arXiv:2303.16631v1 [cs.DM] 29 Mar 2023

关于超图的 α-谱半径

Haiyan Guo*、Bo Zhou†、Bizhu Lin‡

华南师范大学数学科学学院，中国广州 510631

摘要

对于实数 $\alpha \in [0,1)$ 和超图 G， G 的 α-谱半径是矩阵 $A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G)$ 的最大特征值，其中 $A(G)$ 是 G的邻接矩阵，它是一个对称矩阵，对角线为零，并且对于 G中不同的顶点 u, v， $A(G)$ 的 (u,v) 分量恰好等于同时包含 u 和 v 的边数，而 $D(G)$ 是 $A(G)$ 行和构成的对角矩阵。我们研究均匀或不一定均匀的超图的α-谱半径。我们提出一些可增大或减小超图 α-谱半径的局部嫁接操作。我们确定了在 k-一致超树、 k-一致单圈超图以及具有固定数量悬挂边的k-一致超图中，使 α-谱半径达到最大值的唯一超图。我们还确定了在给定顶点数和边数的超树中，使 α-谱半径达到最大值的唯一超树；在给定顶点数的超树中， α-谱半径排名前三（或最小的两个）的唯一超树；在非 2-一致超树中，使 α-谱半径达到最小值的唯一超树；在给定顶点数的单圈超图中，α-谱半径排名前两位（或最小）的唯一超图；以及在具有固定数量悬挂边的超图中，使 α-谱半径达到最大值的唯一超图。

AMS分类： 05C65, 05C50, 15A18**关键词：** 超图，邻接矩阵， α-谱半径，局部嫁接操作

1 引言

超图 $G = (V, E)$ 由顶点集 $V(G) = V$和边集 $E(G) = E$组成，其中$e \subseteq V(G)$，且对每个 $e \in E(G)$ 都有 $|e| \geq 2$ 。对于整数 $k \geq 2$，超图 G 若满足以下条件，则称为 k-一致：

*电子邮箱：ghaiyan0705@m.scnu.edu.cn

†通讯作者。电子邮箱：zhoubo@scnu.edu.cn

‡电子邮箱：2270927176@qq.com

$|e| = k$ 对每个 $e \in E(G)$ 都成立。2-一致超图就是一个（简单）图。超图的概念可以看作区组设计概念的一种变体。区组设计是某个 k 的 k-一致超图，其中对象作为顶点，区组作为边，因此，与区组设计相关联的超图的任何实现，同时也是该设计 [5, 15] 的一个实现。

对于 u、$v \in V(G)$，如果它们包含在 G 的某条超边中，则称它们相邻，或称 v 是 u 的邻点，记作 $u \sim v$。对于 $u \in V(G)$，令 $N_G(u)$ 表示 u 在 G 中的邻点集合，令 $E_G(u)$ 表示 u 在 G 中所包含的超边集合。G 中顶点 u 的度记为 $d_G(u)$ 或 $d(u)$，等于 G 中包含 u 的超边数。超图 G 中的路径是一个顶点—超边交替序列 $v_0e_1v_1 \dots e_pv_p$，满足 v_0、……、v_p 是互不相同的顶点，e_1、……、e_p 是互不相同的超边，并且对于 $i = 1$、……、p，有 v_{i-1}、$v_i \in e_i$；这样的路径也称为从 v_0 到 v_p 的路径。超图 G 中的圈是一个顶点—超边交替序列 $v_0e_1v_1 \dots e_pv_0$，满足 v_0、……、v_{p-1} 是互不相同的顶点，e_1、……、e_p 是互不相同的超边，并且对于 $i = 1$、……、p，有 v_{i-1}、$v_i \in e_i$（其中将 v_p 解释为 v_0）。路径或圈中的超边数称为其长度。如果对于任意 u、$v \in V(G)$，都存在一条从 u 到 v 的路径，则称 G 是连通的。如果任意两条超边至多共有一个顶点，则称超图是线性的。超树是没有圈的连通超图。显然，超树是线性的。单圈超图是恰好包含一个圈的连通超图，唯一圈的长度称为其围长。

超星是所有超边都包含同一个顶点的超树，这个顶点称为它的中心。如果超星恰好只有一条超边，那么我们可以任选一个顶点作为它的中心。顶点数为 n 的 k 阶均匀超星记作 $S_{n,\,k}$。令 $S_n = S_{n,\,2}$，它是顶点数为 n 的普通星图（图）。

对于具有 $V(T) = \{v_1, \dots, v_n\}$ 的 k 阶均匀超树 T，若 $E(T) = \{e_1, \dots, e_m\}$ with $m = \frac{n-1}{k-1}$，其中 $e_i = \{v_{(i-1)(k-1)+1}, \dots, v_{(i-1)(k-1)+k}\}$ 对于 $i = 1$，2，……，m，则称 T 为一条 k 阶均匀松散路径，记作 $P_{n,\,k}$。令 $P_n = P_{n,\,2}$，它是顶点数为 n 的普通路径（图）。

对于一个超图 G，若 $e = \{v_1, \dots, v_k\} \in E(G)$，且 $d_G(v_i) = 1$ 对于 $1 \le i \le k-1$ 和 $d_G(v_k) \ge 2$，则称 e 为悬挂边（位于 v_k）。

设 G 是一个具有 n 个顶点的超图。G 的邻接矩阵是 $n \times n$ 矩阵 $A(G) = (a_{uv}(G))_{u,\,v \in V(G)}$，其中

$$a_{uv}(G) = \begin{cases} |\{e \in E(G) : \{u, v\} \subseteq e\}| & \text{if } u \neq v, \\ 0 & \text{if } u = v. \end{cases}$$

G 的谱半径是 $A(G)$的最大特征值。Feng 和 Li [6] 研究了正则 k一致超图的邻接矩阵特征值的估计。Li 和 Sol´e [12]进一步建立了正则 k-一致超图邻接矩阵特征值的一些性质。Mart´ınez 等人 [16] 研究了与有限域 $\mathbb{F}_q$上的 GL_n “齐性空间”相关联的超图邻接矩阵的谱，并得到了一族无限的拉马努金超图。Lin 和 Zhou [14] 研究了超图谱半径的极值问题。其中，他们确定了

谱半径最大的前三个唯一的 k-一致超树，以及谱半径最大的前两个唯一的 k-一致单圈超图（分别为k-一致线性单圈超图），并确定了在具有固定数量悬挂边的连通 k-一致超图中谱半径最大的唯一超图。

对于一个超图 G，令 $u \in V(G)$， $r_G(u) = \sum_{v \in V(G)} a_{uv}(G)$，它是 u 处 $A(G)$ 的行和。注意，对于 $u \in V(G)$， $r_G(u) = \sum_{e \in E_G(u)}(|e| - 1)$。令 $D(G)$ 为 $A(G)$ 的行和构成的对角矩阵。令 $Deg(G)$ 为 G 的顶点度构成的对角矩阵。若 G 是 k-均匀的，则 $r_G(u) = (k-1)d_G(u)$，因此 $D(G) = (k-1)Deg(G)$。超图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L(G) = D(G) - A(G)$，见 [20]。在 [21], ，Rodríguez 利用超图拉普拉斯矩阵的特征值来界定其二分宽度、平均最小割、等周数、最大割、独立数和支配数。关于这一方向的更多结果见 [20, 22]。矩阵 $Q(G) = D(G) + A(G)$ 称为 G [14] 的无符号拉普拉斯矩阵。 G 的无符号拉普拉斯谱半径是 $Q(G)$ 的最大特征值。

设 α 为 $[0, 1)$ 中的一个实数。超图 G 的矩阵 $A_\alpha(G)$ 定义为$A_\alpha(G) = \alpha D(G) +(1-\alpha)A(G)$。超图 G 的 α-特征值是矩阵 $A_\alpha(G)$ 的特征值，而矩阵 $A_\alpha(G)$ 的最大特征值称为 G的 α-谱半径，记为 $\rho_\alpha(G)$。对于普通图 G， $D(G) = Deg(G)$，Nikiforov [18] 提出了该矩阵 $A_\alpha(G)$，以统一的方式研究邻接矩阵 $A_0(G)$ 和无符号拉普拉斯矩阵 $2A_{1/2}(G)$ 的谱性质。早期，0-谱半径已得到广泛研究，参见 [2,3,14], ；而1 2-谱半径也受到广泛关注，参见 [9, 14, 19]。

我们提到，在 [8,13] 中可以找到一种通过邻接张量（超矩阵）进行处理的截然不同的方法。然而，邻接张量的记号与通过超图的邻接矩阵定义的谱半径并无直接联系。

本文研究一致或不一定一致超图的 α-谱半径。我们提出了一些能够增大或减小超图 α-谱半径的局部运算（嫁接运算）。我们确定了 k-一致超树、 k-一致单圈超图以及具有固定悬挂边数的 k-一致超图中，具有最大 α-谱半径的唯一超图。我们确定了在具有给定顶点数和边数的超树中，具有最大 α-谱半径的唯一超树。我们还确定了在具有给定顶点数的超树中， α-谱半径最大、次大、次小和最小的前三个唯一超树。我们确定了在具有给定顶点数且不是2-一致的超树中，具有最小 α-谱半径的唯一超树。我们确定了在具有给定顶点数的单圈超图中，具有最大、次大以及最小、次小 α-谱半径的前两个唯一超图。最后，我们确定了在具有固定悬挂边数的超图中，具有最大 α-谱半径的唯一超图。

2 预备知识

在本文的其余部分，我们假设 $\alpha \in [0,1$。设 G 为一个超图。注意， $A_\alpha(G)$是一个对称非负矩阵。如果 G 是连通的，那么 $A_\alpha(G)$是不可约的，因此根据佩龙-弗罗贝尼乌斯定理，存在一个对应于$\rho_\alpha(G)$的唯一正单位特征向量，称为 G的 α-佩龙向量，记为 $x(G)$。

设 $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 和 $x = (x_{v_1}, \ldots, x_{v_n})^\top \in \mathbb{R}^n$。那么

$$x^\top A_\alpha(G)x = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} a_{uv}(G)\left(\alpha(x_u^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha)x_u x_v\right).$$

对于 $x = x(G)$ 和每个 $u \in V(G)$,

$$\rho_\alpha(G)x_u = \sum_{v\in N_G(u)} a_{uv}(G)(\alpha x_u + (1-\alpha)x_v),$$

这称为 G 在 u处的特征方程。对于具有 n 个顶点的超图 G ，以及至少有一个非负分量的单位列向量 $x \in \mathbb{R}^n$ ，根据瑞利原理，我们有$\rho_\alpha(G) \geq x^\top A_\alpha(G)x$ ，当且仅当 $x = x(G)$ 时取等号。

对于具有 $V_0 \subseteq V(G)$ 的超图 G ，设 $G[V_0]$ 为由V_0诱导的 G 的子超图。

设 G 为一个超图，其具有 $u, v \in V(G)$ 和 $e_1, \ldots, e_r \in E(G)$，满足 $u \notin e_i$且 $v \in e_i$ ，其中 $1 \leq i \leq r$。设 $e_i' = (e_i \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ ，其中 $1 \leq i \leq r$。假设对于 $1 \leq i \leq r$，有$e_i' \notin E(G)$。设 G' 为具有 $V(G') = V(G)$ 和 $E(G') =(E(G) \setminus \{e_1, \ldots, e_r\}) \cup \{e_1', \ldots, e_r'\}$ 的超图。那么我们称 G' 是由 G 将边 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ 从 v 移至 u 后得到的。

设 G 为一个超图，其具有 $e_1, e_2 \in E(G)$ 和 $u \in V(G)$，满足 $u \notin e_1$ 和 $u \in e_2$，其中 $|e_2| \geq 3$。设 $e_1' = e_1 \cup \{u\}$ 和 $e_2' = e_2 \setminus \{u\}$。假设 $e_1', e_2' \notin E(G)$。设 G' 为具有 $V(G') = V(G)$ 和 $E(G') = (E(G) \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e_1', e_2'\}$ 的超图。于是称 G' 是由 G 将顶点 u 从 e_2 移至 e_1 得到的。

对于 $k \geq 3$，设 $e = \{w_1, \ldots, w_k\}$ 是超图 G 的一条超边。设 $e_1 = \{w_1, w_2\}$ 和$e_2 = e \setminus \{w_2\}$。假设 $e_1, e_2 \notin E(G)$。设 G' 为具有 $V(G') = V(G)$ 和 $E(G') = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{e_1, e_2\}$ 的超图。于是称 G' 是由 G 移除 e 中的顶点 w_2 ，并将一条超边 $\{w_1, w_2\}$ 附加到 w_1 得到的。

对于一个具有 $u \in V(G)$ 的超图 G ，我们通过添加一个新顶点 w 和一条新超边 $\{u, w\}$ 构造一个新的超图 G' 。在这种情况下，我们称 G' 是通过将悬挂顶点 w 附加到 u 上由 G 得到的。

引理 2.1。设 G 是一个连通超图， φ 是 G 的一个自同构，并且 $x = x(G)$ 。如果对于 u、$v \in V(G)$ ，有 $\varphi(u) = v$ ，则 $x_u = x_v$。

证明。令 $P = (p_{uv})_{u,v\in V(G)}$ 为置换矩阵，使得 $p_{uv} = 1$ 当且仅当 $\varphi(u) = v$对 u, $v \in V(G)$成立。于是 $A_\alpha(G) = PA_\alpha(G)P^\top$。因此 $\rho_\alpha(G) = x^\top A_\alpha(G)x =(P^\top x)^\top A_\alpha(G)(P^\top x)$。由于 $P^\top x$是正单位向量， $P^\top x$也是G的 α-佩龙向量，因此 $P^\top x = x$。 □

对于 $s \times t$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 和 $C = (c_{ij})$，若对 $1 \le i \le s$ 和 $1 \le j \le t$有 $b_{ij} \le c_{ij}$，且 $B \neq C$，则记作 $B < C$。设 G 和 H 是两个具有 n 个顶点的超图。显然， $A(G) < A(H)$ 当且仅当 $A_\alpha(G) < A_\alpha(H)$。

设 $\lambda_1(B)$ 为非负方阵 B 的谱半径（即特征值模的最大值）。

引理 2.2. *[17]* 设 $B = (b_{ij})$ 和 $C = (c_{ij})$ 为 n 阶非负矩阵。假设 C 不可约且 $B < C$。则 $\lambda_1(B) < \lambda_1(C)$。

设 G 为连通的 k-一致超图，且 e 是 $V(G)$ 的子集，其中 $|e| = k$ 且$e \notin E(G)$。由引理 2.2, $\rho_\alpha(G) < \rho_\alpha(G + e)$。特别地，若 G 是连通图且 H 是 G 的真子图，则由引理 2.2， $\rho_\alpha(H) < \rho_\alpha(G)$。

我们需要以下众所周知的引理，参见例如 [**?** ，定理 2.2.1(iv)]。

引理 2.3. 设 M 为一个 $n \times n$ 不可约非负矩阵， y 为维数为 n 的列向量。若 $y > 0$ 且 $My < \rho y$，则 $\lambda_1(M) < \rho$。

对于具有 $u \in V(G)$ 的图 G 和正整数 k，令 G' 为由 G 与路径 P_k 通过添加一条连接 u 和路径 P_k 的一个端点的超边所得的图。在这种情况下，我们称 G' 是在 u 处附加一条长度为 k 的路径而由 G 得到的，并将这样的图 G' 记为 $G(u; k)$。令 $G(u; 0) = G$。以下两个引理在 [7] 中证明，已在 [11] 中针对 $\alpha = 0$ 建立，并且在 [18] 中曾作为两个猜想出现。

引理 2.4。*[7]* 设 u 是非平凡连通图 G 的一个顶点，并设 $G_{k,\ \ell} = G(u;\ \ k)(u;\ \ell)$，其中 $k \ge \ell \ge 1$。则 $\rho_\alpha(G_{k,\ \ell}) > \rho_\alpha(G_{k+1,\ \ell-1})$。

引理 2.5. *[7]* 设 u、v 是连通图 G 中度至少为2的相邻顶点，并设 $G^{k,\ell} = G(u; k)(v; \ell)$，其中 $k \ge \ell \ge 1$。则 $\rho_\alpha\left(G^{k,\ell}\right) > \rho_\alpha\left(G^{k+1,\ell-1}\right)$。

图 G 中的内部路径分为以下两种类型:

(*i*) 顶点序列 $v_0 v_1 \dots v_{k+1}$ ($k \ge 2$)，其中 $v_0, v_1, \dots, v_k$互不相同， v_{i-1}与v_i在 $i = 1, \dots, k+1$, $v_{k+1} = v_0$, $d_G(v_0) \ge 3$中相邻，并且 $d_G(v_i) = 2$对 $i = 1, 2, \dots, k$成立;

（*ii*）由互不相同的顶点 $v_0 v_1 \dots v_{k+1}$ （$k \ge 0$）组成的序列，其中 v_{i-1}与 v_i相邻，当 $i = 1$, ..., $k+1$时；其中 d_G（v_0） ≥ 3、 d_G（v_{k+1}） ≥ 3，且当 $1 \le i \le k$时， d_G（v_i） $= 2$。

对于 $n \ge 5$，令 W_n 为由路径 P_{n-4} 分别在两个端点各附加两个悬挂顶点所得到的树。显然, $W_5 \cong S_5$。

对于 $n \ge 4$，令 Z_n 为由路径 P_{n-2} 在一个端点附加两个悬挂顶点所得到的树。对于 $n \ge 6$，令 Z'_n 为由路径 $P_{n-1} = v_1 v_2 \dots v_{n-1}$在 v_{n-3}处附加一个悬挂顶点 v_n所得到的树。

所有 0-谱半径不超过 2 的连通图已在 [23] 中确定。据此，0-谱半径小于 2 的连通图全都是树，具体包括 P_n、 Z_n （其中 $n \ge 4$），以及当 $n = 6$、7、8 时的 Z'_n 。这些 0-谱半径为 2 的树具体包括 W_n （其中 $n \ge 5$）、 Z'_9，以及另外两棵分别有 7 个和 8 个顶点的树。有 7 个顶点的附加树由三条长度为 2 的悬挂路径在一个公共顶点处组成；有 8 个顶点的附加树则由两条长度为 3 的悬挂路径和一条长度为 1 的悬挂路径在一个公共顶点处组成。

设 K_n 是以 n 个顶点为顶点集的完全图。设 C_n 是以 $n \geq 3$ 个顶点为顶点集的普通圈（图）。若将 C_n 的顶点依次标记为 v_1、…、v_n、v_1，则记作 $C_n = v_1 \dots v_n v_1$。

对于满足 $3 \leq g \leq n-1$ 的整数 g，令 $U_{n,\,g}$ 为具有围长 g、含 n 个顶点的单圈图，它由在路径 P_{n-g} 的一个端点与圈 C_g 的一个顶点之间添加一条边得到。

3 局部嫁接操作对 α-谱半径的影响

本节提出一些局部运算（嫁接运算），这些运算可以增大或减小不一定是均匀超图的 α-谱半径。

定理 3.1. 设 G 是一个连通超图，满足 u、$v \in V(G)$ 和 e_1，…，$e_r \in E(G)$，使得对于 $i = 1$，…，r，有 $u \notin e_i$、$v \in e_i$ 以及 $(e_i \backslash \{v\}) \cup \{u\} \notin E(G)$。设 G' 是由 G 将边 e_1，…，e_r 从 v 移至 u 得到的超图。设 $x = x(G)$。若 $x_u \geq x_v$，则 $\rho_\alpha(G') > \rho_\alpha(G)$。

证明。对于 $w \in \cup_{i=1}^r (e_i \setminus \{v\})$，令 s_{wv} 为同时包含 w 和 v 的边 $e_1, \dots, e_r$ 的数量。对于 $\{w, z\} \subseteq V(G)$，容易看出

$$
\begin{aligned}
&a_{wz}(G') - a_{wz}(G) \\
&= \begin{cases} s_{wv} & \text{if } w \in \cup_{i=1}^r (e_i \setminus \{v\}), z = u, \text{ or } w = u, z \in \cup_{i=1}^r (e_i \setminus \{v\}) \\ -s_{wv} & \text{if } w \in \cup_{i=1}^r (e_i \setminus \{v\}), z = v, \text{ or } w = v, z \in \cup_{i=1}^r (e_i \setminus \{v\}) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
\rho_\alpha(G') - \rho_\alpha(G) &\geq x^\top (A_\alpha(G') - A_\alpha(G)) x \\
&= \sum_{\{w,z\} \subseteq V(G)} (a_{wz}(G') - a_{wz}(G)) \left(\alpha(x_w^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha) x_w x_z \right) \\
&= \sum_{w \in \cup_{i=1}^r (e_i \backslash \{v\})} s_{wv} \left(\alpha(x_w^2 + x_u^2) + 2(1-\alpha) x_w x_u \right) \\
&\quad - \sum_{w \in \cup_{i=1}^r (e_i \backslash \{v\})} s_{wv} \left(\alpha(x_w^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha) x_w x_v \right) \\
&= \sum_{w \in \cup_{i=1}^r (e_i \backslash \{v\})} s_{wv} \left(\alpha(x_u^2 - x_v^2) + 2(1-\alpha) x_w (x_u - x_v) \right) \\
&= \sum_{w \in \cup_{i=1}^r (e_i \backslash \{v\})} s_{wv} (x_u - x_v)(\alpha(x_u + x_v) + 2(1-\alpha) x_w).
\end{aligned}
$$

由于 $x_u \geq x_v$，我们有 $\rho_\alpha(G') - \rho_\alpha(G) \geq 0$，即 $\rho_\alpha(G') \geq \rho_\alpha(G)$。假设 $\rho_\alpha(G') = \rho_\alpha(G)$。那么 $\rho_\alpha(G') = x^\top A_\alpha(G')x$，因此 $x(G') = x$。令 $N_{1,2} = N_G(u) \cap \cup_{i=1}^{r}(e_i \setminus \{v\})$，$N_1 = N_G(u) \setminus N_{1,2}$ 且 $N_2 = \cup_{i=1}^{r}(e_i \setminus \{v\}) \setminus N_{1,2}$。注意，对于 $w \in N_1$，有 $N_{G'}(u) = N_1 \cup N_{1,2} \cup N_2$，且 $a_{uw}(G') = a_{uw}(G)$。若 $N_{1,2} \neq \emptyset$，则 $\sum_{w \in N_1, 2}(a_{uw}(G') - a_{uw}(G))(\alpha x_u + (1-\alpha)x_w) > 0$。若 $N_{1,2} = \emptyset$，则 $\sum_{w \in N_2} a_{uw}(G')(\alpha x_u + (1-\alpha)x_w) > 0$。由 u 处 G 和 G' 的特征方程可得

$$
\begin{aligned}
0 &= \rho_\alpha(G')x_u - \rho_\alpha(G)x_u \\
&= \sum_{w \in N_{G'}(u)} a_{uw}(G')(\alpha x_u + (1-\alpha)x_w) - \sum_{w \in N_G(u)} a_{uw}(G)(\alpha x_u + (1-\alpha)x_w) \\
&= \sum_{w \in N_{1,2}} (a_{uw}(G') - a_{uw}(G))(\alpha x_u + (1-\alpha)x_w) \\
&\quad + \sum_{w \in N_2} a_{uw}(G')(\alpha x_u + (1-\alpha)x_w) \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

矛盾。因此，$\rho_\alpha(G') > \rho_\alpha(G)$。 □

我们注意到，定理 3.1 对一致超图和不一定一致的超图都成立。$\alpha = 0$，$_{1\ 2}$ 中的情形已在 [14] 中给出。

下面的定理推广了 [10] 中关于 $\alpha = 0$ 的一个结果，另见 [4]。

定理 3.2。设 $\{u, v\}$ 是连通图 G 的一条边，G_{uv} 是从 G 删除边 $\{u, v\}$ 并添加边 $\{u, w\}$ 和 $\{w, v\}$ 后得到的图，其中 w 是一个不属于 G 的新顶点。若 $\{u, v\}$ 位于 G 的某条内部路径上，则 $\rho_\alpha(G_{uv}) \leq \rho_\alpha(G)$，当且仅当 $\alpha = 0$ 和 $G \cong W_n$ 且 $n \geq 6$ 时取等号，其中 $n = |V(G)|$。

证明。G_{uv} 的顶点标号可由 G 的顶点标号通过添加新顶点 w得到。我们根据内部路径的两种类型分别讨论。

情形 1。uv 位于一条类型为（i）的内部路径 $v_0v_1 \ldots v_{k+1}$ 上，其中 $v_{k+1} = v_0$ 和 d_G（v_0）≥ 3。此时，C_{k+1} 是 G的真诱导子图，因此由引理 2.2，ρ_α（G）$>\rho_\alpha$（C_{k+1}）$= 2$。

将顶点 $v_0, \ldots, v_k$ 重新标记为 $0, 1, \ldots, k$。令 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ 为 G 在顶点 $0, 1, \ldots, k$处对应的 α-佩龙向量 x 的分量。由引理 2.1，$x_j = x_{k+1-j}$对于 $j = 1, \ldots, k$成立。**情形 1.1.** k 为偶数。我们可以取 $u = \frac{k}{2}$ 和 $v = \frac{k}{2} + 1$。于是 $x_u = x_v$。令 $\bar{y}$ 为满足以下条件的向量：对于 $z \in V$（G），$y_z = x_z$，且 $y_w = x_u$。根据 y的选取，A_α（G_{uv}）y 与 ρ_α（G）y 仅在对应于 w的分量上不同，并且

$$
\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_w &= 2\alpha y_w + (1-\alpha)(y_u + y_v) \\
&= 2\alpha x_u + 2(1-\alpha)x_u \\
&= 2x_u \\
&< \rho_\alpha(G)x_u
\end{aligned}
$$

$$= \rho_\alpha(G) y_w.$$

由引理 2.3，$\rho_\alpha(G_{uv}) < \rho_\alpha(G)$。

情形 1.2. k 为奇数。我们可以取 $u = \binom{k-1}{2}$ 和 $v = \binom{k+1}{2}$。设 y 为满足以下条件的向量：对于 $z \in V(G)$ 和 $y_w = x_v$，$y_z = x_z$。由于 $2\alpha x_v + 2(1-\alpha)x_u = A_\alpha(G)x_v = \rho_\alpha(G)x_v > 2x_v$，我们有 $x_u > x_v$。根据 y 的选取，$A_\alpha(G_{uv})y$ 和 $\rho_\alpha(G)y$ 仅在对应于 w 和 v 的项上不同，并且我们有

$$\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_w &= 2\alpha y_w + (1-\alpha)(y_u + y_v) \\
&= 2\alpha x_v + (1-\alpha)(x_u + x_v) \\
&< 2\alpha x_v + (1-\alpha)(x_u + x_u) \\
&= (A_\alpha(G)x)_v \\
&= \rho_\alpha(G)x_v \\
&= \rho_\alpha(G)y_w,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_v &= 2\alpha y_v + (1-\alpha)(y_w + y_u) \\
&= 2\alpha x_v + (1-\alpha)(x_v + x_u) \\
&< 2\alpha x_v + (1-\alpha)(x_u + x_u) \\
&= \rho_\alpha(G)x_v \\
&= \rho_\alpha(G)y_v.
\end{aligned}$$

由引理 2.3，$\rho_\alpha(G_{uv}) < \rho_\alpha(G)$。

情形 2. uv 位于一条类型为 (ii) 的内部路径 $v_0v_1\ldots v_{k+1}$ 上，其中 $d_G(v_0)$ $d_G(v_{k+1}) \geq 3$。

将 $v_0, v_1, \ldots, v_{k+1}$ 重新标记为 $0, 1, \ldots, k+1$。设 $x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}$ 为 G 在 $0, \ldots, k+1$ 处的 α-佩龙向量 x 的对应项。假设 $x_0 \leq x_{k+1}$。设 t 为满足 $x_t = \min\{x_i : 0 \leq i \leq k+1\}$ 的最小索引。于是 $t \leq k$。假设 $u = t$ 和 $v = t+1$。

首先假设 $t > 0$。令 y 为一个向量，使得对于 $z \in V(G)$ 和 $y_w = x_u = x_t$，有 $y_z = x_z$。于是，$A_\alpha(G_{uv})y$ 与 $\rho_\alpha(G)y$ 仅在对应于 w 和 u 的条目上有所不同，并且我们有

$$\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_w &= 2\alpha y_w + (1-\alpha)(y_u + y_v) \\
&= 2\alpha x_u + (1-\alpha)(x_u + x_v) \\
&< 2\alpha x_u + (1-\alpha)(x_{t-1} + x_v) \\
&= (A_\alpha(G)x)_u \\
&= \rho_\alpha(G)x_u \\
&= \rho_\alpha(G)y_w,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_u &= 2\alpha y_u + (1-\alpha)(y_{t-1} + y_w) \\
&= 2\alpha x_u + (1-\alpha)(x_{t-1} + x_u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\alpha x_u + (1-\alpha)(x_{t-1} + x_v) \\
&= \rho_\alpha(G)x_u \\
&= \rho_\alpha(G)y_u.
\end{aligned}$$

根据引理 2.3，$\rho_\alpha(G_{uv}) < \rho_\alpha(G)$。

设下文中 $t = 0$。令 S 为 0 的除 1 和 $s = \sum_{j\in S} x_j$ 之外的邻居集合。令 $d_0 = d_G(0)$。

情形 2.1. $(1+\alpha)x_0 \leq \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)s$。

注意，$d_G(0)\ d_G(k+1) \geq 3$。由上文提到的 [23] 中的结果及引理 2.2，可得 $\rho_0(G) \geq 2$，当且仅当 $G \cong W_n$ 且 $n \geq 6$ 时取等号。由于 $\rho_\alpha(G)$ 是 $\alpha \in [0,1)$ 上的严格递增函数，因此 $\rho_\alpha(G) \geq 2$，当且仅当 $\alpha = 0$ 且 $G \cong W_n$ 时取等号。

令 y 为满足 $y_z = x_z$ 的向量，其中 $z \in V(G)$ 且 $y_w = x_u = x_0$。那么，$A_\alpha(G_{uv})y$ 与 $\rho_\alpha(G)y$ 仅在对应于 w 和 u 的分量上不同，并且我们有

$$\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_w &= 2\alpha y_w + (1-\alpha)(y_u + y_v) \\
&= 2\alpha x_0 + (1-\alpha)(x_0 + x_1) \\
&\leq \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)(s + x_1) \\
&= \rho_\alpha(G)x_0 \\
&= \rho_\alpha(G)y_w,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
(A_\alpha(G_{uv})y)_u &= \alpha d_0 y_u + (1-\alpha)(s + y_w) \\
&= \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)(s + x_0) \\
&\leq \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)(s + x_1) \\
&= \rho_\alpha(G)x_0 \\
&= \rho_\alpha(G)y_u.
\end{aligned}$$

如果其中一个不等式是严格不等式，则由引理 2.3 可得 $\rho_\alpha(G_{uv}) < \rho_\alpha(G)$。如果这些不等式均为等式，则 $(1+\alpha)x_0 = \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)s$ and $x_0 = x_1$，这意味着 $\rho_\alpha(G)x_0 = (A_\alpha(G)x)_0 = \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)(s + x_1) = (1+\alpha)x_0 + (1-\alpha)x_1 = 2x_0$，即 $\rho_\alpha(G) = 2$，即，$\alpha = 0$ and $G \cong W_n$。

情形 2.2. $(1+\alpha)x_0 > \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)s$。

在这种情况下，$(1+\alpha-\alpha d_0)x_0 > (1-\alpha)s > 0$，于是 $x_0 > s$，这意味着 $s + x_0 < 2x_0 \leq (d_0 - 1)x_0$，即 $(1+\alpha)s + (1+\alpha-\alpha d_0)x_0 < \alpha s + (1-\alpha)(d_0-1)x_0$。对于 $j \in S$，我们有 $\rho_\alpha(G)x_j \geq \alpha x_j + (1-\alpha)x_0$，这意味着

$$\rho_\alpha(G)s \geq \alpha s + (1-\alpha)(d_0-1)x_0 > (1+\alpha)s + (1+\alpha-\alpha d_0)x_0.$$

Thus

$$\alpha d_0 \frac{(1-\alpha)s}{1+\alpha-\alpha d_0} + (1-\alpha)(s+x_0) < \rho_\alpha(G)\frac{(1-\alpha)s}{1+\alpha-\alpha d_0}.$$

设 y 为具有 $y_0 = (1-\alpha)_{1+\alpha-\alpha d_0}^{s}$ 的向量，$y_z = x_z$ 对于 $z \in V(G) \setminus \{0\}$，且 $y_w = x_u = x_0$。那么 $A_\alpha(G_{uv})y$ 和 $\rho_\alpha(G)y$ 仅在对应于 $j \in S$、w 和 u 的项上有所不同，并且对于 $j \in S$ 我们有

$$\begin{aligned}
\left(A_\alpha(G_{uv})y\right)_j &= \alpha d_G(j)y_j + (1-\alpha)\sum_{i\in N_G(j)} y_i \\
&= \alpha d_G(j)x_j + (1-\alpha)\left(\sum_{i\in N_G(j)\setminus\{0\}} x_i + \frac{(1-\alpha)s}{1+\alpha-\alpha d_0}\right) \\
&< \alpha d_G(j)x_j + (1-\alpha)\left(\sum_{i\in N_G(j)\setminus\{0\}} x_i + x_0\right) \\
&= \rho_\alpha(G)x_j \\
&= \rho_\alpha(G)y_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(A_\alpha(G_{uv})y\right)_w &= 2\alpha y_w + (1-\alpha)(y_0 + y_1) \\
&= 2\alpha x_0 + (1-\alpha)\left(\frac{(1-\alpha)s}{1+\alpha-\alpha d_0} + x_1\right) \\
&\le \alpha d_0 x_0 + (1-\alpha)(s + x_1) \\
&= \rho_\alpha(G)x_0 \\
&= \rho_\alpha(G)y_w,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left(A_\alpha(G_{uv})y\right)_u &= \alpha d_0 y_u + (1-\alpha)(s + y_w) \\
&= \alpha d_0 \frac{(1-\alpha)s}{1+\alpha-\alpha d_0} + (1-\alpha)(s + x_0) \\
&< \rho_\alpha(G)\frac{(1-\alpha)s}{1+\alpha-\alpha d_0} \\
&= \rho_\alpha(G)y_u.
\end{aligned}$$

现在由引理 2.3，$\rho_\alpha(G_{uv}) < \rho_\alpha(G)$。

结合上述情形，可得要么 $\rho_\alpha(G_{uv}) < \rho_\alpha(G)$，要么 $\alpha = 0$ 和 $G \cong W_n$，其中 $n \ge 6$，并且有 $\rho_\alpha(G_{uv}) = \rho_\alpha(G) = 2$。 □

定理 3.3. 对于 $k-2 \ge r \ge 2$，设 G 是一个具有两条悬挂边 $e_1 = \{w_1, \ldots, w_{k-1}, u\}$ 和 $e_2 = \{v_1, \ldots, v_{r-1}, u\}$ 的超图，它们位于 u 处。设 G' 是由 G 将顶点 w_1 从 e_1 移至 e_2 后得到的超图。那么 $\rho_\alpha(G') < \rho_\alpha(G)$。

证明。 对于 $\{w, z\} \subseteq V(G)$，容易看出

$$a_{wz}(G') - a_{wz}(G)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } w = w_1, z \in \{v_1, \ldots, v_{r-1}\}, \text{ or } w \in \{v_1, \ldots, v_{r-1}\}, z = w_1, \\ -1 & \text{if } w = w_1, z \in \{w_2, \ldots, w_{k-1}\}, \text{ or } w \in \{w_2, \ldots, w_{k-1}\}, z = w_1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

设 $x = x(G')$. 根据引理 2.1, $x_{w_1} = x_{v_1} = \cdots = x_{v_{r-1}}$ 以及 $x_{w_2} = \cdots = x_{w_{k-1}}$。由于 $\{w_2, \ldots, w_{k-1}, u\} \in E(G')$, $A_\alpha(G'[\{w_2, \ldots, w_{k-1}, u\}]) = A_\alpha(K_{k-1})$ 是 $A_\alpha(G')$ 的主子矩阵。根据引理 2.2, 有 $\rho_\alpha(G') > \rho_\alpha(K_{k-1}) = k-2 \geq r$。由 G' 在 w_1 和 w_2 处的特征方程, 可得

$$\rho_\alpha(G')x_{w_1} = \alpha r x_{w_1} + (1-\alpha)((r-1)x_{w_1} + x_u),$$

$$\rho_\alpha(G')x_{w_2} = \alpha(k-2)x_{w_2} + (1-\alpha)((k-3)x_{w_2} + x_u),$$

因此 $(\rho_\alpha(G') - r - \alpha + 1)x_{w_1} = (1-\alpha)x_u = (\rho_\alpha(G') - k - \alpha + 3)x_{w_2}$, 这意味着 $x_{w_1} \leq x_{w_2}$。因此

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha(G') - \rho_\alpha(G) &\leq x^\top (A_\alpha(G') - A_\alpha(G))x \\
&= \sum_{\{w,z\} \subseteq V(G)} (a_{wz}(G') - a_{wz}(G))(\alpha(x_w^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha)x_w x_z) \\
&= \sum_{z \in \{v_1, \ldots, v_{r-1}\}} (\alpha(x_{w_1}^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha)x_{w_1}x_z) \\
&\quad - \sum_{z \in \{w_2, \ldots, w_{k-1}\}} (\alpha(x_{w_1}^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha)x_{w_1}x_z) \\
&= \alpha(2r-k)x_{w_1}^2 - \alpha(k-2)x_{w_2}^2 \\
&\quad + 2(1-\alpha)x_{w_1}\left(\sum_{z \in \{v_1, \ldots, v_{r-1}\}} x_z - \sum_{z \in \{w_2, \ldots, w_{k-1}\}} x_z\right) \\
&= \alpha(2r-k)x_{w_1}^2 - \alpha(k-2)x_{w_2}^2 + 2(1-\alpha)x_{w_1}\left((r-1)x_{w_1} - (k-2)x_{w_2}\right) \\
&= (\alpha(2r-k) + 2(1-\alpha)(r-1))x_{w_1}^2 - \alpha(k-2)x_{w_2}^2 - 2(1-\alpha)(k-2)x_{w_1}x_{w_2} \\
&\leq (\alpha(2r-k) + 2(1-\alpha)(r-1) - \alpha(k-2) - 2(1-\alpha)(k-2))x_{w_1}^2 \\
&= 2(r-k+1)x_{w_1}^2 \\
&< 0,
\end{aligned}$$

这意味着 $\rho_\alpha(G') < \rho_\alpha(G)$。 □

定理 3.4. 设 G、G_0、G_1、G_2 为连通超图, 其中 G_0 是长度为二的圈, 且 $E(G) = E(G_0) \cup E(G_1) \cup E(G_2)$, $E(G_0) = \{e_1, e_2\}$, 其中 $e_1 \cap e_2 = \{u, v\}$、$V(G_1) \cap V(G_0) = \{u\}$、$V(G_2) \cap V(G_0) = \{v\}$, 以及 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$。令 $|e_i| = n_i$ 对于 $i = 1, 2$。如果 $n_1 - 2 \geq n_2 \geq 2$, 令 $u_1 \in e_1 \backslash \{u, v\}$ 和 G' 为从 G 中将顶点 u_1 从 e_1 移至 e_2 所得到的超图。则 $\rho_\alpha(G') < \rho_\alpha(G)$。

证明。设 $e_1 = \{u, u_1, u_2, \ldots, u_{n_1-2}, v\}$、$e_2 = \{u, v_1, \ldots, v_{n_2-2}, v\}$。对于 $\{w, z\} \subseteq V(G)$，容易看出

$$
\begin{aligned}
&a_{wz}(G') - a_{wz}(G) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } w = u_1, z \in \{v_1, \ldots, v_{n_2-2}\}, \text{ or } w \in \{v_1, \ldots, v_{n_2-2}\}, z = u_1, \\ -1 & \text{if } w = u_1, z \in \{u_2, \ldots, u_{n_1-2}\}, \text{ or } w \in \{u_2, \ldots, u_{n_1-2}\}, z = u_1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

令 $x = x(G')$。由引理 2.1，$x_{u_1} = x_{v_1} = \cdots = x_{v_{n_2-2}}$ 和 $x_{u_2} = \cdots = x_{u_{n_1-2}}$。由引理 2.2，我们还有 $\rho_\alpha(G') > \rho_\alpha(K_{n_1-1}) = n_1 - 2 \geq n_2$。由 G' 在 u_1和 u_2处的特征方程可得

$$
\begin{aligned}
\rho_\alpha(G')x_{u_1} &= \alpha n_2 x_{u_1} + (1-\alpha)\left(x_u + x_v + (n_2-2)x_{u_1}\right), \\
\rho_\alpha(G')x_{u_2} &= \alpha(n_1-2)x_{u_2} + (1-\alpha)\left(x_u + x_v + (n_1-4)x_{u_2}\right),
\end{aligned}
$$

因此 $(\rho_\alpha(G') - n_2 + 2 - 2\alpha)x_{u_1} = (1-\alpha)(x_u + x_v) = (\rho_\alpha(G') - n_1 + 4 - 2\alpha)x_{u_2}$，这意味着 $x_{u_1} \leq x_{u_2}$。因此

$$
\begin{aligned}
\rho_\alpha(G') - \rho_\alpha(G) &\leq x^\top (A_\alpha(G') - A_\alpha(G))x \\
&= \sum_{\{w,z\} \subseteq V(G)} (a_{wz}(G') - a_{wz}(G))(\alpha(x_w^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha)x_w x_z) \\
&= \sum_{z \in \{v_1, \ldots, v_{n_2-2}\}} (\alpha(x_{u_1}^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha)x_{u_1}x_z) \\
&\quad - \sum_{z \in \{u_2, \ldots, u_{n_1-2}\}} (\alpha(x_{u_1}^2 + x_z^2) + 2(1-\alpha)x_{u_1}x_z) \\
&= \alpha(2n_2 - n_1 - 1)x_{u_1}^2 - \alpha(n_1-3)x_{u_2}^2 \\
&\quad + 2(1-\alpha)x_{u_1}\left(\sum_{z \in \{v_1, \ldots, v_{n_2-2}\}} x_z - \sum_{z \in \{u_2, \ldots, u_{n_1-2}\}} x_z\right) \\
&= \alpha(2n_2 - n_1 - 1)x_{u_1}^2 - \alpha(n_1-3)x_{u_2}^2 \\
&\quad + 2(1-\alpha)x_{u_1}\left((n_2-2)x_{u_1} - (n_1-3)x_{u_2}\right) \\
&= (\alpha(2n_2 - n_1 - 1) + 2(1-\alpha)(n_2-2))x_{u_1}^2 - \alpha(n_1-3)x_{u_2}^2 \\
&\quad - 2(1-\alpha)(n_1-3)x_{u_1}x_{u_2} \\
&\leq (\alpha(2n_2 - n_1 - 1) + 2(1-\alpha)(n_2-2) - \alpha(n_1-3) - 2(1-\alpha)(n_1-3))x_{u_1}^2 \\
&= 2(n_2 - n_1 + 1)x_{u_1}^2 \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

这意味着 $\rho_\alpha(G') < \rho_\alpha(G)$。 □

定理 3.5。对于 $k \geq 3$，设 $e = \{w_1, \ldots, w_k\}$ 是连通超图 G 的一条超边，且 $e \setminus \{w_2\}$、$\{w_1, w_2\} \notin E(G)$。设 G' 是从 G 中移除 w_2 与 e 的关联，并将一条超边 $\{w_1, w_2\}$ 附加到 w_1 上后得到的超图。则 $\rho_\alpha(G') < \rho_\alpha(G)$。

证明。注意，对于 $\{w,z\}\subseteq V(G)$，$a_{wz}(G')-a_{wz}(G)\leq 0$，且 $a_{w_2w_k}(G')-a_{w_2w_k}(G)=-1$。于是，$A(G')<A(G)$，从而 $A_\alpha(G')<A_\alpha(G)$。根据引理 2.2，$\rho_\alpha(G')<\rho_\alpha(G)$。 □

4 超树的极值 α-谱半径

本节将确定某些超树类中具有最大和/或最小 α-谱半径的唯一超树。

4.1 均匀超树的 α-谱半径

设 $D_{n,k,c}$ 为由$S_{k,k}$ 通过在一个顶点上附加 c 条悬挂边、在另一个顶点上附加 $\binom{n-1}{k-1}-1-c$条悬挂边得到的 k-均匀超树，其中 $\binom{n-1}{k-1}\geq 3$和 $1\leq c\leq \left\lfloor \frac{\binom{n-k}{k-1}}{2} \right\rfloor$。

定理 *4.1.* 设 T 是一个阶为 n的 k-均匀超树，其中 $2\leq k\leq n$。则 $\rho_\alpha(T)\leq \frac{n\alpha+k-2+\sqrt{(n\alpha+k-2)^2-4(n-1)(k\alpha-1)}}{2}$，当且仅当 $T\cong S_{n,k}$时等号成立。此外，若 $T\ncong S_{n,k}$且 $\binom{n-1}{k-1}\geq 4$，则 $\rho_\alpha(T)\leq \rho(D_{n,k,1})$，当且仅当 $T\cong D_{n,k,1}$时等号成立。

证明。设 T 是阶为 n 、k均匀的超树，其 α-谱半径最大。设 d是 T的直径，$u_0e_1u_1\dots u_{d-1}e_du_d$是 T中的一条直径路径。假设 $d\geq 3$。设 $x=x(T)$。假设 $x_{u_1}\geq x_{u_{d-1}}$。设 T'是由 T通过将 $E_T(u_{d-1})$中的所有超边 $\setminus\{e_{d-1}\}$从 u_{d-1}移至 u_1而得到的 k均匀超树。由定理 3.1，$\rho_\alpha(T')>\rho_\alpha(T)$，矛盾。因此 $d=2$ 且 $T\cong S_{n,k}$。

设 w 是$S_{n,k}$的中心，c 是 $x(S_{n,k})$ 在 w处的分量。由引理 2.1，对于 $u,v\in V(S_{n,k})\setminus\{w\}$，$x_u=x_v$，记为 p。由 $S_{n,k}$ 在 w 以及 $S_{n,k}$中一个度为 1 的顶点处的特征方程，我们有

$$\begin{aligned}(\rho_\alpha(S_{n,k})-(n-1)\alpha)\,c-(1-\alpha)(n-1)p=0,\\ -(1-\alpha)c+(\rho_\alpha(S_{n,k})-\alpha-k+2)\,p=0.\end{aligned}$$

由于 $c,\ p\neq 0$，我们有

$$\det\begin{pmatrix}\rho_\alpha(S_{n,k})-(n-1)\alpha & -(1-\alpha)(n-1)\\ -(1-\alpha) & \rho_\alpha(S_{n,k})-\alpha-k+2\end{pmatrix}=0,$$

即，$f(\rho_\alpha(S_{n,k}))=0$，其中 $f(t)=t^2-(n\alpha+k-2)t+(n-1)(k\alpha-1)$。那么，$\rho_\alpha(S_{n,k})$ 是 $f(t)=0$ 的最大根，即，$\rho_\alpha(S_{n,k})=\frac{n\alpha+k-2+\sqrt{(n\alpha+k-2)^2-4(n-1)(k\alpha-1)}}{2}$。这就证明了第一部分。

接下来，我们证明第二部分。设$T\ncong S_{n,k}$ 满足 $\binom{n-1}{k-1}\geq 4$。设 T 是一个与 $S_{n,k}$ 非同构的超树，且在阶为 n 的 k-均匀超树中具有最大的 α-谱半径。设 T 的直径为 d。由于$T\ncong S_{n,k}$，我们有 $d\geq 3$。通过与上文类似的论证，我们有 $d=3$。显然，T 有一条唯一的边（记为 $e=\{w_1,\dots,w_k\}$）不是悬挂边，并且 T 可由在 e 中的顶点处添加若干悬挂边得到。如果

在 T 中有三个顶点 w_i, w_j, w_ℓ 的度至少为 2，那么我们可以将 w_j 处的所有悬挂边移到 w_i 处，反之亦然，从而得到一个阶为 n 、直径为 3 的 k-均匀超树 T'' 。由定理 3.1，$\rho_\alpha(T'') > \rho_\alpha(T)$，这与假设矛盾。因此，在顶点 $w_1, \ldots, w_k$ 中，恰有两个顶点（记为 w_1 和 w_2）在 T 中的度至少为 2。由此可得，对于某个满足 $1 \le c \le \left\lfloor \frac{n-k}{2\ k-1}() \right\rfloor$ 的 c，有 $T \cong D_{n,k,c}$。现在由定理 3.1 可得 $= 1$，因此$T \cong D_{n,k,1}$。 □

设 G 为一个 k一致超图，满足 $e_1, e_2 \in E(G)$和 $u, v \in V(G)$，且 $u \in e_1 \backslash e_2$和 $v \in e_2 \backslash e_1$。设 $e_1' =($ $e_1 \backslash \{u\}) \cup \{v\}$和 $e_2' = (e_2 \backslash \{v\}) \cup \{u\}$。假设 $e_1', e_2' \notin E(G)$。设 G'为超图，其 $V(G') = V(G)$且 $E(G') =$ $(E(G) \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e_1', e_2'\}$。则称 G' 是通过在 e_1 中交换顶点 u 和在 e_2中的顶点 v 由 G 得到的。

对于 $k \ge 3$、$\frac{n-1}{k-1} \ge 4$和具有超边 $e = \{w_1, \ldots, w_k\}$的超星$S_{k,k}$，设$H_{n,k}$为由 e 得到的k一致超树：在 w_1 处添加 $\frac{n-1}{k-1} - 3$ 条悬挂边，并分别在 w_2和 w_3处添加一条悬挂边。设$H_{4,2} = P_{4,2}$。

定理 4.2. 设 T 是一个阶为 n 的 k-均匀超树，且 $T \ncong S_{n,k}, D_{n,k,1}$ 具有最大的α-谱半径，其中 $2 \le k \le n$。那么

$$T \cong \begin{cases} P_{5,2} & if\ (n,k) = (5,2), \\ H_{n,k} & if\ \frac{n-1}{k-1} = 4\ with\ k \ge 3, \\ D_{n,k,2} & if\ \frac{n-1}{k-1} \ge 5. \end{cases}$$

证明。首先假设 $\frac{n-1}{k-1} = 4$。由于 $T \ncong S_{n,k}, D_{n,k,1}$，我们有 $T \cong P_{5,2}$ 若 $k = 2$，且$T \cong P_{n,k}, H_{n,k}$ 若 $k \ge 3$。因此，我们只需证明对于 $k \ge 3$，$\rho_\alpha(P_{4k-3,k}) < \rho_\alpha(H_{4k-3,k})$。

令 $P_{4k-3,k} = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 e_3 u_3 e_4 u_4$ 和 $x = x\ (P_{4k-3,k})$。根据引理 2.1，$x_{u_1} = x_{u_3}$、$x_u = x_v$ 对于 u、$v \in (e_1 \cup e_4) \backslash \{u_1, u_3\}$，且 $x_w = x_z$ 对于 w、$z \in (e_2 \cup e_3) \backslash \{u_1, u_2, u_3\}$。令 $w \in e_2 \backslash \{u_1, u_2\}$。假设 $x_w \ge x_{u_3}$。于是，我们通过将 e_4 从 u_3 移至 w，由 $P_{4k-3,k}$ 构造出一个 k 均匀超树 T'。显然，$T' \cong H_{4k-3,k}$。根据定理 3.1，$\rho_\alpha(P_{4k-3,k}) < \rho_\alpha(H_{4k-3,k})$，如所需。假设 $x_w < x_{u_3}$。于是，我们通过交换 e_2 中的 w 和 e_3 中的 u_3，由 $P_{4k-3,k}$ 构造出一个 k 均匀超树 T''。显然，$T'' \cong H_{4k-3,k}$。注意到

$$\begin{aligned} & a_{uv}(T'') - a_{uv}(P_{4k-3,k}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{if } u = u_3, v \in e_2 \setminus \{u_2, w\}, \text{ or } u \in e_2 \setminus \{u_2, w\}, v = u_3, \\ 1 & \text{if } u = w, v \in e_3 \setminus \{u_2, u_3\}, \text{ or } u \in e_3 \setminus \{u_2, u_3\}, v = w, \\ -1 & \text{if } u = u_3, v \in e_3 \setminus \{u_2, u_3\}, \text{ or } u \in e_3 \setminus \{u_2, u_3\}, v = u_3, \\ -1 & \text{if } u = w, v \in e_2 \setminus \{u_2, w\}, \text{ or } u \in e_2 \setminus \{u_2, w\}, v = w, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & \rho_\alpha(T'') - \rho_\alpha(P_{4k-3,k}) \\ & \ge x^\top (A_\alpha(T'') - A_\alpha(P_{4k-3,k}))x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\{u,v\}\subseteq V(T)} (a_{uv}(T'') - a_{uv}(P_{4k-3,k}))(\alpha(x_u^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha)x_u x_v) \\
&= \sum_{v\in e_2\setminus\{u_2,w\}} \big(\alpha(x_{u_3}^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha)x_{u_3}x_v\big) \\
&\quad + \sum_{v\in e_3\setminus\{u_2,u_3\}} \big(\alpha(x_w^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha)x_w x_v\big) \\
&\quad - \sum_{v\in e_3\setminus\{u_2,u_3\}} \big(\alpha(x_{u_3}^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha)x_{u_3}x_v\big) \\
&\quad - \sum_{v\in e_2\setminus\{u_2,w\}} \big(\alpha(x_w^2 + x_v^2) + 2(1-\alpha)x_w x_v\big) \\
&= \sum_{v\in e_2\setminus\{u_2,w\}} \big(\alpha(x_{u_3}^2 - x_w^2) + 2(1-\alpha)x_v(x_{u_3} - x_w)\big) \\
&\quad + \sum_{v\in e_3\setminus\{u_2,u_3\}} \big(\alpha(x_w^2 - x_{u_3}^2) + 2(1-\alpha)x_v(x_w - x_{u_3})\big) \\
&= 2(1-\alpha)(x_{u_3} - x_w)\left(\sum_{v\in e_2\setminus\{u_2,w\}} x_v - \sum_{v\in e_3\setminus\{u_2,u_3\}} x_v\right) \\
&= 2(1-\alpha)(x_{u_3} - x_w)^2 \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

这意味着 $\rho_\alpha(P_{4k-3,\,k}) < \rho_\alpha(H_{4k-3,\,k})$，如所需。因此，$T \cong H_{n,\,k}$。

设以下有 $\binom{n-1}{k-1} \geq 5$和 $x = x(T)$。~~令~~ d为 T的直径。类似于定理 4.1 的证明，我们有 $d = 3$，或者 $d = 4$ 和 $T \cong T_{n,\,k,\,s}$满足 $1 \leq s \leq \lfloor \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}() - 1 \rfloor$，其中 $T_{n,\,k,\,s}$ 是 k-均匀超树，它由 $S_{2k-1,\,k}$ 通过在一条超边~~中~~度为 1 的顶点处附加 s 条悬挂边，并在另一条超边中度为 1 的顶点处附加 $\binom{n-1}{k-1} - 2 - s$ 条悬挂边得到。设后一种情形成立。令 $P = u_0e_1u_1e_2u_2e_3u_3e_4u_4$ 为~~T~~中的一条直径路径。若 $s \geq 2$，则根据定理 3.1，我们可以将 $E_T(u_3)$的所有超边 $\setminus\{e_3, e_4\}$从 u_3移至 u_1，或将 $E_T(u_1)$的所有$\setminus\{e_1, e_2\}$从 u_1移至 u_3，从而得到一个具有更大 α-谱半径的 k-均匀超树，这不可能。因此 $s = 1$。令 T' 为通过将 e_1 从 u_1 移至 u_2 或将 e_3从 u_2移至 u_1而由 T 得到的 k-均匀超树。显然，$T' \ncong S_{n,\,k,\,D_{n,\,k,\,1}}$。根据定理 3.1，$\rho_\alpha(T') > \rho_\alpha(T)$，矛盾。由此可得 $d = 3$，且 T 是一个 k-均匀超树，它由一个带有 k 条边的超星 S_k和一条单独的超边（记为 $e = \{w_1, \ldots, w_k\}$）通过在 w_i处附加 a_i 条悬挂边得到，其中对于 $1 \leq i \leq k$ 有 $\sum_{i=1}^{k} a_i + 1 = \binom{n-1}{k-1}$、$a_i \geq 0$，并且对于某些 p和 q有 a_p、$a_q \geq 1$，且$1 \leq p < q \leq k$。通过对 e中的顶点重新编号，不妨设 $a_2 \geq a_1 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k$。显然，~~$a_1 \geq 1$~~。假设 $a_3 \geq 1$。那么我们可以将 w_1 处的所有悬挂边从w_1 移至 w_3，或将 w_3 处的所有悬挂边从 w_3 移至 w_1，从而得到一个 k-均匀超树T''。显然，$T'' \ncong S_{n,\,k,\,D_{n,\,k,\,1}}$。根据定理 3.1，$\rho_\alpha(T'') > \rho_\alpha(T)$，矛盾。因此$a_3 = 0$。于是，对于 $k \geq 2$、$T \cong D_{n,\,k,\,a_1}$且满足 $a_1 \geq 2$，有 $T \cong D_{n,\,k,\,2}$。

□

4.2 不一定均匀的超树的 α-谱半径

对于 $1 \le m \le n-1$，令 S_n^m为一个具有 n 个顶点、 $m-1$ 条大小为 2 的边以及一条大小为 $n-m+1$的边的超星。特别地， S_n^1 由一条大小为 n的单独超边组成。

定理 4.3. 设 T是一个具有 n 个顶点和 m 条边的超树，其中 $1 \le m \le n-1$。则$\rho_\alpha(T) \le \rho_\alpha(S_n^m)$，当且仅当 $T \cong S_n^m$时取等号。

证明. 若 $m = 1$，结论显然。设 $m \ge 2$。设 T 是一个具有 n 个顶点和m 条边的超树，且其 α-谱半径最大。

假设存在一条边 $e \in E(T)$，它有两个度至少为 2 的顶点，分别为 v_1 和 v_2。由于 T是超树，$(E_T(v_1) \setminus \{e\}) \cap (E_T(v_2) \setminus \{e\}) = \emptyset$。令 $x = x(T)$。不妨设 $x_{v_1} \ge x_{v_2}$。设 T' 是从 T 得到的超图：将除 e 外所有包含 v_2 的边从 v_2 移至 v_1。显然， T' 是一个具有 n 个顶点和 m 条边的超树。由定理 3.1， $\rho_\alpha(T') > \rho_\alpha(T)$，这就产生矛盾。因此， T 中的所有边都是以同一个顶点为公共顶点的悬挂边，即 T 是一个超星。

假设存在两条边，记为 e_1 和 e_2，其大小至少为 3。设 $|e_1| \ge |e_2|$。令 T'' 为从 T 移动一个顶点 $w \in e_2 \setminus e_1$ （从 e_2 移至 e_1）后得到的超树。由定理 3.3， $\rho_\alpha(T'') > \rho_\alpha(T)$，这就产生了矛盾。因此，大小至少为 3 的边至多有一条，从而 $T \cong S_n^m$。 □

引理 4.1。若 $1 \le m_2 < m_1 \le n-1$，则 $\rho_\alpha(S_n^{m_1}) < \rho_\alpha(S_n^{m_2})$。

证明。设 $T = S_n^{m_2}$的中心为 u，且 $e \in E(T)$ 的大小为 $n - m_2 + 1$。令 T' 为从 T 中移去一个顶点（记为 w）后得到的超树，其中该顶点位于 $e \setminus \{u\}$ 中；再将一条悬挂边 $\{u, w\}$ 接到 u 上。于是 $T' \cong S_n^{m_2+1}$。由定理 3.5， $\rho_\alpha(S_n^{m_2+1}) < \rho_\alpha(S_n^{m_2})$。重复应用这一过程，最终得到 $\rho_\alpha(S_n^{m_1}) < \rho_\alpha(S_n^{m_2})$。 □

推论 4.1. 设 T 是一个具有 n 个顶点、最大度为 Δ的超树，其中 $1 \le \Delta \le n-1$。则 $\rho_\alpha(T) \le \rho_\alpha(S_n^\Delta)$，当且仅当 $T \cong S_n^\Delta$时等号成立。

证明. 注意到 S_n^Δ的最大度为 Δ，且 $|E(T)| \ge \Delta$。由定理 4.3 和引理 4.1，得到 $\rho_\alpha(T) \le \rho_\alpha\left(S_n^{|E(T)|}\right) \le \rho_\alpha(S_n^\Delta)$，当且仅当 $T \cong S^{|E(T}{}_n$ 且$|E(T)| = \Delta$时等号成立，即 $T \cong S_n^\Delta$。 □

同理，我们有

推论 4.2. 设 T 是一个具有 n 个顶点、含有 p 条悬挂边的超树，其中 $2 \le p \le n-1$。则 $\rho_\alpha(T) \le \rho_\alpha(S_n^p)$，当且仅当 $T \cong S_n^p$ 时等号成立。

定理 4.4。设 T 是一个具有 n 个顶点的超树。则 $\rho_\alpha(T) \le n-1$，当且仅当 $T \cong S_n^1$ 时等号成立。此外，如果 $T \ncong S_n^1$，则 $\rho_\alpha(T) \le \rho_\alpha(S_n^2)$，当且仅当 $T \cong S_n^2$ 时等号成立。

证明。根据定理 4.3 和引理 4.1，$\rho_\alpha(T) \leq \rho_\alpha\left(S_n^{|E(T)|}\right) \leq \rho_\alpha(S_n^1)$，当且仅当 $T \cong S_n^{|E(T)|}$ 和 $|E(T)| = 1$ 时等号成立，即 $T \cong S_n^1$。第一部分由注意到 $\rho_\alpha(S_n^1) = \rho_\alpha(K_n) = n-1$ 即可得出。

若 $T \ncong S_n^1$，则 $|E(T)| \geq 2$，因此由定理 4.3 和引理 4.1 可得，$\rho_\alpha(T) \leq \rho_\alpha\left(S_n^{|E(T)|}\right) \leq \rho_\alpha(S_n^2)$，且等号成立当且仅当 $T \cong S^{|E(T}{}_{)n}{}^{|}$且 $|E(T)| = 2$，即 $T \cong S_n^2$。第二部分得证。

□

注意，第一部分也可由引理 2.2 得出。

对于 $n \geq 5$，令 $S_n'^2$为一个具有 n 个顶点的超星，其中一条超边的大小为 3，另一条超边的大小为 $n-2$。

定理 4.5。设 T是一个具有 $n \geq 5$ 个顶点的超树，其中 $T \ncong S_n^1$，S_n^2。则 $\rho_\alpha(T) \leq \rho_\alpha(S_n'^2)$，等号成立当且仅当 $T \cong S_n'^2$。

证明。令 $m = |E(T)|$。由于 $T \ncong S_n^1$，S_n^2，我们有 $m \geq 2$。若 $m \geq 3$，则由定理 4.3 和引理 4.1 可得 $\rho_\alpha(T) \leq \rho_\alpha(S_n^m) \leq \rho_\alpha(S_n^3)$，等号成立当且仅当$T \cong S_n^m$和 $m = 3$，即 $T \cong S_n^3$。若 $m = 2$，则由定理 3.3 可得 $\rho_\alpha(T) \leq \rho_\alpha(S_n'^2)$。由定理 3.5 可得 $\rho_\alpha(S_n^3) < \rho_\alpha(S_n'^2)$。

□

若 T是一个有 4 个顶点的超树，其中 $T \ncong S_4^1$，S_4^2，则 $T \cong P_4$或 S_4。由定理 3.1，$\rho_\alpha(S_4) > \rho_\alpha(P_4)$。

设 P_n' 是由 $P_{n-2} = v_1 \ldots v_{n-2}$ 添加一条大小为 3 的超边 $\{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ 得到的、具有 $n \geq 4$ 个顶点的超树。则 $A_\alpha(P_n')$ 与 $A_\alpha(U_{n,\,3})$ 置换相似，这意味着 $\rho_\alpha(P_n') = \rho_\alpha(U_{n,\,3})$。

定理 4.6。设 T 是一个具有 $n \geq 4$ 个顶点且不是 2-一致的超树。则 $\rho_\alpha(T) \geq \rho_\alpha(P_n')$，当且仅当 $T \cong P_n'$ 时等号成立。

证明。设 T 是一个具有 n 个顶点、不是 2-一致且具有最小 α-谱半径的超树。

假设 T 有两条超边，即 e 和 e'，其大小至少为 3。由于 T 是超树，我们不妨设 $\{u, v, w\} \subseteq e$与 $u, v \notin e'$。令 T'为从T中删除 v并将一条超边 $\{u, v\}$连接到 u后得到的超树。显然，T'不是 2-一致的。根据定理 3.5，$\rho_\alpha(T) > \rho_\alpha(T')$，这与假设矛盾。因此，$T$ 恰有一条大小至少为 3 的超边。用上述类似的论证可知，T 没有大小至少为 4 的超边。由此可得，T恰有一条大小为 3 的超边，其余超边的大小均为 2。令 $e^* = \{w_1, w_2, w_3\}$为 T中唯一一条大小为 3 的超边。令 U 为从 T 中删除超边 e^*并添加超边 $\{w_1, w_2\}$，$\{w_1, w_3\}$和 $\{w_2, w_3\}$后得到的超图。容易看出，U是一个围长为 3 的单圈图。注意，$A_\alpha(T)$与 $A_\alpha(U)$置换相似。从 T中删除 e^*后得到树 T_1, T_2 和 T_3，其中对 $i = 1$，$w_i \in V(T_i)$，2，3。将引理 2.4 应用于 U，可知对于 $i = 1$，T_i是一条以 w_i为端点的路径，2，3。根据引理 2.5，T_1, T_2 和 T_3 中至多只有一个是非平凡的。因此 $T \cong P_n'$。 □

设 T 是一个有 n 个顶点的超树。若 T 不是 2-一致的，则根据定理 4.6，有 $\rho_\alpha(T) \geq \rho_\alpha(P'_n)$。若 T是 2-一致的且 $T \ncong P_n$，则根据引理 2.4，有 $\rho_\alpha(T) \geq \rho_\alpha(Z_n) > \rho_\alpha(P_n)$，当且仅当 $T \cong Z_n$时取等号。根据引理 2.2，$\rho_\alpha(Z_n) < \rho_\alpha(U_{n,3}) = \rho_\alpha(P'_n)$。因此，在有 n 个顶点的超树中，

(a) P_n 是具有最小 α-谱半径的唯一超树；

(b) 对于 $n \geq 4$，Z_n 是具有第二小 α-谱半径的唯一树 .

5 单圈超图的极值 α-谱半径

本节中，我们研究单圈超图的 α-谱半径。

我们首先考虑 k-一致单圈超图。对于具有 $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$的 k-一致单圈超图 G，若 $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$，其中对于 $i = 1, \ldots, m$ 及$v_{(m-1)(k-1)+k} = v_1$，有 $e_i = \{v_{(i-1)(k-1)+1}, \ldots, v_{(i-1)(k-1)+k}\}$，则称 G 为一个 k-一致松弛圈，记为$C_{n,k}$。对于整数 $k \geq 2$, $g \geq 2$, $a \geq 1$以及一个 k-一致松弛圈$C_{g(k-1),k}$，令 $C_g^k(a)$表示由$C_{g(k-1),k}$ 通过将$S_{a(k-1)+1,k}$ 和 v_1 的中心识别而得到的 k-一致超图。对于 $k \geq 3$ 和 $\binom{n}{k-1} \geq g \geq 2$，令$F_{n,k,g}$ 表示由$C_{g(k-1),k}$ 的超边 $e_i = \{v_{(i-1)(k-1)+1}, \ldots, v_{(i-1)(k-1)+k}\}$ 通过在 v_2处附加 $\binom{n}{k-1} - g$条悬挂边而得到的一个 k-一致单圈超图，其中 $i = 1, \ldots, g$ 且$v_{g(k-1)+1} = v_1$。

定理 5.1. 设 G 是一个 k-均匀单圈超图，其阶为 n，围长为 g，其中$2 \leq k \leq n$。则 $\rho_\alpha(G) \leq \rho_\alpha(C_g^k(m-g))$，当且仅当 $G \cong C_g^k(m-g)$ 时等号成立，其中$m = \binom{n}{k-1}$。

证明. 当 $g = m$ 时结论显然。设 $g < m$。令 C 为 G 的唯一圈，且v 是 C 中的一个顶点。设 e 是 C 之外的一条超边 e，且包含 v。如果 e 不是 v 处的悬挂边，那么 e 中还有另一个顶点（记为 w），它在 G 中的度至少为 2；我们可以将包含 v 的所有边（e 除外）从 v 移至 w，或反向移动，从而得到一个 k- 均匀单圈超图 G'，其阶为 n，围长为 g。由定理 3.1 可知，$\rho_\alpha(G') > \rho_\alpha(G)$，这与假设矛盾。因此，$C$ 之外的每条边都是某个 C 中顶点处的悬挂边。如果 C 中至少有两个顶点处存在悬挂边，那么我们可以选取其中两个顶点，将一个顶点处的所有悬挂边移至另一个顶点，从而得到一个 k-均匀单圈超图 G''，其阶为 n，围长为 g。由定理 3.1 可知，$\rho_\alpha(G'') > \rho_\alpha(G)$，这同样与假设矛盾。因此，所有悬挂边都连于 C 的同一个公共顶点。所以，当 $k = 2$ 时，$G \cong C_g^k(m-g)$；当 $k \geq 3$ 时，$G \cong C_g^k(m-g)$ 或 $G \cong F_{n,k,g}$。

设 $k \geq 3$ 和 $G \cong F_{n,\,k,\,g}$。令 G^* 为将 $E_G(v_2)$ 的所有超边 $\setminus \{e_1\}$ 从 v_2 移至 v_1后由G 得到的 k-一致超图，令 G^{**} 为将 e_g从 v_1移至 v_2后由 G得到的 k-一致超图。显然，$G^* \cong G^{**} \cong G_g^k(m-g)$。由定理 3.1，得到 $\rho_\alpha(G^*) > \rho_\alpha(G)$ 或 $\rho_\alpha(G^{**}) > \rho_\alpha(G)$，这与假设矛盾。因此 $G \cong C_g^k(m-g)$。 □

定理 5.2. 设 G 是一个阶为 n 的 k-均匀单圈超图，其中 $2 \leq k \leq n$。设$m = \binom{n}{k-1}$。则

(i) 若 G 是线性的，则 $m \geq 3$ 且 $\rho_\alpha(G) \leq \rho_\alpha(C_3^k(m-3))$，当且仅当$G \cong C_3^k(m-3)$时等号成立；*(ii)* 若 $k \geq 3$，则 $m \geq 2$ 且 $\rho_\alpha(G) \leq \rho_\alpha(C_2^k(m-2))$，当且仅当$G \cong C_2^k(m-2)$时等号成立。

证明。设 G 是一个阶为 n 、具有最大 α-谱半径的 k-均匀单圈超图。

设 g 为围 长。设 $v_1e_1v_2\ldots v_ge_gv_1$ 是 G的唯一圈。设 $x = x$（G） .

首先，假设 G 是线性的。则 $m \geq g \geq 3$。假设 $g \geq 4$。设$x_{v_1} \geq x_{v_4}$。令 G' 为由 G移动 E_G（v_4）的所有 $\setminus \{e_4\}$ 条边而得到的 k-均匀单圈超图，其中这些边从 v_4 移至 v_1。显然， G' 是线性的。由定理 3.1，得到ρ_α（G'）$> \rho_\alpha$（G），矛盾。因此 $g = 3$。由定理 5.1， $G \cong C_3^k$（$m-3$）。

假设 $k \geq 3$。则 $m \geq g \geq 2$。假设 $g \geq 3$。不妨设$x_{v_1} \geq x_{v_3}$。令 G'' 为由 G 移动 E_G（v_3）$\setminus \{e_3\}$ 的所有边而得到的 k-均匀单圈超图，其中这些边从 v_3 移至 v_1。由定理 3.1，得到 ρ_α（G''）$> \rho_\alpha$（G），矛盾。因此 $g = 2$，并且由定理 5.1，得到 $G \cong C_2^k$（$m-2$）。 □

现在我们转而考虑不一定均匀的单圈超图。设 U_n^1为由 S_n^1 添加一条大小为 2 的超边所得的、具有 $n \geq 3$ 个顶点的单圈超图。设 U_n^2 为 $n \geq 4$ 个顶点上的一个长度为 2 的圈，其中一条边的大小为 3。

定理 5.3. 设 U为一个具有 $n \geq 3$个顶点的单圈超图。则 $\rho_\alpha(U) \leq \rho_\alpha(U_n^1)$，当且仅当 $U \cong U_n^1$ 时取等号。此外，若 $U \ncong U_n^1$且 $n \geq 4$，则 $\rho_\alpha(U) \leq \rho_\alpha(U_n^2)$，当且仅当 $U \cong U_n^2$时取等号。

证明。设 U 为 具有最大 α-谱半径的、 n 个顶点上的单圈超图。

设 $C = v_1e_1\ldots v_ge_gv_1$为 U中长度为 g的唯一圈。假设 $U \neq C$。则 U 中存在一条不在 C 上的超边 e ，且它包含 V中的某个顶点（C）。设 e 包含 e_1的某个顶点 w 。若 $w \neq v_1$， v_2，则通过将 e 从 w 移至 v_1 ，或将 e_g 从 v_1 移至 w，我们得到一个单圈超图 U'，并且由定理 3.1，有ρ_α(U) $< \rho_\alpha$(U')，这与矛盾。因此 $w = v_1$或 v_2。假设 $w = v_1$。设 U''为由 U删去超边 e和 e_1并添加一条超边 $e \cup e_1$所得的单圈超图。注意到 A(U'') $> A$ (U)，因此 A_α(U'') $> A_\alpha$(U)。于是由引理 2.2， ρ_α(U'') $> \rho_\alpha$(U)，这与矛盾。因此 $U = C$。设 $|e_1|$ =max$\{|e_i| : 1 \leq i \leq g\}$。若 $g \geq 3$，则令 U^*为由 U删去超边 e_2和 e_3并添加一条超边 $e_2 \cup e_3$所得到的、围长为 $g-1 \geq 2$ 的单圈超图，由引理 2.2 可得 ρ_α(U*) $> \rho_\alpha$(U)，这与矛盾。因此 $g = 2$。于是 $U = v_1e_1v_2e_2v_1$。由定理 3.4，可得 $|e_2| = 2$，即$U \cong U_n^1$。

若 $U \ncong U_n^1$ 且 $n \geq 4$，则 min$\{|e_1|, |e_2|\} \geq 3$，因此由定理 3.4 可得 min$\{|e_1|, |e_2|\}$ =3，即 $U \cong U_n^2$。 □

我 们注意到，前一定理的第一部分也可由引理 2.2 得出 .

定理 5.4。 设 U 是一个具有 $n \geq 3$ 个顶点的单圈超图。则 $\rho_\alpha(U) \geq \rho_\alpha(C_n)$，当且仅当 $U \cong C_n$时等号成立。

证明。设 U 是具有 $n \geq 3$ 个顶点且 α-谱半径最小的单圈超图。

若 $n = 3$，则显然。设 $n \geq 4$。若 U 是一个 2-均匀单圈超图，则 $U \cong C_n$，因为 C_n 中，$\rho_\alpha(C_n) = 2$ 是具有 n 个顶点的 2-均匀单圈图中 α-谱半径最小的唯一单圈图。若 U 不是 2-均匀单圈超图，则存在一条大小为 $r \geq 3$的超边 $e_1 = \{v_1, \ldots, v_r\}$。由引理 2.2，$\rho_\alpha(U) > \rho_\alpha(K_r) = r - 1 \geq 2$，矛盾。因此 $U \cong C_n$。 □

定理 5.5。设 U 是一个具有 $n \geq 4$ 个顶点的单圈超图，且 $U \ncong C_n$。则$\rho_\alpha(U) \geq \rho_\alpha(U_{n,\ n-1})$，当且仅当$U \cong U_{n,\ n-1}$时等号成立。

证明。设 $U \ncong C_n$ 是一个具有 $n \geq 4$ 个顶点且 α-谱半径最小的单圈超图。

设 C 是 U 中长度为 $2 \leq g \leq n-1$ 的唯一圈。

假设 U 是 2-一致的。设 $C = v_1 \ldots v_g v_1$。由引理 2.4，删除 C 上的边后得到 g 条点不交路径 $T_1, \ldots, T_g$，其中 v_i 是 T_i 的一个端点。假设 $g \leq n-2$。那么这些路径中至少有一条是非平凡的。若其中仅有一条路径是非平凡的，设为 T_i，则在 U 中存在一条从 v_i 到 v_i 的内部路径（类型 (i)）。若至少有两条这样的非平凡路径，则可选取其中两条，设为 T_i 和 T_j，使得 $i < j$ 蕴含对每个满足 $i < k < j$ 的 k，T_k 都是平凡的，因此在 U 中存在一条从 v_i 到 v_j 的内部路径（类型 (ii)）。无论哪种情况，我们都可以对内部路径上的一条边（设为 $\{u, v\}$）应用定理 3.2，构造单圈图 U_{uv}，使得 $\rho_\alpha(U_{uv}) < \rho_\alpha(U)$。设 U' 是从 U_{uv} 中删除 v_i 处悬挂路径上的一个悬挂顶点后得到的图。显然，U' 是一个具有 n 个顶点且围长为 $g+1$ 的单圈图，并且是 U_{uv} 的真子图。由引理 2.2，$\rho_\alpha(U') < \rho_\alpha(U_{uv})$。因此 $\rho_\alpha(U') < \rho_\alpha(U)$，矛盾。故 $g = n-1$，且 $U \cong U_{n,n-1}$。

现在假设 U 不是 2-一致的。那么存在一条边 $e = \{v_1, \ldots, v_r\}$，满足 $r \geq 3$。假设 $r \geq 4$。由于 U 是单圈超图，e中存在两个顶点，记为 v_1、v_2，使得$\{v_1, v_2\} \notin E(U)$。令 U'为从 U中删去边 e并添加边 $\{v_1, v_2\}$和 $\{v_2, \ldots, v_r\}$得到的单圈超图。显然，U' 不是 2-一致的。由引理 2.2，$\rho_\alpha(U') < \rho_\alpha(U)$，矛盾。因此，边的最大大小为 3。假设存在两条大小为 3 的边 $e_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$和 e_2。令 U''为从 U 中删去边 e_1 并添加边 $\{u_1, u_2\}$ 和 $\{u_2, u_3\}$得到的单圈超图；若 e_1位于 C上，则将 C的顶点和边重新标记为 $u_1 e_1 u_3 \ldots u_1$。那么 U''也不是 2-一致的，并且由引理 2.2，$\rho_\alpha(U'') < \rho_\alpha(U)$，矛盾。因此恰有一条大小为 3 的边，记为 $e^* = \{w_1, w_2, w_3\}$。若 e^* 不是 C 上的边，或者 e^* 是 C 上的一条边且$g \leq n-2$，则令 U''' 为从 U 中删去边 e^*并添加边 $\{w_1, w_2\}$和 $\{w_2, w_3\}$得到的单圈超图；在后一种情形下，将 C的顶点和边重新标记为 $w_1 e^* w_3 \ldots w_1$。那么 U'''是 2-一致的，且 $U''' \ncong C_n$。由引理 2.2，$\rho_\alpha(U''') < \rho_\alpha(U)$，矛盾。因此，$e^*$是 U的圈上的一条边，且 $g = n-1$，即$U \cong C$。

设 U^* 是从 U 中移除 w_2 并从 e^* 中添加一条超边 $\{w_1, w_2\}$ 到 w_1后得到的单圈图。那么$U^* \cong U_{n,\ n-1}$。根据定理 3.5，$\rho_\alpha(U^*) < \rho_\alpha(U)$，这与矛盾相矛盾。

因此，U 是 2-一致的，而$U \cong U_{n,\ n-1}$。 □

6 固定悬挂边数的超图的最大 α-谱半径

对于 $2 \le k \le n$，完全 k-一致超图记为 $K_n^{(k)}$，它是一个阶为 n 的超图 G，满足 $E(G)$ 由 $V(G)$ 的所有 k-子集组成。

对于 $2 \le k \le n$ 和 $p \ge 0$，令 $\mathbb{F}_{n,k}(p)$ 表示阶为 n 且有 p 条悬挂边的连通 k-一致超图集合。由于 $G \in \mathbb{F}_{n,k}(p)$ 是连通的，因此 $n - p(k-1) = 1$，其中 $p > 0$，进而 $G \cong S_{n,k}$，或者 $n - p(k-1) \ge k$。

对于 $k \ge 2$ 和 $p \ge 0$，令 $K_{n,p}^{(k)}$ 表示由 $K_{n-pk+p}^{(k)}$ 在其一个顶点处附加 p 条悬挂边得到的 k-一致超图。

定理 6.1。对于 $2 \le k \le n$，令 $G \in \mathbb{F}_{n,k}(p)$。则

(i) 若 $p = 0$，则 $\rho_\alpha(G) \le \binom{n-2}{k-2}(n-1)$，等号成立当且仅当 $G \cong K_n^{(k)}$；

(ii) 若 $p \ge 1$，则 $\rho_\alpha(G) \le \rho_\alpha(D_{n,k,1})$，当且仅当 $G \cong D_{n,k,1}$ 时等号成立；若 $n - p(k-1) = k$ 且 $p \ge 2$，则 $\rho_\alpha(G) \le \rho_\alpha\left(K_{n,p}^{(k)}\right)$，当且仅当 $G \cong K_{n,p}^{(k)}$ *if* $n - p(k-1) > k$ 时等号成立。

证明。设 G 是 $\mathbb{F}_{n,k}(p)$ 中具有最大 α-谱半径的超图。

设 V_0 为 G 的 p 条悬挂边中不属于度为 1 的顶点的顶点集合。由引理 2.2，$G[V_0]$是一个完全 k-一致超图。

显然，若 $p = 0$，则 $G = G[V_0] \cong K_n^{(k)}$，进而 $\rho_\alpha(G) = \binom{n-2}{k-2}(n-1)$。这就是 (i)。

假设 $p \ge 1$。

若 $n - p(k-1) = k$，则 $G[V_0] = K_k^{(k)}$ 只包含一条超边，它是 G 中唯一的非悬挂边，并且 p 条悬挂边附着在该超边的至少两个顶点上。显然，G 是一个具有 $p \ge 2$ 的 k-一致超树。由定理 4.1，$G \cong D_{n,k,1}$。

若 $n - p(k-1) > k$。假设 G 的不同顶点 u 和 v 处都有悬挂边。不妨设 $x_u \ge x_v$，其中 $x = x(G)$。令 G' 为从 G 得到的 k-一致超图，将附着在 v 处的所有悬挂边从 v 移至 u。显然，$G' \in \mathbb{F}_{n,k}(p)$。由定理 3.1，$\rho_\alpha(G') > \rho_\alpha(G)$，矛盾。因此，所有悬挂边都有一个公共顶点，并且 $G \cong K_{n,p}^{(k)}$。这证明了 (ii)。 □

若 G 是一个有 n 个顶点和 $n-1$ 条悬挂边的超图，则 $G \cong S_n$。

令 $G(n)$ 为有 n 个顶点且包含所有可能边的超图，也就是说，任何基数至少为二的顶点子集都是一条边。

对于 $0 \le p \le n-3$，令 H_n^p 为从 $G(n-p)$ 得到的超图：在一个顶点上附加 p 条大小为二的悬挂边后，所得超图有 $n \ge p+3$ 个顶点。

由推论 4.2，S_n^p 是有 n 个顶点和 p 条悬挂边的超树中具有最大 α-谱半径的唯一超树。与此形成对比的是，我们有

定理6.2。设 G 是一个有 n 个顶点和 p 条悬挂边的超图，且其 α-谱半径最大，其中 $0 \le p \le n-2$。

(i) 若 $p = n-2$，则 $G \cong S_n^{n-2}$；

(ii) 若 $0 \le p \le n-3$，则 $G \cong H_n^p$。

证明。假设 $p=n-2$。若 G 是 2-一致的，则 G 同构于某个双星$S(n_1,\ n_2)$，它由两个非平凡星 S_{n_1} 和S_{n_2}（其 $n_1+n_2=n$）的中心之间添加一条超边得到。由定理 3.1，$\min\{n_1,n_2\}=2$，即 $G\cong S(n-2,\ 2)$。若 G 不是 2-一致的，则 $G\cong S_n^{n-2}$。由引理 2.2 或定理 3.5，$\rho_\alpha(S_n^{n-2})>\rho_\alpha(S(n-2,\ 2))$。因此 $G\cong S_n^{n-2}$。

接下来假设 $0\le p\le n-3$。若 $p=0$，则显然成立。设 $1\le p\le n-3$.

令 e_1，…，e_p为悬挂边，V_1为悬挂边中度为 1 的顶点集合。令 $V_0=V\setminus V_1$。根据引理 2.2，V_0 的任意一个至少含有两个顶点的子集都是 G 的一条边。

设 $|V_0|=2$。令 $V_0=\{u,v\}$。假设 $x_u\ge x_v$。令 G' 为由 G 通过将 v 处的悬挂边从 v 移动到 u得到的超图。根据定理 3.1，$\rho_\alpha(G)<\rho_\alpha(G')$。注意，$G'$ 是一个具有 n 个顶点和 $p+1$ 条悬挂边的超图，其中一条为 $\{u,v\}$。由于 $p\le n-3$，存在一条大小至少为 3 的悬挂边 e_1。令 G'' 为由 G' 添加所有可能的边 e 得到的超图，使得 $e\subseteq e_1$ 且满足 $|e|\ge 2$。显然，G'' 是一个具有 n 个顶点和 p 条悬挂边的超图。根据引理 2.2，$\rho_\alpha(G')<\rho_\alpha(G'')$。由此可得 $\rho_\alpha(G)<\rho_\alpha(G'')$，这与假设矛盾。因此，$|V_0|\ge 3$ 或 $|V_0|=1$。根据定理 3.1，p 条悬挂边有一个公共顶点，记为 $v_1\in V_0$。根据定理 3.3，大小至少为 3 的悬挂边至多有一条。因此，不妨设 $|e_1|\ge|e_2|=\cdots=|e_p|=2$。令 $e_1=\{v_1,\dots,v_r\}$。假设 $r\ge 3$。令 G^*为由 G删除超边 e_1、添加超边 $\{v_1,v_2\}$ 以及所有包含 $\{v_3,\dots,v_r\}$中至少一个顶点且满足 $e\subseteq\{v_3,\dots,v_r\}\cup V_0$的可能边 e 得到的超图。显然，G^*也是一个具有 n个顶点和 p条悬挂边的超图。对于 $\{w,z\}\subseteq V(G)$，容易看出

$$
\begin{aligned}
&a_{wz}(G^*)-a_{wz}(G)\\
&=\begin{cases}
2^{n-p-2}-1 & \text{if } w=v_1, z\in\{v_3,\dots,v_r\},\ \text{or } w\in\{v_3,\dots,v_r\}, z=v_1,\\
-1 & \text{if } w=v_2, z\in\{v_3,\dots,v_r\},\ \text{or } w\in\{v_3,\dots,v_r\}, z=v_2,
\end{cases}
\end{aligned}
$$

并且 $a_{wz}(G^*)-a_{wz}(G)\ge 0$否则。设 $x=x(G)$。由引理 2.1，$x_{v_2}=x_{v_3}=\cdots=x_{v_r}$且 $x_u=x_v$，其中 $u,\ v\in V_0\setminus\{v_1\}$。注意，$A_\alpha(G[e_1])=A_\alpha(K_r)$ 是 $A_\alpha(G)$ 的主子矩阵。由引理 2.2，得 $\rho_\alpha(G)>\rho_\alpha(K_r)=r-1$。由 G 在 v_2 处的特征方程，得

$$
\rho_\alpha(G)x_{v_2}=\alpha(r-1)x_{v_2}+(1-\alpha)\left(x_{v_1}+(r-2)x_{v_2}\right),
$$

其中 i 推出（$1-\alpha$）$x_{v_1}=$（ρ_α（G）$-r+2-\alpha$）x_{v_2}，因此 $x_{v_1}>x_{v_2}$。因此

$$
\begin{aligned}
&\rho_\alpha(G^*)-\rho_\alpha(G)\\
&\ge x^\top(A_\alpha(G^*)-A_\alpha(G))x\\
&=\sum_{\{w,z\}\subseteq V(G)}(a_{wz}(G^*)-a_{wz}(G))\left(\alpha(x_w^2+x_z^2)+2(1-\alpha)x_wx_z\right)\\
&=\sum_{z\in\{v_3,\dots,v_r\}}(2^{n-p-2}-1)(\alpha(x_{v_1}^2+x_z^2)+2(1-\alpha)x_{v_1}x_z)\\
&\quad-\sum_{z\in\{v_3,\dots,v_r\}}(\alpha(x_{v_2}^2+x_z^2)+2(1-\alpha)x_{v_2}x_z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha(r-2)(2^{n-p-2}-1)x_{v_1}^2 + \alpha(r-2)(2^{n-p-2}-1)x_{v_2}^2 \\
&\quad - 2\alpha(r-2)x_{v_2}^2 + 2(1-\alpha)\sum_{z\in\{v_3,\ldots,v_r\}} x_z(x_{v_1}-x_{v_2}) \\
&= \alpha(r-2)(2^{n-p-2}-1)x_{v_1}^2 + (\alpha(r-2)(2^{n-p-2}-3) - 2(1-\alpha)(r-2))x_{v_2}^2 \\
&\quad + 2(1-\alpha)(r-2)x_{v_1}x_{v_2} \\
&> \big(\alpha(r-2)(2^{n-p-2}-1) + \alpha(r-2)(2^{n-p-2}-3) - 2(1-\alpha)(r-2) \\
&\quad + 2(1-\alpha)(r-2)\big)\, x_{v_2}^2 \\
&= 2\alpha(2^{n-p-2}-2)(r-2)x_{v_2}^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}
$$

意味着 $\rho_\alpha(G^*) > \rho_\alpha(G)$，矛盾。因此 $|e_1| = \cdots = |e_p| = 2$，且 $G \cong H_n^p$。 □

7 结论

文献 [14], 研究了均匀超图的 0-谱半径，但似乎尚无关于非必然均匀的超图的 0-谱半径（通过上述邻接矩阵）的研究。本文考察均匀或非必然均匀超图的 α-谱半径。我们提出了一些能够增大或减小 α-谱半径的局部嫁接操作。其中，我们确定了 k-一致超树中谱半径最大的前三个超树，它们是唯一的；确定了 k-一致单圈超图中谱半径最大的唯一超图；确定了在悬挂边数量给定时谱半径最大的唯一 k-一致超图；还确定了在顶点数和边数给定时谱半径最大的唯一超树、在顶点数给定时谱半径最大的前三个（或最小的两个）唯一超树、在顶点数给定且非 2-一致的超树中谱半径最小的唯一超树、在顶点数给定的单圈超图中谱半径最大的前两个（或最小的）唯一超图，以及在悬挂边数量固定时谱半径最大的唯一超图。

致谢。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12071158 和 11671156）资助。

参考文献

[1] A.E. Brouwer、W.H. Haemers，《图的谱》，Springer，纽约，2012。

[2] R.A. Brualdi，A.J. Hoffman，关于 (0,1)-矩阵的谱半径，《线性代数及其应用》65 (1985) 133–146。

[3] D. Cvetkovi´c，P. Rowlinson，图的最大特征值：综述，线性与多重线性代数 28 (1990) 3–33。[4] D. Cvetkovi´c，P. Rowlinson，S. Simi´c，《图的特征子空间》，剑桥大学出版社，剑桥，1997年。[5] Y. Caro，R. Yuster，超图的一致性空间及其应用，离散数学 202 (1999) 1–19。[6] K. Feng，W.-C. Li，超图的谱及其应用，数论杂志 60 (1996) 1–22。[7] H. Guo，B. Zhou，关于图的 α谱半径，《应用分析与离散数学》14 (2020) 431–458。[8] H. Guo，B. Zhou，关于一致超图的 α谱半径，《图论讨论数学》40 (2020) 559–575。[9] P. Hansen，C. Lucas，图的无符号拉普拉斯指标的界与猜想，《线性代数及其应用》432 (2010) 3319–3336。[10] A.J. Hoffman，J.H. Smith，关于拓扑等价图的谱半径，载于：M. Fiedler（编），《图论最新进展》（第二届捷克斯洛伐克专题讨论会论文集，布拉格，1974年），Academia，布拉格，1975年，第273–281页。[11] Q. Li，K.Q. Feng，关于图的最大特征值，《数学应用学报》2 (1979) 167–175。[12] W.-C. Li，P. Sol´e，正则图和超图的谱与正交多项式，《欧洲组合学杂志》17 (1996) 461–477。[13] H. Lin，H. Guo，B. Zhou，关于非正则均匀超图的 α谱半径，线性与多重线性代数 68 (2020) 265–277。[14] H. Lin，B. Zhou，一致超图的谱半径，《线性代数及其应用》527 (2017) 32–52。[15] V. Linek，施泰纳四元系的着色，《组合理论杂志 A辑》70 (1995) 45–55。[16] M. Mart´ınez，H.M. Stark，A.A. Terras，与$GL(n, \mathbb{F}_q)$相关的一些拉马努金超图，《美国数学会会刊》129 (2001) 1623–1629。[17] H. Minc，《非负矩阵》，约翰·威立父子出版公司，纽约，1988年。[18] V. Nikiforov，合并 A 谱理论与 Q 谱理论，《应用分析与离散数学》11 (2017) 81–107。

[19] C.S. Oliveira、L.S. de Lima、N.M.M. de Abreu、P. Hansen，无符号拉普拉斯矩阵的图谱指标界，《离散应用数学》158（2010年）355–360.[20] J.A. Rodr´ıguez，关于超图的拉普拉斯特征值与度量参数，《线性与多重线性代数》50（2002年）1–14.[21] J.A. Rodr´ıguez，关于拉普拉斯谱与步正则超图，《线性与多重线性代数》51（2003年）285–297.[22] J.A. Rodr´ıguez，超图中的拉普拉斯特征值与划分问题，《应用数学快报》22（2009年）916–921.[23] J.H. Smith，图的谱的一些性质，载于：《组合结构及其应用》，Gordon and Breach，纽约，1970年，第403–406页。