arXiv:2303.16602v1 [math.NT] 29 Mar 2023

任意次数递推序列的 Lerch 型 ζ 函数

´ALVARO SERRANO HOLGADO 和 LUIS MANUEL NAVAS VICENTE

ABSTRACT. 我们考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n(a_n+x)^{-s}$，其中 a_n满足一个系数为整数、次数任意的线性递推。在适当条件下，我们证明它可以解析延拓为复 s 平面上的亚纯函数。因此，我们可以为一般递推关联一个 Lerch 型 ζ 函数 $\varphi(z,s,x)$。这涵盖了此前所有仅涉及普通 ζ 函数和 Hurwitz 情形，以及次数为 2 和 3 的结果。我们的方法推广了 Ramanujan 针对经典 Hurwitz-Riemann ζ 函数类给出的一个公式。我们确定了 φ 的极点和留数，结果表明它们是 x 的多项式。此外，我们还研究了 φ 对 x 和 z 的依赖关系。

1. INTRODUCTION

本文的最初灵感来源于 [2] 和 [10], 独立证明的结果，该结果表明，狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-s}$，其中$\{F_n\}$ 是斐利波那契序列，在复平面上具有亚纯延拓。极点集合和留数也得到了确定，同时还确定了负整数处有限值的有理性以及正整数处取值的公式。关于二次递推的类似结果在 [3, 6, 11, 5, 14]中进行了研究。最近， [15]研究了三次递推对应的类似 ζ 函数。在 [13] 中，我们将所有这些结果推广到了任意次数的递推。关于多重 Lucas ζ 函数的相应版本见[8, 9]。

此外， [16]考虑了一个 Hurwitz型ζ函数，也就是说，它由形如 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+x)^{-s}$ 的级数定义，其中 $\{a_n\}$ 是一个一般的实 Lucas 二次数列。

在特殊函数的经典理论中，赫尔维茨 ζ 函数和 Lerch ζ 函数为黎曼 ζ 函数提供了有用的推广，并满足各种函数关系式、微分方程和代数性质（例如参见 [1]）。

2020 年数学主题分类。主要分类号：11M41、30B50；次要分类号：11 B37、11M35、30B40、33E20。关键词和短语：线性递推序列；Hurwitz ζ 函数；Lerch ζ 函数；解析延拓。第二作者的研究得到 MICINN（西班牙）项目 PID2021-124332NB-C22 的资助。

在证明了 [13], 中一个递推狄利克雷级数的解析延拓后，我们自然开始考虑与之类似的 Lerch 型级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n(a_n+x)^{-s}$，它对应任意次数的线性递推序列。本文关于解析延拓的结果包含了前文提到的特殊情形。有趣的是，从某些意义上说，这种“递推 Lerch 函数”的表现实际上优于其经典对应物；但在另一些方面，情况恰恰相反。

我们简要概述本文的结构。

在第 2 节中，我们回顾关于整数上的线性递推序列所需的基本事实。我们还概述了[13] 关于递推序列的 ζ 函数的结果，并引入本文的主要研究对象——级数，

$$\varphi(z,s,x)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n(a_n+x)^{-s}.$$

在第 3 节中，我们将 ϕ（z， s， x）的研究归结为 $x=0$的情形，并给出 Hurwitz ζ 函数关于黎曼 ζ 函数的 Ramanujan 公式的一个类似结果（定理 3.3 和推论 3.7），即

$$\zeta(s,1-x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(s)_j}{j!}\zeta(s+j)x^j.$$

遵循这一策略，在第 4 节中，我们处理 $x=0$的情形，证明 ϕ（z， s，0）在整个s-平面上具有亚纯延拓（定理 4.1），并计算其极点和留数。

综合前几节的结果，第ϕ（z、 s、 x）的一般情形将在第5节中研究。定理5.1证明了其亚纯延拓，并确定了极点集合和留数（命题5.5）。

最后，在第6 节中，我们还将研究 ϕ（z、 s、 x）作为 x 的函数（作为关于 x 的级数，它在单位圆盘内收敛），并研究 z。在定理6.1 中，我们证明了它也可以亚纯延拓到整个 z平面，并计算出其极点以及 z-留数（命题6.3）。

2. Background and basic properties

在[13], 中，我们研究了由整数上的线性递推序列 $\{a_n\}$定义的ζ 函数，该序列由 $\sigma=\Re(s)>0$ 通过狄利克雷级数定义

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^s}.$$

在以大致相同的方式继续研究与线性递推序列相关的 Hurwitz 型函数和 Lerch 型函数之前，我们先

简要总结一下我们的研究背景和先前的研究结果，并以此为基础展开后续讨论。

定义 2.1. 若整数序列 $\{a_n\}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上是线性递推序列，是指存在首一多项式 $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$，使得当 $\nabla a_n = a_{n+1}$ 时，$Q(\nabla)a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$。

LRS $\{a_n\}$ 具有一个最小多项式，即满足 $P(\nabla)$ 湮灭 $\{a_n\}$ 的最低次数首一多项式 $P(x)$。

对于定义在 $\mathbb{Z}$ 上的 LRS，我们有以下结果，这是斐波那契序列的 Binet公式的推广（例如参见 §1.1.6 中的 [4], ）：

命题 2.2. 设 $\{a_n\}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上且最小多项式为 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的 LRS。设 K 是 $P(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域，且 $\alpha_1, ..., \alpha_r$ 是 $P(x)$ 在 K 中的根，每个根的重数为 m_i。则存在多项式 $\lambda_i(x) ..., \lambda_r(x)$，使得 $\lambda_i(x) \in \mathbb{Q}(\alpha_i)[x]$，且 deg $\lambda_i \leq m_i - 1$，满足

$$a_n = \lambda_1(n)\alpha_1^n + ... + \lambda_r(n)\alpha_r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

在下文中，我们将假设 P（x）是我们线性递推序列的最小多项式 $\{a_n\}$ 是不可约的，因此特别地，它的所有根都是单根，并且命题 λ_i（x）中的多项式2.2实际上都是常数$\lambda_i \in \mathbb{Q}$（α_i）。

我们还将假设，该线性递推序列的最小多项式 $P(x)$ 具有一个主根（不妨设为 α_1），也就是说，$\alpha_1 > 1$ 且$\alpha_1 > |\alpha_i|$ 对于 $i = 2, ..., r$ 成立。在这一假设下（并在必要时将 $\{a_n\}$ 改为 $\{-a_n\}$ ），$\{a_n\}$ 最终严格递增，因此最终严格递增且为正，即存在某个 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $\{a_{n_0+n}\}_n$ 是一个严格递增的正整数序列。由于和式中的有限项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^s},$$

以及我们将在此研究的狄利克雷级数中的有限项，只会使总和改变一个整函数，因此不妨设 $\{a_n\}$ 已经严格递增且为正。

在此设定下，如果 a_n 的 Binet公式表达式为

$$a_n = \lambda_1\alpha_1^n + ... + \lambda_r\alpha_r^n,$$

我们在[13] 中证明了：

• 狄利克雷级数

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^s}, \tag{2.3}$$

其收敛横坐标和绝对收敛横坐标均为 $\sigma=0$，并且可解析延拓为整个 s平面上的亚纯函数。

• 此解析延拓由下式给出

$$\varphi(s)=\sum_{k_{\leq r-1}=0}^{\infty,k_{\leq r-2}}\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)\frac{1}{\alpha_1^{s+k_1}\alpha_2^{-k_1+k_2}...\alpha_r^{-k_{r-1}}-1}, \tag{2.4}$$

为简便起见，我们记 $k_{\leq j}$ 为 j元组（$k_1,...,k_j$），$\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)$ 表示函数

$$\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)=\binom{-s,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}\lambda_1^{-s+k_1}\lambda_2^{k_1-k_2}...\lambda_r^{k_{r-1}}$$

and

$$\binom{-s,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}=\binom{-s}{k_1}\binom{k_1}{k_2}...\binom{k_{r-2}}{k_{r-1}}.$$

• $\varphi(s)$ 的极点为以下各点

$$s_{n,k_{\leq r-1}}=\frac{\log|\alpha_1^{-k_1}\alpha_2^{k_1-k_2}...\alpha_r^{k_{r-1}}|}{\log\alpha_1}+i\frac{\arg(\alpha_2^{k_1-k_2}...\alpha_r^{k_{r-1}})+2\pi n}{\log\alpha_1}, \tag{2.5}$$

$$n,k_i\in\mathbb{Z},\quad k_1\geq...\geq k_{r-1}\geq 0.$$

• $\varphi(s)$ 在极点 $s=s_0$ 处的留数为

$$\sum_{(n,k_{\leq r-1})\in\boldsymbol{\tau}(s_0)}\frac{1}{\alpha_1}\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s_0), \tag{2.6}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}(s_0)$ 是由满足 $s_{n,\ k_{\leq r-1}}=s_0$ 的 r 元组 $(n,k_1,...,k_{r-1})$ 组成的集合（一般而言，我们无法确定每个极点对应的这类元组是否只有一个，但该集合总是有限的）。

• 若 $m\in\mathbb{N}$ 和 $-m$ 不是 $\varphi(s)$ 的极点，则 $\varphi(-m)$ 是一个有理数。

现在我们将研究递推序列 ζ 函数的 Hurwitz 型版本，它对 $0\leq x<1$ 定义为狄利克雷级数:

$$\varphi(s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a_n+x)^s}, \tag{2.7}$$

以及定义为的 Lerch 型函数

$$\varphi(z,s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(a_n+x)^s}. \tag{2.8}$$

这些是经典 Hurwitz ζ 函数、Lerch ζ 函数和 Lerch 超越函数在我们所研究情形下的自然推广。显然,

$$\varphi(s,x)=\varphi(1,s,x),$$

并且，由于我们所用的方法同样适用于级数（2.7）和（2.8），因此我们将主要讨论 Lerch 型 ζ 函数；通过令 $z=1$，所得结果也适用于 Hurwitz 型函数。

我们首先研究这些狄利克雷级数的收敛横坐标和绝对收敛横坐标。所用公式可见于[7]。我们先仅将 $\varphi(z,s,x)$视为 s的函数，假设 z和 x 固定。稍后我们将研究它关于其他变量的变化。为使某些公式的记号更简洁，我们定义：

$$z=re^{2\pi i\xi},$$

也就是说， $r=|z|$ 和$\xi=\frac{1}{2\pi}\arg(z)$。

命题 2.9。定义 Lerch 型 ζ 函数 $\varphi(z,s,x)$的狄利克雷级数（2.8）的收敛横坐标和绝对收敛横坐标均为 $\sigma=\log r\log\alpha_1$。

证明。首先注意到，由于当 $n\to\infty$ 时，$\log(a_n+x)\approx n\log\alpha_1$，

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(a_n+x)}=\lim_n\frac{\log n}{n\log\alpha_1}=0,$$

且这个数给出了两个横坐标之间距离的上界，因此二者相同。因此，我们只需计算绝对收敛横坐标，即

$$\begin{cases}\limsup\limits_n\dfrac{\log(r+\ldots+r^n)}{\log(a_n+x)} & \text{if } \sum r^n=+\infty\\[2ex] \limsup\limits_n\dfrac{\log(r^n+r^{n+1}+\ldots)}{\log(a_n+x)} & \text{if } \sum r^n<+\infty\end{cases}$$

由于 $\sum r^n$ 收敛当且仅当 $r<1$，因此我们需要研究这两种情况。

若 $r>1$， $r+\ldots+r^n=\frac{r-r^{n+1}}{1-r}$，且

$$\limsup_n\frac{\log(r+\ldots+r^n)}{\log(a_n+x)}=\lim_n\frac{n\log r}{n\log\alpha_1}=\frac{\log r}{\log\alpha_1}.$$

若 $r<1$， $r^n+r^{n+1}+\ldots=\frac{r^n}{1-r}$，则得到相同的结果。

最后，如果 $r=1$、 $r+\ldots+r^n=n$ 且上限为 0，这恰好是 $\log r\log\alpha_1$。 ■

在这里，我们可以看到我们的 Lerch 型狄利克雷级数与定义经典 Lerch 超越函数的狄利克雷级数之间的主要区别，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+x)^s},$$

其区别在于，若 $r > 1$，后者处处不收敛。这一区别使我们能够使用相同的技巧研究函数 $\varphi(z,s,x)$ 和 $\varphi(s,x)$。

推论 2.10. Hurwitz 型狄利克雷级数 $\varphi(s,x)$ 定义于(2.7) 的 $\sigma = 0$ 是其收敛与绝对收敛的收敛横坐标。

3. A formula of Ramanujan

作为证明 $\varphi(z,s,x)$ 解析延拓的第一步，我们将证明一个公式。在此情形下，该公式等价于 Ramanujan 关于 Hurwitz ζ 函数与黎曼 ζ 函数之间关系的公式，即

$$\zeta(s,1-x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(s)_j}{j!}\zeta(s+j)x^j,$$

该式作为等式 (15) 出现在 [12]，中，其中 $(s)_j$ 是 Pochhammer 符号，也称为上升阶乘，

$$(s)_j = s(s+1)...(s+j-1).$$

这个公式的版本将使我们能够把对$\varphi(z,s,x)$的研究简化为对 $\varphi(z,s,0)$的研究。不过，在此之前，我们先陈述并证明一个二项式系数的上界，该上界在全文中都会用到。

引理 3.1. 设 $s \in \mathbb{C}$ 和 $j \in \mathbb{N}_0$。若 $|s| \leq M$，则

$$\left|\binom{-s}{j}\right| \leq (-1)^j \binom{-M}{j}. \tag{3.2}$$

特别地，

$$\left|\binom{-s}{j}\right| \leq (-1)^j \binom{-|s|}{j}.$$

证明。若 $j = 0$，则两边均为 1。若 $j > 0$，

$$\binom{-s}{j} = \frac{(-s)(-s-1)...(-s-j+1)}{j!} = (-1)^j \frac{s(s+1)(s+2)...(s+j-1)}{j!}.$$

由于对于每个 $l = 0$，.....，$j-1$，都有 $|s+l| \leq |s| + l \leq M + l$

$$\left|\binom{-s}{j}\right| \leq \frac{M(M+1)..(M+j-1)}{j!} = (-1)^j \binom{-M}{j}.$$

■

定理 3.3. 如果 $\sigma > \text{对数}\, r\, \text{对数}\, \alpha_1$, 则成立

$$\varphi(z,s,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}\varphi(z,s+j,0)x^j. \tag{3.4}$$

证明。由于对于每个 n, $0\le x<1$ 和 $a_n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{x}{a_n}\right|<1$, 我们可以利用二项级数得到

$$(a_n+x)^{-s}=a_n^{-s}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{-s}=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}a_n^{-s-j}x^j.$$

因此,

$$\varphi(z,s,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(a_n+x)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}x^j\frac{z^n}{a_n^{s+j}}. \tag{3.5}$$

公式 (3.4) 成立的前提是我们能够改变 (3.5) 中的求和次序，而这可由它是绝对收敛的双重级数这一事实推出。为证明这一点，注意到 $\{|z^n a_n^{-s-j}|\}_j$ 是递减的，因此有上界 $|z^n a_n^{-s}|$。

利用这一点以及上界 (3.2)，取 $M=|s|$ 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\binom{-s}{j}x^j\frac{z^n}{a_n^{s+j}}\right|\le\\ \le&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a_n^{-\sigma}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-|s|}{j}|x|^j=\\ =&(1-|x|)^{-|s|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a_n^{\sigma}}.\end{aligned}$$

当 $\sigma > \log r \log \alpha_1$ 时，这个最后的级数绝对收敛，因此双重级数 (3.5) 也绝对收敛，我们可以改变求和次序:

$$\begin{aligned}\varphi(z,s,x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}x^j\frac{z^n}{a_n^{s+j}}=\\ &=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{a_n^{s+j}}\end{aligned} \tag{3.6}$$

如果 $\sigma > \text{对数}\, r\, \text{对数}\, \alpha_1$, n 中的3.6式级数收敛于 $\varphi(z,\ s+j,\ 0)$, 对每个$j\ge 0$均成立，因此得到公式（3.4）。■

推论 3.7. 如果 $\sigma > 0$，Hurwitz 型狄利克雷级数 $\varphi(s,x)$ 满足公式

$$\varphi(s,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}\varphi(s+j)x^j. \tag{3.8}$$

4. The case $x=0$

鉴于（3.4），我们可以通过研究 $\varphi(z,\ s,\ x)$ 来研究函数 $\varphi(z,\ s,\ 0)$。

定理 4.1. Lerch 型狄利克雷级数 $\varphi(z,s,0)$ 作为 s 的函数，在 $\sigma > \log r\log\alpha_1$ 时是全纯的，并可解析延拓为~~整个~~ s 平面上的亚纯函数；其极点全为一阶极点，且极点位置为

$$s^{(z)}_{n,k_1,\dots,k_{r-1}}=\frac{\log r}{\log\alpha_1}+i\frac{2\pi\xi}{\log\alpha_1}+s_{n,k_1,\dots,k_{r-1}},\qquad \begin{array}{c} n,k_i\in\mathbb{Z},\\ k_1\geq\ldots\geq k_{r-1}\geq 0,\end{array} \tag{4.2}$$

其中 $s_{n,\ k_{\leq r-1}}$ 是 ζ 函数 $\varphi(s)$的极点，定义见(2.5)。也就是说，$\varphi(z,\ s,\ 0)$ 的极点序列是$\varphi(s)$的平移。

证明。正如我们在 [13] 中研究 ζ 函数 $\varphi(s)$ 时所做的那样，我们首先利用二项级数得到

$$a_n^{-s}=\sum_{k_{\leq r-1}=0}^{\infty,k_{\leq r-2}}\binom{-s,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}(\lambda_1\alpha_1^n)^{-s-k_1}(\lambda_2\alpha_2^n)^{k_1-k_2}\ldots(\lambda_r\alpha_r^n)^{k_{r-1}}.$$

这是可行的，因为

$$\left|\frac{\lambda_2\alpha_2^n+\ldots+\lambda_r\alpha_r^n}{\lambda_1\alpha_1^n}\right|<1$$

对足够大的 n 成立；必要时，我们可以通过去掉求和中的有限项，不失一般性地假设它对每个 n 都成立，因为这不会影响我们要证明的结论。

由此，我们可以将狄利克雷级数 $\sum z^n a_n^{-s}$ 写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_{\leq r-1}}^{\infty,k_{\leq r-2}}\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)(z\alpha_1^{-s-k_1}\alpha_2^{k_1-k_2}\ldots\alpha_r^{k_{r-1}})^n. \tag{4.3}$$

现在我们证明（4.3）在 $\sigma > \log r\log\alpha_1$ 时绝对收敛，这将使我们能够~~改~~变求和次序。

首先，再次利用上界（3.2），并取 $M = |s|$，可得

$$\left|\Lambda_{k_{\le r-1}}(s)\right| \le (-1)^{k_1}\binom{-|s|, k_{\le r-2}}{k_{\le r-1}}\lambda_1^{-\sigma-k_1}|\lambda_2|^{k_1-k_2}...|\lambda_r|^{k_{r-1}}.$$

其次，我们可以假设该序列

$$\frac{|\lambda_2\alpha_2.| + ... + |\lambda_r\alpha_r^n|}{\lambda_1\alpha_1^n}$$

严格递减且小于 1（除了有限项之外，情况都是如此；去掉这些项不会改变我们要证明的结论）。

最后，该序列

$$\left(1 - \frac{|\lambda_2\alpha_2^n| + ... + |\lambda_r\alpha_r^n|}{\lambda_1\alpha_1^n}\right)^{-|s|}$$

的极限为 1，因此它有界：存在某个 $K_s > 0$ 使得

$$\left(1 - \frac{|\lambda_2\alpha_2^n| + ... + |\lambda_r\alpha_r^n|}{\lambda_1\alpha_1^n}\right)^{-|s|} < K_s \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

再次利用这三个事实以及二项级数，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_{\le r-1}=0}^{\infty,k_{\le r-2}}\left|\Lambda_{k_{\le r-1}}(s)(z\alpha_1^{-s-k_1}\alpha_2^{k_2-k_1}...\alpha_r^{k_{r-1}})^n\right| \le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_{\le r-1}=0}^{\infty,k_{\le r-2}}(-1)^{k_1}\binom{-|s|, k_{\le r-2}}{k_{\le r-1}}r^n(\lambda_1\alpha_1^n)^{-\sigma-k_1}|\lambda_2\alpha_2^n|^{k_1-k_2}...|\lambda_r\alpha_r^n|^{k_{r-1}} =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_1^{-\sigma}\alpha_1^{-n\sigma}r^n\left(1 - \frac{|\lambda_2\alpha_2^n| + ... + |\lambda_r\alpha_r^n|}{\lambda_1\alpha_1^n}\right)^{-|s|} \le \lambda_1^{-\sigma}K_s\sum_{n=1}^{\infty}(r\alpha_1^{-\sigma})^n.$$

如果 $\sigma > \log r \log \alpha_1$，并且 $r\alpha_1^{-\sigma} < 1$ 中的最后一个级数收敛，这意味着（4.3）绝对收敛。通过改变求和顺序，并计算 n 中的级数（当 $\sigma > \log r \log \alpha_1$ 时这是可能的），我们得到 $\varphi(z, s, 0)$ 可以表示为

$$\varphi(z,s,0) = \sum_{k_{\le r-1}=0}^{\infty,k_{\le r-2}}\Lambda_{k_{\le r-1}}(s)\frac{1}{z^{-1}\alpha_1^{s+k_1}\alpha_2^{-k_1+k_2}...\alpha_r^{-k_{r-1}} - 1}. \tag{4.4}$$

到目前为止，我们只证明了以下关于 $\sigma > \log r \log \alpha_1$ 的表达式。现在我们来说明，它定义了一个关于 s 的亚纯函数，该函数在整个 s-平面上都有定义。为此，只需证明级数（4.4）在不含任何点（4.2）的紧集上正规收敛；这些点因此就是它的极点。

于是，令 s 在这样一个紧集中变化。特别地， s 有界：存在某个 $M>0$，使得 $|s|\leq M$。现在，对于 $k_1\gg 0$，有

$$\left|z^{-1}\alpha_1^{s+k_1}\alpha_2^{-k_1+k_2}...\alpha_r^{-k_{r-1}}\right|\geq r^{-1}\alpha_1^{\sigma+k_1}|\alpha_2|^{-k_1+k_2}...|\alpha_r|^{k_{r-1}}-1>$$
$$>r^{-1}\alpha_1^{\sigma+k_1-1}|\alpha_2|^{-k_1+k_2}...|\alpha_r|^{k_{r-1}}$$

此外，请注意， $|\sigma|\leq|s|\leq M$ 因此 $\alpha_1^{-\sigma}\leq\alpha_1^M$且

$$\lambda_1^{-\sigma}\leq\begin{cases}\lambda_1^M & \text{if } \lambda_1\geq 1\\ \lambda_1^{-M} & \text{if } \lambda_1\leq 1\end{cases}$$

无论如何，二者 $\alpha_1^{-\sigma}$和 $\lambda_1^{-\sigma}$在我们的紧集上都是一致有界的（记 K_{λ_1} 为 $\lambda_1^{-\sigma}$的上界）。利用这两个事实以及二项式系数的上界（3.2），我们得到存在某个 $k_0\gg 0$，使得当 $k_1\geq k_0$ 且 s 在该紧集中变化时，

$$\left|\left|\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)\frac{1}{z^{-1}\alpha_1^{s+k_1}...\alpha_r^{-k_{r-1}}}\right|\right|\leq$$
$$\leq K_{\lambda_1}\alpha_1^{M+1}(-1)^{k_1}\binom{-M,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}(\lambda_1\alpha_1)^{-k_1}|\lambda_2\alpha_2|^{k_1-k_2}...|\lambda_r\alpha_r|^{k_{r-1}}.$$

现在，注意到

$$\sum_{k_1=k_0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{k_1}...\sum_{k_{r-1}=0}^{k_{r-2}}K_{\lambda_1}\alpha_1^{M+1}(-1)^{k_1}\binom{-M,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}(\lambda_1\alpha_1)^{-k_1}...|\lambda_r\alpha_r|^{k_{r-1}}\leq$$
$$\leq K_{\lambda_1}\alpha_1^{M+1}\sum_{k_1=0}^{\infty}...\sum_{k_{r-1}=0}^{k_{r-2}}(-1)^{k_1}\binom{-M,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}(\lambda_1\alpha_1)^{-k_1}...|\lambda_r\alpha_r|^{k_{r-1}}=$$
$$=K_{\lambda_1}\alpha_1^{M+1}\left(1-\frac{|\lambda_2\alpha_2|+...+|\lambda_r\alpha_r|}{\lambda_1\alpha_1}\right)^{-M}<+\infty,$$

因此，级数（4.4）实际上在不包含点（4.2）中任一点的每个紧集上都正规收敛，这意味着它是整个 s-平面上的亚纯函数，而这些点是其极点，并且都是单极点。■

注 4.5. 如我们所述， $\varphi(z,s,0)$ 的极点是 zeta 函数 $\varphi(s)$ 的极点的平移。此外，这种平移不会影响这些极点处留数的计算：很容易验证，如果 s_0 是 $\varphi(s)$ 的一个极点，而 $s_0^{(z)}$ 是 $\varphi(z,s,0)$ 的相应极点，那么

$$\operatorname{res}_{s=s_0^{(z)}}\varphi(z,s,0)=\operatorname{res}_{s=s_0}\varphi(s).$$

由于我们已经知道 φ（s）的留数，它们由（2.6）给出，因此我们自动得到 φ（z， s， 0）的留数。

5. Analytic continuation

现在我们终于可以证明，Lerch 型狄利克雷级数 $\varphi(z,s,x)$ 作为s的函数可以延拓到整个复平面。

定理 5.1。Lerch 型狄利克雷级数 $\varphi(z,s,x)$ 作为 s 的函数，在半平面 $\sigma > \log r \log \alpha_1$ 内全纯，并可解析延拓为整个 s-平面上的亚纯函数，其极点均为单极点，并且位于以下各点

$$-j + s^{(z)}_{n,k_1,\dots,k_{r-1}}, \qquad j,n,k_i \in \mathbb{Z},\ j \geq 0,\ k_1 \geq \dots \geq k_{r-1} \geq 0. \tag{5.2}$$

证明。 根据定理 3.3，对于 $\sigma > \log r \log \alpha_1$， $\varphi(z, s, x)$ 验证公式（3.4），即

$$\varphi(z,s,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} \varphi(z, s+j, 0) x^j.$$

根据定理 4.1，每个 $\varphi(z, s+j, 0)$ 都是整个 s-平面上的亚纯函数，并且具有极点 $-j + s^{(z)}_{n,k_{\leq r-1}}$，其中 j固定。现在我们将再次证明，公式（3.4）实际上定义了整个复平面上的亚纯函数，方法是再次证明级数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} \varphi(z, s+j, 0) x^j$$

在不包含以下任一点的紧集上正规收敛：5.2）。

令 s 在这些紧集 $\mathcal{K}$之一中变化。特别地，对于某个 $M > 0$，有 $|s| \leq M$，并且还有 $|\sigma| \leq |s| \leq M$。由于 $\varphi(z, s+j, 0)$ 对于 $\sigma > -j + \text{对数}\, r\, \text{对数}\, \alpha_1$ 是绝对收敛的狄利克雷级数，因此存在某个$j_0 \geq 0$，使得对于每个 $j \geq j_0$， $\varphi(z, s+j, 0)$ 在 $\mathcal{K}$ 中的每一点都由绝对收敛的狄利克雷级数定义（例如，取 $j_0 \geq M + \text{对数}\, r\ \text{对数}\, \alpha_1$ 即可）。

对于 $j \geq j_0$，我们有

$$|\varphi(z, s+j, 0)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{(a_n + x)^{s+j}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(a_n + x)^{\sigma+j}} = \varphi(r, \sigma + j, 0).$$

在实轴上，具有正系数的收敛狄利克雷级数是递减的，这尤其意味着

$$\varphi(r, \sigma + j, 0) \leq \varphi(r, \sigma + j_0, 0) \quad \forall j \geq j_0.$$

最后，当 s 在我们的紧集上变化时， $\varphi(r, \sigma + j_0, 0)$ 由某个常数 M' 统一有上界：我们可以取 $M' = \varphi(r, \sigma_0 + j_0, 0)$，其中 $\sigma_0 = \min\{\sigma \mid s \in \mathcal{K}\}$。无论如何，对于 $j \geq j_0$，我们都有上界

$$\left\| \binom{-s}{j} \varphi(z, s+j, 0) x^j \right\| \leq M'(-1)^j \binom{-M}{j} |x|^j.$$

现在，注意到 $0 \leq x < 1$,

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \left\| \binom{-s}{j} \varphi(z, s+j, 0) x^j \right\| \leq M' \sum_{j=j_0}^{\infty} (-1)^j \binom{-M}{j} |x|^j \leq$$

$$\leq M' \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-M}{j} |x|^j = M'(1 - |x|)^{-M},$$

这使得（3.4） $\mathcal{K}$正规收敛。由于 $\mathcal{K}$ 是一个不包含点（5.2）中任何一点的紧集，我们便得到所需结果。■

推论 5.3. Hurwitz 型狄利克雷级数 $\varphi(s, x)$ 作为 s 的函数，在半平面 $\sigma > 0$ 上全纯，并可解析延拓为整个 s 平面上的亚纯函数，其极点均为简单极点，且位于以下各点

$$-j + s_{n,k_1,\ldots,k_{r-1}}, \qquad j, n, k_i \in \mathbb{Z},\ j \geq 0,\ k_1 \geq \ldots \geq k_{r-1} \geq 0. \tag{5.4}$$

此外，我们还可以相当容易地确定这些 ζ 函数在各个极点处的留数，只需再次将问题化简为 $x = 0$，其留数已知（见注记 4.5）。

命题 5.5. 若 s_0 是 Lerch 型 ζ 函数 $\varphi(z, s, x)$ 的一个极点，则 $\varphi(z, s, x)$ 在 s_0 处的留数是变量 x 的一个多项式；事实上，若

$$j_0 = \left[-\sigma_0 + \frac{\log r}{\log \alpha_1} \right],$$

我们有

$$\operatorname{res}_{s=s_0} \varphi(z, s, x) = \sum_{j=0}^{j_0} \binom{-s_0}{j} \left(\operatorname{res}_{s=s_0} \varphi(z, s, 0) \right) x^j. \tag{5.6}$$

证明。 $\varphi(z, s+j, 0)$ 的绝对收敛横坐标为 $-j + \frac{\log r}{\log \alpha_1}$，因此只要 $\sigma_0 + j > \frac{\log r}{\log \alpha_1}$， $\varphi(z, s+j, 0)$ 在 s_0 处全纯。这意味着只有有限多个 $\varphi(z, s+j, 0)$ 在 s_0 处可能有极点；事实上， $\varphi(z, s+j, 0)$ 只有在 s_0 时才可能有极点

$$j \leq \left[-\sigma_0 + \frac{\log r}{\log \alpha_1} \right].$$

结果和公式（5.6）由此得出。 ■

再次令 $z = 1$，我们得到关于赫尔维茨型 ζ 函数 $\varphi(s, x)$ 的相同结果。

6. Dependence on z and x

到目前为止，我们一直将 $\varphi(z, s, x)$ 视为变量 s 的函数，并取适当固定的 z 和 x。然而，我们可以探究 $\varphi(z, s, x)$ 如何依赖另外两个变量。

变量 x 对我们所研究的性质影响不大：$(z,\ s,\ x)$ 的收敛横坐标不依赖于 x，而定理 5.1 的证明可以理解为说明公式（3.4）

$$\varphi(z, s, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} \varphi(z, s + j, 0) x^j$$

在变量 x 上，将 $\varphi(z, s, x)$ 解析延拓到开单位圆盘 $\mathbb{D}$（作为关于 x 的级数，它在开单位圆盘的每个紧子集上都正规收敛）。

关于变量 z，我们还可以多说一些。首先，$\varphi(z,\ s,\ x)$ 的定义是作为级数（2.8），

$$\varphi(z, s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(a_n + x)^s},$$

到目前为止，我们将其视为变量s的狄利克雷级数；它也可以看作变量 z的幂级数。对于固定的 $s \in \mathbb{C}$ 和 $0 \le x < 1$，该幂级数的系数为

$$c_n = (a_n + x)^{-s},$$

我们可以轻松计算出它的收敛半径为

$$\rho^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a_n + x)^{-s}} = \alpha_1^{-\sigma},$$

也就是说，$\rho = \alpha_1^{\sigma}$。注意，这与命题2.9一致，因为

$$r < \alpha_1^{\sigma} \Leftrightarrow \sigma > \frac{\log r}{\log \alpha_1}.$$

事实证明，作为 z的函数，$\varphi(z, s, x)$也可以解析延拓为整个 z平面上的亚纯函数。我们之前的大部分工作仍然有助于证明这一点，但具体细节有所不同，因此有必要更仔细地加以说明。

定理6.1. 函数 $\varphi(z, s, x)$，视为关于变量 z 的函数，其中 s 且 x 固定；该函数在开圆盘 $|z| < \rho$ 内（当 $\rho = \alpha_1^{\sigma}$ 时）为全纯函数，并可解析延拓为

整个 z 平面上的亚纯函数。其极点均为简单极点，且位于以下各点

$$(6.2)\quad z^{(s)}_{j,k_{\leq r-1}} = \alpha_1^{s+j+k_1}\alpha_2^{-k_1+k_2}...\alpha_r^{-k_{r-1}}, \quad j,k_i \in \mathbb{N}_0,\ k_1 \geq ... \geq k_{r-1}.$$

证明。定理 3.3 仍然成立，即使现在我们将 $\varphi(z,\ s,\ x)$ 视为 z的函数，前提是我们将假设从 $\sigma > \log r \log \alpha_1$ 改为 $r < \alpha_1^{\sigma}$，二者是~~等价~~的。因此，公式（3.4）仍然成立，即

$$\varphi(z,s,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-s}{j} \varphi(z,s+j,0)x^j.$$

和之前一样，我们将对 $\varphi(z,s,x)$ 的研究建立在对 $\varphi(z,s,0)$ 的研究之上。

现在仔细考察定理 4.1的证明，条件$r < \alpha_1^s$ 使我们能够再次得到方程（4.4），即

$$\varphi(z,s,0) = \sum_{k_{\leq r-1}=0}^{\infty,k_{\leq r-1}} \Lambda_{k_{\leq r-1}} \frac{1}{z^{-1}\alpha_1^{s+k_1}\alpha_2^{-k_2+k_1}...\alpha_r^{-k_r} - 1}.$$

由此，我们证明了，作为 s的函数，该级数在不包含任何分母的零点的紧集上一致收敛。作为 z的函数，这些分母的零点为$z_0^{(s)}$ 、$_{k_{\leq r-1}}$，按照（6.2）中的记号。当 z 属于一个不包含这些点中任何一点的紧集时$\mathcal{K}$，特别地，存在某个 $M > 0$使得 $r = |z| \leq M$，并且如定理 4.1的证明中所示，对于 $k_1 \gg 0$有

$$\begin{aligned}\left|\alpha_1^{s+k_1}\alpha_2^{-k_1+k_2}...\alpha_r^{-k_{r-1}} - z\right| &\geq \alpha_1^{\sigma+k_1}|\alpha_2|^{-k_1+k_2}...|\alpha_r|^{-k_{r-1}} - r \geq \\ &\geq \alpha_1^{\sigma+k_1}|\alpha_2|^{-k_1+k_2}...|\alpha_r|^{-k_{r-1}} - M \geq \\ &\geq \alpha_1^{\sigma+k_1-1}|\alpha_2|^{-k_1+k_2}...|\alpha_r|^{-k_{r-1}}.\end{aligned}$$

因此，在 $\mathcal{K}$中，

$$\left|\left|\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)\frac{z}{\alpha_1^{s+k_1}...\alpha_r^{-k_{r-1}} - z}\right|\right| \leq M\left|\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)\right|\alpha_1^{-\sigma-k_1}...|\alpha_r|^{k_{r-1}} \leq$$

$$\leq M\alpha_1^{-1}(-1)^{k_1}\binom{-|s|,k_{\leq r-2}}{k_{\leq r-1}}(\lambda_1\alpha_1)^{-\sigma-k_1}|\lambda_2\alpha_2|^{k_1-k_2}...|\lambda_r\alpha_r|^{k_{r-1}}.$$

具有此通项的 k_i 级数收敛于

$$M\lambda_1^{-\sigma}\alpha_1^{-\sigma-1}\left(1 - \frac{|\lambda_2\alpha_2| + ... + |\lambda_r\alpha_r|}{\lambda_1\alpha_1}\right)^{-|s|},$$

因此，级数（4.4）作为关于 z的函数，在不含任何点 $z_0^{(s)}{}_{,k_{\leq r-1}}$ 的紧集上也正规收敛，所以 $\varphi(z,s,0)$是整个复平面上的 z 亚纯函数。

最后，我们使用公式（3.4），即

$$\varphi(z,s,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-s}{j}\varphi(z,s+j,0)x^j,$$

以类似于定理 5.1 的方式，证明函数 $\varphi(z,s,x)$ 关于变量 z 的解析延拓如下：若 z 在不含任何点 $z_j^{(s)}$,$_{k_{\le r-1}}$ 的紧集 $\mathcal{K}'$ 中变化（因此，特别是对于某个 $M'>0$，有 $r=|z|\le M'$），并且 $\varphi(z,s+j,0)$ 作为关于 z 的幂级数，其收敛半径为 $\alpha_1^{\sigma+j}$，且随着 j 增大而趋于 ∞，则存在某个 $j_0\in\mathbb{N}$，使得对每个 $z\in\mathcal{K}'$，$\varphi(z,s+j,0)$ 都由幂级数 (2.8) 定义（任取一个满足 $M<\alpha_1^{\sigma+j_0}$ 的 j_0 即可）。若 $j\ge j_0$，则有

$$|\varphi(z,s+j,0)|\le\varphi(r,\sigma+j,0)\le\varphi(M,\sigma+j,0)\le\varphi(M,\sigma+j_0,0).$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{j=j_0}^{\infty}\left|\left|\binom{-s}{j}\varphi(z,s+j,0)x^j\right|\right|&\le\varphi(M,\sigma+j_0,0)\sum_{j=j_0}^{\infty}(-1)^J\binom{-|s|}{j}|x|^j\le\\&\le\varphi(M,\sigma+j_0,0)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-s}{j}|x|^j=\\&=\varphi(M,\sigma+j,0)(1-|x|)^{-|s|},\end{aligned}$$

因此（3.4）也定义了一个关于 z 的亚纯函数，其定义于整个复平面，极点位于（6.2）中的点处，从而完成证明。■

关于这些极点各自的留数，我们可以作如下说明：

命题 6.3. 设 $z_0\in\mathbb{C}$ 是 $\varphi(z,s,x)$的一个极点。$\varphi(z,s,x)$在 $z=z_0$ 处的留数是关于 x的多项式。更准确地说，存在某个$j_0\in\mathbb{N}$ 使得

$$\operatorname{res}_{z=z_0}\varphi(z,s,x)=\sum_{j=0}^{j_0}\binom{-s}{j}\operatorname{res}_{z=z_0}\varphi(z,s+j,0)x^j.$$

此外，对于情形 $x=0$，若给定 $s\in\mathbb{C}$，$\boldsymbol{\tau}(z_0)$是满足 $z_0=\alpha_1^{s+k_1}\ldots\alpha_r^{-k_{r-1}}$的（$r-1$）元组 $k_{\le r-1}$的集合（该集合有限），则

$$\operatorname{res}_{z=z_0}\varphi(z,s,0)=-z_0\sum_{\boldsymbol{\tau}(z_0)}\Lambda_{k_{\le r-1}}(s).$$

证明。同样的部分可以使用与命题 5.5 的证明中完全相同的论证来证明，但将 s 中狄利克雷级数的绝对收敛横坐标改为幂级数 z 的收敛半径。

至于第二部分，注意如果 $z_0 = z_0^{(s)}$ ，$k_{\leq r-1}$，

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)\frac{1}{z^{-1}\alpha_1^{s+k_1}...\alpha_r^{k_{r-1}}-1} = -\Lambda_{k_{\leq r-1}}(s)z_0.$$

该结果可立即得出。 ■

References

[1] Apostol, T. M.，《论 Lerch ζ 函数》，《太平洋数学杂志》1（1951），第 161–167 页。[2] Egami, S.，《若干有趣的狄利克雷级数》（英文摘要），《解析数论及其与数论其他分支的相互作用》（日文）（京都，1998），S¯urikaisekikenky¯usho K¯oky¯uroku 第 1091 号（1999），第 172–174 页。[3]Elsner, C.、Shimomura, S.、Shiokawa, I.，《斐波那契数中奇数项倒数和的代数关系》，《Ramanujan 数学杂志》（2008）第 17 期，第 429–446 页，https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1007/s11139-007-9019-7[4]Everest, G.; van der Poorter, A.; Shparlinski, I. 和 Ward, T.，《递推数列》，《数学调查与专著》104，美国数学会，2003，https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1090/surv/104。[5]Holliday, S.H. 和 Komatsu, T.，《广义斐波那契数倒数之和》（英文摘要），《整数》11（2011），第 4 期，第 441–455 页，https://doi.org/10.1515/integ.2011.031。[6] Kamano, K.，《Lucas ζ 函数及其L函数的解析延拓》，《数学研究》，第 24 卷第 3 期，2013，https://doi.org/10.1016/j.indag.2013.04.002。[7] Landau, E.，《素数分布学说手册》，第二卷，B.G. Teubner，1909。[8]Meher, N.K. 和 Rout, S.S.，《多重 Lucas ζ 函数的解析延拓》，《数学分析与应用杂志》 468（2018），第 1115–1130 页，https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.08.063。[9] Meher, N.K. 和 Rout, S.S.，《与加性特征和狄利克雷特征相关的多重卢卡斯–狄利克雷级数》，《Med. J. Math.》18（2021），文章编号 262，https://doi.org/10.1007/s00009-021-01892-5。[10] Navas, L.，《斐波那契狄利克雷级数的解析延拓》，《Fibonacci Quarterly》39（2001），第 5 期，第 409–418 页。[11] Ohtsuka, H. 和 Nakamura, S.，《斐波那契数倒数之和》（英文摘要），《Fibonacci Quarterly》46/47（2008/09），第 2 期，第 153–159 页。[12] Ramanujan, S.，《欧拉常数的一个级数》 γ，《数学信使》46，73–80（1916–17）。[13]Serrano Holgado, ´A. 和 Navas Viciente, L.M.，《任意次数递推序列的 ζ 函数》，预印本，https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.11747。[14] Silverman, J.H.; Bradley, D. 和 Darling, D.Al，《问题与解答：解答：递推序列上的一个 ζ 函数》，《美国数学月刊》106（1999），第 7 期，第 686–688 页，https://doi.org/10.2307/2589509。[15] Smajlovic, L.; Sabanac, Z. 和 Sceta, L.，《广义特里波那契 ζ 函数》，《Fibonacci Quarterly》60，第 5 期，第 344–354 页。

[16] Smajlovic, L.；Sabanac, Z. 和 Sceta, L.，《与 Lucas 序列相关的 Hurwitz型ζ 函数》，《Fibonacci Quarterly》60，第 5 期，第 355–371 页。

电子邮箱地址：Alvaro Ş errano@usal.es

电子邮箱地址：navas@usal.es

Departamento de Matemáticas and IUFFYM, Universidad de Salamanca, Plaza de la Merced 1-4, 37008 Salamanca. Spain., Tel: +34 923294460.