arXiv:2303.16474v1 [math.AT] 29 Mar 2023

# 三个球面乘积上的自由对合轨道空间

DIMPI 和 HEMANT KUMAR SINGH

Abstract. 本文确定了一个有限型空间上的自由对合的轨道空间，该空间具有与三个球面的乘积相同的模 2 上同调 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^l$，$1 \leq n \leq m \leq l$。本文推广了 Dotzel 等人关于 [6] 两个球面乘积上的自由对合 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$的$1 \leq n \leq m$. 研究结果。作为应用，我们还推导出了 Borsuk-Ulam 型结果。

## 1. 引言

设 $G$ 是一个紧李群，作用于紧 Hausdroff 空间 $X$. 。自二十世纪初以来，许多数学家一直致力于研究轨道空间 $X/G$，特别是当 $G$ 在 $X$上自由作用时。1925—1926 年，H. Hopf 提出了对球面上有限循环群的自由作用所产生的轨道空间进行分类的问题。一般而言，要在同胚或同伦型意义下对轨道空间进行分类十分困难。在这一方向上，Oliver[15] 证明，紧李群 $G$ 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的作用所产生的轨道空间是可缩的。1964年，Hirsch 等人 [9] 证明， $n$球面 $\mathbb{S}^n$ 上的自由对合的轨道空间具有 $\mathbb{R}P^n$.的同伦型。此外， $n$球面 $\mathbb{S}^n$ 上的有限群作用所产生的轨道空间也已在[14, 17–19]中得到研究。Su [21] 确定了球面上自由圆周作用的轨道空间。Tao[22] 确定了 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. 上的自由对合的轨道空间。Ritter [20] 将 Tao 的结果推广到了阶为 $2n$. 的循环群。1972年，Ozeki 等人 [16] 确定了一个流形上自由圆周作用的轨道空间；该流形的上同调环在整数系数下与球面的乘积 $\mathbb{S}^{2n+1} \times \mathbb{S}^{2n+1}$ 同构。有限型空间 $X$ 上由 $G = \mathbb{Z}_p$、$p$（其中 $p$为素数）或 $G = \mathbb{S}^d$、$d = 1$（其中 $d = 1$ 为 3）的自由作用所产生的轨道空间，若其模 2 或有理上同调环与两个球面的乘积 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$同构，则已在 [6] 和 [8]中得到研究。然而，对于球面以外的紧流形，相关结果鲜为人知。Myers [12] 确定了以下空间上的自由对合的轨道空间：

2020年数学主题分类。主要分类 57S17；次要分类 57S25。关键词和短语。自由作用；有限型空间；Leray-Serre 谱序列；轨道空间。本文第一作者获得了 UGC的SRF（新德里）资助，参考编号为：201610039267。

三维透镜空间。最近，Dey 等人 [7], Morita 等人 [11], 和 Singh [13]分别讨论了实 Milnor 流形、Dold 流形以及两个射影空间的乘积上的自由对合所产生的轨道空间。

延续这一研究脉络，本文旨在研究具有与三个球面的乘积 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^l, n \leq m \leq l.$ 相同的模 2 上同调的有限型空间上自由对合的轨道空间。例如：(1) 复 Stiefel 流形 $V_n$, $_{n-3}$ 对所有 $n \geq 5$ [1] 都具有与三个球面的乘积 $\mathbb{S}^{2n-9} \times \mathbb{S}^{2n-7} \times \mathbb{S}^{2n-5}$ 相同的整数上同调，并允许如下定义的自由对合：$(v_1, v_2, \cdots, v_{n-3}) \mapsto (gv_1, gv_2, \cdots, gv_{n-3})$，其中 $v_i's$, $1 \leq i \leq n-3$ 是 $\mathbb{C}^n$ 和 $g \in \mathbb{Z}_2$ 中的正交规范向量；(2) 特殊酉 3 群与球面 $SU(3) \times \mathbb{S}^l$ 以及酉 2 群与球面 $U(2) \times \mathbb{S}^l$ 的乘积，分别具有与三个球面的乘积 $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^l$ 和 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^l$ 相同的整数上同调 [2]。考虑通过对 $SU(3)$ 和 $U(2)$ 施加 $G = \mathbb{Z}_2$ 的平凡作用，并对 $\mathbb{S}^l.$ 施加对跖作用而得到的 $SU(3) \times \mathbb{S}^l$ 和 $U(2) \times \mathbb{S}^l$ 上的对角作用。这分别在 $SU(3) \times \mathbb{S}^l$ 和 $U(2) \times \mathbb{S}^l$ 上给出了自由对合。本文推广了 Dotzel 等人关于两个球面的乘积 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, 1 \leq n \leq m.$ 上自由对合的结果 [6]。作为应用，我们还确定了 Borsuk-Ulam 型结果。

## 2. Preliminaries

本节回顾本文中使用的一些基本定义和结果。若一个旁紧 Hausdroff 空间的每个开覆盖都有有限维开覆盖细化，则称其为有限型空间。这是研究变换群的总空间与其轨道空间之间上同调结构关系的最适宜的拓扑空间。它包括所有紧 Hausdroff 空间以及具有有限覆盖维数的旁紧空间。设 $G$ 是作用在有限型空间 $X.$ 上的有限循环群。相应的 Borel 纤维化为 $X \overset{i}{\hookrightarrow} X_G \overset{\pi}{\to} B_G$，其中 $X_G = (E_G \times G)/G$（Borel 空间）是通过 $G$ 在空间 $X \times E_G$ 上的对角作用得到的，而 $B_G$（分类空间）是 $G$ 在可缩空间 $E_G.$ 上自由作用的轨道空间。我们回顾与 Borel 纤维化 $X \overset{i}{\hookrightarrow} X_G \overset{\pi}{\to} B_G.$ 相关的 Leray-Serre 谱序列的一些结果。关于证明，请参阅 [3, 10]。

命题2.1.（[10]）设 $B_G$ 上的局部系数系是简单的。则，同态 $i^*$： $H^*(X_G) \to H^*X$（$\pi^*$）和 $H^*$: $B_G$（$\to H^*$）$X_G$（）是边同态，

$$H^k(B_G) = E_2^{k,0} \to E_3^{k,0} \to \cdots E_k^{k,0} \to E_{k+1}^{k,0} = E_\infty^{k,0} \subset H^k(X_G), \text{ and}$$
$$H^i(X_G) \to E_\infty^{0,i} \hookrightarrow E_{l+1}^{0,i} \hookrightarrow E_l^{0,i} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_2^{0,i} \hookrightarrow E_2^{0,i} \hookrightarrow H^i(X), \text{ respectively.}$$

命题2.2。 （[10]）设 $G=\mathbb{Z}_2$ 作用于有限型空间 $X$ 且 $\pi_1$（$B_G$）在 $H^*$（$X$）上作用平凡。 那么， $B_G$ 上的局部系数系是简单的，并且

$$E_2^{k,i}=H^k(B_G)\otimes H^i(X),\ k,i\geq 0.$$

命题 2.3.（[3]）设 $G=\mathbb{Z}_2$ 作用于有限型空间 $X$，且 $\pi_1$（$B_G$）在 $H^*$（$X$）上非平凡作用。那么，纤维化$X\overset{i}{\hookrightarrow}X_G\overset{\pi}{\to}B_G$ 的 Leray-Serre 谱序列的 $E_2$ 项为

$$E_2^{k,i}=\begin{cases}\ker\ \tau & \text{for } k=0,\\ \ker\ \tau/\mathrm{im}\ \sigma & \text{for } k>0,\end{cases}$$

其中 $\tau=\sigma=1+g^*$， $g^*$ 由 $G$.的一个生成元 $g$ 诱导

命题 2.4.（[10]）设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X$. 上自由作用。那么，Borel 空间 $X_G$ 与轨道空间 $X/G$.同伦等价

命题 2.5.（[3]）设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X$. 上自由作用。若 $H^i$（$X;\mathbb{Z}_2$） $=0\ \forall\ i>n$, 则 $H^i$（$X/G;\mathbb{Z}_2$） $=0\ \forall\ i>n$.

命题 2.6.（[3]）设 $G=\mathbb{Z}_2$ 作用于有限型空间 $X$.。假设对所有 $i>2n$， $H^i$（$X;\mathbb{Z}_2$） $=$ 0，且 $H^{2n}$（$X;\mathbb{Z}_2$） $=\mathbb{Z}_2$.。若存在元素 $a\in H^n$（$X;\mathbb{Z}_2$），使得 $ag^*$（$a$） $\neq 0$，其中 $g$ 是 $G$ 的一个生成元，则不动点集非空。

命题 2.7. ([3]) 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 作用于有限型空间 $X$.。那么，对于任意 $a\in H^n(X)$，元素 $ag^*(a)$ 是 $X_G\to B_G$.的谱序列中的永久上循环

回忆一下， $H^*(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[a,b,c]/<a^2,b^2,c^2>$，其中 $a=n$的次数、$b=m$ 的次数以及 $c=l$, $1\leq n\leq m\leq l$.的次数
本文中， $H^*(X)$ 表示空间 $X$ 的系数群为 $G=\mathbb{Z}_2$的 Čech 上同调，而 $X\sim_2 Y$ 表示 $H^*(X;\mathbb{Z}_2)\cong H^*(Y;\mathbb{Z}_2)$。

## 3. The Cohomology Algebra of The Orbit Space of Free involutions on $\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$

本节中，我们确定有限型空间 $X$ 上的自由对合的上同调环，这些空间的上同调环与三个球面的乘积同构， $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$，其中 $n\leq m\leq l$.。我们首先证明以下引理。

引理 3.1. 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$ 上自由作用，其中 $n<m<l$.。那么， $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上平凡作用。

证明. 对于 $l \neq m+n$，显然， $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上平凡作用。接下来，假设 $l = m+n.$。若 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上非平凡作用，那么必有 $g^*(c) = ab+c$，其中 $g$ 是 $\pi_1(B_G)$ 的生成元。因此，我们得到 $cg^*(c) = abc \neq 0$，这与命题 2.6 矛盾。因此，结论得证。□

注意，在以下两种情形下， $G = \pi_1(B_G)$可能在 $H^*(X)$上有非平凡作用：(i) $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m, n < m$，以及(ii) $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^l, n \leq l.$。首先，我们确定当$\pi_1(B_G)$在 $H^*(X)$上有非平凡作用时， $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^l$ 上自由对合的上同调代数。我们证明了以下定理。

定理 3.2. 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$上自由作用，其中$n < m.$。若 $\pi_1(B_G)$在 $H^*(X)$上有非平凡作用，则 $H^*(X/G)$同构于以下分次交换代数:

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/< x^{n+1}, y^2 + a_0 z, w^2, z^2, yw + a_1 x^n z, yz, wz, xy, xw >,$$

其中， $x = 1$、 $y = m$、 $w = m+n$、 $z = 2m$ 和 $a_0$的次数分别为 $a_1 \in \mathbb{Z}_2.$

证明。显然， $\pi_1(B_G)$ 在 $H^m(X)$ 上具有非平凡作用。令 $g$ 为 $\pi_1(B_G)$ 的一个生成元。非平凡作用恰有以下三种可能：(1) $g^*(b) = c$ & $g^*(c) = b$；(2) $g^*(b) = b$ & $g^*(c) = b+c$；以及 (3) $g^*(b) = b+c$ & $g^*(c) = c.$。首先，考虑由 $g^*(b) = c$ & $g^*(c) = b.$ 定义的非平凡作用。由杯积的自然性可得， $\pi_1(B_G)$ 在 $H^{m+n}(X)$ 上具有非平凡作用。注意，$\sigma = \tau = 1 + g^*.$。由命题 2.3 可得 $E^0, {}_2{}^i \cong \mathbb{Z}_2$ 以及 $E^k, {}_2{}^i = 0 \ \forall \ k > 0$、 $i = m$、$m+n.$。对于 $i \neq m$， $m+n$， $\pi_1(B_G)$ 在 $H^i(X)$ 上的作用是平凡的，因此， $E^k$, ${}_2{}^i \cong H^k(B_G) \otimes H^i(X)$。由命题 2.7， $1 \otimes bc$ 是一个永久上循环。如果 $d_{n+1}(1 \otimes a) = 0$, 那么至少有两条线在 $E_\infty$ 中存活，这是不可能的。因此，我们得到 $d_{n+1}(1 \otimes a) = t^{n+1} \otimes 1$，以及 $d_{n+1}(1 \otimes abc) = t^{n+1} \otimes bc.$。显然， $d_r = 0 \ \forall \ r > n+1.$。因此， $E^*, {}^*_{n+2} \cong E^*, {}_\infty{}^*.$。所以，我们有 $E^p, {}_\infty{}^q \cong \mathbb{Z}_2$，其中 $0 \leq p \leq n$、 $q = 0$、 $2m$； $p = 0$、$q = m$、 $n+m.$。由此，上同调群为

$$H^k(X_G) \cong \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & j \leq k \leq n+j, j = 0, 2m; k = m, m+n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

永久上循环 $t \otimes 1$、 $b+c$、 $ab+ac$ 和 $1 \otimes bc$ 分别确定元素 $x \in E^{1,}{}_\infty{}^0$、 $u \in E^{0,}{}_\infty{}^m$、$v \in E^{0,}{}_\infty{}^{n+m}$ 和 $s \in E^{0,}{}_\infty{}^{2m}$。因此，全复形 $\mathrm{Tot}E^{*,}{}_\infty{}^*$ 可表示为

$$\mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/< x^{n+1}, u^2 + a_0 s, v^2, s^2, uv, us, vs, xu, xv >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u = m$、deg $v = m + n$、deg $s = 2m$ 和 $a_0 \in \mathbb{Z}_2$. 。令 $y \in H^m(X_G)$ $w \in H^{m+n}(X_G)$ 和 $z \in H^{2m}(X_G)$，使得 $i^*(y) = b+c$、$i^*(w) = ab+ac$ 和 $i^*(z) = bc$，分别成立。显然，我们有 $yw + a_1x^nz = 0$、$a_1 \in \mathbb{Z}_2$。根据命题 2.4，分次交换代数 $H^*(X/G)$ 可表示为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+1}, y^2 + a_0z, w^2, z^2, yw + a_1x^nz, yz, wz, xy, xw >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = m$、deg $w = m + n$、deg $z = 2m$，以及 $a_0$、$a_1 \in \mathbb{Z}_2$. 。对于 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^m(X)$ 上的另外两个非平凡作用，我们得到相同的上同调代数。□

注 3.3. 在上述定理中，如果 $a_0 = a_1 = 0$，那么 $X/G \sim_2 (\mathbb{RP}^n \times S^{2m}) \vee \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^{m+n}$.

现在，对于有限型空间 $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^l$， $n \leq l$，我们有如下定理。

定理 3.4. 设 $G = \mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^l$ 上自由作用，其中$n \leq l$. 。如果 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上非平凡作用，那么 $H^*(X/G)$ 同构于以下分次交换代数之一:

(1) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{2n+l+1}, I_j, z^2, xy, zx, x^{l-2n+1}w >_{1\leq j\leq 4}$，其中 $x = 1$ 的次数、$y = n$ 的次数、 $w = 2n$ 的次数和 $z = n + l$ 的次数； $I_1 = y^2 + a_1x^{2n} + a_2w$, $I_2 = w^2+a_3x^{4n}+a_4x^{2n}w+a_5z, I_3 = yw+a_6x^{3n}+a_7x^nw$ 和 $I_4 = yz+a_8x^{2n+l}$,$a_i \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq 8$； $a_3 = 0$ 若 $l < 2n$， $a_4 = 0$ 若 $l < 4n$， $a_5 = 0$ 若 $l \neq 3n$，以及 $a_7 = 0$ 若 $l < 3n$.

(2) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{l+1}, I_j, z^2, xy, zx >_{1\leq j\leq 4}$，其中 $x = 1$ 的次数、 $y = n$ 的次数、 $w = 2n$ 的次数和 $z = n + l$ 的次数； $I_1 = y^2 + a_1x^{2n} + a_2w$, $I_2 = w^2 + a_3x^{4n} + a_4x^{2n}w + a_5z, I_3 = yw + a_6x^{3n} + a_7x^nw + a_8z$ 和 $I_4 = yz + a_9x^lw$, $a_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq 9$； $a_1 = a_4 = 0$ 若 $l < 2n$， $a_3 = 0$ 若 $l < 4n$， $a_5 = 0$ 若$l \neq 3n$, $a_6 = 0$ 若 $l < 3n$ ，以及 $a_8 = 0$ 若 $l \neq 2n$.(3) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+1}, I_j, w^2, z^2, wz, xz, xy >_{1\leq j\leq 3}$，其中 $x = 1$ 的次数、 $y = n$ 的次数和 $w=$ 的次数 $z = 2n$ 的次数; $I_1 = y^2 + a_1w + a_2z, I_2 = yw + a_3x^nw$ 和 $I_2 = yz + a_4x^nw, a_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq 4$.

证明。我们考虑两种情形：（i） $n < l$ 和（ii） $n = l$.
情形（i）：假设 $n < l$.
显然，如果 $l \neq 2n$，那么 $\pi_1(B_G)$ 必须在 $H^n(X)$ 上有非平凡作用。现在，若 $l = 2n$和 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^{2n}(X)$ 上有非平凡作用，则必有 $g^*(c) = c + ab$. 因此，我们得到 $cg^*(c) = abc \neq 0$. 根据命题 2.6，不动点集为空，这就产生了矛盾。因此， $\pi_1(B_G)$ 总是在 $H^{2n}(X)$ 上平凡作用。所以， $\pi_1(B_G)$ 必须有非平凡作用

于 $H^n(X)$ 上。如定理 3.2 所示，在 $H^n(X)$ 上的非平凡作用恰有三种可能。假设 $g^*(a) = b$ 且 $g^*(b) = a$. 因此，我们得到 $g^*(ac) = bc$且 $g^*(bc) = ac$，其中 $g$ 是 $\pi_1(B_G)$ 的生成元。注意 $\sigma = \tau = 1 + g^*$. 根据命题 2.3，我们有 $E^{0,i}_2 \cong \mathbb{Z}_2, i = n, n+l$ 且 $E^{k,i}_2 = 0 \ \forall \ k > 0, \ i = n, n+l$.对于 $i \neq n, n+l$, $\pi_1(B_G)$ 在 $H^i(X)$ 上平凡作用。因此，对于 $l \neq 2n$, $E^{k,i}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \ \forall \ k \geq 0$; $i =$0, $l, 2n, 2n+l$ 以及对于 $l = 2n$, $E^{k,i}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \ \forall \ k \geq 0$, $i = 0$ & $4n$ 和 $E^{k,2n}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \ \forall \ k \geq 0$.根据命题 2.7， $1 \otimes ag^*(a) = 1 \otimes ab$ 是一个永久上循环。若 $d_{n+1}$ 是非平凡的，则得到 $d_{n+1}(a+b) = t^{n+1} \otimes 1$. 因此，我们有 $0 = d_{n+1}((a+b)(t \otimes 1)) = (t^{n+1} \otimes 1)(t \otimes 1) = t^{n+2} \otimes 1$，这是不可能的。因此， $d_{n+1}(a+b) = 0$. 假设 $d_{l-2n+1} \neq 0$. 那么，必有 $2n < l$ 且 $d_{l-2n+1}(1 \otimes c) = t^{l-2n+1} \otimes ab$. 我们得到 $E^*_{l-2n+2} = E^*_{2n+l}$. 由于 $G$ 在 $H^*(X)$ 上自由作用，必有 $d_{2n+l+1}(1 \otimes abc) = t^{2n+l+1} \otimes 1$. 因此，$E^*_{2n+l+2} = E^*_\infty$，从而 $E^{p,q}_\infty \cong \mathbb{Z}_2$，其中 $0 \leq p \leq 2n+l, q = 0$; $0 \leq p \leq l-2n, q = 2n$; $p = 0, q = n, n+l$.因此，上同调群为

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k < 2n, k \neq n; l < k \leq 2n+l, k \neq n+l \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & 2n \leq k \leq l, k = n, n+l. \end{cases}$$

永久上循环 $t \otimes 1$、 $a+b$、 $1 \otimes ab$ 和 $c$（$a+b$）分别确定元素 $x \in E^{1,0}_\infty$、 $u \in E^{0,n}_\infty$、 $v \in E^{0,2n}_\infty$ 和 $s \in E^{0,n+l}_\infty$。因此，全复形为

$$\mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/< x^{2n+l+1}, u^2 + \gamma_1 v, v^2, s^2, uv, us, vs, xu, x^{l-2n+1}v, sx >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u = n$、deg $v = 2n$、deg $s = n+l$ 和 $\gamma_1 \in \mathbb{Z}_2$. 。令 $y \in H^n(X_G)$ $w \in H^{2n}(X_G)$ 和 $z \in H^{n+l}(X_G)$，使得 $i^*(y) = a+b$、 $i^*(w) = ab$ 和 $i^*(z) = c(a+b)$ 分别成立。我们有 $I_1 = y^2 + a_1 x^{2n} + a_2 w = 0$、 $I_2 = w^2 + a_3 x^{4n} + a_4 x^{2n} w + a_5 z = 0$； $I_3 = yw + a_6 x^{3n} + a_7 x^n w = 0$ 和 $I_4 = yz + a_8 x^{2n+l} = 0$，其中 $a_i \in \mathbb{Z}_2$、 $1 \leq i \leq 8$；若 $l < 2n$，则 $a_3 = 0$；若 $l < 4n$，则 $a_4 = 0$；若 $l \neq 3n$，则 $a_5 = 0$；若$l < 3n.$，则 $a_7 = 0$。根据命题 2.4，分次交换代数 $H^*(X/G)$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/< x^{2n+l+1}, I_j, z^2, x^{l-2n+1}w, wz, xz, xy >_{1 \leq j \leq 4},$$

其中 $x = 1$、 $y = n$、 $w = 2n$ 和 $z = n+l.$ 的次数。这实现了可能性（1）。

现在，设 $d_{l-2n+1} = 0$.如果 $d_{l+1} = 0$，那么至少有两条线存活到无穷远，这与命题 2.5 矛盾。因此，我们有 $d_{l+1}(1 \otimes c) = t^{l+1} \otimes 1$，从而$d_{l+1}(1 \otimes abc) = t^{l+1} \otimes ab$. 因此，微分 $d_r = 0 \ \forall \ r > l+1$，这意味着$E^{*,*}_\infty = E^{*,*}_{l+2}$. 于是， $E^{p,q}_\infty \cong \mathbb{Z}_2$，其中 $0 \leq p \leq l$、 $q = 0$、 $2n$； $p = 0$、 $q = n$、 $n+l$.

对于 $l < 2n$，上同调群 $H^k(X_G)$ 由下式给出

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & j \le k \le l+j, j = 0, 2n \text{ and } k \ne n, n+l \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, n+l, \end{cases}$$

并且，对于 $l \ge 2n$，我们有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k \le 2n, k \ne n; l < k \le 2n+l, k \ne n+l \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, n+l, 2n \le k \le l. \end{cases}$$

永久上循环 $t \otimes 1$、 $a+b$、 $1 \otimes ab$ 和 $c(a+b)$ 分别确定元素 $x \in E^{1,\ \infty^0}$、 $u \in E^{0,\ \infty^n}$、 $v \in E^{0,\ \infty^{2n}}$ 和 $s \in E^{0,\ \infty^{n+l}}$。因此，全复形为

$$\mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/ < x^{l+1}, u^2 + \gamma_1 v, v^2, s^2, uv + \gamma_2 s, us, vs, xu, xv >,$$

其中， $x = 1$ 的次数、 $u = n$ 的次数、 $v = 2n$ 的次数、 $s = n+l$ 的次数，以及 $\gamma_1$、 $\gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$、 $\gamma_2 = 0$。若 $l \ne 2n.$，令 $y \in H^n(X_G)$ $w \in H^{2n}(X_G)$ 和 $z \in H^{n+l}(X_G)$，使得 $i^*(y) = a + b$、 $i^*(w) = ab$ 和 $i^*(z) = ac + cb$，分别成立。我们有 $I_1 = y^2 + a_1 x^{2n} + a_2 w = 0$、 $I_2 = w^2 + a_3 x^{4n} + a_4 x^{2n} w + a_5 z = 0$、 $I_3 = yw + a_6 x^{3n} + a_7 x^n w + a_8 z = 0$ 和 $I_4 = yz + a_9 x^l w = 0$，其中$a_i \in \mathbb{Z}_2$、 $1 \le i \le 9$；若 $l < 2n$，则 $a_3 = 0$；若 $l < 4n$，则 $a_5 = 0$；若 $l \ne 3n$，则 $a_6 = 0$；若$l < 3n$，则 $a_8 = 0$；若 $l \ne 2n$。因此，分次交换代数 $H^*(X/G)$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{l+1}, I_j, z^2, wz, xy, xw >_{1 \le j \le 4},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = 2n$ 和 deg $z = n + l.$。这实现了可能性 (2)。

情形（ii）：设 $n = l.$

由于 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^n(X)$ 上非平凡作用， $g^*$ 必须固定 $H^n(X)$ 的一个或两个生成元。若 $g^*$ 固定一个生成元，即 $g^*(a) = a$，则在此情形下，三种非平凡作用是可能的： $g^*(b) = c$， $g^*(c) = b$； $g^*(b) = a + b$， $g^*(c) = a + c$； $g^*(b) = a + c$， $g^*(c) = a + b$。进一步地，若 $g^*$ 固定两个生成元，即 $g^*(a) = a$， $g^*(b) = b$，则在此情形下也有三种可能的非平凡作用： $g^*(c) = a + c$； $g^*(c) = b + c$； $g^*(c) = a + b + c.$。这给出了 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^n(X)$ 上非平凡作用的十八种不同可能性。现在，考虑一个定义为 $g^*(a) = a$， $g^*(b) = c$ 以及 $g^*(c) = b.$ 的非平凡作用。因此，我们有 $g^*(ab) = ac$， $g^*(bc) = bc$ 以及 $g^*(ac) = ab.$。由命题 2.6， $E_2$ 页由下式给出

$$E_2^{k,i} = \begin{cases} \ker \tau & \text{for } k = 0, \\ \ker \tau / \operatorname{im} \tau & \text{for } k > 0. \end{cases}$$

注意，对于 $i = n$， $\tau =< a$的核为$b + c >$，像为 $\tau =< b + c >$；对于 $i = 2n$， $\tau =< bc$的核为$ab + ac) >$，像为 $\tau =< ab + ac > .$。因此，对于 $i = n$， $2n$，我们得到 $E^{0,\ i}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$， $E^{k,\ i}_2 \cong \mathbb{Z}_2\ \forall\ k > 0.$。并且，对于 $i = 0$， $3n$， $\pi_1(B_G)$ 在 $H^i(X)$ 上的作用是平凡的。因此，

我们得到 $E^k,\ {}_2{}^i \cong H^k(B_G) \otimes H^i(X) \cong \mathbb{Z}_2\ \forall\ k \geq 0.$。根据命题 2.7，$bg^*(b) = bc$ 是永久上循环。容易观察到，$d_{n+1}(a)$ 必定非零。因此，$d_{n+1}(a) = t^{n+1} \otimes 1.$。假设 $d_{n+1}(b+c) = a_0 t^{n+1} \otimes 1,\ a_0 \in \mathbb{Z}_2.$。因此，$d_{n+1}(1 \otimes abc) = (t^{n+1} \otimes 1)bc.$。所以，我们有 $E^*,\ {}^*_{n+2} = E^*,\ {}_\infty{}^*$，进而得到 $E^p,\ {}_\infty{}^q \cong \mathbb{Z}_2$，其中$0 \leq p \leq n,\ q = 0;\ 0 < p \leq n,\ q = 2n;\ p = 0,\ q = n$ 以及 $E^0,\ {}_\infty{}^{2n} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$。因此，$X/G$ 的上同调群为

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k < n; 2n < k \leq 3n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, 2n. \end{cases}$$

永久上循环 $t \otimes 1$, $c_0 a + b + c, c_0 \in \mathbb{Z}_2$, $bc$ 和 $ac + bc$ 分别确定元素 $x \in E^1{}_{,\infty}{}^0$, $u \in E^0{}_{,\infty}{}^n$, $v \in E^0{}_{,\infty}{}^{2n}$和 $s \in E^0{}_{,\infty}{}^{2n}$。因此，全复形 Tot$E^*{}_{,\infty}{}^*$为

$$\mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/< x^{n+1}, u^2 + \gamma_1 v + \gamma_2 s, v^2, s^2, ux, uv, us, vs, sx >,$$

其中 deg $x = 1$, deg $u = n$, deg $v =$ deg $s = 2n$, and $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2.$ 设 $y \in H^n(X_G)$ $w \in H^{2n}(X_G)$ 和 $z \in H^{2n}(X_G)$，使得 $i^*(y) = c_0 a + b + c, i^*(w) = bc$和 $i^*(z) = ab + ac$分别成立。显然，我们有 $I_1 = y^2 + a_1 w + a_2 z = 0$, $I_2 = yw + a_3 x^n w = 0$, 和$I_3 = yz + a_4 x^n w = 0$; $a_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq 4.$因此，分次交换代数$H^*(X/G)$为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/< x^{n+1}, I_j, w^2, z^2, wz, xz, xy >_{1 \leq j \leq 3},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = 2n$ 和 deg $z = 2n.$ 这实现了可能性 (3)。对于 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^n(X)$ 上的非平凡作用的其他可能性，我们得到与情形（i）和情形（ii）中相同的上同调代数。□

注记 3.5。 在定理 3.4 的可能性 (2) 中，如果取 $a_i = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq 9$，则 $X/G \sim_2 \mathbb{RP}^l \times S^{2n} \vee (\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{n+l})$；而如果在可能性 (3) 中取 $a_i = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq 4$，则 $X/G \sim_2 \mathbb{RP}^n \times S^{2n} \vee (\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{2n})$。

接下来，当 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$ 上作用平凡时，我们确定 $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^l$ 上自由对合的轨道空间。

回想一下，如果 $X \sim_2 \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^l,\ n < m < l$，那么 $\pi_1(B_G)$ 在 $H^*(X)$上的作用总是平凡的。对于其余情形，我们假设 $\pi_1(B_G$ 在 $H^*(X)$上的作用是平凡的。令$\{E_r^{*,*}, d_r\}$为 Borel 纤维化 $X \hookrightarrow X_G \to B_G$.的 Leray-Serre 谱序列。因此，由命题 2.2，我们得到

$$E_2^{k,i} = H^k(B_G) \otimes H^i(X)\ \forall\ k, i \geq 0.$$

因此，对于 $k=0,n,m,l,n+m,n+l,m+l,n+m+l$，有 $E^{k,\ 2^i}\cong\mathbb{Z}_2$，并且 $\forall\ i\geq 0$. 如果 $G=\mathbb{Z}_2$ 在 $X$上自由作用，那么在某个微分 $d_r$ 下， $1\otimes a$、 $1\otimes b$ 或 $1\otimes c$的像至少有一个非零，其中 $a,b,c$ 是 $H^*(X)$ 的生成元。注意

- 若 $d_{r_1}(1\otimes a)\neq 0$，则 $r_1=n+1$,
- 若 $d_{r_2}(1\otimes b)\neq 0$，则 $r_2=m-n+1$ 或 $m+1$，且
- 若 $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$，则 $r_3=l-m-n+1$、 $l-m+1$、 $l-n+1$ 或 $l+1$.

因此，以下情形是可能的:

(1) $d_{r_1}(1\otimes a)\neq 0$, (2) $d_{r_1}(1\otimes a)=0$ 且 $d_{r_2}(1\otimes b)\neq 0$, (3) $d_{r_1}(1\otimes a)=0$、 $d_{r_2}(1\otimes b)=0$ 且 $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$.

我们讨论了依赖于上述三种情形的以下定理:

定理 3.6. 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$ 上自由作用，其中$n\leq m\leq l$. 若 $d_{r_1}(1\otimes a)\neq 0$，则 $H^*(X/G)$ 同构于以下分次交换代数之一:

(1) $\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<x^{n+1}$、 $I_j$、 $z^2>_{1\leq j\leq 5}$，其中 deg $x=1$、deg $y=m$、deg $w=l$ 和 deg $z=m+l$； $I_1=y^2+a_1z+a_2x^ny+a_3x^{2m-l}w$、 $I_2=w^2+a_4x^{l-m}z+a_5x^ny+a_6x^nw$、 $I_3=yw+a_7z+a_8x^nw+a_9x^ny$、 $I_4=yz+a_{10}x^nz$, 以及 $I_5=wz+a_{11}x^nz$、 $a_i\in\mathbb{Z}_2$、 $1\leq i\leq 11$； $a_1=0$ 若 $n\leq m\neq l$, $a_2=a_8=a_{10}=0$ 若 $n<m\leq l$， $a_3=0$ 若 $2m-l>n$ 或 $l>2m$， $a_4=0$ 若 $l>m+n$， $a_5=a_6=a_9=a_{11}=0$ 若 $n<m$ 或 $m<l$. 中任一成立；(2) $\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<x^{n+1}$、 $I_j$、 $w^2$、 $z^2$、 $wz$、 $x^{l-m+1}y$、 $x^{l-m+1}w>_{1\leq j\leq 3}$，其中 deg $x=1$、deg $y=m$、deg $w=n+m$ 和 deg $z=m+l$； $I_1=y^2+a_1x^{m-n}w$、 $I_2=yw+a_2x^{m+n-l}z$，以及 $I_3=yz+a_3x^nz$、 $a_i\in\mathbb{Z}_2$、 $1\leq i\leq 3$； $a_1=0$ 若 $2m>n+l$； $a_3=0$ 若 $n<m$.

证明。若 $d_{r_1}(1\otimes a)\neq 0$，则 $r_1=n+1$ 且 $d_{n+1}(1\otimes a)=t^{n+1}\otimes 1$.。对于其余微分，可能有以下四种情形：(i) $d_{r_2}(1\otimes b)=d_{r_3}(1\otimes c)=0$，(ii) $d_{r_2}(1\otimes b)\neq 0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)=0$，(iii) $d_{r_2}(1\otimes b)=0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$，以及 (iv)$d_{r_2}(1\otimes b)\neq 0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$.

情形（i）： $d_{r_2}(1\otimes b)=0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)=0$.
在这种情形下，我们得到 $d_{n+1}(1\otimes ab)=t^{n+1}\otimes b$， $d_{n+1}(1\otimes ac)=t^{n+1}\otimes c$并且 $d_{n+1}(1\otimes abc)=t^{n+1}\otimes bc$. 因此， $d_r=0$ 对于所有 $r>n+1$. 因此， $E^{*,\ *}_{n+2}=E^{*,\infty^*}$.
如果 $n\leq m<l$，则为 $E^{p,\ q}_\infty\cong\mathbb{Z}_2$ 当 $0\leq p\leq n$、 $q=0$、 $m$、 $l$、 $m+l$ 时；否则为零 .

首先，我们考虑 $n < m < l.$
对于 $l > m + n$，上同调群 $H^k(X_G)$ 由下式给出

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & j \leq k < n + j, j = 0, m, l, m + l, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且，对于 $l \leq m + n$，我们有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & j \leq k < n + j, j = 0, m + l; m \leq k < l; m + n < k \leq n + l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & l \leq k \leq m + n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$E^*$的永久上循环 $t \otimes 1$、$1 \otimes b$、$1 \otimes c$ 和 $1 \otimes bc$，$_2{}^*$ 分别确定元素$x \in E^{1,}{}_\infty{}^0$、$u \in E^{0,}{}_\infty{}^m$、$v \in E^{0,}{}_\infty{}^l$和 $s \in E^{0,}{}_\infty{}^{m+l}$。因此，全复形由下式给出

$$\text{Tot } E_\infty^{*,*} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/ < x^{n+1}, u^2 + \gamma_1 v, v^2, s^2, uv + \gamma_2 s, us, vs >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u = m$、deg $v = l$ & deg $s = m+l$ 以及 $\gamma_1$、$\gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$、$\gamma_1 = 0$，如果 $l \neq 2m$.令 $y \in H^m(X_G)$ $w \in H^l(X_G)$ 和 $z \in H^{m+l}(X_G)$ 满足 $i^*(y) = b$、$i^*(w) = c$，以及$i^*(z) = bc$，分别成立。显然，$I_1 = y^2 + b_1 x^{2m-l} w = 0$、$I_2 = w^2 + b_2 x^{l-m} z = 0$ &$I_3 = yw + b_3 z = 0$，其中 $b_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \leq i \leq 3$、$b_1 = 0$，如果 $2m > n + l$ 或 $l > 2m$，以及 $b_2 = 0$，如果 $l > m + n.$。根据命题 2.4，轨道空间 $X/G$ 的上同调环由下式给出

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+1}, I_j, z^2, yz, wz >_{1 \leq j \leq 3},$$

其中 $x = 1$ 的次数、$y = m$ 的次数、$w = n+m$ 的次数和 $z = m+l.$ 的次数。通过令 $a_i = 0$ 对应 $i = 1$、2、5、6 和 $8 \leq i \leq 11.$，即可实现可能性（1）。
现在，我们考虑 $n = m < l.$
对于 $l > 2n$，上同调群 $H^k(X_G)$ 由下式给出

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & j \leq k < n + j; n + j < k \leq 2n + j, j = 0, l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, n + l, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且，对于 $l \leq 2n$，我们得到

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k < n; n + j < k < l + j, j = 0, n; n + l < k \leq 2n + l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, n + l; l \leq k \leq 2n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，全复形与.....的情形相同，其中 $n < m < l.$ 显然，
$I_1 = y^2 + b_1 x^{2n-l} w + b_2 x^n y = 0$、$I_2 = w^2 + b_3 x^{l-n} z = 0$、$I_3 = yw + b_4 z + b_5 x^n w = 0$

且 $I_4 = yz + b_6x^nz = 0$ 其中 $b_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \le i \le 6$、$b_1 = b_3 = 0$，若 $l > 2n$. 因此，轨道空间 $X/G$ 的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+1}, I_j, z^2, wz >_{1\le j\le 4},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = l$ & deg $z = n + l$. 通过令 $a_i = 0$ for $i = 1$、5、6、9、11，实现了可能性（1）。

若 $n \le m = l$，则 $E^{p,}{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$ for $0 \le p \le n$、$q = 0$、$2m$；$E^{p,}{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ for $0 \le p \le n$、$q = m$，其他情况下为零。对于 $n < m = l$，上同调群为

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & j \le k \le n + j, j = 0, 2m, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & m \le k \le m + n, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

并且，对于 $n = m = l$，有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n, 2n < k \le 3n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n < k < 2n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, 2n, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

因此，全复形为

$$\text{Tot } E_{\infty}^{*,*} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/ < x^{n+1}, u^2 + \gamma_1 s, v^2 + \gamma_2 s, s^2, uv + \gamma_3 s, us, vs >,$$

其中 $\gamma_1$、$\gamma_2$、$\gamma_3 \in \mathbb{Z}_2$、deg $x = 1$、deg $u =$ deg $v = m$ 以及 deg $s = 2m$.

若 $n < m = l$，则得到 $I_1 = y^2 + b_1z = 0$、$I_2 = w^2 + b_2z = 0$ 和 $I_3 = yw + b_3z = 0$，其中 $b_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \le i \le 3$. 因此，轨道空间 $X/G$ 的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+1}, I_j, z^2, yz, wz >_{1\le j\le 3},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y =$ deg $w = m$ & deg $z = 2m$. 通过取 $a_i = 0$ for $i = 2$、3、5、6 & $8 \le i \le 11$.实现了可能性（1）

如果 $n = m = l$，则得到 $I_1 = y^2 + b_1z + b_2x^ny + b_3x^nw = 0$、$I_2 = w^2 + b_4z + b_5x^ny + b_6x^nw = 0$、$I_3 = yw + b_7z + b_8x^nw + b_9x^ny = 0$、$I_4 = yz + b_{10}x^nz = 0$ and$I_5 = wz + b_{11}x^nz = 0$、$b_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \le i \le 11$. 因此，轨道空间$X/G$的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+1}, I_j, z^2 >_{1\le j\le 5},$$

wh其中 deg $x = 1$、deg $y =$ deg $w = n$ and $z = 2n$. 实现了可能性（1）　　.

情形（ii）$d_{r_2}(1 \otimes b) \ne 0$ & $d_{r_3}(1 \otimes c) = 0$.

此情形仅在 $n = m$. 我们有 $d_{n+1}(1 \otimes a) = d_{n+1}(1 \otimes b) = t^{n+1} \otimes 1$. 因此，$d_{n+1}(1 \otimes ac) = d_{n+1}(1 \otimes bc) = t^{n+1} \otimes c$，$d_{n+1}(1 \otimes ab) =$

$t^{n+1}\otimes(a+b)$ & $d_{n+1}(1\otimes abc) = t^{n+1}\otimes(bc+ac)$。因此， $E^{*,\ *}_{n+2} = E^{*,\ \infty^*}$. 元素$t\otimes 1$、$1\otimes(a+b)$ $1\otimes c$和 $1\otimes c(a+b)$ 是永久上循环，而 $X/G$ 的上同调群和上同调代数与情形（i）中相同，当 $n=m\leq l$.

情形（iii） $d_{r_2}(1\otimes b) = 0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$.

由于 $d_{r_1}(1\otimes a)\neq 0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$，很容易看出，当 $l>m+n$ 或 $n<m=l$时，此情形不可能成立

首先，我们考虑 $n\leq m<l\leq m+n$.如果 $l-m<n$，那么 $d_{l-m+1}$必定是非平凡的。因此，我们得到 $d_{l-m+1}(1\otimes c) = t^{l-m+1}\otimes b$和 $d_{l-m+1}(1\otimes ac) = t^{l-m+1}\otimes ab$. 显然，对于 $l-m+1<r<n+1.$， $d_r = 0$成立。由于 $d_{n+1}(1\otimes a) = t^{n+1}\otimes 1$，我们得到 $d_{n+1}(1\otimes abc) = t^{n+1}\otimes bc$. 因此， $E^{*,\ *}_{n+2} = E^{*,\infty^*}$，并且对于 $0\leq p\leq n$、 $q=0$、 $m+l$， $E^{p,\ q}_\infty\cong\mathbb{Z}_2$；对于 $0\leq p\leq l-m$、$q=m$、$n+m$， $E^{p,\ q}_\infty\cong\mathbb{Z}_2$，其他情况均为零。对于 $n<m<l<m+n$，上同调群由下式给出

$$H^k(X_G) = \begin{cases}\mathbb{Z}_2 & j\leq k\leq n+j, j=0, m+l; m+j\leq k\leq l+j, j=0, n,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $n=m<l<2n$，我们有

$$H^k(X_G) = \begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; n<k\leq l; 2n\leq k<n+l; n+l<k\leq 2n+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & k=n, n+l,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$E^*$的永久上循环 $t\otimes 1$、$1\otimes b$、 $1\otimes ab$ 和 $1\otimes bc$，$_2{}^*$ 分别确定元素 $x\in E^{1,\ \infty^0}$、 $u\in E^{0,\ \infty^m}$、 $v\in E^{0,\ \infty^{n+m}}$ 和 $s\in E^{0,\ \infty^{m+l}}$。全复形为

$$\text{全复形}_\infty^* = \mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/<x^{n+1}, u^2+\gamma_1 v, v^2, s^2, uv, us, vs, x^{l-m+1}u, x^{l-m+1}v>$$

其中 deg $x=1$、deg $u=m$、deg $v=n+m$ & deg $s=m+l$、 $\gamma_1\in\mathbb{Z}_2$、 $\gamma_1=0$ if $n<m$. 令 $y\in H^m(X_G)$ $w\in H^{n+m}(X_G)$ 和 $z\in H^{m+l}(X_G)$，使得 $i^*(y) = b$、 $i^*(w) = ab$，以及 $i^*(z) = bc$，分别成立。因此，对于 $n\leq m<l<n+m$，我们有 $I_1 = y^2+b_1x^{m-n}w = 0$、$I_2 = yw+b_2x^{m+n-l}z = 0$、 $I_3 = yz+b_3x^nz = 0$，其中 $b_1$、 $b_2$、$b_3\in\mathbb{Z}_2$ 以及 $b_1 = 0$ if$2m>n+l$、 $b_3 = 0$ if $n<m$. 因此，轨道空间 $X/G$ 的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<x^{n+1}, I_j, w^2, z^2, wz, x^{l-m+1}y, x^{l-m+1}w>_{1\leq j\leq 3},$$

其中 $x=1$、 $y=m$、 $w=n+m$ 和 $z=m+l$. 的次数。这实现了可能性 (2)。

接下来，我们考虑 $n\leq m<l=m+n$. 必须有 $d_{n+1}(1\otimes ab) = d_{n+1}(1\otimes c) = t^{n+1}\otimes b$. 因此， $d_{n+1}(1\otimes ac) = t^{n+1}\otimes(c+ab)$ 且 $d_{n+1}(1\otimes abc) = t^{n+1}\otimes bc$.

因此，我们得到 $E^*, {}^*_{n+2} = E^{*,}{}_\infty{}^*$. 元素 $t\otimes 1$、$1\otimes b$、$1\otimes(c+ab)$ 和 $1\otimes bc$ 都是永久上循环，而 $X/G$ 的上同调代数与情形（i）相同，其中 $n\le m<l$ 且 $l=m+n$.

最后，我们考虑 $n=m=l$. 必须有 $d_{n+1}(1\otimes a)=d_{n+1}(1\otimes c)=t^{n+1}\otimes 1$. 因此，我们得到 $E^*, {}^*_{n+2} = E^{*,}{}_\infty{}^*$. 元素 $t\otimes 1, 1\otimes b, 1\otimes(a+c)$ 和 $1\otimes b(a+c)$ 是永久上循环，且上同调代数与情形（i）中 $n=m=l$. 时相同

情形（iv） $d_{r_2}(1\otimes b)\neq 0$ & $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$.

在这种情形下，我们必须有 $n=m\le l$. 首先，我们考虑 $n=m<l$. 显然， $l<2n$ 或 $l\ge 3n$ 都不可能。现在，假设 $2n<l<3n$ 且 $d_{l-2n+1}$ 是非平凡的。因此，我们得到 $d_{l-2n+1}(1\otimes c)=t^{l-2n+1}\otimes ab$ 和 $d_r=0$，其中 $l-2n+1<r\le n$. 由于 $d_{n+1}(1\otimes a)=d_{n+1}(1\otimes b)=t^{n+1}\otimes 1$，我们有 $d_{n+1}(1\otimes ab)=t^{n+1}\otimes(a+b)$。因此，我们得到 $0=d_{n+1}\{(t^{l-2n}\otimes ab)(t\otimes 1)\}=t^{l-n+1}\otimes(a+b)$，这是不可能的。所以，我们必须有 $l=2n$. 我们得到 $d_{n+1}(1\otimes a)=d_{n+1}(1\otimes b)=t^{n+1}\otimes 1$ & $d_{n+1}(1\otimes ab)=d_{n+1}(1\otimes c)=t^{n+1}\otimes(a+b)$。因此， $E^*, {}^*_{n+2} = E^{*,}{}_\infty{}^*$. 元素 $t\otimes 1, 1\otimes(a+b)$ $1\otimes(ab+c)$ 和 $1\otimes(ac+bc)$ 是永久上循环，且 $X/G$ 的上同调代数与情形（i）中 $n=m<l=2n$. 时相同

接下来，我们考虑 $n=m=l$. 我们有 $d_{n+1}(1\otimes a)=d_{n+1}(1\otimes b)=d_{n+1}(1\otimes c)=t^{n+1}\otimes 1$. 因此，我们得到 $E^*, {}^*_{n+2} = E^{*,}{}_\infty{}^*$. 元素 $t\otimes 1, 1\otimes(a+b)$ $1\otimes(a+c)$ 和 $1\otimes(ab+ac+bc)$ 是永久上循环，并且 $X/G$ 的上同调代数与情形（i）中的相同，当 $n=m=l$. □

定理 3.7. 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X\sim_2 \mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$ 上自由作用，其中 $n\le m\le l$. 若 $d_{r_1}(1\otimes a)=0$ 且 $d_{r_2}(1\otimes b)\neq 0$，则 $H^*(X/G)$ 同构于以下分次交换代数之一：

(1) $\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<Q(x)\ I_j, z^2, x^{m-n+1}y, x^{m-n+1}z>_{1\le j\le 5}$，其中 $x=1$ 的次数、$y=n$ 的次数、 $w=l$ 的次数和 $z=n+l$ 的次数； $I_1=y^2+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-l}w+a_3x^ny, I_2=w^2+a_4x^lw+a_5x^{l-n}z+a_6x^{2l}, I_3=yw+a_7z+a_8x^{n+l}+a_9x^nw$, $I_4=yz+a_{10}x^nz+a_{11}x^{2n}w+a_{12}x^{2n+l}$ 和 $I_5=wz+a_{13}x^{n+m}w$, $a_i\in\mathbb{Z}_2$, $1\le i\le 13$; $a_2=0$ 若 $l>2n$， $a_3=a_{10}=0$ 若 $m<2n$，且 $a_5=0$ 若 $m<l$; $Q(x)=x^{n+m+j'+1}$, $j'=0$ 和 $l$. 若 $j'=0$，则 $a_4=0$ 若 $l>n+m$， $a_8=a_{13}=0$ 若 $m<l$，且 $a_6=a_{12}=0$. 若 $j'=l$，则 $a_9=0$ 若 $m<l$，且 $a_i=0$ 对于 $i=4$、11、13。

(2) $\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<x^{m+1}, I_j, z^2>_{1\le j\le 5}$，其中 $x$=1 的次数、 $y=n$ 的次数、 $w=l$ 和 $z=n+l$ 的次数； $I_1=y^2+a_1x^ny+a_2x^{2n-l}w+a_3x^{2n}+a_4z$, $I_2=w^2+a_5x^{l-n}z+a_6x^mw+a_7x^ny, I_3=yw+a_8z+a_9x^nw+a_{10}x^my$, $I_4=yz+a_{11}x^nz+a_{12}x^{2n}w$ 和 $I_5=wz+a_{13}x^mz$, $a_i\in\mathbb{Z}_2$,

$1 \leq i \leq 13$; $a_2 = 0$ 若 $l > 2n, a_3 = 0$ ; 若 $m < 2n, a_4 = a_7 = 0$ ; 若 $n < m$ 或 $m < l, a_6 = a_{10} = 0$ ; 若 $m < l$ 且 $a_5 = 0$ ; 若 $l > m + n, a_{12} = 0$ ; 若 $m > 2n$.

(3) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < Q(x)\ I_j,\ z^2,\ wz,\ x^{m-n+1}y,\ x^{m-n+1}z,\ a_0x^{l-m-n+1}w >_{1\leq j\leq 4}$, 其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = n + m$ 和 deg $z = n + l$; $I_1 = y^2 + a_1x^{2n} + a_2x^ny$, $I_2 = w^2 + a_3x^{n+m}w + a_4x^{2n+2m} + a_5x^{2m+n-l}z$, $I_3 = yw + a_6x^nw + a_7x^{2n+m} + a_8x^{n+m-l}z$ 和 $I_4 = yz + a_9x^{n+l-m}w + a_{10}x^nz + a_{11}x^{2n+l}$、 $a_i \in \mathbb{Z}_2$、 $0 \leq i \leq 11$; $a_2 = 0$ 若 $m < 2n$; $Q(x) = x^{l+j'+1}$, 或 $n + m$.

若 $j' = 0$, 则 $a_1 = 0$ 若 $l < 2n$, $a_3 = 0$ 若 $l < n + m$ 或 $m = l$, $a_4 = 0$ 若$l < 2n + 2m$ 或 $m = l$, $a_5 = 0$ 若 $l > m + 2n$ 或 $m = l$, $a_7 = 0$ 若 $l < 2n + m$, $a_8 = 0$ 若 $l > m + n$, $a_{10} = 0$ 若 $m > 2n$ 且 $a_0 = a_{11} = 0$.

若 $j' = n + m$, 则 $a_{10} = 0$ 若 $m < 2n$, $a_3 = 0$ 若 $l < 2n + 2m$, $a_6 = 0$ 若$l < 2n + m$, 且 $a_5 = a_8 = a_9 = 0$ & $a_0 = 1$.

(4) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{m+1},\ I_j,\ w^2,\ z^2,\ wz,\ x^{l-n+1}y,\ x^{l-n+1}w >_{1\leq j\leq 3}$, 其中 deg $x = 1$, deg $y = n$, deg $w = n + m$ & deg $z = n + l$; $I_1 = y^2 + a_1x^{2n} + a_2x^ny + a_3w$, $I_2 = yw + a_4x^nw + a_5x^{m+n-l}z$ & $I_3 = yz + a_6x^nz + a_7x^{l+n-m}w$, $a_i \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq 7$; $a_1 = a_7 = 0$ 若 $m < 2n$, $a_2 = a_4 = 0$ 若 $l < 2n$, $a_3 = 0$ 若$n < m$.

证明. 若 $d_{r_1}(1 \otimes a) = 0$ & $d_{r_2}(1 \otimes b) \neq 0$, 则要么 $r_2 = m - n + 1$ , 要么 $r_2 = m + 1$. 。在此定理中，我们考虑两种情形：(i) $d_{r_3}(1 \otimes c) = 0$ 以及 (ii) $d_{r_3}(1 \otimes c) \neq 0$.

情形（i）： $d_{r_3}(1 \otimes c) = 0$.

首先，假设 $r_2 = m - n + 1$. 。我们必有 $n < m \leq l$, 且 $d_{m-n+1}(1 \otimes b) = t^{m-n+1} \otimes a$. 。因此， $d_{m-n+1}(1 \otimes bc) = t^{m-n+1} \otimes ac$. 。假设 $d_{m+n-l+1}$ 是非平凡的。那么，我们有 $d_{m+n-l+1}(1 \otimes ab) = t^{n+m-l+1} \otimes c$. 。由于 $G$ 在 $X$ 上自由作用，我们必有 $d_{m+n+l+1}(1 \otimes abc) = t^{n+m+l+1} \otimes 1$. 。因此， $E^{*,\ *}_{n+m+l+2} = E^{*,\ \infty}$*以及 $E^{p,\ \infty}{}^q \cong \mathbb{Z}_2$ , 其中 $0 \leq p \leq n + m - l$、 $q = l$; $0 \leq p \leq m - n$、 $q = n$、 $n + l$; $0 \leq p \leq n + m + l$、 $q = 0$, 其余情况均为零。对于 $n < m < l$, 上同调群 $H^k(X_G)$ 给出如下:

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k < n; m + j < k < l + j, j = 0, n; m + l < k \leq m + n + l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & l \leq k \leq n + m; n + j \leq k \leq m + j, j = 0, l, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且，对于 $n < m = l$, 我们有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \leq k < n; 2m < k \leq 2m + n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n \leq k < m; m < k < n + m; n + m < k \leq 2m, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = m, n + m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$E^{*,*}_2$ 的永久上循环 $t\otimes 1$、$1\otimes a$、$1\otimes c$ 和 $1\otimes ac$ 分别确定元素 $x\in E^{1,0}_\infty$、$u\in E^{0,n}_\infty$、$v\in E^{0,l}_\infty$ 和 $s\in E^{0,n+l}_\infty$。全复形 $\mathrm{Tot}E^{*,*}_\infty$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/<x^{n+m+l+1},u^2+\gamma_1 v,v^2,s^2,uv+\gamma_2 s,us,vs,x^{m-n+1}u,x^{m-n+1}s,x^{m+n-l+1}v>,$$

其中 $\deg\ x=1$、$\deg\ u=n$、$\deg\ v=l$ & $\deg\ s=n+l$ 以及 $\gamma_1$、$\gamma_2\in\mathbb{Z}_2$、$\gamma_1=0$ 若 $l\neq 2n$.令 $y\in H^n(X_G)$ $w\in H^l(X_G)$ 和 $z\in H^{n+l}(X_G)$，使得 $i^*(y)=a$、$i^*(w)=c$ 以及 $i^*(z)=ac$，分别成立。显然，$I_1=y^2+b_1x^{2n}+b_2x^{2n-l}w+b_3x^ny=0$、$I_2=w^2+b_4x^{2l}+b_5x^{m-n}z=0$、$I_3=yw+b_6z+b_7x^{n+l}+b_8x^nw=0$，以及 $I_4=yz+b_9x^nz+b_{10}x^{2n+l}$、$b_i\in\mathbb{Z}_2$、$1\leq i\leq 10$；$b_2=0$ 若 $l>2n$、$b_3=0$ 若 $m<2n$、$b_5=b_8=0$ 若 $m<l$，以及 $b_9=0$若 $m<2n$。于是，轨道空间 $X/G$ 的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<x^{n+m+l+1},I_j,z^2,wz,x^{m-n+1}y,x^{m-n+1}z,x^{m+n-l+1}w>_{1\leq j\leq 4.}$$

其中 $\deg\ x=1$、$\deg\ y=n$、$\deg\ w=l$ 和 $\deg\ z=n+l.$。当 $j'=l.$时，这实现了可能性（1）

如果 $d_{m+n-l+1}$ 是平凡的，那么 $d_{n+m+1}$ 必须是非平凡的。因此，我们有 $d_{n+m+1}(1\otimes ab)=t^{n+m+1}\otimes 1.$。于是，$d_{n+m+1}(1\otimes abc)=t^{n+m+1}\otimes c.$。因此，$E^{*,*}_{n+m+2}=E^{*,*}_\infty$，从而 $E^{p,q}_\infty\cong\mathbb{Z}_2$，其中 $0\leq p\leq n+m$、$q=0$、$l$；$0\leq p\leq m-n$、$q=n$、$n+l$，其余情况为零。对于 $n<m<l\leq m+n$，上同调群 $H^k(X_G)$ 如下给出

$$\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; m+j<k<l+j, j=0,n; m+l<k\leq m+n+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n+j\leq k\leq m+j, j=0,l; l\leq k\leq n+m,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

并且，对于 $l>m+n$，我们有

$$H^k(X_G)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; m+j<k\leq n+m+j, j=0,l; l\leq k<n+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n+j\leq k\leq m+j, j=0,l,\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

对于 $n<m=l$，上同调群为

$$H^k(X_G)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; 2m<k\leq 2m+n,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n\leq k<m; m<k<n+m; n+m<k\leq 2m,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & k=m,n+m,\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

$t\otimes 1$、$1\otimes a$、$1\otimes c$ 和 $1\otimes ac$ 的永久上循环 $E^{*,*}_2$ 分别确定元素 $x\in E^{1,0}_\infty$、$u\in E^{0,n}_\infty$、$v\in E^{0,l}_\infty$ 以及 $s\in E^{0,n+l}_\infty$。因此，全复形 $\mathrm{Tot}E^{*,*}_\infty$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/ < x^{n+m+1}, u^2+\gamma_1 v, v^2, s^2, uv+\gamma_2 s, us, vs, x^{m-n+1}u, x^{m-n+1}s >,$$

其中， $x=1$、 $u=n$、 $v=l$ 和 $s=n+l$ 的次数为 $\gamma_1$、 $\gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$、 $\gamma_1=0$ ，如果 $l \neq 2n.$ 令 $y \in H^n(X_G)$ $w \in H^l(X_G)$和 $z \in H^{n+l}(X_G)$，使得 $i^*(y)=a$、 $i^*(w)=c$以及 $i^*(z)=ac$，分别如此。显然，我们有 $I_1=y^2+b_1x^{2n}+b_2x^{2n-l}w+b_3x^ny=0$ 、 $I_2=w^2+b_4x^lw+b_5x^{l-n}z=0$、 $I_3=yw+b_6z+b_7x^{n+m}+b_8x^nw=0$、 $I_4=yz+b_9x^nz+b_{10}x^{2n}w=0$ 以及 $I_5=wz+b_{11}x^{n+m}w=0$、 $b_i \in \mathbb{Z}_2$、 $1 \leq i \leq 11$；若 $l>2n$，则 $b_2=0$；若 $m>2n$，则 $b_3=0$；若 $l>n+m$，则 $b_4=0$；若 $m<l$，则 $b_5=b_7=b_{11}=0$；若 $m<2n.$，则 $b_9=0$。因此，轨道空间 $X/G$的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/< x^{n+m+1}, I_j, z^2, x^{m-n+1}y, x^{m-n+1}z >_{1\leq j\leq 5},$$

其中 deg $x=1$、deg $y=n$、deg $w=l$ 和 deg $z=n+l.$。当 $j'=0.$时，这实现了可能性（1）

接下来，我们考虑 $r_2=m+1.$ 我们有 $d_{m+1}(1\otimes b)=t^{m+1}\otimes 1.$ 因此，我们得到 $d_{m+1}(1\otimes ab)=t^{m+1}\otimes a$， $d_{m+1}(1\otimes bc)=t^{m+1}\otimes c$ 并且 $d_{m+1}(1\otimes abc)=t^{n+1}\otimes ac.$ 显然， $d_r=0$ 对所有 $r>m+1.$ 因此，我们得到 $E^{*,*}_{m+2}=E^{*,*}_{\infty}$.

若 $n\leq m<l$，则 $E^{p,q}_{\infty}\cong\mathbb{Z}_2$ 当 $0\leq p\leq m$、 $q=0$、 $n$、 $l$、 $n+l$ 时成立，否则为零。对于 $l\leq m+n$，上同调群 $H^k(X_G)$ 由下式给出

$$\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; m+j<k<l+j, j=0,n; m+l<k\leq m+n+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n+j\leq k\leq m+j, j=0,l; l\leq k\leq n+m,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

并且，对于 $l>m+n$，我们有

$$H^k(X_G)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & j\leq k<n+j, j=0,l; m+j<k\leq m+n+j; j=0,l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n+j\leq k\leq m+j, j=0,l,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$E^{*,*}_2$ 的永久上循环 $t\otimes 1$、 $1\otimes a$、 $1\otimes$c 和 $1\otimes ac$ 分别确定元素$x\in E^{1,0}_{\infty}$、 $u\in E^{0,n}_{\infty}$、 $v\in E^{0,l}_{\infty}$ 和 $s\in E^{0,n+l}_{\infty}$。因此，全复形为

$$\text{Tot } E^{*,*}_{\infty}=\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/ < x^{m+1}, u^2+\gamma_1 v, v^2, s^2, uv+\gamma_2 s, us, vs >,$$

其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=l$、deg $s=n+l$，以及 $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{Z}_2$, $\gamma_1=0$ 若 $l\neq 2n.$令 $y\in H^n(X_G)$ $w\in H^l(X_G)$ 和 $z\in H^{n+l}(X_G)$，使得 $i^*(y)=a$、 $i^*(w)=c$，以及$i^*(z)=ac$，分别成立。对于 $n\leq m<l$，我们有 $I_1=y^2+b_1x^{2n-l}w+b_2x^ny+b_3x^{2n}=0$, $I_2=w^2+b_4x^{l-n}z=0$, $I_3=yw+b_5z+b_6x^nw=0$ 和 $I_4=yz+b_7x^nz+b_8x^{2n}w=0$,

$b_i \in \mathbb{Z}_2, 0 \le i \le 8$； $b_1 = 0$ 若 $l > 2n$， $b_3 = 0$ 若 $m < 2n$， $b_4 = 0$ 若 $l > m + n$，以及 $b_8 = 0$ 若$m > 2n$. 因此，轨道空间 $X/G$ 的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{m+1}, I_j, z^2, wz >_{1 \le j \le 4},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = l$ 和 deg $z = n + l.$。通过对 $i = 4$ 取 6、7、10、13 的 $a_i = 0$，即可实现可能性 (2)。

如果 $n < m = l$，那么 $E^p,\ 0 \le p \le m$ 为 $q = 0$、$n$、$m$、$n + m$，其他情况下为零。此外，如果 $n = m = l$，那么 $E^p,\ 0 \le p \le n$ 为 $q = 0$、$2n$； $E^{p,}{}_\infty{}^q = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ 为 $0 \le p \le n$、$q = n$，其他情况下为零。对于 $n < m = l$，上同调群由下式给出

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; 2m < k \le 2m + n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n \le k < m; m < k < m + n; m + n < k \le 2m, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = m, m + n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

并且，对于 $n = m = l$，我们有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; 2n < k \le 3n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n < k < 2n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & k = n, 2n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，对于 $n < m = l$，全复形与 $n \le m < l.$时的情形相同。对于 $n = m = l$，全复形为

$$\text{Tot } E_\infty^{*,*} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/ < x^{n+1}, u^2 + \gamma_1 s, v^2 + \gamma_2 s, s^2, uv + \gamma_3 s, us, vs >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u =$ deg $v = m$、deg $s = 2m$，以及 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2.$。对于 $n \le m = l$，我们有 $I_1 = y^2 + b_1 x^{2n-m} + b_2 x^n y + b_3 x^{2n} + b_4 z = 0, I_2 = w^2 + b_5 x^{m-n} z + b_6 x^m w + b_7 x^n y = 0,$ $I_3 = yw + b_8 z + b_9 x^n w + b_{10} x^m y = 0, I_4 = yz + b_{11} x^n z = 0$ & $I_5 = wz + b_{12} x^m z = 0, b_i \in \mathbb{Z}_2,$ $1 \le i \le 12$； $b_1 = 0$ 若 $m > 2n$，若 $b_3 = 0$，且若 $m < 2n$ 和 $b_4 = b_7 = 0$，若 $n < m.$。因此，轨道空间 $X/G$ 的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{m+1}, I_j, z^2 >_{1 \le j \le 5},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = m$ 和 deg $z = m + n.$。这实现了可能性 (2)。情形（ii）： $d_{r_3}(1 \otimes c) \ne 0.$

首先，假设 $r_2 = m - n + 1.$。那么，我们必须有 $n < m \le l$，且 $d_{m-n+1}(1 \otimes b) = t^{m-n+1} \otimes a.$。因此， $d_{m-n+1}(1 \otimes bc) = t^{m-n+1} \otimes ac.$。在这种情形下，我们有 $r_3 = l - m - n + 1$ 或 $l + 1.$

如果 $r_3 = l + 1$，那么 $d_{l+1}\ (1 \otimes c) = t^{l+1} \otimes 1$并且 $d_{l+1}\ (1 \otimes abc) = t^{l+1} \otimes ab.$因此， $E^{*,}{}_{l+2}^{*} = E^{*,\infty}{}^{*}.$

如果 $n < m < l$，那么 $E^{p,}{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$，当 $0 \le p \le m-n, q = n, n+l$； $0 \le p \le l, q = 0$, $n+m$ 时成立，否则为零。

对于 $l < m+n$，上同调群 $H^k(X_G)$ 由下式给出

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; m < k \le l; m+n \le k < n+l; m+l < k \le m+n+l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n+j \le k \le m+j, j = 0, l, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

并且，对于 $l \ge m+n$，有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; j < k < n+j, j = m, l; m+l < k \le n+m+l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n+j \le k \le m+j, j = 0, l; m+n \le k \le l, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

如果 $n < m = l$，则 $E^{p,}{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$，对于 $0 \le p \le m, q = 0$; $0 \le p \le m-n, q = n$; $m-n < p \le m, q = n+m$，以及 $E^{p,}{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$，对于 $0 \le p \le m-n, q = n+m$，其他情况下为零。因此， $X_G$ 的上同调群由下式给出

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; 2m < k \le 2m+n, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n+j \le k \le m+j, j = 0, m, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$E^{*,}{}_{2}{}^{*}$ 的永久上循环 $t \otimes 1, 1 \otimes a, 1 \otimes ab$ 和 $1 \otimes ac$ 分别确定元素 $x \in E^{1,}{}_{\infty}{}^{0}, u \in E^{0,}{}_{\infty}{}^{n}$, $v \in E^{0,}{}_{\infty}{}^{n+m}$ 和 $s \in E^{0,}{}_{\infty}{}^{n+l}$。因此，对于 $n < m \le l$，全复形由下式给出

总计 $E^{*,}{}_{\infty}{}^{*} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s] / < x^{l+1}, u^2, v^2 + \gamma_1 s, s^2, uv + \gamma_2 s, us, vs, x^{m-n+1}u, x^{m-n+1}s >$,

其中 deg $x = 1$、deg $u = n$、deg $v = n+m$、deg $s = n+l$ 以及 $\gamma_1$、 $\gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$; $\gamma_1 = 0$当 $l \ne n+2m$ 且 $\gamma_2 = 0$ 当 $l \ne n+m.$。令 $y \in H^n(X_G)$ $w \in H^{n+m}(X_G)$ 以及 $z \in H^{n+l}(X_G)$，使得 $i^*(y) = a$、 $i^*(w) = c$，并且 $i^*(z) = ac$，分别成立。显然，我们有 $I_1 = y^2 + b_1 x^{2n} + b_2 x^n y = 0$、 $I_2 = w^2 + b_3 x^{n+m} w + b_4 x^{2n+2m} + b_5 x^{2m+n-l} z = 0$、 $I_3 = yw + b_6 x^n w + b_7 x^{2n+m} + b_8 x^{n+m-l} z = 0$、 $I_4 = yz + b_9 x^{n+l-m} w + b_{10} x^n z = 0$、 $b_i \in \mathbb{Z}_2$、 $1 \le i \le 10$； $b_1 = 0$当 $l < 2n$， $b_2 = 0$当 $m < 2n$； $b_3 = 0$当 $l < n+m$或 $m = l$, $b_4 =$当 $l < 2n+2m$或 $m = l$， $b_5 = 0$当 $l > m+2n$或 $m = l$， $b_7 = 0$当 $l < 2n+m$, $b_8 = 0$当$l > n+m$ 且 $b_{10} = 0$ 当 $m > 2n.$。因此，轨道空间 $X/G$的上同调环为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z] / < x^{l+1}, I_j, z^2, wz, x^{m-n+1}y, x^{m-n+1}z >_{1 \le j \le 4},$$

其中 $x = 1$的次数、 $y = n$ 的次数、 $w = n+m$ 的次数以及 $z = n+l.$ 的次数。这实现了可能性 (3)，其中 $j' = 0.$

如果 $r_3 = l-m-n+1$，那么我们必须有 $l > n+m$和 $d_{l-n-m+1}(1 \otimes c) = t^{l-n-m+1} \otimes ab.$

由于 $G$ 在 $X$上自由作用，我们得到 $d_{n+m+l+1}(1\otimes abc) = t^{n+m+l+1}\otimes 1$. 因此， $E^{*,}$ $^{*}_{n+m+l+2} = E^{*,}$ $^{*}_{\infty}$.我们得到 $E^{p,}$ $^{q}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2$，其中 $0 \le p \le n+m+l$、 $q = 0$; $0 \le p \le m-n$、 $q = n$、 $n+l$; $0 \le p \le l-m-n$、 $q = n+m$，其余情况下为零。因此，上同调群为

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; j < k < n+j, j = m, l; m+l < k \le n+m+l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n+j \le k \le m+j, j = 0, l; m+n \le k \le l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$t\otimes 1$、 $1\otimes a$、 $1\otimes ab$ 和 $1\otimes ac$ 是 $E^{*,}$ $_{2}^{*}$ 的永久上循环，分别确定元素 $x \in E^{1,}$ $^{0}_{\infty}$、 $u \in E^{0,}$ $^{n}_{\infty}$、 $v \in E^{0,}$ $^{n+m}_{\infty}$和 $s \in E^{0,}$ $^{n+l}_{\infty}$。于是，全复形 Tot $E^{*,}$ $^{*}_{\infty}$为

$$\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/ < x^{n+m+l+1}, u^2, v^2+\gamma_1 s, s^2, uv, us, vs, x^{m-n+1}u, x^{m-n+1}s, x^{l-m-n+1}v >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u = n$、deg $v = n+m$、deg $s = n+l$ 和 $\gamma_1 \in \mathbb{Z}_2$、 $\gamma_1 = 0$，若 $l \ne n+2m$. 令 $y \in H^n$（$X_G$） $w \in H^{n+m}$（$X_G$）和 $z \in H^{n+l}$（$X_G$），使得 $i^*$（$y$） $=a$、 $i^*$（$w$） $= c$，以及 $i^*$（$z$） $= ac$，分别成立。显然， $I_1 = y^2 + b_1x^{2n} + b_2x^ny = 0$、$I_2 = w^2 + b_3x^{2n+2m} + b_4x^{n+m}w = 0$、 $I_3 = yw + b_5x^{2n+m} + b_6x^nw = 0$、 $I_4 = yz + b_7x^{2n+l} + b_8x^nz$、$b_i \in \mathbb{Z}_2$、 $1 \le i \le 8$; 若 $m < 2n$，则 $b_2 = 0$；若 $l < 2n+2m$，则 $b_4 = 0$；若 $l < 2n+m$，则 $b_6 = 0$；若 $m < 2n.$，则 $b_8 = 0$。因此，上同调环 $H^*$（$X_G$）为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/< x^{n+m+l+1}, I_j, z^2, wz, x^{m-n+1}y, x^{m-n+1}z, x^{l-m-n+1}w >_{1\le j\le 4}$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = n+m$ 和 deg $x = n+l.$。当 $j' = m+n.$时，这实现了可能性 (3)

最后，假设 $r_2 = m+1.$。显然， $r_3 \ne l-m+1.$。此外，若 $r_3 = l-m-n+1$，则我们得到 $0 = d_{m+1}\{(t^{l-m-n}\otimes ab)(t\otimes 1)\} = t^{l-n+2}\otimes a$，这是不可能的。因此，$r_3 = l-n+1$ 或 $l+1$.

首先，我们考虑 $r_3 = l-n+1.$如果 $m < l-n$，那么 $d_{r_3}(1\otimes c) = 0$，这与我们的假设矛盾。因此，我们得到$l-n \le m.$由于 $d_{l-n+1}$是非平凡的，我们得到 $d_{l-n+1}(1\otimes c) = t^{l-n+1}\otimes a$以及 $d_{l-n+1}(1\otimes bc) = t^{l-n+1}\otimes ab.$此外，我们还有 $d_{m+1}(1\otimes b) = t^{m+1}\otimes 1$& $d_{m+1}(1\otimes abc) = t^{m+1}\otimes ac.$因此， $E^{*,}$ $^{*}_{m+2} = E^{*,}$ $^{*}_{\infty}$. 如果 $n \le m < l$ 且 $l-n < m$，那么 $E^{p,}$ $^{q}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2$，对于$0 \le p \le m$、 $q = 0$、 $n+l$; $0 \le p \le l-n$、 $q = n$、 $n+m$，否则为零。因此，上同调群 $H^k(X_G)$ 为

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0 \le k < n; m < k \le l; m+n \le k < n+l; m+l < k \le m+n+l, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & n+j \le k \le m+j, j = 0, l, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$E^{*,}{}_2{}^*$ 的永久上循环 $t\otimes 1$、$1\otimes a$、$1\otimes ab$ 和 $1\otimes ac$ 分别确定元素 $x\in E^{1,}{}_\infty{}^0$、$u\in E^{0,}{}_\infty{}^n$、$v\in E^{0,}{}_\infty{}^{n+m}$ 以及 $s\in E^{0,}{}_\infty{}^{n+l}$。于是，全复形 Tot $E^{*,}{}_\infty{}^*$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/<x^{m+1},u^2+\gamma_1 v,v^2,s^2,uv,us,vs,x^{l-n+1}u,x^{l-n+1}v>,$$

其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=n+m$、deg $s=n+l$ 和 $\gamma_1\in\mathbb{Z}_2$、$\gamma_1=0$（若 $n<m.$）。设 $y\in H^n(X_G)$ $w\in H^{n+m}(X_G)$ 和 $z\in H^{n+l}(X_G)$ 满足 $i^*(y)=a$、$i^*(w)=c$ 和 $i^*(z)=ac$，分别有 $I_1=y^2+b_1x^{2n}+b_2x^ny+b_3w=0$、$I_2=yw+b_4x^nw+b_5x^{m+n-l}z=0$ 和 $I_3=yz+b_6x^nz+b_7x^{l+n-m}w=0$、$b_i\in\mathbb{Z}_2$、$1\le i\le 7$; $b_1=b_7=0$（若 $m<2n$），$b_3=0$（若 $n<m$），以及 $b_2=b_4=0$（若 $l<2n.$）。因此，上同调环 $H^*(X_G)$ 可表示为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/<x^{m+1},I_j,w^2,z^2,wz,x^{l-n+1}y,x^{l-n+1}w>_{1\le j\le 3}$$

$x=1$ 的次数、$y=n$ 的次数、$w=n+m$ 的次数以及 $z=n+l.$ 的次数这实现了可能性（4）。接下来，如果 $n\le m<l$ 和 $l-n=m$，那么当 $r_2=m+1$ 和 $l=m+n.$ 时，上同调群和上同调代数与情形（i）中的相同
如果 $n<m=l$ 和 $d_{l-n+1}(1\otimes c)\neq 0$，那么当 $n<m=l.$ 时，$l-n=m-n$ 以及上同调群和上同调代数与情形（ii）中的相同
接下来，如果 $n<m=l$ 和 $d_{l-n+1}(1\otimes c)=0$，那么我们必须有 $r_2=r_3=m+1$，因此，$d_{m+1}(1\otimes b)=d_{m+1}(1\otimes c)=t^{m+1}\otimes 1.$ 当 $r_2=m+1$ 和 $n<m=l.$ 时，上同调群和上同调代数与情形（i）中的相同
最后，如果 $n=m=l$，那么必有 $r_2=r_3=n+1$，从而 $d_{n+1}(1\otimes b)=d_{n+1}(1\otimes c)=t^{n+1}\otimes 1.$。当 $n=m=l.$ □时，上同调群和上同调代数与情形（i）中的相同。

定理 3.8. 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在有限型空间 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$ 上自由作用，其中 $n\le m\le l.$。如果 $d_{r_1}(1\otimes a)=d_{r_2}(1\otimes b)=0$，且 $d_{r_3}(1\otimes c)\neq 0$，那么轨道空间 $X/G$ 的上同调环同构于下列分次交换代数之一：

(1) $\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/I$，其中 $I$ 是由下式给出的齐次理想：$I=<Q(x)\ I_j, x^{l-m-n+1}z, c_0x^{l+n-m+1}w, c_1x^{l+m-n+1}y, c_2x^{l+1}y, c_3x^{l+1}w>_{1\le j\le 6}$，其中 deg $x=1$、deg $y=n$、deg $w=m$ 和 deg $z=n+m$，且 $I_1=y^2+a_1x^{2n}+a_2x^ny+a_3x^{2n-m}w+a_4z$, $I_2=w^2+a_5x^{2m}+a_6x^{2m-n}y+a_7x^mw+a_8x^{m-n}z$, $I_3=z^2+a_9x^{2n+2m}+a_{10}x^{n+2m}y+a_{11}x^{2n+m}w+a_{12}x^{n+m}z$, $I_4=yw+a_{13}x^{n+m}+a_{14}x^my+a_{15}x^nw+a_{16}z$, $I_5=yz+a_{17}x^{2n+m}+a_{18}x^{n+m}y+a_{19}x^{2n}w+a_{20}x^nz$ 和 $I_6=wz+a_{21}x^{2m+n}+a_{22}x^{2m}y+a_{23}x^{n+m}w+a_{24}x^mz, a_i\in\mathbb{Z}_2, 1\le i\le 24$; $a_4=0$

若 $n < m, a_8 = 0$ 若 $l < 2m, a_{12} = 0$ 若 $l < 2m + 2n, a_{20} = 0$ 若 $l < 2n + m$, 且$a_{24} = 0$若 $l < n + 2m$; $Q(x) = x^{l+1+j'}, j' = n + m, m$ 或 $n$.若 $j' = n + m$, 则要么 $\{c_0 = c_1 = 1$ 和 $c_2 = c_3 = 0$, 其中 $a_7 = 0$ 若$n + l < 2m$, $a_{10} = 0$若 $l < 2n + m, a_{11} = 0$若 $l < n + 2m$ 且 $a_{23} = 0$若$l < 2m\}$, 要么 $\{c_0 = c_1 = 0$ 和 $c_2 = c_3 = 1$, 其中 $a_{10} = 0$ 若 $l < 2n + m, a_{11} = 0$ 若 $l < n + 2m$ 且 $a_{22} = 0$ 若 $l < 2m\}$。若 $j' = m$, 则 $c_0 = 1$ 和 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, 其中 $a_7 = 0$ 若 $n + l < 2m, a_9 = 0$ 若$l < 2n + m, a_{11} = 0$ 若 $l < n + 2m$ 且 $a_{23} = 0$ 若 $l < 2m$.。若 $j' = n$, 则 $c_1 = 1$ 和 $c_0 = c_2 = c_3 = 0$, 其中 $a_5 = 0$ 若 $n + l < 2m, a_9 = 0$ 若$l < 2m + n, a_{10} = 0$ 若 $l < 2n + m$ 且 $a_{21} = 0$ 若 $l < 2m$.

(2) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < Q(x)\ I_j, c_0x^{m+l-n+1}y, x^{l-m+1}z, x^{l-m+1}w >_{1\le j\le 6}$, 其中 $x = 1$ 的次数、 $y = n$ 的次数、 $w = m$ 的次数和 $z = n+m$ 的次数, 以及 $I_j's, 1 \le j \le 6$, 均与可能性（1）中的相同; 若 $l < 2n$, 则 $a_3 = 0$; 若 $n < m$, 则 $a_4 = 0$; 若 $l < 2m$, 则 $a_7 = a_{24} = 0$; 若 $n + l < 2m$, 则 $a_8 = 0$; 若 $l < 2n + 2m$, 则 $a_{11} = 0$; 若 $l < n + 2m$, 则 $a_{12} = a_{23} = 0$; 若 $l < m + n$, 则 $a_{15} = a_{20} = 0$; 若 $l < 2n + m$, 则 $a_{19} = 0$; 且 $Q(x) = x^{m+l+j'+1}, j' = 0$ 或 $n$.。若 $j' = 0$, 则 $c_0 = 0$, 其中若 $l < 2n + m$, 则 $a_9 = 0$; 若 $l <$, 则 $a_{10} = a_{21} = 0\ n + m$; 若 $l < 2n.$, 则 $a_{17} = 0$。若 $j' = n$, 则 $c_0 = 1$, 其中若 $l < n+m$, 则 $a_9 = a_{22} = 0$; 若 $l < 2n+m$, 则 $a_{10} = 0$; 若 $l < 2n.$, 则 $a_{18}$ =0

(3) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < Q(x)\ I_j, c_0x^{n+l-m+1}w, x^{l-n+1}y, x^{l-n+1}z >_{1\le j\le 6}$, 其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = m$& deg $z = n+m$, 且 $I_j's, 1 \le j \le 6$与可能性（1）中的相同, 其中 $a_2 = a_{20} = 0$当 $l < 2n$, $a_4 = 0$当 $n < m$, $a_6 = 0$当 $l < 2m$, $a_{10} = 0$ 当 $l < 2n + 2m$, $a_{14} = a_{24} = 0$当 $l < n + m$& $a_{18} = 0$当$l < 2n + m$, 且 $Q(x) = x^{n+1+j'}, j' = 0$或 $m$.。若 $j' = 0$, 则 $c_0 = 0$, 其中 $a_5 = 0$当 $n+l < 2m$, $a_9 = a_{12} = 0$当 $l < 2m+n$, $a_{11}$ =$a_{17} = 0$ 当 $l < n + m$, $a_{21} = 0$ 当 $l < 2m$ & $a_{22} = 0$ 当 $l < 2n + m$.。若 $j' = m$, 则 $c_0 = 1$, 其中 $a_7 = 0$当 $n+l < 2m$, $a_9 = a_{19} = 0$当 $l < n+m$, $a_{11}$ =$a_{22} = 0$ 当 $l < 2m + n$, $a_{12} = 0$ 当 $l < 2n + m$ & $a_{23} = 0$ 当 $l < 2m$.

(4) $\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{l+1}, I_j >_{1\le j\le 6}$, 其中 $x = 1$、 $y = n$、 $w = m$ &$z = n + m$ 的次数以及 $I_j's, 1 \le j \le 6$ 与可能性（1）中的相同, 其中 $a_1 = a_{19} = 0$ 如果 $l < 2n$, $a_4 = 0$ 如果 $n < m$, $a_5 = a_{22} = 0$ 如果 $l < 2m$, $a_6 = 0$ 如果 $n+l < 2m$, $a_9 = 0$ 如果$l < 2n + 2m$, $a_{10} = a_{21} = 0$ 如果 $l < 2m + n$, $a_{11} = a_{17} = 0$ 如果 $l < 2n + m$ & $a_{12}$ =$a_{13} = a_{18} = a_{23} = 0$ 如果 $l < n + m$.

证明。如果 $d_{r_1}(1\otimes a) = d_{r_2}(1\otimes b) = 0$ 且 $d_{r_3}(1\otimes c) \neq 0$，那么我们有以下四种情形：(i) $r_3 = l-m-n+1$，(ii) $r_3 = l-m+1$，(iii) $r_3 = l-n+1$，以及 (iv) $r_3 = l+1$.情形（i）： $r_3 = l-m-n+1$.
显然， $n \leq m < l$和 $n+m<l.$。我们有 $d_{l-m-n+1}(1\otimes c) = t^{l-m-n+1}\otimes ab$。首先，假设 $d_{n+l-m+1}$是非平凡的。因此，我们有 $d_{n+l-m+1}(1\otimes ac) = t^{n+l-m+1}\otimes b.$。现在，我们有 $d_{m+l-n+1}(1\otimes bc) = 0$或 $d_{m+l-n+1}(1\otimes bc) = t^{m+l-n+1}\otimes a$。
令 $d_{m+l-n+1}(1\otimes ac) = t^{m+l-n+1}\otimes a.$。由于 $G$在 $X$上自由作用，我们必有 $d_{n+m+l+1}(1\otimes abc) = t^{n+m+l+1}\otimes 1.$。因此， $E^{*,*}_{n+m+l+2} = E^{*,*}_{\infty}.$。对于 $n<m<l$，我们有 $E^{p,q}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2, 0\leq p\leq n+m+l, q=0$； $0\leq p\leq m+l-n, q=n$； $0\leq p\leq n+l-m$, $q=m$和$0\leq p\leq l-m-n, q=n+m$，其他情况下为零。对于 $n=m<l$，我们有 $E^{p,q}_{\infty}\cong\mathbb{Z}_2, 0\leq p\leq 2n+l, q=0$和 $0\leq p\leq l-2n, q=2n$； $E^{p,q}_{\infty}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, $0\leq p\leq l, q=n$, 其他情况下为零。
对于 $n<m<l$，上同调群为

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; m+l<k\leq m+n+l, \\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n\leq k<m; n+l<k\leq m+l, \\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & m\leq k<m+n; l<k\leq n+l, \\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & m+n\leq k\leq l, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

对于 $n=m<l$，我们有

$$H^k(X_G) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & 0\leq k<n; n+l<k\leq 2n+l, \\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n\leq k<2n; l<k\leq n+l, \\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & 2n\leq k\leq l, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

$E^*$ 的永久上循环 $t\otimes 1$、$1\otimes a$、 $1\otimes b$ 和 $1\otimes ab$ 分别确定了元素 $x\in E^{1,0}_{\infty}$、 $u\in E^{0,n}_{\infty}$、 $v\in E^{0,m}_{\infty}$和 $s\in E^{0,0}_{\infty}$。因此，全复形 Tot $E^*$，其中理想 $I$ 由下式给出

$< x^{n+m+l+1}, u^2+\gamma_1 v+\gamma_2 s, v^2+\gamma_3 s, s^2, uv+\gamma_4 s, us, vs, x^{l+m-n+1}u, x^{l+n-m+1}v, x^{l-m-n+1}s >$其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=m$、deg $s=n+m$，且 $\gamma_i\in\mathbb{Z}_2$、$1\leq i\leq 4$; $\gamma_1=0$ 若 $m\neq 2n$，且 $\gamma_2=\gamma_3=0$ 若 $n<m$. 令 $y\in H^n(X_G)$ $w\in H^m(X_G)$ 和 $z\in H^{n+m}(X_G)$，使得 $i^*(y) = a$、$i^*(w) = b$，以及 $i^*(z) = ab$，分别成立。显然，$I_1 = y^2+b_1x^{2n}+b_2x^ny+b_3x^{2n-m}w+b_4z = 0, I_2 = w^2+b_5x^{2m}+b_6x^{2m-n}y+b_7x^mw+b_8x^{m-n}z = 0, I_3 = z^2+b_9x^{2n+2m}+b_{10}x^{n+2m}y+b_{11}x^{2n+m}w+b_{12}x^{n+m}z = 0, I_4 = yw+b_{13}x^{n+m}+b_{14}x^my+b_{15}x^nw+b_{16}z = 0, I_5 = yz+b_{17}x^{2n+m}+b_{18}x^{n+m}y+b_{19}x^{2n}w+b_{20}x^nz =$0 & $I_6 = wz+b_{21}x^{2m+n}+b_{22}x^{2m}y+b_{23}x^{n+m}w+b_{24}x^mz = 0$，其中 $b_i\in\mathbb{Z}_2, 1\leq i\leq 24$;

$b_4 = 0$若 $n < m$, $b_7 = 0$若 $n + l < 2m$, $b_8 = b_{23} = 0$若 $l < 2m$, $b_{10} = b_{20} = 0$若$l < 2n + m$, $b_{11} = b_{24} = 0$ 若 $l < n + 2m$, 以及 $b_{12} = 0$ 若 $l < 2n + 2m$. 因此, 上同调环 $H^*(X_G)$为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+m+l+1}, I_j, x^{l-m-n+1}z, x^{l+n-m+1}w, x^{l+n-m+1}y >_{1\leq j\leq 6},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = m$ 和 deg $z = n + m$. 。当 $j' = n + m$ 且 $c_0 = c_1 = 1$ 和 $c_2 = c_3 = 0$.时, 这实现了可能性（1）。

现在, 令 $d_{m+l-n+1}(1 \otimes ac) = 0$. 。那么, 我们必须有 $d_{m+l+1}(1 \otimes bc) = t^{m+l+1} \otimes 1$ 和 $d_{m+l+1}(1 \otimes abc) = t^{m+l+1} \otimes a$. 。因此, $E^*$、$\overset{*}{}_{m+l+2} = E^*$、$\overset{*}{}_{\infty}$. 。对于 $n < m < l$, 有 $E^p$、$\overset{q}{}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2$、$0 \leq p \leq m + l$、$q = 0$、$n$; $0 \leq p \leq n + l - m$、$q = m$ 以及 $0 \leq p \leq l - m - n$、$q = n + m$, 其余均为零。对于 $n = m < l$, 有 $E^p$、$\overset{q}{}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2$、$0 \leq p \leq n + l$、$q = 0$; $0 \leq p \leq l - 2n$、$q = 2n$; $l < p \leq n + l$、$q = n$; $E^p$、$\overset{q}{}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$、$0 \leq p \leq l$、$q = n$, 其余均为零。注意, 上同调群与上文相同。全复形 Tot $E^*$、$\overset{*}{}_{\infty} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/I$, 其中 $I$是由下式给出的理想

$$< x^{m+l+1}, u^2 + \gamma_1 v + \gamma_2 s, v^2 + \gamma_3 s, s^2, uv + \gamma_4 s, us, vs, x^{l+n-m+1}v, x^{l-m-n+1}s >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u = n$、deg $v = m$ & deg $s = n + m$, 以及 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \leq i \leq 4$; 当 $m \neq 2n$ 时为 $\gamma_1 = 0$, 当 $n < m$. 时为 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$。理想 $I_j's$、$1 \leq j \leq 6$ 也与上述相同, 条件为: 当 $n < m$ 时为 $b_4 = 0$, 当 $m > 2n$ 时为 $b_7 = 0$, 当 $l < 2m$ 时为 $b_8 = b_{23} = 0$, 当 $l < 2n+m$ 时为 $b_9 = 0$, 当 $l < n+2m$ 时为 $b_{11} = 0$, 当 $l < 2n+2m$ 时为 $b_{12} = 0$, 当 $l < 2n+m$ 时为 $b_{20} = 0$, 以及当 $l < n + 2m$. 时为 $b_{24} = 0$。因此, 上同调环 $H^*(X_G)$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{m+l+1}, I_j, x^{l-m-n+1}z, x^{l+n-m+1}w >_{1\leq j\leq 6},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = m$ 和 deg $z = n + m$. 。当 $j' = m$. 时, 这实现了可能性（1）

现在, 假设 $d_{n+l-m+1}$ 是平凡的。我们有 $d_{l+1}(1 \otimes ac) = 0$ 或 $d_{l+1}(1 \otimes ac) = t^{l+1} \otimes a$.

令 $d_{l+1}(1 \otimes ac) = t^{l+1} \otimes a$. 于是, $d_{l+1}(1 \otimes bc) = t^{l+1} \otimes b$, 且 $d_{n+m+l+1}(1 \otimes abc) = t^{n+m+l+1} \otimes 1$. 因此, $E^*$, $\overset{*}{}_{n+m+l+2} = E^*$, $\overset{*}{}_{\infty}$. 对于 $n < m < l$, 我们有 $E^p$, $\overset{q}{}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2$, $0 \leq p \leq n + m + l$, $q = 0$; $0 \leq p \leq l$, $q = n$, $m$ 以及 $0 \leq p \leq l - m - n$, $q = n + m$, 其他情况下为零。对于 $n = m < l$, 我们有 $E^p$, $\overset{q}{}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2$, $0 \leq p \leq 2n+l$, $q = 0$; $0 \leq p \leq l-2n$, $q =2n$; $E^p$, $\overset{q}{}_{\infty} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $0 \leq p \leq l$, $q = n$, 其他情况下为零。上同调群与上文相同。全复形 Tot$E^*$, $\overset{*}{}_{\infty} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/I$, 其中 $I$是由下式给出的理想:

$$< x^{n+m+l+1}, u^2 + \gamma_1 v + \gamma_2 s, v^2 + \gamma_3 s, s^2, uv + \gamma_4 s, us, vs, x^{l+1}u, x^{l+1}v, x^{l-m-n+1}s >,$$

其中 deg $x=1$, deg $u=n$, deg $v=m$ & deg $s=n+m$, 且 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq 4$; $\gamma_1 = 0$ 当 $m \neq 2n$时，以及 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ 当 $n < m.$时。理想 $I_j's$; $1 \leq j \leq 6$ 与上文相同，其条件为：当 $n < m$时 $b_4 = 0$，当 $l < 2m$时 $b_8 = 0$，当 $l < n + 2m$时 $b_{10} = b_{24} = 0$，当 $l < 2n + m$时 $b_{11} = b_{20} = 0$，以及当 $l < 2n + 2m$时 $b_{12} = 0$，当 $l < 2m.$时 $b_{22} = 0$。因此，上同调环 $H^*(X_G)$由下式给出：

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w.z]/ < x^{n+m+l+1}, I_j, x^{l-m-n+1}z, x^{l+1}y, x^{l+1}w >_{1\leq j\leq 6}$$

其中 deg $x=1$、deg $y=n$、deg $w=m$ 和 deg $z=n+m.$。这实现了可能性（1），其中 $j' = n + m$，且 $c_0 = c_1 = 0$ 和 $c_2 = c_3 = 1.$
现在，令 $d_{l+1}(1 \otimes ac) = 0.$。那么，我们必须有 $d_{m+l-n+1}(1 \otimes bc) = t^{m+l-n+1} \otimes a.$。因此，我们得到 $d_{n+l+1}(1 \otimes ac) = t^{n+l+1} \otimes 1$ 和 $d_{n+l+1}(1 \otimes abc) = t^{n+l+1} \otimes b.$。于是，$E^{*,\ *}_{n+l+2} = E^{*,\infty^*}.$。对于 $n \leq m < l$，我们有 $E^{p,\ \infty^q} \cong \mathbb{Z}_2, 0 \leq p \leq n + l, q = 0, m; 0 \leq p \leq m+l-n, q = n;\ 0 \leq p \leq l-m-n$、$q = n+m$，其余情况均为零。上同调群与上述相同。全复形 Tot$E^{*,\infty^*}$由下式给出

$$\mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/ < x^{n+l+1}, u^2+\gamma_1 v+\gamma_2 s, v^2+\gamma_3 s, s^2, uv+\gamma_4 s, us, vs, x^{l+m-n+1}u, x^{l-m-n+1}s >$$

其中，deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=m$、deg $s=n+m$，以及 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \leq i \leq 4$; 若 $m \neq 2n$，则 $\gamma_1 = 0$; 若 $m \neq n.$，则 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$。理想 $I_j's$、$1 \leq j \leq 6$ 与上文相同，但需满足以下条件：若 $n < m$，则 $b_4 = 0$；若 $n + l < 2m$，则 $b_5 = 0$；若 $l < 2m$，则 $b_8 = b_{21} = 0$；若$l < n + 2m$，则 $b_9 = b_{24} = 0$；若 $l < 2n + m$，则 $b_{10} = 0$；若 $l < 2n + 2m$，则 $b_{12} = 0$；若 $l < 2n + m.$，则 $b_{20} = 0$。因此，上同调环 $H^*(X_G)$为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{n+l+1}, I_j, x^{l-m-n+1}z, x^{m+l-n+1}y, >_{1\leq j\leq 6}$$

其中 deg $x=1$、deg $y=n$、deg $w=m$、deg $z=n+m.$。当 $j' = n.$时，这实现了可能性（1）。
情形（ii）： $r_3 = l - m + 1.$
显然， $n \leq m < l.$。我们有 $d_{l-m+1}\ (1\otimes c) = t^{l-m+1}\otimes b$，并且 $d_{l-m+1}\ (1\otimes ac) = t^{l-m+1}\otimes ab.$。
现在，我们有 $d_{m+l-n+1}\ (1 \otimes bc) = 0$ 或者 $d_{m+l-n+1}\ (1 \otimes bc) = t^{m+l-n+1} \otimes a.$。
首先，令 $d_{m+l-n+1}(1\otimes bc) = t^{m+l-n+1}\otimes a.$ 显然， $d_{n+m+l+1}(1\otimes abc) = t^{n+m+l+1}\otimes 1$。因此， $E^{*,\ *}_{n+m+l+2} = E^{*,\ \infty^*}.$ 对于 $n < m < l$，我们有 $E^{p,\ \infty^q} \cong \mathbb{Z}_2$、$0 \leq p \leq n + m + l$、$q =0$; $0 \leq p \leq m + l - n$、$q = n$; $0 \leq p \leq l - m$、$q = m$、$n + m$，其他情况下为零。对于 $n = m < l$，我们有 $E^{p,\ \infty^q} \cong \mathbb{Z}_2$、$0 \leq p \leq 2n + l$、$q = 0$; $0 \leq p \leq l - n$、$q = 2n$、$l - n <p \leq l$、$q = n$; $E^{p,\ \infty^q} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$、$0 \leq p \leq l - n$、$q = n$，其他情况下为零。

对于 $n<m<l<n+m$，上同调群如下给出：

$$H^k(X_G)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\le k<n; m+l<k\le m+n+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n\le k<m; l<k<n+m; n+l<k\le m+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & m+j\le k\le l+j, j=0,n,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

并且，对于 $n=m<l<2n$，我们有

$$H^k(X_G)=\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & 0\le k<n; n+l<k\le 2n+l,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & l<k<2n,\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 & n+j\le k\le l+j, j=0,n,\\ 0 & \text{otherwise}.\end{cases}$$

对于 $l\ge n+m$，其上同调群与情形（i）类似。全复形 Tot$E^*,_\infty{}^*=\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/I$，其中理想 $I$由下式给出

$$<x^{n+m+l+1},u^2+\gamma_1v+\gamma_2s,v^2+\gamma_3s,s^2,uv+\gamma_4s,us,vs,x^{l+m-n+1}u,x^{l-m+1}v,x^{l-m+1}s>,$$

其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=m$、deg $s=n+m$，且 $\gamma_i\in\mathbb{Z}_2$、$1\le i\le 4$；若 $m\ne 2n$，则 $\gamma_1=0$；若 $n<m.$，则 $\gamma_2=\gamma_3=0$。理想 $I_j's$、$1\le j\le 6$与情形（i）中的相同，满足以下条件：若 $l<2n$，则 $b_3=b_{18}=0$；若 $n<m$，则 $b_4=0$；若 $l<2m$，则 $b_7=b_{24}=0$；若 $n+l<2m$，则 $b_8=0$；若 $l<n+m$，则 $b_9=b_{15}=b_{20}=b_{22}=0$；若 $l<2n+m$，则 $b_{10}=b_{19}=0$；若 $l<2n+2m$，则 $b_{11}=0$；若 $l<n+2m.$，则 $b_{12}=b_{23}=0$。因此，上同调环 $H^*(X_G)$ 由下式给出

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w.z]/<x^{n+m+l+1},I_j,x^{m+l-n+1}y,x^{l-m+1}w,x^{l-m+1}z>_{1\le j\le 6}$$

其中 $x=1$、$y=n$、$w=m$ 和 $z=n+m.$ 的次数。这在 $j'=n.$时实现可能性 (2)

现在，令 $d_{m+l-n+1}(1\otimes bc)=0.$然后，我们必须有 $d_{m+l+1}(1\otimes bc)=t^{m+l+1}\otimes 1$ 以及 $d_{m+l+1}(1\otimes abc)=t^{m+l+1}\otimes a.$因此，$E^*,_{m+l+2}^{\ *}=E^*,_\infty{}^*.$对于 $n<m<l$，我们有 $E^p,_\infty{}^q\cong\mathbb{Z}_2$，若 $0\le p\le m+l, q=0,n$；$0\le p\le l-m, q=m,n+m$，否则为零。对于$n=m<l$，我们有 $E^p,_\infty{}^q\cong\mathbb{Z}_2, 0\le p\le n+l, q=0$；$l-n<p\le n+l, q=n$；$0\le p\le l-n, q=n+m$；$E^p,_\infty{}^q\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, 0\le p\le l-n, q=n$，否则为零。对于 $l<n+m$，当 $d_{m+l-n+1}$ 非平凡时，上同调群与情形（ii）相同；对于 $l\ge n+m$，上同调群与情形（i）类似。因此，总复形 Tot $E^*,_\infty{}^*=\mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/I$，其中理想 $I$由下式给出：

$$<x^{m+l+1},u^2+\gamma_1v+\gamma_2s,v^2+\gamma_3s,s^2,uv+\gamma_4s,us,vs,x^{l-m+1}v,x^{l-m+1}s>,$$

其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=m$、deg $s=n+m$，以及 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2, 1 \leq i \leq 4$; 当 $m \neq 2n$时为 $\gamma_1 = 0$，当 $n < m.$时为 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$。理想 $I_j's, 1 \leq j \leq 6$与情形（i）中的相同，其条件为：当 $l < 2n$时为 $b_3 = b_{17} = 0$，当 $n < m$时为 $b_4 = 0$，当 $l < 2m$时为 $b_7 = b_{24} = 0$，当$n + l < 2m$时为$b_8 = 0$，当 $l < 2n + m$时为 $b_9 = b_{19} = 0$，当 $l < m + n$时为 $b_{10} = b_{15} = b_{20} = b_{21} = 0$，当$l < 2n + 2m$时为$b_{11} = 0$，当 $l < 2m + n$时为 $b_{12} = b_{23} = 0$，以及当 $l < 2n.$时为 $b_{17} = 0$。因此，上同调环 $H^*(X_G)$由下式给出：

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w, z]/ < x^{m+l+1}, I_j, x^{l-m+1}w, x^{l-m+1}z >_{1 \leq j \leq 6},$$

其中 deg $x = 1$、deg $y = n$、deg $w = m$ 和 deg $z = n + m.$。当 $j' = 0.$时，这实现了可能性 (2)

情形（iii）： $r_3 = l - n + 1.$

显然， $n < l.$我们有 $d_{l-n+1}(1 \otimes c) = t^{l-n+1} \otimes a$ 和 $d_{l-n+1}(1 \otimes bc) = t^{l-n+1} \otimes ab.$我们有 $d_{n+l-m+1}(1 \otimes ac) = 0$ 或 $d_{n+l-m+1}(1 \otimes ac) = t^{n+l-m+1} \otimes b.$

首先，令 $d_{n+l-m+1}(1 \otimes ac) = t^{n+l-m+1} \otimes b.$。于是，我们必须有 $d_{n+m+l+1}(1 \otimes abc) = t^{n+m+l+1} \otimes 1.$因此， $E^*、{}^{*}_{n+m+l+2}{}_{\infty}{}^{*} = E^*、{}_{\infty}{}^{*}.$。对于 $n < m \leq l$，当 $0 \leq p \leq n + m + l$、$q = 0$时，我们有 $E^p、{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$； $0 \leq p \leq l - n$、 $q = n$、 $n + m$; $0 \leq p \leq n + l - m$、 $q = m$，否则为零。对于 $n = m < l$，当 $0 \leq p \leq 2n + l$、 $q = 0$时，我们有 $E^p、{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$； $l - n < p \leq l$、 $q = n$； $0 \leq p \leq l - n$、 $q = 2n$；当 $0 \leq p \leq l - n$、 $q = n$时为 $E^p、{}_{\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$，否则为零。对于 $l \geq n + m$，上同调群与情形（i）类似；对于 $l < n + m$，上同调群与情形（ii）相同。因此，全复形 Tot$E^*、{}_{\infty}{}^{*} = \mathbb{Z}_2[x, u, v, s]/I$，其中 $I$ 由下式给出

$$< x^{n+m+l+1}, u^2 + \gamma_1 v + \gamma_2 s, v^2 + \gamma_3 s, s^2, uv + \gamma_4 s, us, vs, x^{l-n+1}u, x^{n+l-m+1}v, x^{l-n+1}s >,$$

其中 deg $x = 1$、deg $u = n$、deg $v = m$、deg $s = n + m$，以及 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2$, $1 \leq i \leq 4$;$\gamma_1 = 0$ 若 $m \neq 2n$，且 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ 若 $n < m.$。显然，理想 $I_j, 1 \leq j \leq 6$与情形（i）中的相同，条件为： $b_2 = b_{20} = 0$ 若 $l < 2n$, $b_4 = 0$ 若 $n < m$, $b_6 = b_{23} = 0$若 $l < 2m, b_7 = 0$若 $n + l < 2m, b_9 = b_{14} = b_{19} = b_{24} = 0$若 $l < n + m$, $b_{10} = 0$若$l < 2n + 2m$, $b_{11} = b_{22} = 0$ 若 $l < 2m + n$ 且 $b_{12} = b_{18} = 0$ 若 $l < 2n + m.$。因此，上同调环 $H^*(X_G)$为

$$\mathbb{Z}_2[x, y, w.z]/ < x^{n+m+l+1}, I_j, x^{l-n+1}y, x^{n+l-m+1}w, x^{l-n+1}z >_{1 \leq j \leq 6}$$

其中 deg $x$=1、deg $y = n$、deg $w = m$ 和 deg $z = n + m.$。当 $j' = m.$时，这实现了可能性 (3)

现在，令 $d_{n+l-m+1}(1 \otimes ac) = 0.$那么，必有 $d_{n+l+1}(1 \otimes ac) = t^{m+l+1} \otimes 1$ 以及$d_{n+l+1}($ $1 \otimes abc) = t^{m+l+1} \otimes b.$因此， $E^{*,}{}^{*}_{n+l+2}{}_{\infty}{}^{*} = E^{*,}{}_{\infty}{}^{*}.$对于 $n < m \leq l$，有 $E^p{}_{,\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$，若 $0 \leq p \leq n + l, q = 0, m$； $0 \leq p \leq l - n, q = n, n + m$，否则为零。对于 $n = m < l$,

有 $E^{p}{}_{,\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$，若 $0 \le p \le n+l, q=0$； $l-n < p \le n+l, q=n$； $0 \le p \le l-n, q=2n$； $E^{p}{}_{,\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$若 $0 \le p \le l-n, q=n$，否则为零。对于 $l \ge n+m$，上同调群与情形（i）类似；对于 $l < n+m$，上同调群与情形（ii）相同。因此，全复形 Tot $E^{*}{}_{,\infty}{}^{*} = \mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/I$，其中理想 $I$由下式给出

$$< x^{n+l+1}, u^2+\gamma_1 v+\gamma_2 s, v^2+\gamma_3 s, s^2, uv+\gamma_4 s, us, vs, x^{l-n+1}u, x^{l-n+1}s >,$$

其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=m$、deg $s=n+m$ 以及 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \le i \le 4$; $\gamma_1 = 0$ 当 $m \ne 2n$ 时，以及 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ 当 $n < m.$ 时。理想 $I_j's$; $1 \le j \le 6$ 与情形（i）中的相同，条件为: $b_2 = b_{20} = 0$当 $l < 2n$ 时， $b_4 = 0$ 当 $n < m$ 时， $b_5 = 0$当 $n+l < 2m$ 时， $b_6 = b_{21} = 0$ 当 $l < 2m$ 时， $b_9 = b_{12} = 0$ 当 $l < 2m+n$ 时， $b_{10} = 0$ 当$l < 2n+2m$时， $b_{11} = b_{14} = b_{17} = b_{24} = 0$ 当 $l < n+m$ 时以及 $b_{18} = b_{22} = 0$ 当 $l < 2n+m.$时。因此，上同调环 $H^{*}(X_G)$ 为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w,z]/ < x^{n+l+1}, I_j, x^{l-n+1}y, x^{l-n+1}z >_{1 \le j \le 6},$$

其中 deg $x=1$、deg $y=n$、deg $w=m$ 和 deg $z=n+m.$。当 $j'=0.$时，这实现了可能性 (3)

情形（iv）： $r_3 = l+1.$

我们有 $d_{l+1}(1 \otimes c) = t^{l+1} \otimes 1.$。因此， $d_{l+1}(1 \otimes ac) = t^{l+1} \otimes a$, $d_{l+1}(1 \otimes bc) = t^{l+1} \otimes b$ , 并且 $d_{l+1}(1 \otimes abc) = t^{l+1} \otimes ab.$。于是， $E^{*}{}_{,\ l+2}{}^{*} = E^{*}{}_{,\infty}{}^{*}.$。对于 $n < m \le l$，我们有 $E^{p}{}_{,\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$，其中 $0 \le p \le l, q = 0, n, m, n+m$，其余情况均为零。对于 $n = m \le l$，我们有 $E^{p}{}_{,\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2$, $0 \le p \le l, q = 0, 2n$； $E^{p}{}_{,\infty}{}^{q} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $0 \le p \le l, q = n$，其余情况均为零。对于 $l \ge n+m$，上同调群与情形（i）类似；对于$l < n+m$，上同调群与情形（ii）相同。全复形 Tot $E^{*}{}_{,\infty}{}^{*} = \mathbb{Z}_2[x,u,v,s]/I$，其中理想 $I$由下式给出

$$< x^{l+1}, u^2+\gamma_1 v+\gamma_2 s, v^2+\gamma_3 s, s^2, uv+\gamma_4 s, us, vs >,$$

其中 deg $x=1$、deg $u=n$、deg $v=m$、deg $s=n+m$，以及 $\gamma_i \in \mathbb{Z}_2$、$1 \le i \le 4$; 当 $m \ne 2n$ 时 $\gamma_1 = 0$，当 $n < m.$ 时 $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$。理想 $I_j's$; $1 \le j \le 6$ 与情形（i）中的相同，条件为: 当 $l < 2n$ 时 $b_1 = b_{19} = 0$ ，当 $n < m$ 时 $b_4 = 0$ ，当 $l < 2m$ 时 $b_5 = b_{22} = 0$ ，当 $n+l < 2m$ 时 $b_6 = 0$, 当 $l < 2n+2m$ 时 $b_9 = 0$ ，当 $l < 2m+n$ 时 $b_{10} = b_{21} = 0$ ，当$l < 2n+m$ 时 $b_{11} = b_{17} = 0$ ，以及当 $l < n+m.$ 时 $b_{12} = b_{13} = b_{18} = b_{23} = 0$。因此，上同调环$H^{*}(X_G)$ 给出为

$$\mathbb{Z}_2[x,y,w.z]/ < x^{l+1}, I_j >_{1 \le j \le 6},$$

其中， $x=1$、 $y=n$、 $w=m$ 和 $z=n+m.$ 的次数。由此实现了可能性 (4)。□

例 3.9。定理 3.6 的情形 (1) 可以通过考察 $G=\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$ 上的对角作用来实现，其中 $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{S}^n$ 上自由作用，并在 $\mathbb{S}^m$ 和 $\mathbb{S}^l$. 上均平凡作用。于是，$X/G\sim_2\mathbb{RP}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l.$。取 $a_7=1$ 和 $a_i=0$ 作为 $i\neq 7.$，即可实现情形 (1)。类似地，定理 3.7 的情形 (2)（取 $a_8=1$ 和 $a_i=0$ 作为 $i\neq 8$），以及定理 3.8 的情形 (4)（取 $a_{16}=1$ 和 $a_i=0$ 作为 $i\neq 16$）也都可以实现。

## 4. Some Applications on $\mathbb{Z}_2$-Equivarient Maps

本节中，我们为 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l, 1\leq n\leq m\leq l.$ 上的自由对合推导 Borsuk-Ulam 型结果。我们确定了 $X$ 与 $\mathbb{S}^k$ 之间不存在 $\mathbb{Z}_2$-等变映射，其中 $\mathbb{S}^k$ 配备了对跖作用。

回顾一下 [5] $X$ -空间的指标（分别地，余指标） $k$ 是最大的整数 $k$（分别地，最低的整数 $G$），使得存在一个 $\mathbb{S}^k\to X$ -等变映射 $X\to\mathbb{S}^k$。

根据第 3 节证明的定理，我们得到最大的整数 $s$，使得 $w^s\neq 0$ 是 $n$、$m$、$l$、$n+m$、$2n+l$、$n+l$、$m+l$ 或 $n+m+l$ 之一，其中 $w\in H^1(X/G)$ 是主 $G$-丛 $G\hookrightarrow X\to X/G.$ 的特征类。我们知道 index$(X)\leq s$ [5]。因此，我们得到以下结果：

命题 4.1. 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l$ 上自由作用，$n\leq m\leq l.$ 则对于 $d>h$，不存在从 $\mathbb{S}^d$ 到 $X$的 $G$–等变映射，其中 $h$ 是 $n$、$m$、$l$、$n+m$、$2n+l$、$n+l$、$m+l$ 或 $n+m+l.$ 中的一个

回顾 Volovikov 指标 $i(X)$ 是满足以下条件的最小整数 $r\geq 2$：对于某个 $k$，在 Borel 纤维化 $X\overset{i}{\hookrightarrow}X_G\overset{\pi}{\to}B_G$ [23]的 Leray-Serre 谱序列中，$d_r: E^{k-r,r-1}_r\to E^{k,0}_r$ 是非平凡的。再次利用第 3 节中证明的定理，我们得到 $i(X)$ 是 $n$、$m$、$l$、$m-n$、$l-m$、$l-n$ 或 $l-m-n.$ 通过在定理 1.1中取 $Y=\mathbb{S}^k$[4]，我们有

定理 4.2. 设 $G=\mathbb{Z}_2$ 在一个有限型 $X\sim_2\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m\times\mathbb{S}^l, n\leq m\leq l.$ 上自由作用。则当 $1\leq k<i(X)-1$ 时，不存在 $G$-等变映射 $f: X\to\mathbb{S}^k$，其中 $i(X)$ 是 $n, m, l, m-n, l-m, l-n$ 或 $l-m-n.$ 中的一个

## References

[1] A. Adem、J. F. Davis 和 O. Unlu，球面乘积上的固定度与自由群作用，《Commentarii Mathematici Helvetici》，79（2004年），758-778。[2] A. Borel，关于紧李群的主丛空间及齐性空间的上同调，《数学年刊》57（2）（1953年），115-207。[3] G. E. Bredon，《紧变换群导论》，学术出版社，纽约（1972年）。

[4] F. R. C. Coelho、D. de Mattos 和 E. L. dos Santos，关于 G-等变映射的存在性，巴西数学会公报，43（2012年），407-421。[5] P. E. Conner、E. E. Floyd，无不动点对合与等变映射，美国数学会公报，66（1960年），416-441。[6] R. M. Dotzel、T. B. Singh 和 S. P. Tripathi，两个球面乘积上自由变换群的轨道空间的上同调环，美国数学会会刊，129（3）（2001年），921–930。[7] P. Dey、M. Singh，Milnor流形上某些紧群的自由作用，格拉斯哥数学杂志，61（2019年），727-742。[8] A. Kumari、H. K. Singh，球面的无不动点作用与等变映射，《拓扑学及其应用》，305（2022年），107886。[9] M. W. Hirsch、J. Milnor，球面上一些奇特的对合，美国数学会公报，70（1964年），372–377。[10] J. McCleary，《谱序列使用指南》，剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社，第二版，第58卷（2001年）。[11] A. M. M. Morita、D. De Mattos 和 P. L. Q. Pergher，某些 Dold 流形上自由 $\mathbb{Z}_2$作用的轨道空间的上同调环，澳大利亚数学会公报，97（2018年），340-348。[12] R. Myers，透镜空间上的自由对合，《拓扑学》，20（3）（1981年），313–318。[13] M. Singh，两个射影空间乘积上的自由对合的轨道空间，《数学成果》，57（1）（2010年），53-67。[14] G. R. Livesay，3维球面上的无不动点对合，《数学年刊》，72（2）（1960年），603–611。[15] R. Oliver，Conner猜想的一个证明，《数学年刊》，103（3）（1976年），637–644。[16] H. Ozeki、F. Uchida，球面乘积上的主圆作用，《大阪数学杂志》，9（1972年），379–390。[17] P. M. Rice， $\mathbb{Z}_4$ 在 $\mathbb{S}^3$上的自由作用，《杜克数学杂志》，36（1969年），749–751。[18] G. X. Ritter， $\mathbb{Z}_8$ 在 $\mathbb{S}^3$上的自由作用，美国数学会汇刊，181（1973年），195–212。[19] J. H. Rubinstein，某些有限群在 $\mathbb{S}^3$. I上的自由作用，《数学年刊》，240（2）（1979年），165–175。[20] G. X. Ritter，阶为 2n 的循环群在 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$上的自由作用，美国数学会会刊，46（1974年），137-140。[21] J. C. Su，上同调射影空间上的变换群，美国数学会汇刊，106（1963年），305–318。[22] Y. Tao，关于 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$上的无不动点对合，《大阪数学杂志》，14（1962年），145-152。[23] A. Yu. Volovikov，关于 G-空间的指标，《数学文集》，191（9–10）（2000年），1259–1277。

Dimpi
Department of Mathematics
University of DelhiDelhi – 110007,
India.电子邮箱地址:
dimpipaul2@gmail.com

Hemant Kumar Singh
Department of Mathematics
University of DelhiDelhi – 110007, India.电
子邮箱地址：hemantksingh@maths.du.ac.in