ 里作用于对象 E 的单子 (P, μ_P, η_P)。

T-幺半群算子 (P, μ_P, η_P) 是 $\mathscr{E}$ 中终对象 $\bullet$ 上的 T-多范畴。

[7]这里稍微滥用一下记号，用相同的符号 π_1, π_2 表示复合的所有拉回投影 s.

注记 2.14. 实际上，一个 T-多范畴由以下部分组成：一个对象 $E \in \mathscr{E}^0$（用于索引多范畴箭头的输入和输出）；一个 1-胞腔 $E \xleftarrow{t^P} P \xrightarrow{s^P} T^0(E)$ in $\mathscr{E}_T$（指定所有多范畴箭头，这些箭头的多重输入是 $T^0(E)$ 中的一个元素，且在 E 中只有一个目标）；由单子乘法 μ_P 指定的多范畴箭头复合；以及由单子单位 η_P 指定的多范畴单位。」

命题 2.15. 对于任意对象 $E \in \mathscr{E}$，我们有一个记作 $\mathscr{E}_E^T$ 的 1-范畴，其对象是 $\mathscr{E}_T$ 中源和目标均为 E 的 1-箭头，其态射是 $\mathscr{E}_T$ 中的 2-箭头。

对于每个对象 $E \in \mathscr{E}$，存在一个范畴 $\mathscr{C}$TE，它是 $\mathscr{E}$TE 的子范畴，其中：

- $\mathscr{C}$TE 的对象是 $\mathscr{E}_T$ 中的 T-多范畴 (P, μ_P, η_P)，
- 在 $\mathscr{C}_E^T$ 中，态射 $(P, \mu_P, \eta_P) \xrightarrow{\phi} (Q, \mu_Q, \eta_Q)$ 是 $\mathscr{E}_T$ 中满足以下条件的态射：

$$\begin{array}{ccc} P \circ_0^1 P & \xrightarrow{\mu_P} & P \\ {\scriptstyle \phi \circ_0^2 \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Q \circ_0^1 Q & \xrightarrow{\mu_Q} & Q \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \iota_T^0(E) & \xrightarrow{\eta_P} & P \\ {\scriptstyle \iota^1(E)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \iota_T^0(E) & \xrightarrow{\eta_Q} & Q \end{array}$$

- 复合与恒等态射均与 $\mathscr{E}_T$ 中的相应结构一致。

定义 2.16. 对于笛卡尔范畴 $\mathscr{E}$ 中的终对象 $\bullet$，若其具有笛卡尔单子 T，我们记：

- $\mathscr{E}_{T\bullet}$ 在 $\bullet\!\!\blacktriangleright$ $\mathscr{O}_\bullet^T$ 上的 T-集合族范畴：$= \mathscr{C}$
- $_{T\bullet}$ 在 $\bullet$ 上的 T-歌剧集范畴。

2.3.2 收缩与球状集合

我们现在具体讨论由笛卡尔范畴 $\mathscr{E} := \mathscr{Q}$ o 构造的双范畴 $\mathscr{Q}_{\hat{T}}$ 的球状集合；其上配备了自由严格球状 ω-范畴笛卡尔单子 $\hat{}$T。

弱球状 ω-范畴的代数公理通过“收缩”进行编码，这一做法源自 [Penon1999]；以下针对球状 ω-集合的收缩概念见于 [Leinster 2001，第 II.5] 节，以及 [Leinster 2004，第 III.9.1] 节；实际上，它同时用于形式化弱球状 ω-范畴的运算（的求值）、代数公理和相容公理。

定义 2.17. 设 $Q \in \mathscr{Q}^0$ 是一个球状 ω-集合；如果 $k = 0$ 或者……，我们称 $x_1, x_2 \in Q^k$ 为平行 k-胞腔

$$s^{k-1}(x_1) = s^{k-1}(x_2), \qquad t^{k-1}(x_1) = t^{k-1}(x_2).$$

我们用 Par$_Q$ 表示球状 ω-集合 Q 中所有平行胞腔对组成的族。

设 $Q_1 \xrightarrow{\pi} Q_2$ 是球状 ω-集合范畴 $\mathscr{Q}$ 中的一个协变态射。

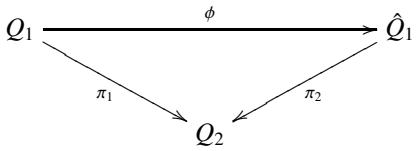
定义 $\mathrm{Par}(\pi) := n(x^+, y, x^-) \mid (x^+, x^-) \in \mathrm{Par}_{Q_1}, y \in Q_2^n, n \in \mathbb{N}0, \pi(x^+) = t^{n-1}(y), s^{n-1}(y) = \pi(x^-)$o。

π 上的 Leinster 收缩是一个映射 $\kappa : \mathrm{Par}(\pi) \to Q_1$，满足：

$$s(\kappa(x^+, y, x^-)) = x^-, \quad t(\kappa(x^+, y, x^-)) = x^+, \quad \pi(\kappa(x^+, y, x^-)) = y, \quad \forall (x^+, y, x^-) \in \mathrm{Par}(\pi). \tag{2.9}$$

定义 2.18。设 $\bullet \in \mathscr{Q}$ 表示球状 ω-集合范畴中的终对象，且 T 是 $\mathscr{Q}$上的一个单子。球状 T-集合是 $\mathscr{Q}$ 中的一个态射 $Q \xrightarrow{\pi} T(\bullet)$；球状带收缩的 T-集合由球状 T-集合 $\mathrm{Par}(\pi) \xrightarrow{\kappa} Q \xrightarrow{\pi} T(\bullet)$ 上的 Leinster 收缩 κ 构成。

Le引理 2.19。设在球状 ω-集合范畴 $\mathcal{Q}$ 中给定一个协变函子的交换图：

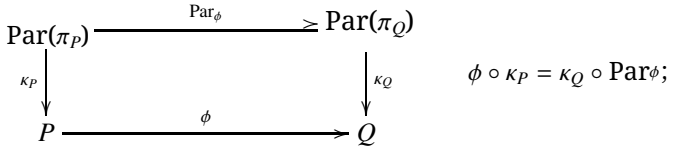


存在一个良定义的诱导映射 $\mathrm{Par}(\pi_1)_{\mathrm{Par}} \xrightarrow{\phi} \mathrm{Par}(\pi_2)$，由 $\mathrm{Par}\phi\colon (x^+, y, x^-) \mapsto (\phi(x^+), y, \phi(x^-))$ 给出。

我们在此回顾 globular 收缩算子范畴的概念，参见 [Leinster 2004，定义 III.9.2.3]。

命题 2.20. 对于任意终对象 $\bullet \in \mathcal{Q}^0$，我们有以下范畴：

▸ 范畴 $\mathcal{Q}^{\wedge}\mathbf{T}_{\bullet}$ 上的球状 $\hat{}$T-集合族，按照定义 2.16 指定；▸ 范畴 $\mathcal{Q}^{\wedge}\mathbf{T}_{\bullet}{}^{\kappa}$ 上的球状收缩 $\hat{}$T-集合族，其对象是球状收缩 $\hat{}$T-集合族，并且其态射 $(P, \pi_P, \kappa_P) \xrightarrow{\phi} (Q, \pi_Q, \kappa_Q)$ 是满足以下条件的球状 ω-函子 $P \xrightarrow{\phi} Q$：



▸ 球状 $\hat{}$T-幺半群范畴 $\mathcal{O}^{\wedge}\mathbf{T}_{\bullet}$，其对象为定义 2.16 中指定的、基于 $\bullet$ 的球状 $\hat{}$T-运算子；

$\hat{}$▸ 范畴 $\mathcal{O}^{T}{}_{\bullet}{}^{\kappa}$，其对象是基于 $\bullet$ 的球状收缩 $\hat{}$T-运算子 $(P, \pi_P, \kappa_P, \mu_P, \eta_P)$，满足 $(P, \pi_P, \mu_P, \eta_P) \in \mathcal{O}\hat{}\mathbf{T}_{\bullet}$ 是球状 $\hat{}$T- 运算子，且 $(P, \pi_P, \kappa_P) \in \mathcal{Q}\hat{}\mathbf{T}_{\bullet}$ 是球状收缩 $\hat{}$T- 集合，[8] 其态射为 $(P, \pi_P, \kappa_P, \mu_P, \eta_P) \xrightarrow{\phi} (Q, \pi_Q, \kappa_Q, \mu_Q, \eta_Q)$，满足 $(P, \pi_P, \mu_P, \eta_P) \xrightarrow{\phi} (Q, \pi_Q, \mu_Q, \eta_Q)$ 是 $\mathcal{O}\hat{}\mathbf{T}_{\bullet}$ 中的态射，且 $(P, \pi_P, \kappa_P) \xrightarrow{\phi} (Q, \pi_Q, \kappa_Q)$ 是 $\mathcal{Q}\hat{}\mathbf{T}_{\bullet}{}^{\kappa}$ 中的态射。

存在一个遗忘函子 $\mathcal{Q}^{\wedge}\mathbf{T}_{,\bullet}{}^{\kappa} \to \mathcal{Q}^{\wedge}\mathbf{T}_{\bullet}$，它对每个球状收缩 $\hat{}$T-集合族 (Q, π, κ) 在对象上定义为 $(Q, \pi) \mapsto$，并且在态射上为恒等映射。

存在一个遗忘函子 $\mathcal{O}^{\wedge}\mathbf{T}_{,\bullet}{}^{\kappa} \to \mathcal{O}^{\wedge}\mathbf{T}_{\bullet}$，它对每个球状收缩 $\hat{}$T-幺半群算子 $(P, \pi, \kappa, \mu, \eta)$ 在对象上定义为 (P, π, μ, η)，并且在态射上为恒等映射。

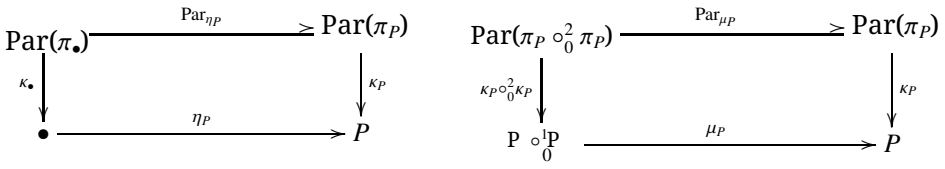
注 2.21. 尽管 T-幺半群算子可以在笛卡尔范畴 $\mathcal{E}$ 上为任意幺半群算子 T 定义，但 Leinster 的收缩仅定义在球状 T-集合族上，其中 T 是球状 ω-集合的笛卡尔范畴$\mathcal{Q}$ 上的任意单子。因此，命题 2.20 实际上对球状 ω-集合的笛卡尔范畴上的任意笛卡尔幺半群 T $\mathcal{Q}$ 都成立。下一节第 3.2 节中，我们将使用这一事实，以自由缠结严格球状 ω-范畴单子 $\hat{}$T* 替代自由严格球状 ω-范畴单子 $\hat{}$T。」

备注 2.22。如脚注 8 中所预期，按照 [Leinster 2004，定义 9.21], 的处理方式，我们在球状收缩 $\hat{}$T-幺半群的定义中（命题 2.20 的最后一点）没有加入收缩与幺半群单位／乘法之间任何额外的相容性公理。

我们在 $\bullet$ 上引入一种限制更严格的 globular $\hat{}$T-幺半群收缩概念，它由数据 $(P, \pi_P, \kappa_P, \eta_P, \mu_P)$ 构成，其中 (P, π_P, κ_P) 是 $\mathcal{Q}\hat{}_{T,\bullet}{}^{\kappa}$ 中的一个 globular 收缩 $\hat{}$T-collection，并且 $(P, \pi_P, \eta_P, \mu_P)$ 是一个

[8] 请注意，在这一点上，我们尚未对收缩 κ 与定义在 $\hat{}$T-集合上的幺半群单位 η 和乘法 μ 同时施加任何相容性公理要求；我们将在下文的备注 2.22 中讨论这个问题。

球状 $\hat{T}$-幺半群算子，且还满足 $\mathscr{O}_{\hat{T}\bullet}$ 中以下图表的交换性 $\mathscr{Q}_{\hat{T}\bullet}$ ：



其中，$\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \hat{T}(\bullet)$ 是 $\pi_\bullet := \eta^T_\bullet$，我们有 $P \circ_0^1 P \xrightarrow{\pi_P \circ_0^2 \pi_P} \hat{T}(\bullet) \circ_0^1 \hat{T}(\bullet)$，而引理 2.19 给出了 Par_{η_P}和 Par_{μ_P}。[9]球状 $\hat{T}_\bullet$ 幺半群算子收缩的范畴 $\bullet$ 只是 $\mathscr{O}_{\hat{T},\ \bullet}{}^{\kappa}$由上述定义的对象所确定的满子范畴。

完全可以使用范畴 $\mathscr{OK}_{\hat{T}\bullet}$ 来代替 $\mathscr{O}^{\hat{T}}{}_{\bullet}{}^{\kappa}$，以便将稍微更具限制性的 $\hat{}$ 弱球状 ω-范畴定义为 $\mathscr{OK}^T_\bullet$ 中始对象的代数；该始对象的存在性可以通过类似的步骤获得，这一点也适用于下一小节 2.3.3 所考察的情形。」

2.3.3 弱 ω-范畴

下一个基本结果证明于 [Leinster 2004, 附录 G]。

定理 2.23。球状收缩 $\hat{}$T-幺半群的范畴 $\mathscr{O}^T{}_{\bullet}{}^{\kappa}$具有初始对象。

上述参考文献中给出的证明并非直接证明，而是基于以下定义和结果。

定义 2.24。如果任意有限图表 $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathfrak{d}} \mathcal{C}$ 都具有余锥，则严格 1-范畴 $\mathcal{C}$ 称为滤过的。[10]

滤过余极限是图表 $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathfrak{d}} \mathcal{B}$ 的余极限，其中 $\mathcal{D}$ 是滤过的 1-范畴。

有限保持函子是保留滤过余极限的函子 $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathcal{B}$ 。

有限可呈对象是指对象 $A \in \mathcal{C}^0$，其协变 Hom-函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ 是有限保持的。

范畴 $\mathcal{C}$ 是局部有限可呈的，当且仅当满足以下性质：

- $\mathcal{C}$ 是余完备的（它具有所有小型 $\mathcal{D}$ 上图表 $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathfrak{d}} \mathcal{C}$ 的余极限），
- $\mathcal{C}$ 中有限可呈对象构成的满子范畴本质小，[11]
- $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是至少一个由有限可呈对象构成的图表的滤过余极限。

T他的第一个引理是 Leinster 2004、附录 D 中的定理 6.5.1、6.5.2 和 6.5.4 的推论 [] .

引理 2.25. 若 T 是笛卡尔范畴 $\mathscr{E}$ 上的有限型笛卡尔单子，则遗忘函子 $\mathscr{O}^T{}_{\mathfrak{U}} \to \mathscr{E}^T_\bullet$ 有左伴随，且该伴随是单子性的。

特别地，由命题 2.11 可知 $\mathscr{O}_{\hat{T}_\bullet} \xrightarrow{\mathfrak{U}} \mathscr{Q}_{\hat{T}\bullet}$ 是单子性的。

此外，U 是有限的 /Leinster 2004，附录 G 第 *353]* 页。

[9]注意，收缩 $\kappa_\bullet : (x^+, y, x^-) \mapsto y$ 由收缩的定义公理和 $\pi_\bullet$ 的定义唯一确定。[10]这等价于要求：a) $\mathcal{C}^0$ 中至少存在一个对象（空图表上的余锥顶点）；b) 对任意两个对象 $A_1, A_2 \in \mathcal{C}^0$，存在一个余锥 $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} C \xleftarrow{\alpha_2} A_2$；c) 对于由一对平行箭头组成的任意有限图表 $A_1 \overset{f,g}{\longrightarrow} A_2$,，存在一个余锥 $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} C \xleftarrow{\alpha_2} A_1$，因而 $\alpha_2 \circ f = \alpha_1 = \alpha_2 \circ g$。[11]回顾一下，在局部小范畴 $\mathcal{C}$ 中，对于所有对象 A、B $\in \mathcal{C}^0$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 都是一个集合；当且仅当 $\mathcal{C}^0$ 是一个集合时，局部小范畴才是小范畴；当且仅当一个范畴等价于某个小范畴时，它才是本质小范畴。

这个 条件引理可由 [Leinster 2004，附录 G 第 352] 页所述的直接构造得出。

引理 2.26。遗忘函子 $\mathscr{Q}^{\hat{T}}_{\bullet}{}^{\kappa}{}_{\mathfrak{W}}\longrightarrow \mathscr{Q}\hat{}_{T\bullet}{}^{\kappa}$ 是有限的，具有左伴随，且该伴随是单子性的。ˆ 这个第三个引理见于 [Leinster 2004,附录 G 第 352] 页，其中利用了 $\mathscr{Q}^{T}_{\bullet}$ 是一个预层范畴这一点。

ˆ引理 2.27。范畴 $\mathscr{Q}^{T}_{\bullet}$ 是局部有限可表示的。

引理 2.28。 *[*Kelly 1980, 命题 27。*1]* 在由 1-范畴之间的函子构成的（大）范畴 $\mathscr{C}$ 中，考虑余跨度 $\mathcal{A}\ {}_{\mathfrak{A}}\!\!\longrightarrow \mathcal{X}\ {}_{\mathfrak{B}}\!\!\longleftarrow \mathcal{B}$ 并假设：

► $\mathcal{X}$ 是一个局部有限可表示的 1-范畴，► 函子 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 都是有限的且单子性的，ˆ ► 跨度 $\mathcal{A}\ {}_{\mathfrak{A}}\!\!\longleftarrow \mathcal{W}\ {}_{\mathfrak{B}}\!\!\longrightarrow \mathcal{B}$ 是图表的严格拉回 $\mathcal{A}\ {}_{\mathfrak{A}}\!\!\longrightarrow \mathcal{X}\ {}_{\mathfrak{B}}\!\!\longleftarrow \mathcal{B}$

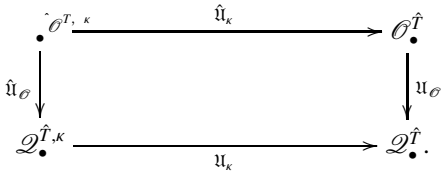


.

ˆ ˆ函子 $\mathcal{W}\ {}_{\mathfrak{A}\circ\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\circ\mathfrak{B}}\!\!\longrightarrow \mathcal{X}$ 也是单子性的。

因此 *[*Leinster 2004年，推论 G.1。*2]* 范畴 $\mathcal{W}$ 具有一个始对象。

定理 2.23 可通过将前述引理应用于遗忘函子的严格拉回情形得到 s:



以下是 [Leinster 2004，定义 III.9.2.3] 中弱 ω-范畴的基本概念。

ˆ定义 2.29. 弱 ω-范畴是任意单子 L 的代数，也就是说，是 $\mathscr{O}^{T}_{\bullet}{}^{\kappa}$ 中的一个始对象。

2.3.4 例子

在 Leinster 方法中，构造弱球状 ω-范畴例子的基本方式见 [Le- inster 2004，例子 9.2.4]：任何收缩的 ˆ T-幺半群算子 $(\mathrm{P}, \kappa, \mu, \eta) \in \mathscr{O}\hat{}_{T\bullet}{}^{\kappa}$（这意味着，对于 • 上单子在双范畴 $\mathscr{Q}\hat{}_{T}$ 中的任意一种收缩选择）都会诱导出（由于 L 是始对象）一个唯一态射 $\mathrm{L}!\to \mathrm{P}\ \hat{}\mathrm{in}\ \mathscr{O}^{T,\kappa}$，该态射会给出一个从 P 上的代数到 L 上的代数的严格函子（按定义，这些代数就是弱球状 ω-范畴）。因此，只要给定以下内容，就能得到一个弱球状 ω-范畴的例子：

►$(\mathrm{P}, \pi, \kappa, \mu, \eta)$ 是一个收缩的 ˆT -幺半群算子（也就是 $\mathscr{Q}\hat{}_{T}$ 上一个单子的收缩），►一个代数 $\mathrm{X} \in \mathscr{Q}\hat{}_{T}$，其对应的幺半群算子为收缩的 ˆT -幺半群算子 P（也就是前述单子上的一个代数）。

Leinster 方法中的弱球状 ω-范畴的著名例子包括：

► 严格球状 ω-范畴（参见例 [Leinster 2004年，9.2.5]）：它们正是终端收缩 $\hat{}$T-幺半群算子 $\hat{}$T (•) $\in \mathscr{O}^{\hat{}}{}_{T,\kappa}$, [12]► 拓扑空间 S 的球状 ω- 同伦群胚 Π_ω(S)：在 [Leinster 2004 年，例 9.2.7] 中证明了，对于每个拓扑空间 S， ω-同伦群胚 Π_ω(S) 都是某个收缩 $\hat{}$T-幺半群算子的代数。

3 Leinster 弱球状 ω-范畴上的对合

本节将研究如何在弱球状 ω-范畴上引入弱对合。

我们从第 3.1 小节开始，讨论严格球状 ω-范畴上的对合，这些对合由我们先前的论文 [Be- jrakarbum Bertozzini 2017] 定义，该论文将 [Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul Suthichitranont 2020 年第 4] 节中引入的全对合严格球状 n-范畴概念扩展到了 ω-范畴的情形。

第 3.2 小节给出了我们对弱球状 ω-范畴的试探性定义，该定义基于双范畴 $\mathscr{Q}_{\hat{T}^\star}$ 中的一个初始广义算子 $\mathrm{L}^\star$；这个双范畴由自由带对合 globular omega 范畴单子 $\hat{}\mathrm{T}^\star$ 在同一个由球状 ω-集合构成的笛卡尔双范畴 $\mathscr{Q}$ 上诱导而来。

3.1 严格球状 ω-范畴上的对合

我们快速回顾自由严格自对偶球状 ω-范畴的基本定义和构造，紧密遵循我们之前的论文 [BejrakarbumBertozzini 2017]。

定义 3.1. 若一个（自反） ω-拟范畴 $\mathrm{Q} := \mathrm{Q}^0 \underset{\mathrm{t}^0}{\overset{\mathrm{s}^0}{\leftleftarrows}} \mathrm{Q}^1 \underset{\mathrm{t}^1}{\overset{\mathrm{s}^1}{\leftleftarrows}} \cdots \underset{\mathrm{t}^{n-2}}{\overset{\mathrm{s}^{n-2}}{\leftleftarrows}} \mathrm{Q}^{n-1} \underset{\mathrm{t}^{n-1}}{\overset{\mathrm{s}^{n-1}}{\leftleftarrows}} \mathrm{Q}^n \underset{\mathrm{t}^n}{\overset{\mathrm{s}^n}{\leftleftarrows}} \cdots$ 配备了一族（γ_q）$_{q\in\mathbb{N}}$ 自同态 $\mathrm{Q} \xrightarrow{\gamma_q} \mathrm{Q}$（对所有 $\mathrm{q} \in \mathrm{N}$），并满足以下条件，则称其为完全自对偶:

► 对所有 $\mathrm{q} \in \mathrm{N}$， γ_q 是 q-逆变的：$\gamma_q^q \circ \mathrm{s}^q = \mathrm{t}^q \circ \gamma_q^{q+1}$， $\gamma_q^q \circ \mathrm{t}^q = \mathrm{s}^q \circ \gamma_q^{q+1}$，► 对所有满足 p, q 的 $\mathrm{p}、\mathrm{q} \in \mathrm{N}$， γ_q 是 p-协变的：$\gamma_q^p \circ \mathrm{s}^p = \mathrm{s}^p \circ \gamma_q^{p+1}$， $\gamma_q^p \circ \mathrm{t}^p = \mathrm{t}^p \circ \gamma_q^{p+1}$。

如果一个（自反）球状 ω-集合（分别地，一个（自反）球状 ω-岩浆）的底层 ω-拟图在上述意义下是自对偶的，则称其为自对偶。[13]

若一个严格球状 ω-范畴（$\mathcal{C}, \circ, \iota$）同时也是一个完全自对偶的 ω-拟图（$\mathcal{C}, *$），且其自对偶端同态族（$*_q$）$_{q\in\mathbb{N}}$（此处记作 $\mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}^{*_q^k}$，其中 $\mathrm{x} \in \mathcal{C}^k$ 且 $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$）满足以下代数公理，则称其为完全反演严格球状 ω-范畴:

► *(**q-contravariance**):* $(x \circ_q^k y)^{*_q^k} = y^{*_q^k} \circ_q^k x^{*_q^k},\ \forall k, q \in \mathbb{N}\ \textit{such that}\ 0 \le q < k\ \textit{and}\ (x, y) \in \mathcal{C}^k \times_{\mathcal{C}^q} \mathcal{C}^k,$
$(x \circ_q^k y)^{*_p^k} = x^{*_p^k} \circ_q^k y^{*_p^k},\ \forall k, p, q \in \mathbb{N}\ \textit{such that}\ 0 \le q \ne p < k\ \textit{and}\ (x, y) \in \mathcal{C}^k \times_{\mathcal{C}^q} \mathcal{C}^k,$

► （单位性）：$(\iota^k(\mathrm{x}))^{*_q^{k+1}} = \iota^k(\mathrm{x}^{*_q^k})$，对所有 $\mathrm{k}、\mathrm{q} \in \mathrm{N}$ 及所有 $\mathrm{x} \in \mathcal{C}^k$，► （对合性）：$(\mathrm{x}^{*_q^k})^{*_q^k} = \mathrm{x}$，对所有 $\mathrm{k}、\mathrm{q} \in \mathrm{N}$ 及所有 $\mathrm{x} \in \mathcal{C}^k$，► （交换性）：$(\mathrm{x}^{*_q^k})^{*_p^k} = (\mathrm{x}^{*_p^k})^{*_q^k}$，对所有 $\mathrm{k}、\mathrm{p}、\mathrm{q} \in \mathrm{N}$ 及所有 $\mathrm{x} \in \mathcal{C}^k$，► （q-基化）：$\mathrm{x}^{*_q^k} = \mathrm{x}$，对所有满足 $\mathrm{k} \le \mathrm{q}$ 的 $\mathrm{k}、\mathrm{q} \in \mathrm{N}$ 及所有 $\mathrm{x} \in \mathcal{C}^k$。

[12] $\mathscr{O}^{\hat{}}{}_{T_\bullet,\kappa}$中的终对象是 $\bullet \xleftarrow{!} \hat{}\mathrm{T}(\bullet) \xrightarrow{\iota(\hat{}\tau(\bullet))} \hat{}\mathrm{T}(\bullet)$，我们将在注 3.11 中更详细地阐述这一点，针对我们的新单子 $\hat{}\mathrm{T}^\star$。[13] 这里我们将 $\circ, \iota, \gamma$ 解释为部分定义的二元、零元、一元运算，并且不对拟群施加任何代数公理。

自对偶 ω-拟图之间的自对偶态射（自对偶（自反）球状 ω-集合或自对偶（自反）球状 ω-拟群之间的情形类似）是一个态射 $(Q,\gamma)\xrightarrow{\phi}(\hat{}Q,\hat{\gamma})$，满足 $\hat{\gamma}\circ\phi=\phi\circ\gamma$。

在底层自对偶球状 ω-拟群之间，一个对合 ω-函子 $\mathcal{C}\xrightarrow{\phi}\hat{}\mathcal{C}$ 就是一个自对偶态射；其定义域和值域是完全对合的严格球状 ω-范畴。

这个对合 版本的命题 2.3 已在 [Bejrakarbum Bertozzini 2017 的命题 3.1、3.2] 中得到证明。

命题 3.2. 令 $\mathscr{C}^{\star}$ 表示严格球状完全对合 ω-范畴之间协变对合 ω-函子的严格 1-范畴。

对于 $\mathscr{Q}$ 中任意球状 ω-集合 Q，Q 上的自由严格对合球状 ω-范畴是一个球状ω-集合态射 $Q\xrightarrow{\eta^{\star}_{Q}}U^{\star}(\mathcal{C})$，其值域为严格对合球状 ω-范畴 $\mathcal{C}$ 的底层球状 ω-集合 $U^{\star}(\mathcal{C})$，并满足以下泛因子分解性质：对于任意球状 ω-集合态射 $Q\xrightarrow{\phi}U^{\star}(\hat{}\mathcal{C})$，其值域为严格对合球状 ω-范畴 $\hat{}\mathcal{C}$ 的底层球状 ω-集合 $U^{\star}(\hat{}\mathcal{C})$，存在唯一的完全对合严格球状 ω-范畴之间的对合 ω-函子 $\mathcal{C}\xrightarrow{\hat{\phi}}\hat{}\mathcal{C}$，使得 $\phi=\hat{}\phi\circ\eta^{\star}_{Q}$。

遗忘函子 $\mathscr{C}^{\star}\xrightarrow{\mathfrak{u}^{\star}}\mathscr{Q}$（遗忘 $\mathscr{C}^{\star}$ 中对象的复合、恒等元和对合）有一个左伴随 $F^{\star}\dashv U^{\star}$，即自由严格对合球状 ω-范畴函子 $\mathcal{C}^{\star}\xleftarrow{\mathfrak{F}^{\star}}\mathscr{Q}$；它由在球状 ω-集合 Q 上构造自由对合严格球状 ω-范畴 $Q\xrightarrow{\eta^{\star}_{Q}}U^{\star}(\mathcal{C})$ 唯一确定。

证明。为方便读者，我们回顾在给定球状 ω-集合 Q 上构造自由严格球状对合ω-范畴 $Q\xrightarrow{\eta^{\star}_{Q}}F^{\star}(Q)$ 的显式方法。

a. 首先，我们构造球状 ω-集合 Q 上的自由球状自对偶自反 ω-拟群 $Q\xrightarrow{\zeta_{Q}}M(Q)$，它涉及严格球状对合 ω-范畴定义中包含的所有部分二元复合、一元对合和零元恒等。b. 接着，我们在 M(Q) 中考虑球状自对偶自反 ω-拟群$\Xi\subset M(Q)\times M(Q)$ 的最小同余关系，其中包含严格球状对合 ω-范畴定义所涉及的代数公理中出现的所有项对。c. 最后，考虑球状自对偶自反 ω-拟群的商态射 $M(Q)\xrightarrow{\varpi}M(Q)/\Xi$ 以及球状 ω-集合的映射 $Q\xrightarrow{\varpi\circ\zeta_{Q}}M(Q)/\Xi$，我们注意到 $F^{\star}(Q):=M(Q)/\Xi$ 是一个严格对合球状 ω-范畴，并且 $\eta^{\star}_{Q}:=\varpi\circ\zeta_{Q}$ 满足 Q 上自由对合球状 ω-范畴的泛因子分解性质。

a.
在球状 ω-集合 Q 上的自由球状自对偶自反 ω-岩浆 $Q\xrightarrow{\zeta_{Q}}M(Q)$ 由递归定义得到。我们首先给出一个 1-拟箭图 $M(Q)^{0}\leftleftarrows M(Q)^{1}$。

从 Q^{0}，出发，我们构造 $M(Q)^{0}:=Q^{0}$。接着引入 $Q^{0}_{\iota}:=\{(x,\iota^{0})\mid x\in Q^{0}\}$（即 Q^{0} 的一个不交副本，用来表示自由添加的 Q^{0} 中元素的恒等元），以及 $M(Q)^{1}[1]^{0}:=Q^{1}\uplus Q^{0}_{\iota}$，其源和目标分别由 $s^{0}_{\mathfrak{M}(Q)}(x):=s^{0}_{Q}(x)$、$t^{0}_{\mathfrak{M}(Q)}(x):=t^{0}_{Q}(x)$ 给出，对所有 $x\in Q^{1}$ 均成立；并且对所有 $x\in Q^{0}$，$s^{0}_{\mathfrak{M}(Q)}(x,\iota):=x=:t^{0}_{\mathfrak{M}(Q)}(x,\iota)$。若 $M(Q)^{1}[1]j$ 已经构造完成，则定义 $M(Q)^{1}[1]^{j+1}:=\{(x,\gamma_{0})\mid x\in M(Q)^{1}[1]j\}$（这会引入自由添加的 $M(Q)^{1}[1]^{j}$ 中元素的自对偶），其源 $s^{0}_{\mathfrak{M}(Q)}(x,\gamma_{0}):=t^{0}_{\mathfrak{M}(Q)}(x)$，目标 $t^{0}M(Q)(x,\gamma_{0}):=s^{0}M(Q)(x)$；定义 $M(Q)^{1}[1]:=S^{+\infty}_{j=1}M^{1}(Q)[1]^{j}$ 后，得到一个 1-拟箭图 $M(Q)^{0}\leftleftarrows M(Q)^{1}[1]$。

我们接下来定义 $M(Q)^{1}[2]^{0}:=n(x,0,y)\mid(x,y)\in M(Q)^{1}[1]\times_{\mathfrak{M}(Q)}M(Q)^{1}[1]$o（其元素表示自由添加的复合），其源和目标分别为 $s^{0}\,\mathfrak{M}(Q)(x,0,y):=s^{0}\,\mathfrak{M}(Q)(y)$ 和 $t^{0}\,\mathfrak{M}(Q)(x,0,y):=t^{0}\,\mathfrak{M}(Q)(x)$。

与之前完全相同，我们定义 $M(Q)^1[2] := S^{+\infty}_{j=1} M(Q)^1[2]^j$，它自由引入 $M(Q)^1[2]^0$，中 1-胞的任意迭代γ_0-自对偶，从而得到一个新的 1-拟箭图 $M(Q)^0 \leftleftarrows M(Q)^1[1] \cup M(Q)^1[2]$。
假设通过递归，1-拟箭图 $M(Q)^0 \leftleftarrows S^k_{n=1} M(Q)^1[n]$ 已经定义，我们通过自由添加复合 $M(Q)^1[k+1]^0 := \{(x, 0, y) \mid (x, y) \in M(Q)^1[i] \times_{\mathfrak{M}(Q)^0} M(Q)^1[j], i + j = k + 1\}$ 来扩展它，其源/目标为 $s^0\ M(Q)(x, 0, y) := s^0\ M(Q)(y)$、$t^0\ M(Q)(x, 0, y) := t^0\ M(Q)(x)$，并自由添加任意次的$\gamma_0$-自对偶，使得得到 $M(Q)^1[k+1] := S^{+\infty}_{j=1} M(Q)^1[k]^j$ 以及 1-拟箭图 $M(Q)^0 \leftleftarrows M(Q)^1$, ，其中有 $M(Q)^1 := S^{+\infty}_{k=1} M(Q)^1[k]$。

前述的 1-拟箭图通过定义 $\iota^0 : M(Q)^0 \to M(Q^1)$，其中 $x \mapsto (x, \iota^0)$，而成为自反的；通过定义 $\gamma_0 : M(Q)^1 \to M(Q)^1$，其中 $x \mapsto (x, \gamma_0)$，它进一步成为自对偶的；同时还存在二元复合 $\circ^1_0 : M(Q)^1 \times_{\mathfrak{M}(Q)^0} M(Q^1) \to M(Q)^1$，定义为 $\circ^1_0 : (x, y) \mapsto (x, 0, y)$，因此我们得到一个自反、自对偶的（球状）1-岩浆。
假设通过递归，对于 n-拟箭图 $M(Q)^0 \leftleftarrows \cdots \leftleftarrows M(Q)^n$，一个自反、自对偶的球状岩浆已经被定义，那么我们将得到一个自反、自对偶的球状岩浆 $M(Q)^0 \leftleftarrows \cdots \leftleftarrows M(Q)^n \leftleftarrows M(Q)^{n+1}$。
我们从 $M(Q)^{n+1}[0]^0 := Q^{n+1} \cup M(Q)^n_\iota$ 开始，其中 $M(Q)^n_\iota := \{(x, \iota^n) \mid x \in M(Q)^n\}$，其源和目标为 $s^{\mathfrak{M}(Q)}(x, \iota^n) := x =: t^{\mathfrak{M}(Q)}(x, \iota^n)$；接着引入 $M(Q)^{n+1}[0]^{j+1} := \{(x, \gamma_q) \mid x \in M(Q)^{n+1}[0]^j,\ q = 0, \ldots, n\}$，其源 / 目标映射为 $s^{\mathfrak{M}(Q)}/t^{\mathfrak{M}(Q)}(x, \gamma_q) = s^{\mathfrak{M}(Q)}/t^{\mathfrak{M}(Q)}(x)$，当 $q < n$ 时成立；而当 $q = n$ 时，$s^{\mathfrak{M}(Q)}(x, \gamma_n) = t^{\mathfrak{M}(Q)}(x)$，$t^{\mathfrak{M}(Q)}(x, \gamma_n) = s^{\mathfrak{M}(Q)}(x)$；由此得到 $M(Q)^{n+1}[0] := S^{+\infty}_{j=1} M(Q)^{n+1}[0]^j$。接下来，假设递归地，$M(Q)^{n+1}[k]$（及其源映射和目标映射）已经定义，我们引入自由的深度-p 复合 $M(Q)^{n+1}[k+1]^0 := n(x, p, y) \mid p = 0, \ldots, n, (x, y) \in M(Q)^{n+1}[i] \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} M(Q)^{n+1}[j], i + j = k + 1o$；其源和目标分别为 $s^{\mathfrak{M}(Q)}(x, p, y) := (s^{\mathfrak{M}(Q)}(x), p, s^{\mathfrak{M}(Q)}(y))$ 和 $t^{\mathfrak{M}(Q)}(x, p, y) := (t^{\mathfrak{M}(Q)}(x), p, t^{\mathfrak{M}(Q)}(y))$，当$0 \le p < n$ 时成立；否则，$s^{\mathfrak{M}(Q)}(x, n, y) := s^{\mathfrak{M}(Q)}(y)$，$t^{\mathfrak{M}(Q)}(x, p, y) := t^{\mathfrak{M}(Q)}(x)$。随后，我们通过 $M(Q)^{n+1}[k+1] := S^{+\infty}_{j=0} M(Q)^{n+1}[k+1]^j$ 引入前述 (n + 1)-胞腔的自由迭代自对偶；其中如上所述，我们考虑 $M(Q)^{n+1}[k=1]^{j+1} := n(x, \gamma_q) \mid q = 0, \ldots, n, x \in M(Q)^{n+1}[k+1]jo$，并以类似方式定义其源/目标映射。最后，令 $M(Q)^{n+1} := S^{+\infty}_{k=0} M(Q)^{n+1}[k]$，从而得到所需的球状 (n + 1)-拟范畴，它是自反的，具有映射 $\iota^n(x) := (x, \iota^n)$，其中 $x \in M(Q)^n$；是自对偶的，具有映射 $x \mapsto (x, \gamma_q)$，其中对所有 $x \in M(Q)^{n+1}$ 及所有 $q \in \{0, \ldots, n\}$ 均成立；并且是一个岩浆，其部分复合为 $x \circ^{n+1}_p y := (x, p, y)$，其中对所有 $(x, y) \in M(Q)^{n+1} \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} M(Q)^{n+1}$ 及所有 $p \in \{0, \ldots, n\}$ 均成立。

球状自反自对偶 ω-拟群 $M(Q)^0 \leftleftarrows \cdots \leftleftarrows M(Q)^n \leftleftarrows \cdots$ 的递归构造现已完成，我们进一步通过将 Q^n 包含到 $M(Q)^n[0]^0 \subset M(Q)^n$ 中，构造了球状 ω-集合的态射 $Q \xrightarrow{\eta_Q} M(Q)$，对所有 $n \in N$ 均成立。

我们只需验证态射 $Q \xrightarrow{\eta_Q} M(Q)$ 满足泛因子分解性质。设 $Q \xrightarrow{\phi} \hat{}M$ 是从自反自对偶球状 ω-集合到自反自对偶球状 ω-拟群的态射。任何保持分级的映射 $M(Q) \xrightarrow{\hat{}\phi} \hat{}M$，只要满足 $\phi = \hat{}\phi \circ \eta_Q$，就必然满足：对所有 $x \in Q^n \subset M(Q)^n$，均有 $x \mapsto \phi(x)$。利用 $\hat{}\phi$ 必须是自反自对偶球状 ω-拟群态射这一事实，通过归纳法可得，对于所有 $n \in N$，$\hat{}\phi(x, \iota^n) = \hat{\iota}^n_{\hat{M}}(\phi(x))$，对所有 $x \in M(Q)^n$ 均成立；$\hat{}\phi(x, p, y) = \phi(x) \hat{}\circ^n_p \phi(y)$，对所有 $(x, y) \in M(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} M(Q)^n$ 且 $0 \le p < n$ 均成立；并且 $\hat{}\phi(x, \gamma_q) = \phi(x)^{*^n_q}$，对所有 $x \in M(Q)^n$ 且 $0 \le q < n$ 均成立。这个唯一确定的映射 $M(Q) \xrightarrow{\phi} \hat{}M$ 是自反自对偶球状 ω- 拟群的态射，正如所需。

b.
根据 [Bejrakarbum Bertozzini 2017 第 3.2] 节，我们回顾如下：给定球状 ω-集合 (Q, s_Q, t_Q) 和 $(\hat{}Q, s\ \hat{}Q, t\ \hat{}Q)$，球状 ω-集合的笛卡尔积是球状 ω-集合 $(Q \times \hat{}Q, s_{Q\times}\ \hat{}Q, t_{Q\times}\ \hat{}Q)$，对所有 $n \in N$，有 $(Q \times \hat{}Q)^n := Q^n \times \hat{}Q^n$，其源/目标 $s^n\ Q\times \hat{}Q := (s^n_Q, s^n_{\hat{Q}})$ 和 $t^n\ Q\times \hat{}Q := (t^n_Q, t^n_{\hat{Q}})$ 按逐分量方式作用；并且，当 $(Q, s_Q, t_Q, \iota_Q, \gamma_Q, \circ_Q)$ 和 $(\hat{}Q, s\ \hat{}Q, t\ \hat{}Q, \iota\ \hat{}Q, \gamma\ \hat{}Q, \circ\hat{}Q)$ 是球状自对偶自反 ω-拟群时，它们的笛卡尔积 $Q \times \hat{}Q$ 也是球状自对偶自反 ω-拟群，其零元 $\iota^n\ Q\times \hat{}Q := (\iota^n_Q, \iota^n_{\hat{Q}})$、一元 $\gamma^{(Q\times \hat{}Q)^n}\ q := (\gamma^{Q^n}\ q, \gamma\ \hat{}Q^n\ q)$ 和二元 $\circ^{(Q\times \hat{}Q)^n}\ p := (\circ^{Q^n}\ p, \circ\ \hat{}Q^n\ p)$ 运算均按逐分量方式定义。

我们还回顾如下：球状自对偶自反 ω-拟群 M 中的同余 X，是一个球状自对偶自反ω-拟群 X，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $X^n \subset M^n \times M^n$，并且包含 $X \xrightarrow{\phi} M \times M$ 是球状自对偶自反 ω-拟群的态射。

在上文 a. 中构造的 Q 上自由球状自对偶自反 ω-岩浆 M(Q) 中，我们考虑
由以下所有成对族的并集生成的同余 $\Xi \subset M(Q) \times M(Q)$ [14]：

$$\left\{(x \circ_p^n (y \circ_p^n z),\ (x \circ_p^n y) \circ_p^n z) \ \middle|\ n > p \in \mathbb{N},\ (x,y,z) \in \mathfrak{M}(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} \mathfrak{M}(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} \mathfrak{M}(Q)^n\right\}$$

$$\left\{((\iota^{n-1} \circ \cdots \iota^p \circ t^p \circ \cdots \circ t^{n-1}(x)) \circ_p^n x,\ x) \ \middle|\ n > p \in \mathbb{N},\ x \in \mathfrak{M}(Q)^n\right\}$$

$$\left\{(x,\ x \circ_p^n (\iota^{n-1} \circ \cdots \iota^p \circ s^p \circ \cdots \circ s^{n-1}(x))) \ \middle|\ n > p \in \mathbb{N},\ x \in \mathfrak{M}(Q)^n\right\}$$

$$\left\{(\iota^n(x) \circ_p^{n+1} \iota^n(y),\ \iota^n(x \circ_p^n y)) \ \middle|\ n > p \in \mathbb{N},\ (x,y) \in \mathfrak{M}(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^q} \mathfrak{M}(Q)^n\right\}$$

$$\left\{((x \circ_p^n y) \circ_q^n (z \circ_p^n w),\ (x \circ_q^n z) \circ_p^n (y \circ_q^n w)) \ \middle|\ n > p, q \in \mathbb{N},\right.$$

$$\text{(x, y), (z, w)} \in M(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} M(Q)^n, \text{(x, z), (y, w)} \in M(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^q} M(Q)^n \text{o}$$

$$n(\gamma_q^n(\gamma_q^n(x)), x) \,\middle|\, n > q \in N,\ x \in M(Q)^n \text{o } n(\gamma_q^n(\gamma_p^n(x)),\ \gamma_p^n(\gamma_q^n(x))) \,\middle|\, n > q,\ p \in N,\ x \in M(Q)^n \quad \Big\}$$

$$n(\gamma_q^n(x \circ_p^n y),\ \gamma_q^n(x) \circ_p^n \gamma_q^n(y)) \,\middle|\, n > p, q \in N,\ (x,y) \in M(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} M(Q)^n \text{o } n(\gamma_q^n(x \circ_p^n y),\ \gamma_q^n(y) \circ_p^n \gamma_q^n(x)) \,\middle|\, n > p = q \in N,\ (x,y) \in M(Q)^n \times_{\mathfrak{M}(Q)^p} M(Q)^n \text{o } n(\iota^n(\gamma_q^n(x)), \gamma_q^{n+1}(\iota_q^n(x))) \,\middle|\, n > q \in N,\ x \in M^n(Q) \text{o } n(\gamma_q^n(x), x) \,\middle|\, n \le q \in N,\ x \in M(Q)^n \text{o}。$$

c. 由于球状自对偶自反 ω-岩浆的任意商（由球状 ω-同余确定）M(Q)/Ξ都是一个球状 ω-集合，具有 $(M(Q)/\Xi)^n := M(Q)^n/\Xi^n = n[x]_{\Xi^n} \mid x \in M(Q)^n \text{o}$ 以及 $s^n_{\mathfrak{M}(Q)/\Xi}([x]_{\Xi^{n+1}}) := [s^n_{\mathfrak{M}(Q)}(x)]_{\Xi^n}$、$t^n_{\mathfrak{M}(Q)/\Xi}([x]_{\Xi^{n+1}}) := [t^n_{\mathfrak{M}(Q)}(x)]_{\Xi^n}$，其中 $n \in N$ 且 $x \in M(Q)^{n+1}$；并且 M(Q)/Ξ 实际上是一个球状自对偶自反 ω-岩浆，其良定义复合由 $[x]_{\Xi^n} \circ^{(\mathfrak{M}(Q)/\Xi)^n} p\,[y]_{\Xi^n} := [x \circ^{\mathfrak{M}(Q)^n} p\ y]_{\Xi^n}$ 给出，自对偶运算为 $\gamma_q([x]_{\Xi^n}) := [\gamma_q(x)]_{\Xi^n}$，自反映射为 $\iota^n_{\mathfrak{M}(Q)/\Xi}([x]_{\Xi^n}) := [\iota^n_{\mathfrak{M}(Q)}(x)]_{\Xi^{n+1}}$，其中 $n > p \in N$、$q \in N$，且 x、y $\in M(Q)^n$。此外，由于严格球状对合 ω-范畴的所有代数公理已包含在 Ξ中，因此商 M(Q)/Ξ 实际上是一个严格球状对合 ω-范畴；商态射$\varpi : M(Q) \to M(Q)/\Xi$定义为对所有 $n \in N$ 和 $x \in M(Q)^n$，$\varpi^n(x) := [x]_{\Xi^n}$，它是球状自对偶自反 ω-集合的态射。

我们只需验证，球状 ω-集合 $Q \xrightarrow{\eta^\star_Q} M(Q)/\Xi$ 到球状对合 ω-范畴 M(Q)/Ξ 的态射（其中 $\eta^\star_Q := \varpi \circ \zeta_Q$）满足泛因子分解性质。对于任何其他从 $Q \xrightarrow{\phi} \mathcal{C}$ 出发、到严格球状对合 ω-范畴 $\mathcal{C}$ 的球状自对偶自反 ω-集合态射，由于 $Q \xrightarrow{\zeta_Q} M(Q)$ 是自由球状自对偶自反ω-岩浆，因此存在唯一的球状自对偶自反 ω-拟群态射 $M(Q) \xrightarrow{\overline{\phi}} \mathcal{C}$，使得 $\phi = \phi \circ \zeta_Q$。现在考虑由 ϕ 这个 ω-拟群态射诱导的核球状 ω-同余 $\Xi_{\overline{\phi}}$：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\Xi^n_{\overline{\phi}} := n(x, y) \in M(Q)^n \times M(Q)^n \mid \overline{\phi}(x) = \phi(y)\text{o}$；并且，由于严格球状对合 ω-范畴的所有公理在 $\mathcal{C}$ 中都已满足，所以有 $\Xi \subset \Xi_{\overline{\phi}}$，因此 $M(Q)/\Xi_{\overline{\phi}}$ 已经是严格球状对合 ω-范畴。此外，映射 $\tilde{\phi}$：$[x]_{\Xi_{\overline{\phi}}} \mapsto \overline{\phi}(x)$ 是一个定义良好的协变对合 ω-函子 $M(Q)/\Xi_{\overline{\phi}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{C}$，且它是满足 $\overline{\phi} = \tilde{\phi} \circ \varpi_\phi$ 的唯一此类函子；其中，$M(Q) \xrightarrow{\varpi_\phi} M(Q)/\Xi_{\overline{\phi}}$ 是按通常方式定义的球状自对偶自反 ω-拟群商态射：对 $x \in M(Q)$，令 $\varpi_\phi : x \mapsto [x]_{\Xi_{\overline{\phi}}}$。由 $\Xi \subset \Xi_{\overline{\phi}}$，我们得到唯一的对合 ω-函子 $M(Q)/\Xi_{\overline{\phi}} \xrightarrow{\theta} M(Q)/\Xi$，

[14]由于同余的交仍是同余，Ξ就是所有包含给定有序对的同余的交。

$\hat{}\theta\colon [x]_\Xi \mapsto [x]_{\Xi_{\overline{\phi}}}$，对 $x \in M(Q)$，使得 $\varpi_\phi \circ \varpi = \theta$。定义 $\hat{}\phi := \tilde{\phi} \circ \theta$，则 $M(Q)/\Xi \xrightarrow{\phi} \mathcal{C}$ 是满足 $\hat{}\phi \circ \eta^\star_Q = \tilde{\phi} \circ \theta \circ \varpi \circ \zeta_Q = \tilde{\phi} \circ \varpi_\phi \circ \eta_Q = \overline{\phi} \circ \eta_Q = \phi$ 的唯一对合 ω-函子。□

注 3.3。已知存在在集合上自由的（具有给定签名的）代数；[15] 命题 2.3 和 3.2 本质上是关于在球状 ω-集合上自由的“ω-代数”的一般存在性定理的特殊情形，该定理（对于 ω-球状情形）将集上的代数的情形垂直范畴化。」

与推论 2.9 平行地，由命题 3.2 我们在对合 ω-范畴情形中得到一个新的单子。

推论 3.4。在球状 ω-集合的态射的 1-范畴 $\mathscr{Q}$ 上，我们有如下结果

► 自由对合严格球状 ω-范畴单子 $\hat{}T^\star := U^\star \circ F^\star$。

3.2 对合弱球状 ω-范畴

以下是命题 2.11 的“对合情形”版本。

命题 3.5。小型球状 ω-集合及其态射构成的 1-范畴 $\mathscr{Q}$ 是笛卡尔的。小型严格球状对合 ω-范畴及其对合 ω-函子构成的 1-范畴 $\mathscr{C}^\star$ 是笛卡尔的。遗忘 1-函子 $\mathscr{C}^\star \xrightarrow{\mathfrak{U}^\star} \mathscr{Q}$ 和自由严格球状对合 ω-范畴 1-函子 $\mathscr{C}^\star \xleftarrow{\mathfrak{F}^\star} \mathscr{Q}$ 都是笛卡尔的。自由严格球状对合 ω-范畴单子 $T^\star := U^\star \circ F^\star$ 是笛卡尔的。

证明。球状 ω-集合的 1-范畴 $\mathscr{Q}$ 的笛卡尔性已由命题 2.11 得知。按照 [Bejrakarbum 2023 第 3 节 2], 的阐述，我们回顾一下：给定范畴 $\mathscr{Q}$中球状 $\hat{}\,\hat{}\omega$-集合的一个跨度 $Q \xrightarrow{\phi} X \xleftarrow{\psi} R$，可以通过球状 ω-集合的余跨度 $Q \xleftarrow{\psi} Q \times_X R \xrightarrow{\phi} R$ 构造一个拉回，该余跨度定义为 $Q \times_X R := \left((Q \times_X R)^n \underset{\Leftarrow}{s^n}\ t^n (Q \times_X R)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$，其中 $(Q \times_X R)^n := Q^n \times_{X^n} R^n := \{(q, r) \in Q^n \times R^n \mid \phi^n(q) = \psi^n(r)\}$，$s^n(q, r) := (s^n_Q(q), s^n_R(r))$，$t^n(q, r) := (t^n_Q(q), t^n_R(r))$，且 $\hat{}\,\phi^n(q, r) := r$，$\hat{}\,\psi^n(q, r) := q$，其中 $n \in \mathbb{N}$。

为了证明 1-范畴 $\mathscr{C}^\star$ 的笛卡尔性，根据 [Bejrakarbum 2023, 第 3 节3], ，我们回顾一下：给定 $\mathscr{C}^\star$ 中任意一个余跨度 $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{X} \xleftarrow{\psi} \mathcal{B}$，可以通过先前的跨度 $\mathcal{A} \hat{}\xleftarrow{\psi} \mathcal{A} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{B} \hat{}\xrightarrow{\phi} \mathcal{B}$ 在 $\mathscr{Q}$ 中构造一个拉回。注意，球状 ω-集合 $\mathcal{A} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{B}$ 会成为一个严格的对合球状 ω-范畴，其复合按分量定义为 $(a_1, b_1) \circ^n_q (a_2, b_2) := (a_1 \circ^n_{\mathcal{A}_q} a_2, b_1 \circ^n_{\mathcal{A}_q} b_2)$，恒等元为 $\iota^n(a, b) := (\iota^n_{\mathcal{A}}(a), \iota^n_{\mathcal{B}}(b))$，对合为 $(a, b)^{*_q} := (a^{*^{\mathcal{A}}_q}, b^{*^{\mathcal{B}}_q})$；并且上述定义的 $\hat{}\,\phi$ 和 $\hat{}\,\psi$ 最终成为对合协变 ω-函子。

根据前面对 $\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{C}^\star$中的拉回的显式定义可知，遗忘函子 $U^\star$ 是笛卡尔的，因为它将严格对合球状 ω-范畴的标准拉回映射为其底层球状 ω-集合的标准拉回。

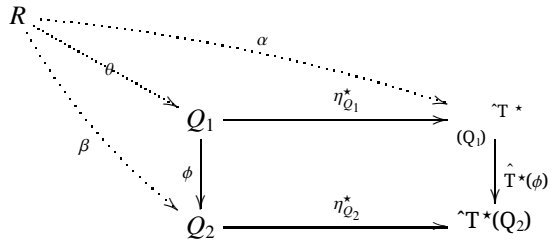
为了证明自由严格对合球状 ω-范畴函子 $F^\star$的笛卡尔性，我们只需注意到，$F^\star(Q) \xleftarrow{F^\star(\hat{}\,\psi)} F^\star(Q \times_X R) \xrightarrow{F^\star(\hat{}\,\phi)} F^\star(R)$ 通过一个对合 ω-函子，与余跨度 $F^\star(Q) \xrightarrow{F^\star(\phi)} F^\star(X) \xleftarrow{F^\star(\psi)} F^\star(R)$ 的标准 $\mathscr{C}^\star$-拉回 $F^\star(Q) \frown F^\star(\psi) \xleftarrow{} F^\star(Q) \times_{\mathfrak{F}^\star(X)} F^\star(R) \frown F^\star(\phi) \xrightarrow{} F^\star(R)$ 典范地 $\mathscr{C}^\star$-同构。

The 笛卡尔函子的复合仍是笛卡尔的，因此单子 $T^\star := U^\star \circ F^\star$ 具有笛卡尔性 .

对于自然变换 $\eta^\star$的笛卡尔性，我们必须证明：对于任意球状 ω-集合的态射 $Q_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$，下方的实线方形交换图在 $\mathscr{Q}$ 中是一个拉回；为此，对于任意跨度

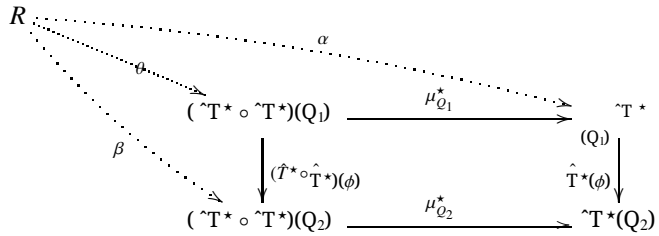
[15]例如，请参见 nLab 词条中的第 6 节：https://ncatlab.org/nlab/show/variety+of+algebras#literature。

$Q_2 \xleftarrow{\beta} R \xrightarrow{\alpha} \hat{T}^\star(Q_1)$，使得 $\hat{T}^\star(\phi) \circ \alpha = \eta^\star_{Q_2} \circ \beta$，我们必须看到存在唯一态射 $R \xrightarrow{\theta} Q_1$，使下方的两个三角形图表交换：$\alpha = \eta^\star_{Q_1} \circ \theta$、$\beta = \phi \circ \theta$。



根据命题 3.2 中回顾的球状 ω-范畴的自由对合球状构造，对于所有 $x \in Q$，我们有 $\eta^\star_Q(x) = \varpi \circ \zeta_Q(x) = [x]_\Xi$ 是一个仅含 x 的单元素集。因此，对于所有 $r \in R$，$\eta^\star_{Q_2}(\beta(r)) = [x_2]_{\Xi_2}$ 是 $\hat{T}^\star(Q_2)$ 中的一个单元素集，其中 $x_2 \in Q_2$；由于 $\hat{T}^\star(\phi)$ 与每个球状ω-集合的态射一样，是“保度”的，因此存在唯一的元素 $\theta(r) \in Q_1^0$，使得 $(\hat{T}^\star(\phi))([\theta(r)]_{\Xi_1}) = [x_2]_{\Xi_2}$。这样的 θ 满足我们的要求。

为了证明自然变换 $\mu_{\mathcal{Q}}$的笛卡尔性，我们必须证明，对于球状 ω-集合之间的任意态射 $Q_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$，下方的实线交换图是 $\mathcal{Q}$中的一个拉回；为此，对于任意跨度 $(\hat{T}^\star \circ \hat{T}^\star)(Q_2) \xleftarrow{\beta} R \xrightarrow{\alpha} Q_1$，满足 $\phi \circ \alpha = \mu^\star_{Q_2} \circ \beta$，我们必须证明存在唯一态射 $R \xrightarrow{\theta} (\hat{T}^\star \circ \hat{T}^\star)(Q_1)$，使下方的两个三角图交换：$\alpha = \mu^\star_{Q_1} \circ \theta$和 $\beta = ((\hat{T}^\star \circ \hat{T}^\star)(\phi)) \circ \theta$。



由于对所有 $r \in R$，都有 $\alpha(r) \in \hat{T}^\star(Q_1)$，因此 $(\hat{T}^\star \circ \hat{T}^\star)(Q_1)$ 中唯一可能经由 $\mu^\star_{Q_1}$ to$\alpha(r)$ 映射到的元素必然是 $(\alpha(r))$，而赋值 $r \mapsto (\alpha(r))$ 是一个满足所需条件的球状 ω-集合态射。□

将命题 2.12 直接应用于笛卡尔范畴 $\mathcal{Q}$ 上的笛卡尔单子 $\hat{T}^\star$，我们得到：

推论 3.6。存在一个双范畴 $\mathcal{Q}^{\hat{T}^\star}$。

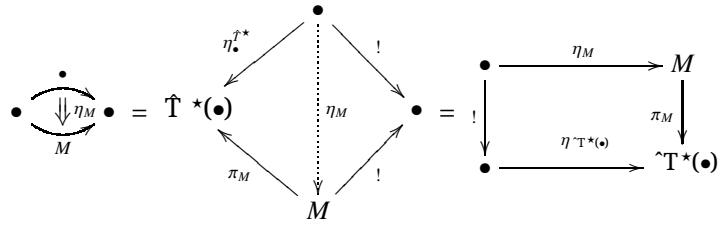
定义 2.17 中 Leinster 收缩的概念保持不变，并且正如注 2.21 所预期的那样，定义 2.18 和命题 2.20 有一个平行版本，对于自由对合球状 ω-范畴单子 $\hat{T}^\star$，可改写如下。

定义 3.7. 令 $\bullet \in \mathcal{Q}$ 表示球状 ω-集合范畴中的一个终对象。

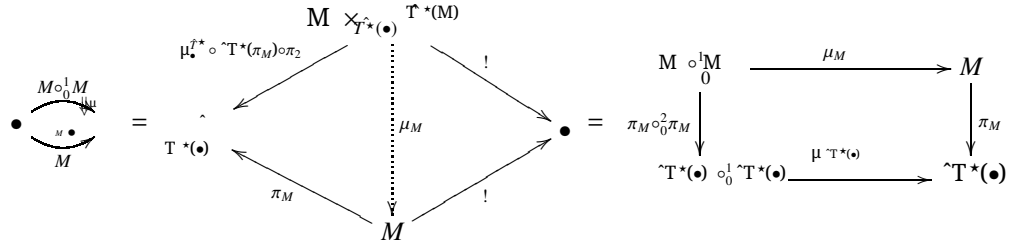
一个球状 $\hat{T}^\star$-集合是一个态射 $Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$，其所在范畴为 $\mathcal{Q}$；一个球状收缩 $\hat{T}^\star$-集合由球状 $\hat{T}^\star$-集合 $\pi\colon \mathrm{Par}(\pi) \xrightarrow{\kappa} Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$ 上的 Leinster 收缩 κ 构成。

类似地，对于笛卡尔单子 $\hat{T}^\star$，利用双范畴 $\mathcal{Q}^{\hat{T}^\star}$，定义 2.16 已经给出了关于 $\bullet$ 的球状（收缩）$\hat{T}^\star$-幺半群算子的概念。出于技术原因，在后续定理 3.16 的证明中，我们实际上需要在 $\mathcal{Q}^{\hat{T}^\star}$ 内部引入以下更一般的“岩浆结构”。

定义 3.8. 关于 $\bullet$ 的球状 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-算子岩浆 [16] $(\mathrm{M}, \pi_M, \eta_M, \mu_M)$ 是双范畴 $\mathscr{Q}\hat{\mathrm{T}}^\star$ 中的一个 1-胞腔 $\bullet\mathrm{M}\longrightarrow\bullet$（因此是一个球状 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-集合 $\mathrm{M}\xrightarrow{\pi_M}\hat{\mathrm{T}}^\star(\bullet)$），并配备一个单位 2-胞 $\bullet\xrightarrow{\eta_M}\mathrm{M}$ 和一个乘法 2-胞 $\mathrm{M}\circ_0^1\mathrm{M}\xrightarrow{\mu}\mathrm{M}$，如以下交换图 [17] 在范畴 $\mathscr{Q}$ 中所示



(3.1)



(3.2)

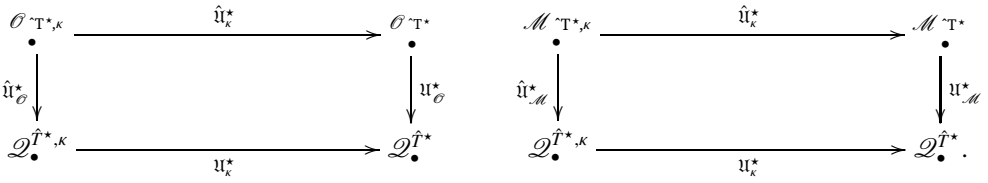
不一定需要满足拟运算子公理 2.3。

球状 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-幺半群算子是一个带有单位和乘法的球状 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-算子岩浆，并且满足单子结合律和单位元公理 2.3。

命题3.9. 对于任意终对象 $\bullet\in\mathscr{Q}^0$，我们有以下范畴：

▶ 球状 $\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star$-集合在 $\bullet$ 上的范畴 $\mathscr{Q}\hat{\mathrm{T}}^\star$，▶ 球状收缩 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-集合在 $\bullet$ 上的范畴 $\mathscr{Q}\hat{\mathrm{T}}^\star$，$_\bullet{}^\kappa$球状 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-算子岩浆在 $\bullet$ 上的范畴 $\mathscr{M}\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star$，▶ 球状 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-幺半群算子在 $\bullet$ 上的范畴 $\mathscr{O}\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star$，▶ 球状收缩 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-算子岩浆在 $\bullet$ 上的范畴 $\mathscr{M}\hat{\mathrm{T}}^\star$，$_\bullet{}^\kappa$球状收缩 $\hat{\mathrm{T}}^\star$-幺半群算子在 $\bullet$ 上的范畴 $\mathscr{O}\hat{\mathrm{T}}^\star$。

遗忘函子之间存在交换图（位于 1-范畴之间的函子范畴中） *s:*



范畴 $\mathscr{O}\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star$ 和 $\mathscr{O}\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star{}^\kappa$分别是 $\mathscr{M}\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star$ 和 $\mathscr{M}\hat{\mathrm{T}}_\bullet^\star{}^\kappa$ 的全子范畴。

[16]当然，尽管这里给出的定义是针对双范畴 $\mathscr{Q}_{\hat{T}^\star}$ 的特殊情形，但对于给定的笛卡尔单子 T，它用于任意双范畴 $\mathscr{E}_T$ 时仍然完全有效；此外，还可以使用对象 E 代替 $\mathscr{E}_T$ 中的终端对象 $\bullet$，来定义 E 上的多范畴岩浆。[17]关于右侧方形图所需记号的说明，请参阅下文的注 3.11。

注记 3.10. 正如注记 2.22 中已经指出的，可以引入更严格的球状 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子-岩浆-收缩和球状 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子-收缩概念。

在 $\bullet(M, \pi_M, \kappa_M, \eta_M, \mu_M)$ 上的球状 $\hat{T}^{\star}$-算子岩浆收缩，由一个在 $\bullet$ 上的球状收缩 $\hat{T}^{\star}$-算子岩浆构成，并且还满足 $\mathscr{Q}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$ 中以下两个图表的交换性：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}(\pi_\bullet) & \xrightarrow{\mathrm{Par}_{\eta_M}} & \mathrm{Par}(\pi_M) \\ {\scriptstyle \kappa_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_M} \\ \bullet & \xrightarrow{\eta_M} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Par}(\pi_M \circ_0^2 \pi_M) & \xrightarrow{\mathrm{Par}_{\mu_M}} & \mathrm{Par}(\pi_M) \\ {\scriptstyle \kappa_M \circ_0^2 \kappa_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_M} \\ M \circ_0^1 M & \xrightarrow{\mu_M} & M. \end{array} \tag{3.3}$$

一个以 $\bullet$ 为底的球状 $\hat{T}^{\star}$-算子收缩，就是一个球状收缩的 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子 $(M, \pi_M, \kappa_M, \eta_M, \mu_M)$，并且还满足前述交换图。

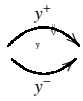
我们可以引入范畴 $\mathscr{MK}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$，它由以 $\bullet$ 为底的球状 $\hat{T}^{\star}$-算子岩浆收缩构成，是 $\mathscr{M}\hat{}_{T^\star_\bullet}{}^{\kappa}$ 的满子范畴；类似地，范畴 $\mathscr{OK}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$ 由以 $\bullet$ 为底的球状 $\hat{T}^{\star}$-算子收缩构成，是 $\mathscr{O}\hat{}_{T^\star_\bullet}{}^{\kappa}$ 的满子范畴。」

下面这条注记对我们至关重要：它确定了 $\mathscr{O}\hat{}_{T^\star_\bullet}{}^{\kappa}$ 中的终端收缩 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子。

注 3.11. 注意，球状 ω-集合 $\hat{T}^{\star}(\bullet)$ 自然地构成一个球状 $\hat{T}^{\star}$-集合 $\hat{T}^{\star}(\bullet) \xrightarrow{\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}} \hat{T}^{\star}(\bullet)$，其投影 $\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}$ 是球状 ω-集合的恒等态射，

▸对于任意 $\hat{T}^{\star}$-集合 $Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^{\star}(\bullet)$，投影 π 是 $\mathscr{Q}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$ 中的一个态射，

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\pi} & \hat{T}^{\star}(\bullet) \\ & {\scriptstyle \pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}} & \\ & \hat{T}^{\star}(\bullet) & \end{array} \qquad \pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}\colon x \mapsto x_\circ$$

它还自然地成为一个带压缩的球状 $\hat{T}^{\star}$-集合 $\mathrm{Par}(\pi\hat{}_{T^\star}(\bullet)) \xrightarrow{\kappa_{\hat{T}^\star(\bullet)}} \hat{T}^{\star}(\bullet) \xrightarrow{\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}} \hat{T}^{\star}(\bullet)$，其具有压缩-收缩映射 $\kappa\hat{}_{T^\star}(\bullet)\colon (y^+, y, y^-) \mapsto y$ 在 $\mathrm{Par}(\pi\hat{}_{T^\star}(\bullet)) = \{n(y^+, y, y^-) \in \hat{T}^{\star}(\bullet) \times \hat{T}^{\star}(\bullet) \times \hat{T}^{\star}(\bullet) \mid$  $\}$,

▸对于任意收缩的 $\hat{T}^{\star}$-集合 $\mathrm{Par}(\pi) \xrightarrow{\kappa} Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^{\star}(\bullet)$，投影 π 是 $\mathscr{Q}\hat{}_{T^\star_\bullet}{}^{\kappa}$ 中的一个态射：

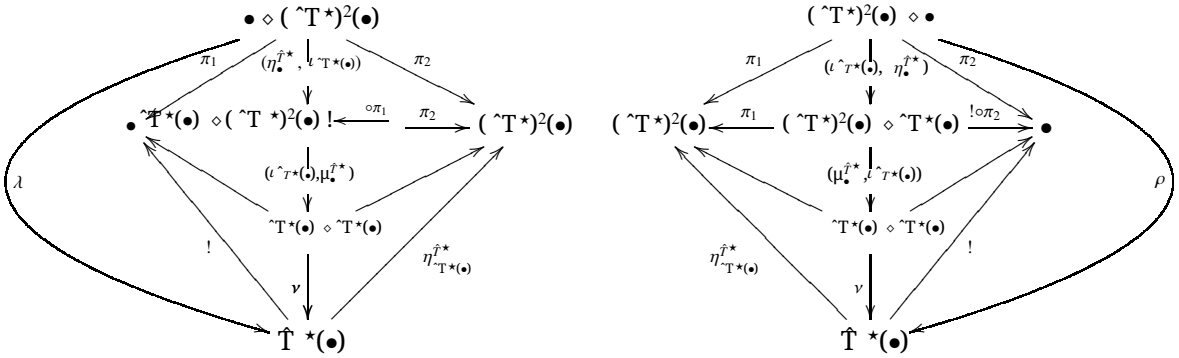
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}(\pi) & \xrightarrow{\kappa} & Q \\ {\scriptstyle \mathrm{Par}_\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{Par}(\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}) & \xrightarrow{\kappa_{\hat{T}^\star(\bullet)}} & \hat{T}^{\star}(\bullet) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \kappa_{\hat{T}^\star}(\bullet)\colon (y^+, y, y^-) \mapsto y, \\ \mathrm{Par}_\pi\colon (x^+, y, x^-) \mapsto (\pi(x^+), y, \pi(x^-)), \end{array}$$

此外，$\hat{T}^{\star}(\bullet)$ 是一个球状的 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子，其运算子单位 $\bullet \xrightarrow{\eta_{\hat{T}^\star(\bullet)}} \hat{T}^{\star}(\bullet)$ 与 $\hat{T}^{\star}$-单子单位 $\eta\hat{T}^\star(\bullet)$ 重合：$= \eta\hat{T}_\bullet{}^{\star}$；其运算子乘法 $\hat{T}^{\star}(\bullet) \circ_0^1 \hat{T}^{\star}(\bullet) \xrightarrow{\hat{T}^\star(\bullet)} \hat{T}^{\star}(\bullet)$ 由 $\mu\hat{T}^\star(\bullet) := \nu \circ (\pi\hat{T}^\star(\bullet), \mu\hat{T}_\bullet{}^{\star})$ 给出，其中 $\hat{T}^{\star}(\bullet) \circ_0^1 \hat{T}^{\star}(\bullet) = \hat{T}^{\star}(\bullet) \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^{\star}(\hat{T}^{\star}(\bullet)) = \hat{T}^{\star}(\bullet) \times \hat{T}^\star(\bullet)\, (\hat{T}^{\star})^2(\bullet) \xrightarrow{(\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}, \mu\hat{T}_\bullet{}^{\star})} \hat{T}^{\star}(\bullet) \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^{\star}(\bullet) \xrightarrow{\nu} \hat{T}^{\star}(\bullet)$，其中 $(\hat{T}^{\star})^2(\bullet)\ \mu \xrightarrow{\hat{T}^\star} \hat{T}^{\star}(\bullet)$ 是 $\hat{T}^{\star}$-单子乘法，而 $\hat{T}^{\star}(\bullet) \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^{\star}(\bullet) \xrightarrow{\nu} \hat{T}^{\star}(\bullet)$ 是一个同构。

为证明 $\hat{\mathsf{T}}^\star(\bullet)$ 是一个 $\hat{\mathsf{T}}^\star$-幺半群算子，只需验证（利用笛卡尔范畴 $\mathscr{Q}_{\hat{T}^\star}$ 中拉回的泛因子分解性质，通过结合子和单位子的定义 (2.7) (2.5) (2.6)，以及单子 $\hat{\mathsf{T}}^\star$ 的方程 (2.4)）在 (2.3) 中已描述的结合性和单位性；这里针对 $\hat{\mathsf{T}}^\star(\bullet)$ 的情形为：

$$\mu_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_1^2 (\eta_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_0^2 \iota^1_{\hat{T}^\star(\bullet)}) = \nu \circ (\iota_{\hat{T}^\star(\bullet)}, \mu^{\hat{T}^\star}_\bullet) \circ (\eta^{\hat{T}^\star}_\bullet,\ \iota_{\hat{T}^\star(\bullet)}) = \lambda,$$
$$\mu_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_1^2 (\iota^1_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_0^2 \eta_{\hat{T}^\star(\bullet)}) = \nu \circ (\mu^{\hat{T}^\star}_\bullet, \iota_{\hat{T}^\star(\bullet)}) \circ (\iota_{\hat{T}^\star(\bullet)},\ \eta^{\hat{T}^\star}_\bullet) = \rho,$$

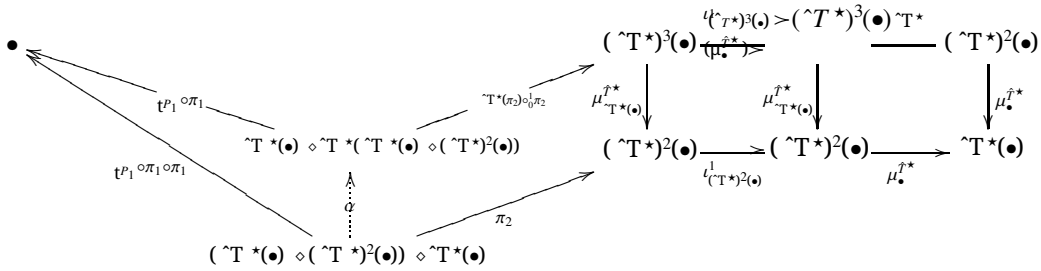
分别可由以下两个图表的交换性以及 λ 和 ρ 的唯一性得到，



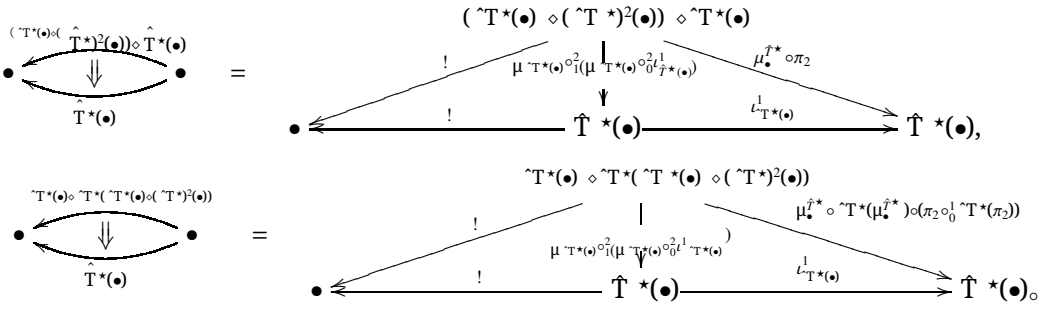
$\hat{\mathsf{T}}^\star(\bullet)$ 的算子结合律，由以下恒等式构成

$$\mu_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_1^2 (\iota^1_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_0^2 \mu_{\hat{T}^\star(\bullet)}) \circ_1^2 \alpha = \mu_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_1^2 (\mu_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_0^2 \iota^1_{\hat{T}^\star(\bullet)}),$$

可得 到，重新考察图 (2.8) 中 $\alpha := \alpha_{\hat{T}^\star(\bullet)\,\hat{\mathsf{T}}^\star(\bullet)\,\hat{\mathsf{T}}^\star(\bullet)}$ 的唯一性；在我们的情形下，该图重现如下，

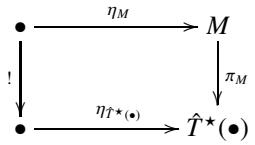


并简单指出所涉及的乘法映射的结构性质：



► 对于 任意（收缩的）球状 $\hat{\mathsf{T}}^\star$-算子岩浆 $(\mathrm{M}, \pi_M, \eta_M, \mu_M)$，因此也适用于任意（收缩的）球状-

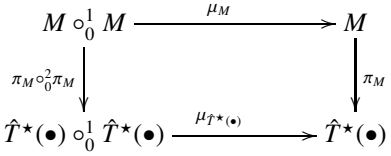
ular $\hat{\mathrm{T}}^{\star}$-幺半群算子，投影 $\mathrm{M} \xrightarrow{\pi_M} \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$ 是 $\mathscr{M}_{\hat{T}^{\star}_{\bullet}}$ 中的态射（相应地，也是在 $\mathscr{M}_{\hat{T}^{\star},\bullet}^{\kappa}$ 中的态射）：



where $\eta_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} := \eta_{\bullet}^{\hat{T}^{\star}}$ and $\bullet \xrightarrow{!} \bullet$ is the terminal morphism,

$$\mu_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} := \nu \circ (\pi_{\hat{T}^{\star}(\bullet)}, \mu_{\bullet}^{\hat{T}^{\star}})$$

$$\pi_M \circ_0^2 \pi_M : (x, y) \mapsto \big(\pi_M(x), \hat{T}^{\star}(\pi_M))(y)\big)$$



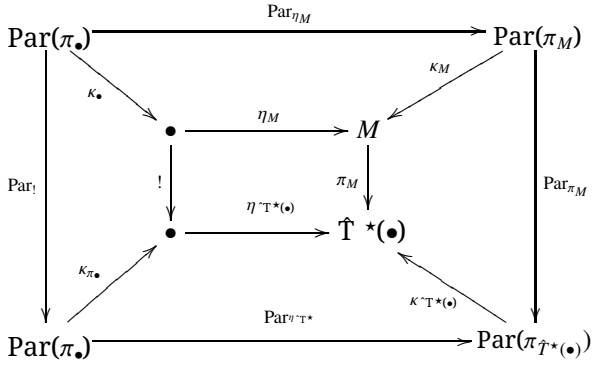
其中我们有 $\mathrm{M} \circ_0^1 \mathrm{M} = \mathrm{M} \times_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\pi_M \circ_0^2 \pi_M} \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet) \times_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)) = \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet) \circ_0^1 \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$。

（收缩的）幺半群算子 $\hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$ 是 $\mathscr{O}_{\hat{T}^{\star},\bullet}^{\kappa}$ 中的终对象：对于任意其他（收缩的）$\hat{\mathrm{T}}^{\star}$-幺半群算子 $(\mathrm{P}, \pi^P, \mu^P, \eta^P, \kappa^P)$，到 $\hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$ 的（收缩的）$\hat{\mathrm{T}}^{\star}$-幺半群算子态射由投影 $\mathrm{P} \xrightarrow{\pi^P} \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$ 给出。

事实上，$\hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$ 还是一个 $\hat{\mathrm{T}}^{\star}$-拟算子收缩，因为通过直接计算可知，它还满足以下收缩与拟算子结构之间的相容性（见图表 (3.4) 和 (3.5)）：

$$\mu_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \circ (\kappa_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \circ_0^2 \kappa_{\hat{T}^{\star}(\bullet)}) = \kappa_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \circ \mathrm{Par}_{\mu_{\hat{T}^{\star}(\bullet)}}, \qquad \eta_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \circ \kappa_{\pi_{\bullet}} = \kappa_{\hat{T}^{\star}(\bullet)} \circ \mathrm{Par}_{\eta_{\hat{T}^{\star}(\bullet)}}.$$

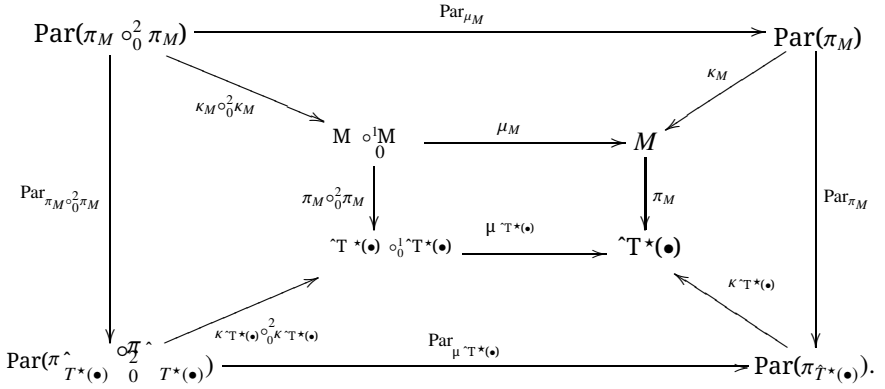
▶对于任意球状 $\hat{\mathrm{T}}^{\star}$-算子岩浆收缩 $(\mathrm{M}, \pi_M, \eta_M, \mu_M)$（以及对于任意球状 $\hat{\mathrm{T}}^{\star}$-拟算子收缩），投影 $\mathrm{M} \xrightarrow{\pi_M} \hat{\mathrm{T}}^{\star}(\bullet)$ 是 $\mathscr{MK}_{\hat{T}^{\star}_{\bullet}}$ 中的一个态射（相应地，也是 $\mathscr{OK}_{\hat{T}^{\star}_{\bullet}}$ 中的态射）：



其中： (3.4)

$$\mathrm{Par}(\pi_{\bullet}) = \mathrm{n}(\mathrm{x}^+, \mathrm{y}, \mathrm{x}^-) \mid \begin{matrix} x^+ \\ \circlearrowleft y \\ x^- \end{matrix} \in \bullet\mathrm{o}, \qquad \mathrm{Par}_{\eta_{\hat{T}^{\star}}} : (\mathrm{x}^+, \mathrm{y}, \mathrm{x}^-) \mapsto (\mathrm{x}^+, \eta_{\hat{T}^{\star}}(\mathrm{y}), \mathrm{x}^-),$$

$$\kappa_{\hat{T}^{\star}}(\bullet) : (\mathrm{x}^+, \eta_{\hat{T}^{\star}}(\mathrm{y}), \mathrm{x}^-) \mapsto \eta^{\hat{\mathrm{T}}^{\star}(\mathrm{y})}, \qquad \kappa_{\pi_{\bullet}} : (\mathrm{x}^+, \mathrm{y}, \mathrm{x}^-) \mapsto \mathrm{y};$$



(3.5)

$\mathrm{Par}(\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}) \simeq \mathrm{Par}(\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)}) \circ_0^1 \mathrm{Par}(\pi_{\hat{T}^\star(\bullet)})$,

$\kappa_{\hat{T}^\star(\bullet)} : (\mu(x_1^+, x_2^+), \mu(y_1, y_2), \mu(x_1^-, x_2^-)) \mapsto \mu(y_1, y_2)$, $\quad \kappa_{\mu_{\hat{T}^\star(\bullet)}} : (y_1, y_2) \mapsto \mu(y_1, y_2)$.

$\kappa_{\hat{T}^\star(\bullet)} \circ_0^2 \kappa_{\hat{T}^\star(\bullet)} : ((x_1^+, y_1, x_1^-), (x_1^+, y_1, x_1^-)) \mapsto (y_1, y_2)$,

$\mathrm{Par}^{\mu_{\hat{T}^\star(\bullet)}} : ((x_1^+, y_1, x_1^-), (x_1^+, y_1, x_1^-)) \mapsto (\mu(x_1^+, x_2^+), \mu(y_1, y_2), \mu(x_1^-, x_2^-))$.

$\hat{T}^\star$-算子岩浆收缩（相应地，$\hat{T}^\star$-拟算子收缩）$\hat{T}^\star(\bullet)$ 是 $\mathscr{MK}_{\hat{T}_\bullet^\star}$ 中的终对象（相应地，是 $\mathscr{OK}_{\hat{T}_\bullet^\star}$ 中的终对象）：投影 $M \xrightarrow{\pi_M} \hat{T}^\star(\bullet)$ 是从任意其他对象 M 出发的终态态射。」

下列　　内容是我们论文中的基本定理，它使得我们能够定义弱对合 ω-范畴。

定理 3.12. 球状收缩 $\hat{T}^\star$-幺半群算子范畴 $\mathscr{O}_{\hat{T}^\star,\bullet}^{\kappa}$ 具有初始对象。

证明。我们不沿用 Leinster 在第 2.3.3 节中的原始证明思路，而是给出一个直接论证。

▶ 范畴 $\mathscr{Q}_{\hat{T}_\bullet^\star}$ 有一个初始对象 I：空的 $\hat{T}^\star$-集合 $I \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$，其定义为 $I^n := \varnothing$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，其中所有源映射/目标映射和投影 π 都是空函数。▶ 左伴随函子保持余极限（参见 [Riehl 2016，定理 4.5.3]），因此它们保持初始对象（初始对象是空图表的余极限）。▶ 因此，如果 $U_{\mathscr{O}}^\star \circ \hat{U}_\kappa^\star = U_\kappa^\star \circ \hat{U}_{\mathscr{O}}^\star$ 具有左伴随 $\mathscr{Q}_\bullet^{\hat{T}^\star} \leftarrow \mathscr{O}_{\hat{T}^\star,\bullet}^{\kappa}$，则对象 $L^\star := L^0(I)$ 是 $\mathscr{O}_{\hat{T}^\star,\bullet}^{\kappa}$ 中的初始对象。

现在，定理归结为证明：在一个 $\hat{T}^\star$-集合上存在自由收缩的 $\hat{T}^\star$-幺半群算子。这将在下文的定理 3.16 中通过一种与我们在 [Bejrakarbum Bertozzini 2017，命题 3.3] 中构造自由自对偶 Penon 收缩时所采用的方法实质上相似的论证来实现。□

首先，我们需要在 $\hat{T}^\star$-集合上定义适当的自由结构。[18]

定义 3.13。对于 $\hat{T}^\star$-集合 $Q := Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$，其上的自由球状收缩 $\hat{T}^\star$-幺半群算子由一个收缩 $\hat{T}^\star$-幺半群算子 $P := (P, \pi_P, \kappa_P, \mu_P, \eta_P)$ 以及一个态射 $Q \xrightarrow{\zeta} U_\kappa^\star \circ \hat{U}_{\mathscr{O}}^\star(P)$（属于 $\mathscr{Q}_{\hat{T}_\bullet^\star}$）组成，并满足以下泛因子分解性质：对于任意其他态射 $Q \xrightarrow{\phi} U_\kappa^\star \circ \hat{U}_{\mathscr{O}}^\star(\hat{P})$（属于 $\mathscr{Q}_\bullet^{\hat{T}^\star}$），其中 $\hat{P}$ 是另一个收缩 $\hat{T}^\star$-幺半群算子，都存在唯一态射 $P \xrightarrow{\phi} \hat{P}$（属于 $\mathscr{O}_{\hat{T}^\star,\bullet}^{\kappa}$），使得 $\phi = \hat{\phi} \circ \zeta$。

自由球状收缩的 $\hat{T}^\star$-算子岩浆 $M := (M, \pi_M, \kappa_M, \mu_M, \eta_M)$ 建立在 $\hat{T}^\star$-集合之上，其定义方式类似：通过态射 $Q \xrightarrow{\xi_Q} U_\kappa^\star \circ \hat{U}_{\mathscr{M}}^\star(M)$，将上文中的“歌剧集”替换为“幺半群拟运算”。

[18] 当然，这些定义为方便起见仅针对 $\hat{T}^\star$ 这一特定情形给出，但同样适用于任意笛卡尔单子 T .

与任何具有泛因子分解性质的构造一样，自由收缩的 ˆT⋆-幺半群算子（岩浆）在与泛因子分解性质相容的唯一同构意义下是唯一的。其存在性由定理 3.16 证明。

在　　开始证明之前，我们需要引入同余和商结构的相关概念　　.

定义 3.14。球状 ω-等价关系是球状 ω-集合 Q 中的一个等价关系 $\mathcal{E}$，它按级分级 [19] $\mathcal{E} \subset Q \times_{\mathbb{N}} Q := \{(x,y) \in Q \times Q \mid \exists n \in \mathbb{N} : x,y \in Q^n\}$，并且保持源与目标：[20]

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{E} \Rightarrow (s(x_1), s(x_2)) \in \mathcal{E}, \qquad (x_1, x_2) \in \mathcal{E} \Rightarrow (t(x_1), t(x_2)) \in \mathcal{E}, \qquad \forall x, y \in Q. \tag{3.6}$$

ˆT⋆-集合的同余是球状 ω-等价关系 $\mathcal{E}$，定义在球状 ˆT⋆-集合 $Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$ 的球状 ω-集合 Q 中，并且保持投影：$(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$，因此 $\mathcal{E} \subset Q \times_\pi Q$。[21]

收缩 ˆT ⋆-集合的同余是 ˆT⋆-集合的同余 $\mathcal{E}$，定义在收缩 ˆT ⋆-集合 $\mathrm{Par}(\pi) \xrightarrow{\kappa} Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$ 中，并且还保持收缩：[22]

$$\forall (x_1^+, x_2^+), (x_1^-, x_2^-) \in \mathcal{E} \,:\, (x_1^+, y_1, x_1^-), (x_2^+, y_2, x_2^-) \in \mathrm{Par}(\pi) \Rightarrow (\kappa(x_1^+, y_1, x_1^-), \kappa(x_2^+, y_2, x_2^-)) \in \mathcal{E}. \tag{3.7}$$

（收缩的）ˆT⋆-算子岩浆 (M, μ_M, η_M) 的同余是底层（收缩的）ˆT⋆-集合 $\mathrm{Par}(\pi) \xrightarrow{\kappa_M} M \xrightarrow{\pi_M} \hat{T}^\star(\bullet)$ 的同余 $\mathcal{E}$，并且保持单位元与乘法：[23]

$$(x, y) \in \mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E} = \mathcal{E} \times_{\hat{T}^\star(\bullet)} \hat{T}^\star(\mathcal{E}) \quad \Rightarrow \quad \Big((\mu_M, \mu_M) \circ \tau_M \circ (\varepsilon \circ_0^1 \varepsilon)\Big)(x, y) \in \mathcal{E}, \tag{3.8}$$

其中 $\mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon \circ_0^2 \varepsilon} (M \times_{\pi_M} M) \circ_0^1 (M \times_{\pi_M} M) \xrightarrow{\tau_M} (M \circ_0^1 M)^{\times_{\pi_M \circ_0^2 \pi_M}} (M \circ_0^1 M) \xrightarrow{(\mu_M, \mu_M)} M \times_{\pi_M} M$，$\tau_M$ 表示 ˆT⋆-集合之间拉回积与积的拉回之间的典范同构，该同构位于 $\mathscr{Q}^{\hat{T}^\star}_\bullet$ 中；! 则表示终对象之间唯一的同构。[24]

为方便起见，前述同余是针对 $\mathscr{Q}^{\hat{T}^\star}_\bullet$ 中的 1-胞腔定义的，但实际上它们也适用于双范畴 $\mathscr{Q}_T$ 中的 1-胞，其中 T 是球状 ω-集合 $\mathscr{Q}$ 上的任意笛卡尔单子。

通常，同余会产生相应代数结构的商。

命题 3.15. 给定球状 ω-关系 $\mathcal{E} \subset Q \times_{\mathbb{N}} Q$，其中 Q 是一个球状 ω-集合，则商族 $Q/\mathcal{E} := (Q^n/\mathcal{E}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ 构成一个具有良定义源与目标的球状 ω-集合，$s_{Q/\mathcal{E}}([x]_\mathcal{E}) := [s_Q(x)], t_{Q/\mathcal{E}}([x]_\mathcal{E}) := [t_Q(x)]_\mathcal{E}$；此外，商映射 $Q \xrightarrow{\varpi_\mathcal{E}} Q/\mathcal{E}$ 按通常方式定义为 $\varpi_\mathcal{E} : x \mapsto [x]_\mathcal{E}$，是球状 ω-集合的态射。

给定（已收缩的）ˆT⋆-集合 $Q \xrightarrow{\pi} \hat{T}^\star(\bullet)$ 的同余 $\mathcal{E} \subset Q \times_\pi Q$，商球状 ω-集合 $Q/\mathcal{E}$ 变成一个（已收缩的）ˆT⋆-集合 $Q/\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{Q/\mathcal{E}}} \hat{T}^\star(\bullet)$，并具有定义良好的投影 $\pi_{Q/\mathcal{E}} : [x]_\mathcal{E} \mapsto \pi(x)$（并且具有

[19]这等价于说，$\mathcal{E}$ 由一列 $\mathcal{E}^n \subset Q^n \times Q^n$ 中的等价关系组成，即对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。[20]这样，球状源与目标乘积映射 (s, s)、(t, t) : $Q \times_{\mathbb{N}} Q \to Q \times_{\mathbb{N}} Q$ 限制为 $\mathcal{E}$ 上的（必然是球状的）源与目标映射，因此 $(\mathcal{E}, (s, s)|^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}, (t, t)|^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}})$ 成为一个规范地包含于 $Q \times_{\mathbb{N}} Q$ 中的球状 ω-集合。[21]这意味着，球状 ω-集合 $(\mathcal{E}, (s, s), (t, t))$ 是一个带投影 $\pi_\mathcal{E} : (x, y) \mapsto \pi(x) = \pi(y)$ 的 ˆT⋆-集合族 $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_\mathcal{E}} \hat{T}^\star(\bullet)$；此外，我们还有一个规范的包含态射，将 ˆT⋆-集合族 $\mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon_\mathcal{E}} Q \times_\pi Q$ 包含到乘积 ˆT⋆-集合族 $Q \times_\pi Q$ (π, π) $\longrightarrow \hat{T}^\star(\bullet)$ 中。[22]这意味着，ˆT⋆-集合族 $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_\mathcal{E}} \hat{T}^\star(\bullet)$ 具有收缩 $\kappa_\mathcal{E} : \mathrm{Par}(\pi_\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$，由 $\kappa_\mathcal{E} := (\kappa, \kappa)$ 给出。[23]同余 $\mathcal{E}$ 总是保单位的，因为乘积态射 $\bullet \times_{\eta_{\hat{T}^\star}} \bullet$ $(\eta_M, \eta_M) \longrightarrow M \times_{\pi_M} M$ 的像总是包含在 $\mathcal{E}$ 内；因此，$\mathcal{E}$ 配备了一个规范单位 $\bullet \xrightarrow{\eta_\mathcal{E}} \mathcal{E}$，它由将 $\bullet \xrightarrow{!} \bullet \times_{\eta_{\hat{T}^\star}} \bullet$ $(\eta \quad \eta) \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{E}$ $M, M)$ 与终对象的同构 ! 复合而得。[24]这样，记 $\mu \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{E}$ 为限制 $\mu_\mathcal{E} := (\mu_M, \mu_M) \circ \tau_M \circ (\varepsilon \circ_0^1 \varepsilon)|^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E}}$，并记 $\bullet \xrightarrow{\eta_\mathcal{E}} \mathcal{E}$ 为限制 $\eta_\mathcal{E} := (\eta_M, \eta_M) \circ !|^{\mathcal{E}}_\bullet$，我们得到 $(\mathcal{E}, \eta_\mathcal{E}, \mu_\mathcal{E})$ 本身是一个（带收缩的）ˆT⋆-算子岩浆，并且包含 $\mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon} M \times_{\pi_M} M$ 是（带收缩的）ˆT⋆ 算子岩浆之间的一个态射。每当 $(M, \pi_M, \kappa_M, \eta_M, \mu_M)$ 是一个（带收缩的）ˆT⋆-幺半群算子时，$(\mathcal{E}, \pi_\mathcal{E}, \kappa_\mathcal{E}, \eta_\mathcal{E}, \mu_\mathcal{E})$ 也是如此。

收缩 $\kappa_{Q/\mathcal{E}}:([x^+]_{\mathcal{E}},y,[x^-]_{\mathcal{E}}) \mapsto [\kappa(x^+,y,x^-)]_{\mathcal{E}}$ 在 $\mathrm{Par}(\pi_{Q/\mathcal{E}})$ 上 $= \{([x^+]_{\mathcal{E}},y,[x^-]_{\mathcal{E}}) \mid (x^+,y,x^-) \in \mathrm{Par}(\pi)\}$）；此外，商映射 $Q \xrightarrow{\varpi_{\mathcal{E}}} Q/\mathcal{E}$ 是（已收缩的）$\hat{}T^{\star}$-集合族的态射。

给定（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-算子岩浆 (M,π_M,η_M,μ_M) 上的同余 $\mathcal{E} \subset M \times_{\pi_M} M$，商（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-集合 $M/\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{M/\mathcal{E}}} \hat{}T^{\star}(\bullet)$ 成为一个（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-算子岩浆，其运算子单位为 $\bullet \xrightarrow{\eta_{M/}} M/\mathcal{E}$，由 $\eta M/\mathcal{E} := \pi_{\mathcal{E}} \circ \eta M$ 给出；其运算子乘法为 $M/\mathcal{E} \circ_0^1 M/\mathcal{E} \xrightarrow{\mu_{M/}} M/\mathcal{E}$，该乘法由 $\mu M/\mathcal{E} := ([x]_{\mathcal{E}},[y]_{\mathcal{E}}) \mapsto [\mu M(x,y)]_{\mathcal{E}}$ 良定义，其中对所有 $(x,y) \in M \circ_0^1 M = M \times_{\hat{}T^{\star}(\bullet)} \hat{}T^{\star}(M)$ 均成立；此外，商映射 $M \xrightarrow{\varpi_{\mathcal{E}}} M/\mathcal{E}$ 是（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-算子岩浆的一个态射。

给定命题 3.9 中范畴的一个态射 $Q_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$，在 Q_2 中的相应类型的同余 $\mathcal{E}$ 自然诱导出一个相同类型的同余 $\mathcal{E}_{\phi} := \{(x,y) \in Q_1 \times Q_1 \mid (\phi(x),\phi(y)) \in \mathcal{E}\}$，其中属于 Q_1。此外，若 $\mathcal{E}_1$ 是 Q_1 中相应类型的同余，且满足 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_{\phi}$，则存在唯一良定义的商态射 $Q_1/\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\hat{}\phi} Q_2$，由 $\hat{}\phi: [x]_{\mathcal{E}_1} \mapsto \phi(x)$ 给出，并满足 $\phi = \hat{}\phi \circ \pi_{\mathcal{E}_1}$。

证明。由性质 (3.6)，对所有 $n \in \mathbb{N}$，源和目标 $s^n Q/\mathcal{E}$、$t^n Q/\mathcal{E}: Q^{n+1}/\mathcal{E}^{n+1} \to Q^n/\mathcal{E}^n$ 都是良定义的，其球面性性质由 Q 的球面性推出。对所有 $n \in \mathbb{N}$，商映射 $\varpi_{\mathcal{E}}^n: Q^n \to Q^n/\mathcal{E}^n$ 由 $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}^n}$ 良定义；而 $\varpi_{\mathcal{E}} := (\pi_{\mathcal{E}}^n)_{\mathbb{N}}: Q \to Q/\mathcal{E}$ 在 $\mathscr{Q}$ 中成为一个态射，因为对所有 $x \in Q^{n+1}$，都有 $s^n Q/\mathcal{E}(\varpi_{\mathcal{E}}^{n+1}(x)) = s^n Q/\mathcal{E}([x]_{\mathcal{E}^{n+1}}) = [s_Q^n(x)]_{\mathcal{E}^n} = \varpi_{\mathcal{E}}^n(s_Q^n(x))$，目标的情形也类似。

集合 $Q \xrightarrow{\pi} \hat{}T^{\star}(\bullet)$ 的同余 $\mathcal{E} \subset Q \times_{\pi} Q$ 必然是 ω-球状集合的同余，因此我们已经得到 $\mathscr{Q}$ 中的商态射 $Q \xrightarrow{\varpi_{\mathcal{E}}} Q/\mathcal{E}$。由于 $\mathcal{E} \subset Q \times_{\pi} Q$，赋值 $[x]_{\mathcal{E}} \mapsto \pi(x)$ 是良定义的分次函数 $\pi_{Q/\mathcal{E}}: Q/\mathcal{E} \to \hat{}T^{\star}(\bullet)$，实际上是 $\mathscr{Q}$ 中球状 ω-集合的态射：对于所有 $[x]_{\mathcal{E}} \in Q/\mathcal{E}$，有 $\pi_{Q/\mathcal{E}}(s_{Q/\mathcal{E}}[x]_{\mathcal{E}}) = \pi_{Q/\mathcal{E}}([sQ(x)]_{\mathcal{E}}) = \pi(sQ(x)) = s(\pi(x)) = s\hat{}^{\star}(\bullet)(\pi_{Q/\mathcal{E}}[x]_{\mathcal{E}})$，对于目标也同理。由于对于所有 $x \in Q$，都有 $\pi_{Q/\mathcal{E}} \circ \varpi_{\mathcal{E}}(x) = \pi_{Q/\mathcal{E}}([x]_{\mathcal{E}}) = \pi(x)$，商 $Q \xrightarrow{\varpi_{\mathcal{E}}} Q/\mathcal{E}$ 是 $\mathscr{Q}\hat{}T_{\bullet}^{\star}$ 中 $\hat{}T^{\star}$-集合族的态射。

现在假设 $\mathrm{Par}(\pi) \xrightarrow{\kappa} Q \xrightarrow{\pi} \hat{}T^{\star}(\bullet)$ 是一个收缩的 $\hat{}T^{\star}$-集合，且 $\mathcal{E} \subset Q \times_{\pi} Q$ 是收缩的 $\hat{}T^{\star}$-集合的一个同余。对于商 $\hat{}T^{\star}$-集合 $Q/\mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{Q/\mathcal{E}}} \hat{}T^{\star}(\bullet)$，我们有：$[x_1]_{\mathcal{E}}$、$[x_2]_{\mathcal{E}} \in Q/\mathcal{E}$ are $\pi_{Q/\mathcal{E}}$-平行，当且仅当 x_1，x_2 平行，因此 $\mathrm{Par}(\pi_{Q/\mathcal{E}}) = \{([x^+]_{\mathcal{E}},y,[x^-]_{\mathcal{E}}) \mid (x^+,y,x^-) \in \mathrm{Par}(\pi)\}$。此外，由于 $\mathrm{Par}^{\pi_{Q/\mathcal{E}}}: (x^+,y,x^-) \mapsto ([x^+],y,[x^-])$，存在唯一的关系 $\mathrm{Par}(\pi_{Q/\mathcal{E}}) \xrightarrow{\kappa_{Q/\mathcal{E}}} Q/\mathcal{E}$ 满足 $\mathrm{Par}_{\pi_{\mathcal{E}}} \circ \kappa_{Q/\mathcal{E}} = \kappa$，且其定义为 $\kappa_{Q/\mathcal{E}}([x^+]_{\mathcal{E}},y,[x^-]_{\mathcal{E}}) := [\kappa(x^+,y,x^-)]_{\mathcal{E}}$。由于 $\mathcal{E}$ 是收缩的 $\hat{}T^{\star}$- 集合的一个同余，由方程（3.7）可知，$\kappa_{Q/\mathcal{E}}$ 实际上是一个良定义函数，因此也是 $Q/\mathcal{E}$ 上的一个收缩，而 $Q \xrightarrow{\varpi_{\mathcal{E}}} Q/\mathcal{E}$ 是 $\mathscr{Q}^{\hat{T}^{\star}}{}_{\bullet}^{\kappa}$ 中的一个态射。

设 $\mathcal{E}$ 是（收缩的）算子岩浆 $(M,\pi_M,\kappa_M,\eta_M,\mu_M)$ 的一个同余。我们已经知道，商 $(M/\mathcal{E},\pi_{M/\mathcal{E}},\kappa_{M/\mathcal{E}})$ 是一个（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-集合，而且 $M \xrightarrow{\varpi_{\mathcal{E}}} M/\mathcal{E}$ 是 $\mathscr{Q}\hat{}_{T^{\star}\bullet}^{\kappa}$ 中的一个态射。幺半群单位映射 $\eta_{M/\mathcal{E}}: \bullet \mapsto [\eta_M(\bullet)]_{\mathcal{E}}$ 有定义良好，因此我们立即得到 $\eta_{M/\mathcal{E}} = \pi_{M/\mathcal{E}} \circ \eta_M$，于是商态射 $\pi_{M/\mathcal{E}}$ 保单位。

为了描述运算子乘法，我们首先注意到有一个典范交换同构 $(M/\mathcal{E}) \circ_0^1 (M/\mathcal{E}) \xrightarrow{\chi} (M \circ_0^1 M)/(\mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E})$；任何满足 $\mu_{M/\mathcal{E}} \circ (\varpi_{\mathcal{E}} \circ_0^2 \varpi_E) = \varpi_{\mathcal{E}} \circ \mu_M$ 的乘法态射 $(M/\mathcal{E}) \circ_0^1 (M/\mathcal{E}) \xrightarrow{\mu_{M/\mathcal{E}}} M/\mathcal{E}$ 都必然由 $\mu^{M/\mathcal{E}} := \hat{}\mu_{M/\mathcal{E}} \circ \chi$ 给出。利用 $\mathcal{E}$ 的同余性质 (3.8)，我们有 $\hat{}\mu^{M/\mathcal{E}}: [(x,y)]_{\mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E}} \mapsto \varpi_{\mathcal{E}} \circ \mu_M(x,y)$，对于 $(x,y) \in M \circ_0^1 M$，这是（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-集合之间一个定义良好的态射。由于 $\mu_{M/\mathcal{E}} \circ (\varpi_{\mathcal{E}} \circ_0^2 \varpi_E) = \hat{}\mu_{M/\mathcal{E}} \circ \chi \circ (\varpi_{\mathcal{E}} \circ_0^2 \varpi_E) = \hat{}\mu^{M/\mathcal{E}} \circ \varpi_{\mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E}} = \varpi_{\mathcal{E}} \circ \mu_M$，我们看到 $\pi_{\mathcal{E}}$ 是（收缩的）$\hat{}T^{\star}$-算子岩浆之间的一个态射。

族 $\mathcal{E}_{\phi} \subset Q_1 \times Q_1$ 是 Q_1 中的等价关系，并且由于 ϕ 保持分级，我们还得到 $\mathcal{E}_{\phi} \subset Q_1 \times_{\mathbb{N}} Q_1$，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{E}_{\phi}$ 由一族等价关系 $\mathcal{E}_{\phi}^n \subset Q_1^n \times Q_1^n$ 组成。由于 ϕ 始终是球状 ω-集合的态射，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$s_{Q_2}^n \circ \phi^{n+1} = \phi^n \circ s_{Q_1}^n$（目标也类似），所以性质 (3.6) 成立，且 $\mathcal{E}_{\phi}$ 是 Q_1 中的球状 ω-等价关系。

如果 $Q_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$ 是 $\mathscr{Q}\hat{T}_\bullet^\star$ 中 $\hat{T}^\star$-集合族的态射，$(x, y) \in \mathcal{E}_\phi \Rightarrow \pi_{Q_2}(\phi(x)) = \pi_{Q_2}(\phi(y)) \Rightarrow \pi_{Q_1}(x) = \pi_{Q_1}(y)$，因此 Q_1 中 $\hat{T}^\star$-集合族的同余是 $\mathcal{E}_\phi \subset Q^1 \times_{\pi_{Q_1}} Q_1$。

每当 ϕ 是 $\mathscr{Q}\hat{T}^\star$ 中收缩的 $\hat{T}^\star$-集合的一个态射时，$\bullet^\kappa$，给定 (x_1^+, y_1, x_1^-)、$(x_2^+, y_2, x_2^-) \in \mathrm{Par}(\pi_1)$，且 (x_1^+, x_2^+)、$(x_1^-, x_2^-) \in \mathcal{E}_\phi$，我们必须证明 $(\kappa_1(x_1^+, y_1, x_1^-), \kappa_1(x_2^+, y_2, x_2^-)) \in \mathcal{E}_\phi$，也就是说，等价于证明 $(\kappa_2 \circ \mathrm{Par}\phi(x_1^+, y_1, x_1^-), \kappa_2 \circ \mathrm{Par}(x_1^+, y_1, x_1^-)) = (\phi \circ \kappa_1(x_1^+, y_1, x_1^-), \phi \circ \kappa_1(x_1^+, y_1, x_1^-)) \in \mathcal{E}$。这是成立的，因为我们有 $(\phi(x_1^+), y1, \phi(x_1^-))$、$(\phi(x_2^+), y2, \phi(x_2^-)) \in \mathrm{Par}(\pi_2)$，以及 $(\phi(x_1^+), \phi(x_2^+))$、$(\phi(x_1^-), \phi(x_2^-)) \in \mathcal{E}$，因此也有 $(k_2(\phi(x_1)^+, y1, \phi(x_1)^-), \kappa_2(\phi(x_2)^+, y2, \phi(x_2)^-)) = (\kappa_2 \circ \mathrm{Par}^\phi(x_1^+, y_1, x_1^-), \kappa_2 \circ \mathrm{Par}(x_1^+, y_1, x_1^-)) \in \mathcal{E}$。这说明 $\mathcal{E}_\phi$ 也是 Q_1 中收缩的 $\hat{T}^\star$-集合上的一个同余。

最后，如果 $\mathcal{E}$ 是 Q_2 中（收缩的）$\hat{T}^\star$-算子岩浆的同余，并且 $Q_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$ 是 $\mathscr{M}\hat{T}_\bullet^\star$ 中的态射：$(x,y) \in \mathcal{E}_\phi \circ_0^1 \mathcal{E}_\phi \Rightarrow (\phi \circ_0^2 \phi)(x,y) \in \mathcal{E} \circ_0^1 \mathcal{E} \Rightarrow \mu_\mathcal{E} \circ (\phi \circ_0^2 \phi)(x,y) \in \mathcal{E} \Rightarrow (\phi \circ_0^2 \phi)(\mu_\mathcal{E}(x,y)) \in \mathcal{E} \Rightarrow \mu_\mathcal{E}(x,y) \in \mathcal{E}_\phi$，因此 $\mathcal{E}_\phi$ 是 $\hat{T}^\star$-算子岩浆的同余。同样的论证表明，如果 ϕ 是 $\mathscr{M}\hat{T}^{\star,\ \bullet^\kappa}$ 中的态射，那么 $\mathcal{E}_\phi$ 是收缩的 $\hat{T}$-算子岩浆的同余。

最后，每当 $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_\phi$ 是 Q_1，中（与态射 ϕ“同类型”的）同余时，任何关系 $\hat{Q}_1/\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$ 使得 $\phi = \hat{\phi} \circ \pi_{\mathcal{E}_1}$ 必然将 $[x]_{\mathcal{E}_1} \mapsto \phi(x)$ 关联起来；由于 $[x]_{\mathcal{E}_1} \subset [x]_{\mathcal{E}_\phi}$，因此这是一个良定义函数，因为 $\phi(x)$ 不依赖于代表元。

$\hat{}$ 我们必须证明 $Q_1/\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$ 是同一 ϕ 范畴中的态射。

根据其定义，$\hat{}\,\phi$ 已经是一个分次映射：$\hat{}\,\phi(Q_1^n/\mathcal{E}_1^n) \subset Q_2^n$，对所有 $n \in N$ 都成立。对于所有 $x \in Q_1$，，我们有 $s_{Q_2}(\hat{}\,\phi([x]_{\mathcal{E}_1})) = s_{Q_2}(\phi(x)) = \phi(s_{Q_1}(x)) = \hat{}\,\phi([s_{Q_1}(x)]_{\mathcal{E}_1}) = \hat{}\,\phi(s_{Q_1/\mathcal{E}_1}([x]_{\mathcal{E}_1}))$，对于目标也同样成立；因此，$\hat{}\,\phi$ 是 $\mathscr{Q}$ 中的一个态射。由于 $\pi_{Q_2}(\hat{}\,\phi([x]_{\mathcal{E}_1})) = \pi_{Q_2}(\phi(x)) = \pi_{Q_1}(x) = \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1}([x]_{\mathcal{E}_1})$，对所有 $x \in Q_1$，也成立，我们还得到 $\hat{}\,\phi$ 是 $\hat{T}_\bullet^\star$ 中的一个态射。由于 $\hat{}\,\phi$ 已经是 $\hat{T}^\star$-集合族的态射，它自然诱导出一个映射 $\mathrm{Par}^{\hat{\phi}}: \mathrm{Par}(\pi_{Q_1/\mathcal{E}_1}) \to \mathrm{Par}(\pi_{Q_2})$；并且，每当 ϕ 是 $\hat{T}^\star$，$^\kappa$ 中的一个态射时，我们证明 $\kappa_{Q_2} \circ \mathrm{Par}\,\hat{}_\phi = \hat{}\,\phi \circ \kappa_{Q_1/\mathcal{E}_1}$：

$$\begin{aligned}\kappa_{Q_2}(\mathrm{Par}_{\hat{\phi}}([x^+]_{\mathcal{E}_1}, y, [x^-]_{\mathcal{E}_1})) &= \kappa_{Q_2}(\mathrm{Par}_{\hat{\phi}} \circ \mathrm{Par}_{\pi_{\frac{Q_1}{\mathcal{E}_1}}}(x^+, y, x^-)) = \kappa_{Q_2}(\mathrm{Par}_\phi(x^+, y, x^-)) \\ &= \phi(\kappa_{Q_1}(x^+, y, x^-)) = \hat{\phi}(\pi_{\frac{Q_1}{\mathcal{E}_1}}(x^+, y, x^-)) = \hat{\phi}(\kappa_{\frac{Q_1}{\mathcal{E}_1}}([x^+]_{\mathcal{E}_1}, y, [x^-]_{\mathcal{E}_1})),\end{aligned}$$

对于所有 $(x^+, y, x^-) \in \mathrm{Par}(\pi_{Q_1})$，因此 $\hat{}\,\phi$ 是 $\mathscr{Q}\hat{T}_\bullet^\star$ 中的态射。

现在假设 $Q_1 \xrightarrow{\phi} Q_2$ 是 $\mathscr{M}\hat{T}_\bullet^\star$ 中的态射，并且 $\mathcal{E}_1$ 是 $\hat{T}^\star$-幺半群拟运算的同余，则有 $\hat{}\,\phi \circ \eta_{Q_1/\mathcal{E}_1} = \hat{}\,\phi \circ \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ \eta_{Q_1} = \phi \circ \eta_{Q_1} = \eta_{Q_2}$。对于乘法，由 $\phi = \hat{}\,\phi \circ \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1}$ 可得 $(\phi \circ_0^2 \phi) = (\hat{\phi} \circ_0^2 \hat{}\,\phi) \circ (\pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ_0^2 \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1})$；由于 $\mu_{Q_2} \circ (\phi \circ_0^2 \phi) = \phi \circ \mu_{Q_1}$ 且 $\mu_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ (\pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ_0^2 \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1}) = \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ \mu_{Q_1}$，因此得到：$\mu_{Q_2} \circ (\hat{\phi} \circ_0^2 \hat{}\,\phi) \circ (\pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ_0^2 \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1}) = \mu_{Q_2} \circ (\phi \circ_0^2 \phi) = \phi \circ \mu_{Q_1} = \hat{}\,\phi \circ \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ \mu_{Q_1} = \hat{}\,\phi \circ \mu_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ (\pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ_0^2 \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1})$。由于 $(\pi_{Q_1/\mathcal{E}_1} \circ_0^2 \pi_{Q_1/\mathcal{E}_1})$ 是满态射，最终得到 $\mu_{Q_2} \circ (\hat{}\,\phi \circ_0^2 \hat{}\,\phi) = \hat{}\,\phi \circ \mu_{Q_1/\mathcal{E}_1}$，因此 $\hat{}\,\phi$ 是（收缩的）$\hat{T}^\star$-幺半群拟运算的态射。□

定理 3.16. $\hat{T}^\star$上的自由收缩幺半群算子总是存在于一个$\hat{T}^\star$-集合族之上。

证明。我们采用一种技术含量较低但相当冗长而直接的迭代构造，随后进行商化 nt.

a. 从一个球状$\hat{T}^\star$-集合族 $Q \xrightarrow{\pi_Q} \hat{T}^\star(\bullet)$ 出发，归纳地构造一个新的球状$\hat{T}^\star$-集合族 $M(Q) \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{M}(Q)}} \hat{T}^\star(\bullet)$，并同时构造一个球状$\hat{T}^\star$-集合族的态射 $\xi_Q: Q \to M(Q)$；b. 我们证明，$M(Q) \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{M}(Q)}} \hat{T}^\star(\bullet)$ 可以赋予一个收缩 $\kappa_{\mathfrak{M}(Q)}: \mathrm{Par}(\pi_{\mathfrak{M}(Q)}) \to M(Q)$、一个单位$\eta_{\mathfrak{M}(Q)}: \bullet \to M(Q)$ 以及一个乘法 $\mu^{\mathfrak{M}(Q)}: M(Q) \circ_0^1 M(Q) = M(Q) \times_{\hat{T}^\star(\bullet)} \hat{T}^\star(M(Q)) \to M(Q)$；c. 我们证明 $Q \xrightarrow{\xi_Q} M(Q)$ 是 $Q \xrightarrow{\pi_Q} \hat{T}^\star(\bullet)$ 上的自由收缩$\hat{T}^\star$-幺半群算子岩浆。

d. 我们证明了在收缩拟算子 $\hat{T}^\star$-岩浆 $M(Q)$ 上，由算子结合律和单位元公理生成的最小同余$\mathcal{E}_X$的存在性，从而使得商 $M(Q) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}_X}} P(Q) := M(Q)/\mathcal{E}_X$

成为一个从收缩拟算子 $\hat{T}^\star$-岩浆到收缩 $\hat{T}^\star$-幺半群算子 $P(Q) \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{P}(Q)}} \hat{T}^\star(\bullet)$ 的态射；该算子具有运算子单位 $\eta_{\mathfrak{P}(Q)} : \bullet \to P(Q)$、运算子乘法 $\mu^{\mathfrak{P}(Q)} : P(Q) \circ_0^1 P(Q) \to P(Q)$，以及收缩 $\kappa_{\mathfrak{P}(Q)} : \mathrm{Par}(\pi_{\mathfrak{P}(Q)}) \to P(Q)$，如命题 3.15 中所述；

e. 对自由收缩 $\hat{T}^\star$-幺半群算子，已证明其泛因子分解性质适用于 $Q \xrightarrow{\zeta_Q := \pi_{\mathcal{E}\mathcal{X}} \circ \xi_Q} P(Q)$.

a.

我们先明确给出 $M(Q)_j \xrightarrow{\pi^j_{\mathfrak{M}(Q)}} \hat{T}^\star(\bullet)^j$，其中 $j = 0, 1$。定义 $M(Q)^0 := Q^0 \cup Q^0_\eta$，即 Q^0 与一个单元素集 $Q^0_\eta := \{\bullet^0_\eta\}$的不交并；并定义 $\pi^0_{\mathfrak{M}(Q)} : M(Q)^0 \to \hat{T}^\star(\bullet)^0 = \{\bullet^0\}$ 为终对象映射，它必然与 Q^0 上的终对象映射 π^0_Q 重合，而在单元素集上则由 $\bullet^0_\eta \mapsto \bullet^0$ 给出。请注意，在这个 0 级阶段，不添加收缩胞腔或运算乘法胞腔，而只添加一个“自由运算单位胞腔” $\bullet^0_\eta$。

转到 1 级，我们定义 $M(Q)^1[0] := Q^1 \cup Q^1_\eta \cup Q^1_\kappa$，其中 $Q^1_\eta := \{\bullet^1_\eta\}$ 再次是一个单元素集（对应于一个自由运算单位 1-胞腔）；$Q^1_\kappa := \mathrm{Par}(\pi^0 M(Q))$ 由一份自由收缩 1-胞腔的集合副本组成，这些 1-胞腔对应于由前一个 0 级的投影 $\pi^0 M(Q)$ 所诱导的平行 0-胞腔；我们令映射 $\pi^1_{\mathfrak{M}(Q)}[0] : M(Q)^1[0] \to \hat{T}^\star(\bullet)^1$ 在 Q^1 上与 π^1_Q 一致，即在 Q^1_η 上为终对象映射 $\bullet^1_\eta \mapsto \bullet^1 \in \hat{T}^\star(\bullet)^1$，并且在所有 $(x^+, y, x^-) \in Q^1_\kappa$ 上定义为映射 $(x^+, y, x^-) \mapsto y$；此外，我们引入新的源映射/目标映射 $s^0 M(Q)[0], t^0 M(Q)[0] : M(Q)^1[0] \to M(Q)^0$，它们在 Q^1 上与原源映射/目标映射一致；在 Q^1_η 上为 $\bullet^1_\eta \mapsto \bullet^0_\eta$；并且在 Q^1_κ 上分别定义为 $s^0 M(Q)[0] : (x^+, y, x^-) \mapsto x^-$ 和 $t^0 M(Q)[0] : (x^+, y, x^-) \mapsto x^+$。

最后，我们通过 $M(Q)^1 := \bigcup_{k=0}^{+\infty} M(Q)^1[k]$，引入额外的自由运算子乘法1-胞腔，其中我们归纳地定义 $M(Q)^1[k+1] := n(x, \mu, y) \mid (x, y) \in M(Q)^1[k_1] \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^\star(M(Q)^1[k_2]),\ k_1 + k_2 = k$；我们递归地定义投影映射 $\pi^1_{\mathfrak{M}(Q)}[k+1] : (x, \mu, y) \mapsto \pi^1_{\mathfrak{M}(Q)}[k](x) = \mu^\star_\bullet\left((\hat{T}^\star(\pi^1_{\mathfrak{M}(Q)}[k]))(y)\right)$、目标 $t^0_{\mathfrak{M}(Q)}[k+1] : (x, \mu, y) \mapsto (t^0_{\mathfrak{M}(Q)}[k])(x)$ 和源 $s^0_{\mathfrak{M}(Q)}[k+1] : (x, \mu, y) \mapsto \mu^\star_P\left((\hat{T}^\star(s^0[k]))(y)\right)$，其中所有 $(x, y) \in P(Q)^1[k] \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^\star(M(Q)^1[k])$ 均成立。

现在归纳地假设 $M(Q)_n \xrightarrow{\pi^n} M(Q) \to \hat{T}^\star(\bullet)^n$ 的存在性，我们构造 $M(Q)_{n+1} \xrightarrow{\pi^{n+1}} M(Q) \to \hat{T}^\star(\bullet)^{n+1}$：从 $M(Q)^{n+1}[0] := Q^{n+1} \cup Q^{n+1}_\eta \cup Q^{n+1}_\kappa$ 开始，其中 $Q^{n+1}_\eta := \{\bullet^{n+1}_\eta\}$ 是一个单元素的自由幺半群算子单位 $(n+1)$-胞腔，而 $Q^{n+1}_\kappa := \mathrm{Par}(\pi^n_{\mathfrak{M}(Q)})$ 是由已定义的投影映射 $\pi^n M(Q) : M(Q)^n \to \hat{T}^\star(\bullet)$ 诱导的一族自由收缩 $(n+1)$-胞腔；通过递归嵌套 $M(Q)^{n+1}[k+1] := n(x, \mu, y) \mid (x, y) \in M(Q)^n[k_1] \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^\star(M(Q)^n[k_2]),\ k_1 + k_2 = k$，我们引入自由幺半群算子乘法 $(n+1)$-胞腔，并得到 $M(Q)^{n+1} := \bigcup_{k=0}^{+\infty} M(Q)^{n+1}[k]$。投影映射 $\pi^{n+1} M(Q)$ 在不交并的每个集合上分别定义：它在 $Q^{n+1} \subset M(Q)^{n+1}[0]$ 上与 π^{n+1}_Q 一致；在 Q^{n+1}_η 上为 $\bullet^{n+1}_\eta \mapsto \bullet^{n+1}$；在 Q^{n+1}_κ 上为 $(x^+, y, x^-) \mapsto y$；而在元素 $(x, \mu, y) \in M(Q)^{n+1}[k+1]$ 上递归定义为 $\pi^{n+1} M(Q) : (x, \mu, y) \mapsto \pi^n M(Q)[k](x) = \mu\, \hat{T}^\star\left(\hat{T}^\star(\pi^n M(Q)[k])(y)\right)$。最后，我们得到一个球状 $\hat{T}^\star$-集合，其目标/源映射分别由 $t^{n+1} M(Q)[k+1] : (x, \mu, y) \mapsto (t^{n+1} M(Q)[k])(x)$ 和 $s^{n+1} M(Q)[k+1](x, \mu, y) : (x, \mu, y) \mapsto \mu^\star_P\left((\hat{T}^\star(s^{n+1} M(Q)[k]))(y)\right)$ 给出，其中 $(x, y) \in M(Q)^n[k] \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^\star(M(Q)^n[k])$。

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，包含映射 $\xi^n_Q : Q^n \to Q^n \cup Q^n_\eta \cup Q^n_\kappa = M(Q)^n[0] \subset M(Q)^n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} M(Q)^n[k]$，逐层定义了映射 $\xi_Q : Q \to M(Q)$，它本身已经是球状 $\hat{T}^\star$-集合的态射。

b. 我们逐层构造定义收缩的 $\hat{T}^\star$-算子岩浆所涉及的若干结构映射：收缩 $\kappa_{\mathfrak{M}(Q)}$、单位 $\eta_{\mathfrak{M}(Q)}$、乘法 $\mu_{\mathfrak{M}(Q)}$。

运算子单位 $\eta_{\mathfrak{M}(Q)} : \bullet \to M(Q)$ 定义为 $\eta^n{}_{\mathfrak{M}(Q)} : \bullet^n \mapsto \bullet^n_\eta$，对于所有 $n \in \mathbb{N}$。

运算子乘法 $\mu^{\mathfrak{M}(Q)} : M(Q) \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^\star(M(Q)) \to M(Q)$ 在每个层级 $n \in \mathbb{N}$、对所有 $k \in \mathbb{N}$，均由映射 $\mu^n_{\mathfrak{M}(Q)}[k] : M(Q)^n[k] \times \hat{T}^\star(\bullet)\, \hat{T}^\star(M(Q)^n[k]) \to M(Q)^n[k+1]$ 给出，定义为 $\mu^n_{\mathfrak{M}(Q)}[k] : (x, y) \mapsto (x, \mu, y)$。

收缩 $\kappa_{\mathfrak{M}(Q)} : \mathrm{Par}(\pi_{\mathfrak{M}(Q)}) \to \mathrm{M(Q)}$ 由映射 $\kappa^n\,\mathfrak{m}(Q) : \mathrm{Par}(\pi^n\,\mathfrak{m}(Q)) \to \mathrm{M(Q)}^{n+1}$ 给出，对所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$，定义为包含映射 $\kappa^n\,\mathfrak{m}(Q) : \mathrm{Q}^n_\kappa \to \mathrm{M(Q)}^{n+1}$。

c.
这里我们讨论 $\mathrm{Q} \xrightarrow{\xi_Q} \mathrm{M(Q)}$ 的泛因子分解性质：给定另一个带有收缩 $\hat{\kappa}\colon \mathrm{Par}(\hat{\pi}) \to \hat{}\mathrm{M}$、运算子单位 $\hat{}\eta\colon \bullet \to \hat{}\mathrm{M}$ 和运算子乘法 $\hat{}\mu : \hat{}\mathrm{M} \times \hat{}_T\star(\bullet)\,\hat{}\mathrm{T}\star(\hat{}\,\mathrm{M}) \to \hat{}\mathrm{M}$ 的收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子$\hat{}$岩浆 $\hat{}\mathrm{M} \xrightarrow{\pi} \hat{}\mathrm{T}\star(\bullet)$，我们证明存在唯一的收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子拟群态射 $\hat{}\,\phi\colon \mathrm{M(Q)} \to \hat{}\mathrm{M}$，使得 $\phi = \hat{}\phi \circ \xi_Q$。

由于按照构造，包含 $\mathrm{Q} \xrightarrow{\xi_Q} \mathrm{M(Q)}$ 将每个元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{Q}^n$ 映射到同一个元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{M(Q)}^n$，对所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ 都成立，因此必然有 $\hat{}\,\phi(\mathrm{x}) := \mathrm{x}$，对所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{Q} \subset \mathrm{M(Q)}$ 都成立。由于 $\hat{}\,\phi$ 应保持单位，$\hat{}\,\phi \circ \eta_{\mathfrak{M}(Q)} = \hat{\eta}$，$\eta_{\mathfrak{M}(Q)}$ 的显式构造必然要求对所有元素$\eta_{\mathfrak{M}(Q)}(\bullet) \subset \mathrm{M(Q)}$，都有 $\hat{}\,\phi\colon \eta_{\mathfrak{M}}(\bullet) \mapsto \hat{\eta}(\bullet)$。同理，由于 $\hat{}\,\phi$ 应保持收缩，$\hat{}\,\phi \circ \kappa_{\mathfrak{M}(Q)} = \hat{\kappa} \circ (\hat{}\,\phi, \hat{}\,\phi)$，$\hat{}\,\phi$ 在 $\kappa_{\mathfrak{M}(Q)}(\mathrm{Par}(\pi_{\mathfrak{M}(Q)})) \subset \mathrm{M(Q)}$ 上的限制只能取为：$\hat{}\,\phi(\mathrm{x}^+, \mathrm{y}, \mathrm{x}^-) \mapsto \hat{\kappa}(\hat{}\,\phi(\mathrm{x}^+), \mathrm{y}, \hat{}\,\phi(\mathrm{x}^-))$。[25] 由于 $\hat{}\,\phi$ 应保持乘法 $\hat{}\,\phi^n \circ (\mu^{\mathfrak{M}(Q)})^n = \hat{}\mu^n \circ (\hat{}\,\phi^n, (\hat{}\mathrm{T}\star(\hat{}\,\phi))^n)$，对所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ 都成立，因此在 $\mu_{\mathfrak{M}(Q)}\left(\mathrm{M(Q)} \times \hat{}\mathrm{T}_\star(\bullet)\,\hat{}\mathrm{T}\star(\mathrm{M(Q)})^n\right) \subset \mathrm{M(Q)}^n$ 中的元素上，映射 $\hat{}\,\phi^n$ 必须唯一地定义为 $(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{y}) \mapsto \hat{}\mu(\hat{}\,\phi^n, \hat{}\,\mathrm{T}\star(\hat{}\,\phi)^n(\mathrm{y}))$。[26] 已唯一构造出的 $\hat{}\,\phi : \mathrm{M(Q)} \to \hat{}\mathrm{M}$ 是球状收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子拟群的态射，并且还满足 $\phi = \hat{}\,\phi \circ \xi_Q$。

d.
此前构造的自由收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆 $\mathrm{M(Q)}$ 尚不是自由收缩幺半群算子，因为其自由单位 $\eta_{\mathfrak{M}(Q)}\colon \bullet \to \mathrm{M(Q)}$ 和自由乘法 $\mu^{\mathfrak{M}(Q)} : \mathrm{M(Q)} \circ^1_0 \mathrm{M(Q)} \to \mathrm{M(Q)}$ 不满足双范畴 $\mathscr{Q}_{\hat{T}\star}$ 中单子的单位性与结合律公理；这些公理由定义 2.6 中的交换图表规定。具体而言，将结合子以及左/右单位子态射分别记为 $(\mathrm{M(Q)} \circ^1_0 \mathrm{M(Q)}) \circ^1_0 \mathrm{M(Q)} \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{M}(Q)}} \mathrm{M(Q)} \circ^1_0 (\mathrm{M(Q)} \circ^1_0 \mathrm{M(Q)})$ 和 $\iota^1(\bullet) \circ^1_0 \mathrm{M(Q)} \xrightarrow{\lambda_{\mathfrak{M}(Q)}} \mathrm{M(Q)} \xleftarrow{\rho_{\mathfrak{M}(Q)}} \mathrm{M(Q)} \circ^1_0 \iota^1(\bullet)$，我们需要识别 $\mathrm{M(Q)}$ 中包含于以下族 $\mathcal{X} \subset \mathrm{M(Q)} \times \mathrm{M(Q)}$ 的所有项对：

$$\begin{aligned}\mathcal{X} := &\left\{\left(\lambda_{\mathfrak{M}(Q)}(x_1)\,,\ \mu_{\mathfrak{M}(Q)}\left((\eta_{\mathfrak{M}(Q)} \circ^2_0 \iota^1_{\mathfrak{M}(Q)})(x_1)\right)\right) \;\middle|\; x_1 \in \iota^1(\bullet) \circ^1_0 \mathfrak{M}(Q)\right\} \cup \\ &\left\{\left(\rho_{\mathfrak{M}(Q)}(x_2)\,,\ \mu_{\mathfrak{M}(Q)}\left((\iota^1_{\mathfrak{M}(Q)} \circ^2_0 \eta_{\mathfrak{M}(Q)})(x_2)\right)\right) \;\middle|\; x_2 \in \mathfrak{M}(Q) \circ^1_0 \iota^1(\bullet)\right\} \cup \\ &\left\{\left(\mu_{\mathfrak{M}(Q)}((\iota^1_{\mathfrak{M}(Q)} \circ^2_0 \mu_{\mathfrak{M}(Q)}) \circ \alpha_{\mathfrak{M}(Q)}(x_3))\,,\ \mu_{\mathfrak{M}(Q)}((\mu_{\mathfrak{M}(Q)} \circ^2_0 \iota^1_{\mathfrak{M}(Q)})(x_3))\right) \;\middle|\; x_3 \in (\mathfrak{M}(Q) \circ^1_0 \mathfrak{M}(Q)) \circ^1_0 \mathfrak{M}(Q)\right\}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

为了解决这个问题，我们将 $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ 定义为 $\mathrm{M(Q)}$ 中包含 $\mathcal{X}$ 内所有项对的收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆的最小同余。由注 3.11，$\hat{}\mathrm{T}\star(\bullet) \xrightarrow{\pi_{\hat{T}\star}(\bullet)} \hat{}\mathrm{T}\star(\bullet)$ 是一个收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-幺半群算子，并且由于 $\mathrm{M(Q)} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{M}(Q)}} \hat{}\mathrm{T}\star(\bullet)$ 是收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆之间的态射，根据命题 3.15，我们知道典范等价关系 $\mathcal{E}_{\pi_{\mathfrak{M}(Q)}} := \mathrm{M(Q)} \times_{\pi_{\mathfrak{M}(Q)}} \mathrm{M(Q)} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{M(Q)} \times \mathrm{M(Q)} \mid \pi_{\mathfrak{M}(Q)}(\mathrm{x}) = \pi_{\mathfrak{M}(Q)}(\mathrm{y})\}$ 本身是收缩 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆的同余，且包含 $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}_{\pi_{\mathfrak{M}(Q)}}$；因此，$\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ 可取为 $\mathrm{M(Q)}$ 中所有包含 $\mathcal{X}$ 的此类同余所构成的非空族的交。

根据命题 3.15，商映射 $\mathrm{M(Q)} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}}} \mathrm{P(Q)} := \mathrm{M(Q)}/\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ 是一个收缩的 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆的态射，并且由于 $\mathcal{X} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{X}}$，商 $\mathrm{P(Q)} := \mathrm{M(Q)}/\mathcal{E}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{P}(Q)}} \hat{}\mathrm{T}\star(\bullet)$（其中 $\pi_{\mathfrak{P}(Q)}$ 是满足 $\pi_{\mathfrak{M}(Q)} = \pi_{\mathfrak{P}(Q)} \circ \pi_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}}$的唯一收缩的 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆态射）不仅是一个收缩的 $\hat{}\mathrm{T}\star$-算子岩浆，而且已经是一个收缩的 $\hat{}\mathrm{T}\star$-幺半群算子。

由复合给出的包含 $\mathrm{Q} \xrightarrow{\zeta_Q} \mathrm{P(Q)}$ 的 $\zeta_Q := \pi_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}} \circ \xi_Q$ 是球状 ω-集合的态射。

[25]注意，如果 $(\mathrm{x}^+, \mathrm{y}, \mathrm{x}^-) \in \mathrm{Par}(\pi_{\mathfrak{M}(Q)})^n$，则有 x^+、$\mathrm{x}^- \in \mathrm{M(Q)}^{n-1}$，并且由于 $(\mathrm{M(Q)}, \pi_{\mathfrak{M}(Q)}, \kappa_{\mathfrak{M}(Q)})$ 的构造是归纳地产生的，对于所有 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$，在元素 $\kappa_{\mathfrak{M}(Q)}(\mathrm{Par}(\pi_{\mathfrak{M}(Q)}))^n \subset \mathrm{M(Q)}^n$ 上定义 $\hat{}\,\phi$ 只需要了解已经得到的映射 $\hat{}\,\phi^{n-1}$。[26]再次注意，由于 $\mathrm{M(Q)}$ 的归纳定义，$\mathrm{M(Q)} \times_{\hat{T}\star(\bullet)} \hat{}\mathrm{T}\star(\mathrm{M(Q)})^n$ 中的元素，对于所有 $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}$ on，只需要了解已经定义的 $\hat{}\,\phi^k$。

e.
假设 Q $\xrightarrow{\phi}$ ˆP 是一个 ˆT ⋆-集合族到另一个带有收缩 $\hat{\kappa}_P$: Par($\hat{\pi}_P$) → ˆP、运算子单位 $\hat{\eta}_P$: • → ˆP 和运算子乘法 $\hat{\mu}_P$: ˆP $\circ_0^1$ ˆP → ˆP 的收缩 ˆT ⋆-幺半群算子 ˆP ˆ $\xrightarrow{\pi_P}$ ˆT ⋆(•) 的态射。

由于（忽略结合性和单位性公理后）每个收缩的 ˆT ⋆-幺半群算子都是收缩的 ˆT ⋆-算子岩浆，根据上面的 c. 点，存在唯一的收缩 ˆT ⋆-算子岩浆态射 M(Q) $\xrightarrow{\phi}$ ˆP，它定义在自由收缩 ˆT ⋆-算子岩浆 M(Q) 上，并满足 $\phi = \tilde{\phi} \circ \xi_Q$。

等价关系 $\mathcal{E}_{\tilde{\phi}}$:= M(Q) $\times_{\tilde{\phi}}$ M(Q) = {(x, y) ∈ M(Q) × M(Q) | $\tilde{\phi}$(x) = $\tilde{\phi}$(y)} 由态射 M(Q) $\xrightarrow{\phi}$ ˆP 到收缩的 ˆT ⋆-幺半群算子 ˆP 诱导，是收缩的 ˆT ⋆-算子岩浆上的同余，且包含所有生成 $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ 的项 $\mathcal{X}$，因此根据 $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ 的极小性，我们有 $\mathcal{E}_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{E}_{\tilde{\phi}}$。由此，根据命题 3.15，存在唯一的收缩 ˆT ⋆-幺半群算子之间的商态射 P(Q) $\xrightarrow{\phi}$ ˆP，其定义为：对所有 x ∈ M(Q)，ˆ $\phi(\pi_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}}(x)) := \tilde{\phi}(x)$。由于：ˆ $\phi \circ \zeta_Q$ = ˆ $\phi \circ \pi_{\mathcal{E}_{\mathcal{X}}} \circ \xi_Q = \tilde{\phi} \circ \xi_Q = \phi$，自由 ˆT ⋆-幺半群子在 Q 上的泛因子分解性质成立。□

注 3.17。定理 3.16 的证明可以仿照 Leinster 在第 2.3.3 节中的技术来获得。具体而言，在证明以下各点之后应用引理 2.28：a) 范畴 $\mathscr{Q}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$ 是局部有限可表示的；b) ˆT ⋆ 是有限型笛卡尔单子（因此 $U^{\star}_{\mathscr{O}}$ 是单子性的）；c) $U^{\star}_{\mathscr{O}}$ 是有限的；d) $U^{\star}_{\kappa}$ 是单子性的且有限的。」

我们在 T⋆ 情形下的主要定义，与 Leinsteir 的定义 2.29 完全类似：

定义 3.18。弱对合球状 ω-范畴是 $\mathscr{O}^{T^{\star}}{}_{\bullet}{}^{\kappa}$ 中一个始对象 L⋆ 的代数。

注记 3.19。完全可以使用注记 3.10 中引入的范畴 $\mathscr{O}\mathscr{K}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$，而不是$\mathscr{O}\hat{}_{T^{\star}\bullet}{}^{\kappa}$，从而将弱对合球状 ω-范畴定义为 $\mathscr{O}\mathscr{K}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$ 中始对象的代数，以得到一种稍微更具限制性的对合弱球状 ω-范畴概念。

这类始对象的存在性可以通过与定理 3.12 以及定理 3.16 的证明中所采用的技术完全类似的方法得到：只需将方程 (3.9) 中的族 $\mathcal{X}$ 扩充为 M(Q) 中为使交换图 (3.3) 所施加的附加公理成立而需要的所有项对，并对包含 $\mathcal{X}$ 的 ˆT ⋆-幺半群算子收缩取最小同余的商（这种最小同余总是存在，因为 ˆT ⋆(•) 是 $\mathscr{O}\mathscr{K}\hat{}_{T_\bullet}{}^{\star}$ 中的终对象）。」

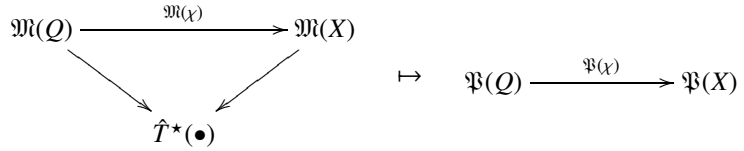
3.3 例子

所采用的策略与第 2.3.4 节中为弱自反球状 ω-范畴提供例子的方法完全平行
所述方法 在第 2.3.4 节中已有描述，其步骤包括构造一个带收缩的 ˆT ⋆-幺半群算子 P⋆ 以及其上的一个代数 X⋆。

这里仅列举一些现成的对合弱球状 ω-范畴的例子。

▶ 严格带对合球状 ω-范畴：同样，这些范畴与由终端压缩 ˆT ⋆-幺半群算子 ˆT ⋆(•) ∈ $\mathscr{O}$ ˆT⋆ 所给出的单子的代数相同，详见注记 3.11。▶ 球状 ω-跨度：遵循 Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul Suthichitra-nont 2020年示例 4 中引入的记号，[我们将一个 ω-跨度定义为一列（$A^n \xleftarrow{t}{}^{n} Q^{n+1} \xrightarrow{s}{}^{n} B^n$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 1-跨，其中 $Q^n := A^n \cup B^n$；球状 ω-跨度是一个作为球状 ω-集合的 ω-跨度 Q := $(Q^{n+1} \rightrightarrows Q^n)$（如此一来，$Q^n$ 中的任意 x ∈ 连同其所有源/靶，都唯一确定一个球面 n-胞腔）。逐层引入等价关系，将具有相同源/靶集合的 (n + 1)-胞腔等同起来，由此得到一个商ω-球状集合 X。因此，一族球状 ω-跨度由商态射 Q $\xrightarrow{\chi}$ X 确定。将这族 Q $\xrightarrow{\chi}$ X ! → • 视为“生成元”，我们应用自由带对合拟群函子（按命题 3.2 证明中的 a 点所构造）得到 M(Q) M(χ)⟶ M(X) M(!) ⟶ M(•)，再应用

遗忘函子到球状 ω-集合范畴（为简洁起见，此处省略表示），并使用商投影（由命题 3.2 证明中的 b 点构造）映到 $\hat{T}^{\star}(Q) \xrightarrow{\hat{T}^{\star}(\chi)} \hat{T}^{\star}(X) \xrightarrow{\hat{T}^{\star}(!)} \hat{T}^{\star}(\bullet)$，我们得到一个 $\hat{T}^{\star}$-集合族态射，如下方第一个图所示：



由 $Q \xrightarrow{\chi} X$ 生成的球状 ω-跨度的带对合弱球状 ω-范畴，由上图右侧自由球状收缩 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子到自身之间的代数所构成的态射给出。为了“粗粒化”地恢复原始跨度及其间的运算，必须跟踪到 X 和 P(X) 的投影。

▸ 拓扑空间 X 的同伦 ω-群胚 $\Pi_{\omega}(X)$：在此，由于对合与弱逆同伦重合，只需证明 [Leinster 2004，例 9.2.7] 中所使用的收缩 $\hat{T}$-幺半群算子实际上是一个收缩 $\hat{T}^{\star}$-幺半群算子。

4 展望

构造弱（球状） ω-范畴的代数对合版本（无论采用 Penon 方法还是 Leinster 方法），正如我们先前的工作 [Bejrakarbum Bertozzini 2017] 以及本文所做的那样，只是朝向完整的算子代数范畴环境迈出的第一步；这种环境适用于范畴化非交换几何的需求 [Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul 2008], [Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul 2012]。

对于（弱）立方 ω-范畴，对合问题目前正在研究中，[27] 此项研究承接了 [Kachour 2022]，最近的工作，其中包括研究某些条件（见 [Al-Agl Brown, Steiner 2002]），以确保立方与球状对合结构之间的等价性；这拓展了此前在对合 2-范畴/双范畴情形下已取得但尚未发表的成果 [Bertozzini Conti Dawe Martins 2014]。

本工作的直接后续研究将着重于对合弱 ω-代数胚的可能代数定义及其例子；随后，还需探讨与完备性和范数相关的一致结构，这些结构对于表述弱 ω-C*-代数胚是必要的；这将推广（并可能修改） [Bertozzini Conti LewkeeratiyutkulSuthichitranont 2020年，第 5] 节中初步提出的严格 n-C*-范畴概念。

在本文中，为简便起见，我们只考虑了不具有对合对称性的单子和歌剧集，但显然，在 $\mathscr{O}_{\hat{T}^{\star}}$ 中，某些“协变”对合本可以在歌剧集层面引入。某些对合单子和歌剧集（见 [Yau 2020，第 4] 章及其中的参考文献）可用于此目的。关于对合双范畴的完整论述，以及在双范畴中协变与反变对合单子和歌剧集的讨论，将在一篇配套论文 [28] 中另行展开，并直接运用 [Bertozzini Puttirungroj 2014]提出的混合范畴。

在本工作中，我们没有考虑放宽球状高阶范畴的任何通常公理，尤其没有针对具有非交换交换性质的弱带对合球状 ω-范畴制定定义，正如 [Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul Suthichitranont 2020 年第 3 节3] 中针对严格球状 n-范畴所提出的那样。我们推测，处理非交换导出几何的各种版本（同伦、配边、整体）将需要在这一方向上对公理进行某些修改。

[27] Bejrakarbum P、Bertozzini P、Theesoongnern S，《对合弱立方/球状 ω-范畴》（进行中）。[28] Bejrakarboom P、Bertozzini P、Puttirungroj C，《对合单子与混合范畴》（进行中）。

注释与致谢：P. Bejrakarbum 获得“研究专业发展项目”支持，该项目隶属于“泰国科学成就奖学金”（SAST）。P. Bertozzini 感谢他在大部分时间里致力于本研究项目期间常去的星巴克咖啡（Langsuan、Jasmine City、Gaysorn Plaza、EmquartierSky Garden）；他感谢“The Melting Clock”的 Fiorentino Conte，在多次关键的线上晚餐时段会议期间提供了盛情款待。

参考文献

[Al-Agl Brown, Steiner 2002]Al-Agl F A, Brown R, Steiner R (2002) 多重范畴：球状方法与立方方法的等价 Adv Math 170(1):71-118[Baez 1997]Baez J C (1997) n-范畴导论 Category Theory and Computer Science（Santa Margherita Ligure 1997）Moggi E, Rosolini G（编），计算机科学讲义 1290:1-33 Springer arXiv:q-alg/9705009[Baez Dolan 1995]Baez J, Dolan J (1995) 高维代数与拓扑量子场论 J Math Phys 36:6073- 6105 arXiv:q-alg/9503002[B´enabou 1967]B´enabou J (1967) 双范畴导论 中西部范畴研讨会报告 B´enabou J 等（编）数学讲义 47 Springer[Batanin 1998]Batanin M (1998) 作为弱 n-范畴理论天然环境的幺半球状范畴 Advances in Mathematics 136(1):39-103[Batanin 2022]Batanin M (2002) 弱化代数结构的 Penon 方法 纯粹与应用代数杂志 172(1):1-23[Bejrakarbum 2016]Bejrakarbum P (2016) 带对合的弱球状高阶范畴 理学硕士论文 法政大学[Bejrakarbum 2023]Bejrakarbum P (2023) 带对合的弱球状高阶范畴：Leinster 方法 博士论文 法政大学[Bejrakarbum Bertozzini 2017]Bejrakarbum P, Bertozzini P (2017) 带对合的弱球状高阶范畴 arXiv:1709.09336 [math.CT][Bertozzini Conti Dawe Martins 2014]Bertozzini P, Conti R, Dawe Martins R (2014) 带对合的双范畴（手稿）[Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul 2008]Bertozzini P, Conti R, Lewkeeratiyutkul W (2008) 非交换几何范畴与量子物理 数学与应用论文集 II East-West J Math 特刊 2007:213-259 arXiv:0801.2826v2[Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul 2012]Bertozzini P, Conti R, Lewkeeratiyutkul W (2012) 范畴化非交换几何 J Phys: Conf Ser 346:012003 arXiv:1409.1337[Bertozzini Conti Lewkeeratiyutkul Suthichitranont 2020]Bertozzini P, Conti R, Lewkeeratiyutkul W, Suthichitranont N (2020) 关于严格高阶 C*-范畴 Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques LXI(3):239-348[Bertozzini Puttirungroj 2014]Bertozzini P, Puttirungroj C (2014) 混合范畴 AMM2014 会议论文集（第 19 届年度数学会议，2014 年 3 月 20—22 日，A-One 酒店，芭堤雅，泰国）119-128

[Borceux 1994]Borceux F (1994) 范畴代数手册 I-II-III 剑桥大学出版社[Burroni 1971]Burroni A (1971) T-范畴（一个三元组中的范畴）Cahiers de Topologie et G´éom´étrie Diff´érentielle 12:215- 321[Cheng Lauda 2004]Cheng E, Lauda A (2004) 高维范畴：图解指南 IMA 研讨会[Chikhladze 2015]Chikhladze D (2015) 幺半群的松形式理论、双范畴结构的幺半方法与广义歌剧集 Theory and Applications of Categories 30(10), 2015, pp. 332–386. arXiv:1412.4628[Eilenberg Mac Lane 1945]Eilenberg S, Mac Lane S (1945) 自然等价的广义理论 美国数学会汇刊 58:231-294[Godement 1958]Godement R (1958) 代数拓扑与层论 Actualit´es Sci Ind Publ Math Univ Strasbourg 1252 Hermann[Hermida 1997]Hermida C (1997) 高维多范畴（幻灯片）[Kachour 2022]Kachour C (2022) 带联络的立方弱 ∞-范畴的代数模型 范畴、一般代数结构及其应用 16(1):143-187 Kachour C (2022) 立方弱高阶结构的代数模型 范畴、一般代数结构及其应用 16(1):189- 220[Kelly 1980]Kelly G M (1980) 自由代数、自由幺半群、余极限、伴随层等的超限构造统一处理 澳大利亚数学会公报 22:1-83[Leinster 2001]Leinster T (2001) 高维范畴论中的结构 arXiv:math/0109021[Leinster 1998]Leinster T (1998) 基本双范畴 arXiv:math/9810017[Leinster 2004]Leinster T (2004) 高阶运算子、高阶范畴 剑桥大学出版社 arXiv:math/0305049 [math.CT]n-Lab 中的相干性]n-Lab https://ncatlab.org/nlab/show/coherence+定理+关于+幺半+范畴[Penon 1999]Penon J (1999) 非严格范畴的多图方法 Cahiers de Topologie et G´éometrie Diff´érentielle 40(1):31-80[Riehl 2016]Riehl E (2016) 语境中的范畴论 Dover[Street 1972]Street R (1972) 幺半群的形式理论 纯粹与应用代数杂志 2(2):149-168[Yau 2020]Yau D (2020) 对合范畴论 数学讲义 2279 Springer