arXiv:2303.16638v3 [math.AG] 5 Mar 2024

椭圆 K3 曲面与雅可比簇的导出等价

Reinder Meinsma 和 Evgeny Shinder

摘要。我们详细研究 K3 曲面的傅里叶-穆凯伙伴上的椭圆纤维化，并将其称为导出椭圆结构。我们依据霍奇理论数据对导出椭圆结构进行了完整分类，这与描述傅里叶-穆凯伙伴的导出托雷利定理类似。在皮卡德秩为二的情形下，导出椭圆结构完全由判别群的拉格朗日子群决定。因此，我们证明，对于一大类皮卡德秩为 2 的椭圆 K3 曲面，其所有傅里叶-穆凯伙伴都是雅可比簇；我们还将这一结果部分推广到非闭域。我们还证明，存在一些椭圆 K3 曲面，其傅里叶-穆凯伙伴并非原 K3 曲面的雅可比簇。这对 Hassett 和 Tschinkel 提出的问题给出了否定答案。

目录

1. 引言 应用 论文结构 致谢 1
2. 预备结果 2.1. 格 2.2. K3 曲面 3
2.3. 非细模空间的 Căldăraru 类 2.4. 椭圆 K3 曲面 3
3. 皮卡德秩为 2 的椭圆 K3 曲面 3
3.1. Néron-Severi 格 3.2. 自同构与霍奇等距 4
4. 雅可比簇 4.1. Ogg-Shafarevich 理论 4.2. 雅可比簇的同构 4.3. j 特殊等变椭圆 K3 曲面 5
5. 导出等价 K3 曲面与雅可比簇 5.1. 导出椭圆结构 5.2. 秩为 2 的傅里叶–穆凯伙伴 6
5.3. 零阶雅可比 5.4. Hassett 和 Tschinkel 关于非闭域的问题 7
参考文献 7

1. 引言

对复 K3 曲面导出等价的研究可追溯至 Mukai 的工作。根据导出托雷利定理 [Muk87；Orl03], , 导出等价可转化为一个霍奇理论概念。在导出托雷利定理及 Nikulin 关于格的工作基础上 [Nik80], , 可以推导出复 K3 曲面的傅里叶-穆凯伙伴数量公式 [Ogu02；Hos+02]。

椭圆 K3 曲面的导出等价已在 [Ste04；Gee05]中得到研究。为椭圆曲面 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$构造 Fourier–Mukai 伴侣的一种方法，是取雅可比簇 $\mathrm{J}^k(X)$；这些雅可比簇是模空间，用于参数化支撑在 f 的某个纤维上且次数为 $k \in \mathbb{Z}$的稳定挠层。如果 k 与多截面

E.S. 部分获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/T019379/1，项目名称为“奇点的导出范畴与代数K理论”；同时也获得欧洲研究委员会协同资助，项目名称为“几何学的现代面向：超凯勒簇的范畴、循环与上同调”。

指数 of f互素，那么 J$^k(X)$ 与 X 导出等价，我们称 J$^k(X)$ 为 X的 互素雅可比。这引出了一个问题：逆命题是否也成立：

问题 1.1。 每一个椭圆曲面 X 的傅里叶–穆凯伙伴，是否都是 X的互素雅可比?

问题 1.1 是 Hassett 和 Tschinkel 于 2014年在 X 是 K3 曲面 [的情形下提出的，见 HT17，问题20]。事实上，由于椭圆 K3 曲面可以有多个不同构的椭圆纤维化，因此，根据是否预先固定 X 上的一个纤维化，可以对这个问题作不同解读。

对于 Kodaira维数非零的椭圆曲面，以及双椭圆曲面和 Enriques曲面， [BM01；BM19], 问题 1.1 的答案是肯定的。我们不知道阿贝尔情形下的答案。

我们的主要结果之一是给出问题 1.1 在 K3 曲面情形下的如下答案：

定理 1.2 （见推论 5.13 和 5.14）。 设 X 是一个皮卡德秩为 *2* 的椭圆 *K3* 曲面。设 t 为 X 的多截面指标， $2d$ 为 X上某个极化的次数。记 $m =$ 最大公约数$(d,\ t)$。

(i) 若 $m = 1$，则 X 的每个傅里叶-穆凯伙伴都同构于 X上的某个固定椭圆纤维化的互素雅可比；(ii) 若 $m = p^k$，且 p为素数，则 X 的每个傅里叶-穆凯伙伴都同构于 X上的两个椭圆纤维化之一的互素雅可比；(iii) 若 m 不是某个素数的幂，且 X 具有这些性质并且非常一般，则 X 存在傅里叶-穆凯伙伴，它们不同构于 X上任何椭圆纤维化的任何雅可比。

我们证明定理 1.2 的方法依赖于椭圆曲面的 Ogg-Shafarevich 理论、导出托雷利定理和格理论。此外，我们引入一个新的要素：导出椭圆结构。导出椭圆结构这一概念旨在从导出范畴 $\mathcal{D}^b(X)$ 的角度描述 X 及其傅里叶-穆凯伙伴上的椭圆结构。我们将 K3 曲面 X 上的导出椭圆结构定义为：选择一个傅里叶-穆凯伙伴上的椭圆纤维化。借助这一术语，问题 1.1 可转化为： X 上的每个导出椭圆结构是否都同构于 X上某个实际椭圆结构的互素雅可比。

我们将通过某些判别格上的拉格朗日子群，彻底分类皮卡德秩为二的椭圆 K3 曲面 X 的导出椭圆结构，其中该判别格是 X的 Néron–Severi格 $A_{\mathrm{NS}(X)}$ 的判别格。最终结论是，至少当 X 非常一般时， X上导出椭圆结构的数量（模互素雅可比）等于 $2^{\omega(m)}$，其中 m 如定理 1.2 所述， $\omega(m)$ 表示 m的不同素因子的个数；也就是说， $\omega(1) = 0$、 $\omega(p^k) = 1$，其他情况下则为 $\omega(m) > 1$。这解释了定理 1.2 中关于 m 的条件。

下面说明我们在研究过程中遇到的一些困难。首先，皮卡德秩为二的椭圆 K3 曲面可能有一个或两个椭圆纤维化；在后一种情况下，这些椭圆纤维化有时彼此同构。因此，直接比较互素雅可比簇的数量与傅里叶–穆凯伙伴的数量颇为复杂。

其次，我们针对皮卡德秩为二的任意椭圆 K3 曲面 X 所陈述的许多结果，在 X 非常一般的情形下会大大简化。事实上，此时超越格$T(X)$的霍奇等距群 G_X 是平凡的，也就是说 $G_X = \{\pm 1\}$。一般而言，这个群是一个偶数阶 $|G_X| \leq 66$的有限循环群。我们构造的各种双射中都会出现这个群，这与它出现在 Hos+02]的傅里叶–穆凯伙伴计数公式中的情形类似。 X 上的导出椭圆结构的同构类集合与该集合之间存在自然双射

$$\widetilde{\mathrm{L}}(A_{T(X)})/G_X,$$

~参见定理 5.10。这里， $A_{T(X)}$是超越格 $T(X)$的判别格，而 L$(A_{T(X)})$ 表示拉格朗日元素的集合（定义 3.5）。取一个椭圆结构的互素雅可比 J^k，相当于将对应的拉格朗日元素乘以 k；而改变给定曲面上的椭圆纤维化，则对应于一个对合，可用 $A_{T(X)}$内在地描述。对于非常一般的 X，$G_X = \{\pm 1\}$，且该群通过将拉格朗日元素乘以 -1来作用。另一方面，特殊的 X 拥有较少的傅里叶-穆凯伙伴和较少的互素雅可比簇；不过，在定理 1.2 的 (i) 和 (ii) 两种情形下，它们仍会完美对应。关于最特殊的椭圆 K3 曲面（按 G_X 和 Aut(X)的大小衡量），参见例 3.13。

类似地，对于非常一般的椭圆 K3 曲面，任何保持纤维类的同构必然都是基底上的同构。一般而言，这并不成立，而这一点很重要，因为 Ogg–Shafarevich 理论研究的是基底上的椭圆曲面，而自然的等价关系则是保持

椭圆铅笔。我们仔细分析了 $\mathbb{P}^1$ 上的同构与作为椭圆曲面的同构之间的差异，这一分析本身也可能具有独立的意义。特别是，我们能够指出椭圆 K3 曲面 X 的互素雅可比簇 $\mathrm{J}^k(X)$中，哪些作为椭圆曲面同构（分别地，在 $\mathbb{P}^1$上同构）。事实上，具有多截面指标 t 的非常一般的椭圆 K3 曲面至多有 $\phi(t)/2$ 个互素雅可比簇，其具体数量在所有情形下均可如下计算：

命题 1.3. （见命题 *4.15*）设 X 是一个复椭圆 *K3* 曲面。存在明确构造的循环子群 $B_X \subset \widetilde{B}_X$，它们属于 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$，使得互素雅可比簇 $\mathrm{J}^k(X)$ 的同构类数量（分别按基底上的同构、保椭圆铅笔的同构来计）等于 $\phi(t)/|B_X|$（分别为 $\phi(t)/|\widetilde{B}_X|$）。

群 B_X 只有在 X 是等变且 j-不变量为 0 或 1728 时才可能非平凡。我们给出 $\widetilde{B}_X$ 和 B_X 非平凡以及它们彼此不同的例子。

应用。 由定理 1.2 可推出，导出等价的椭圆 K3 曲面的零阶雅可比簇一般并不同构（推论 5.16）；也就是说，取雅可比簇这一操作不能仅由导出范畴来定义（注记 5.17）。

此外，每当考察 K3 曲面之间导出等价的潜在后果时，定理 1.2 都与之相关。下面说明两种非平凡情形，在这些情形中，导出等价的显式形式或几何形式尤为可取。第一种涉及非闭域上的有理点，第二种涉及 L-等价。

Hassett–Tschinkel [HT17] 的研究动机，是探讨非闭域上导出等价的椭圆 K3 曲面是否存在有理点。也就是说，由于 X 及其任意互素雅可比簇 $\mathrm{J}^k(X)$彼此同源，根据朗–西村定理，X 存在有理点当且仅当 $\mathrm{J}^k(X)$存在有理点。利用伽罗瓦下降，并且由于我们能够相当明确地描述椭圆 K3 曲面的自同构群，我们可以将定理 1.2 部分推广到子域 $k \subset \mathbb{C}$，并推导出关于傅里叶–Mukai 伴侣有理点的推论（见推论 5.21）。我们指出，关于导出等价的 K3 曲面是否同时存在有理点这一问题，似乎仍未解决。

定理 1.2 的另一个应用，是研究导出等价的 K3 曲面 X,Y [KS18] 的 L-等价问题。对于椭圆 K3 曲面，自然的策略是先证明其一般纤维之间的 L-等价；这些一般纤维是基底函数域上的亏格一曲线，然后将这种 L-等价推广到全空间。 [SZ20] 已将这一策略应用于多截面指标为五的椭圆 K3 曲面。由定理 1.2 可知，对于多截面指标 t 为某个素数的幂（且 d 任意）的情形，同样的方法也可行。

论文结构。 在第2节中，我们回顾有关格、复 K3 曲面以及 K3 曲面上层的模空间的经典基础结果。在第3节中，我们详细描述秩为二的椭圆 K3 曲面，包括其 Néron–Severi 格、其判别格中的拉格朗日元素、其超越格之间的霍奇等距以及自同构群。本节的大多数结果都是标准的，例外之处在于对拉格朗日元素的关注。在第4节中，我们回顾 Ogg–Shafarevich 理论，并详细说明给定椭圆纤维化的不同雅可比簇何时同构。在第 5 节中，我们在 K3 曲面上引入导出椭圆结构和霍奇椭圆结构，并在皮卡德秩为二的情形下，依据判别格中的拉格朗日元素对它们进行完整分类。

致谢。 我们感谢 Arend Bayer、Tom Bridgeland、Daniel Huybrechts、Alexander Kuznetsov、Gebhard Martin、Giacomo Mezzedimi、Sofia Tirabassi 和 Mauro Varesco 与我们讨论并关注我们的工作。

2. 预备结果

2.1. 格。 我们关于格理论的主要参考文献是 [Nik80]。格是一个有限生成自由阿贝尔群 L，并配备一个对称非退化双线性型 $b\colon L \times L \to \mathbb{Z}$。我们考虑二次型 $q(x) = b(x,x)$，有时将 $x \cdot y$ 记作 $b(x,y)$，将 x^2 记作 $q(x)$。从 (L,b) 到 (L',b') 的格态射是一个群同态 $\sigma\colon L \to L'$，它保持双线性形式不变，也就是说，对于所有 $x,y \in L$，都有 $b(x,y) = b'(\sigma(x)\ \sigma(y))$。格同构称为等距。我们用 $O(L)$ 表示 L 的等距群。若对于所有 $x \in L$，x^2 均为偶数，则称格 L 为偶格。本文所考虑的格均假定为偶格。

格 L 的对偶定义为 $L^* := \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$。它自然配有一个取值于 $\mathbb{Q}$的双线性形式。该双线性形式导出一个自然映射 $L \to L^*$；由于我们假设 b 非退化，因此此映射是单射；此外，我们还有一个典范同构

$$L^* \simeq \{x \in L \otimes \mathbb{Q} \mid \forall y \in L : x \cdot y \in \mathbb{Z}\} \subseteq L \otimes \mathbb{Q}. \tag{2.1}$$

商 $L^*/L = A_L$ 称为 L 的判别群。如果判别群是平凡的，我们称L 为幺模。判别群配有一个二次型 $\overline{q}$: $A_L \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$。存在一个正交直和分解

$$A_L = \bigoplus_p A_L^{(p)} \tag{2.2}$$

其中， $A_L^{(p)}$ 由被素数 p 的某个幂湮灭的元素组成。群 $A_L^{(p)}$ 与 p 进格 $L \otimes \mathbb{Z}_p$ 的判别群相同。若两个格 L、L' 具有相同的符号且其判别群等距，则称它们属于同一个属。

格 T 的一个超格是一个格 L，连同一个有限指标的格嵌入 $T \hookrightarrow L$。如果存在一个交换图，我们就称两个超格 $T \hookrightarrow L$ 和 $T' \hookrightarrow L'$ 同构

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & L \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ T' & \longrightarrow & L' \end{array}$$

其中 σ 和 τ 是等距。

对于任意超格 $T \hookrightarrow L$，余核 $H_L := L/T$ 都可以通过以下嵌入链自然地嵌入到 T 的判别群中

$$T \hookrightarrow L \hookrightarrow L^* \hookrightarrow T^*.$$

子群 H_L 关于 A_T上的二次型是各向同性的；反过来， A_T 的任意各向同性子群都对应于 T的一个超格。以下结果给出了给定格 T的所有超格在同构意义下的完整分类。

引理 2.1 ([Nik80, 命题 1.4。2]). 设 T 是一个格， $T \hookrightarrow L$ 和 $T \hookrightarrow M$ 是 T的两个超格。等距 $\sigma \in O(T)$ 可以纳入如下形式的交换图

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & L \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} \\ T & \longrightarrow & M \end{array} \tag{2.3}$$

当且仅当诱导的等距 $\overline{\sigma} \in O(A_T)$ 满足 $\overline{\sigma}(H_L) = H_M$。此外，映射 $(T \hookrightarrow L) \mapsto H_L$是在 T 的超格的同构类集合与 A_T.的各向同性子群的 $O(T)$-轨道集合之间的双射

注意，（2.3）可以补充如下:

$$\begin{array}{ccccccc} T & \longrightarrow & L & \twoheadrightarrow & H_L & \hookrightarrow & A_T \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\simeq} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}|_{H_L}} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}} \\ T & \longrightarrow & M & \twoheadrightarrow & H_M & \hookrightarrow & A_T \end{array} \tag{2.4}$$

2.2. K3 曲面。 关于 K3 曲面，我们的基本参考文献是 [Huy16]。若 X 是复射影K3曲面，$H^2(X, \mathbb{Z})$ 是一个秩为 22 的自由阿贝尔群。此外，杯积是定义在 $H^2(X, \mathbb{Z})$ 上的对称双线性形式，使 $H^2(X, \mathbb{Z})$ 成为一个偶幺模格，且与 $\Lambda_{\mathrm{K3}} = U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$ 等距。这里， U是由对称双线性形式给出的双曲格

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

且 E_8 是秩 8 的唯一偶幺模正定格（详见 [BPV12, §VIII.1]）。Néron-Severi 格 NS(X) 是 $H^2(X, \mathbb{Z})$ 的一个子格，定义为第一陈类的像

c_1 : Pic(X) $\hookrightarrow H^2(X,\mathbb{Z})$。我们有 Pic($X$) $\simeq$ NS(X)；它是秩为 ρ 的自由阿贝尔群，称为 X的皮卡德数。

正交补 $T(X) = \mathrm{NS}(X)^{\perp} \subseteq H^2(X,\mathbb{Z})$ 被称为 X 的超越格。任意等距 $H^2(X,\mathbb{Z}) \to \Lambda_{K3}$ 将直线 $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\sigma \subset H^2(X,\mathbb{C})$ 的像映射为 X 的周期 。由于 $\sigma^2 = 0$ 和 $\sigma \cdot \overline{\sigma} > 0$， X 的任意周期都属于开子集

$$D \coloneqq \left\{\ell \in \mathbb{P}(\Lambda_{K3} \otimes \mathbb{C}) \mid \ell^2 = 0 \text{ and } \ell \cdot \overline{\ell} > 0\right\},$$

称为周期域。以下两个结果是关于 K3 曲面最基本的结果之一。

定理 2.2 (周期映射的满射性)。 *[Tod80]* 周期域中的任意点都是某个 *K3* 曲面的周期，即对于任意 $\ell \in D$，存在一个带有等距 $H^2(X,\mathbb{Z}) \to \Lambda_{K3}$ 的 *K3* 曲面 X，使得 $H^2(X,\mathbb{C}) \to \Lambda_{K3} \otimes \mathbb{C}$ 将映射 $H^{2,0}(X)$ 到 ℓ。

定理 *2.3*（*K3* 曲面的 *Torelli* 定理）。 *[PS71]* （见 *[Huy16*，定理 *5.5*。*3]*）设 X 和 Y 为 *K3* 曲面。则 X 和 Y 同构，当且仅当存在一个霍奇等距 $H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq H^2(Y,\mathbb{Z})$。此外，对于任意保持丰沛锥的霍奇等距 $\psi: H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(Y,\mathbb{Z})$，存在唯一同构 $f: X \to Y$，使得 $\psi = f_*$。

超越格上的 Hodge 结构根据所谓的导出托雷利定理，决定了 X 在导出等价意义下的对象。

定理 2.4 （导出托雷利定理）。 *[Muk87], [Orl03]* 设 X 和 Y 为两个 *K3* 曲面。当且仅当存在一个霍奇等距 $T(X) \simeq T(Y)$ 时，存在一个等价 $\mathcal{D}^b(X) \simeq \mathcal{D}^b(Y)$。

若 $\mathcal{D}^b(X) \simeq \mathcal{D}^b(Y)$，我们称 X 和 Y 导出等价，并称 Y 是X的傅里叶–穆凯伙伴。定理 2.4 蕴含，两个导出等价的 K3 曲面必有相同的皮卡德数。若记Λ =NS(X)，则存在一个等距 [Nik80, Corollary 1.6.2]

$$(A_\Lambda, \overline{q_\Lambda}) \simeq (A_{T(X)}, -\overline{q_{T(X)}}). \tag{2.5}$$

因此，导出等价的 K3 曲面具有同构的判别格，由此容易得出，它们的 Néron–Severi 格必属于同一属。我们通常将 $(A_{T(X)}, -\overline{q_{T(X)}})$ 写作 $A_{T(X)}(-1)$。

对于一个 K3 曲面 X，我们用 G_X 表示 $T(X)$ 的霍奇等距群。于是，对于某个 $g \geq 1$，有 $G_X \simeq \mathbb{Z}/2g\mathbb{Z}$，并且有 $\phi(2g) \mid \mathrm{rk}\ T(X)$ [Hos+02，附录 B]。

由导出托雷利定理可以推出：

定理 2.5 (计数公式)。 *[Hos+02]* 设 X 是一个 *K3* 曲面，并记 $\mathrm{FM}(X)$ 为 X的傅里叶–穆凯伙伴的同构类集合。那么

$$|\mathrm{FM}(X)| = \sum_{\Lambda} |O(\Lambda) \setminus O(A_\Lambda)/G_X|$$

其中求和遍及与 *Néron–Severi* 格$\mathrm{NS}(X)$同属一个属的格 Λ 的同构类。此外，每一项都计算了满足$\mathrm{NS}(Y) \simeq \Lambda$ 的 X 的傅里叶-穆凯伙伴 Y的同构类数。

由计数公式可知，具有截面的椭圆 K3 曲面 $S \to \mathbb{P}^1$ 没有非平凡的傅里叶-穆凯伙伴 [Hos+02，命题 2.7(3)]。

定义 2.6. 若 *K3* 曲面 X满足 $G_X = \{\pm \mathrm{id}\}.$，则称其为 T-一般的。不是 T-一般的 *K3* 曲面称为 T-特殊的。

当 X 是 T-一般的时，计数公式表明，其傅里叶-穆凯伙伴的数量达到最大值（对固定的 NS(X)而言），且仅取决于 NS(X)。我们研究的不变量也有类似现象，见定理 5.10。因此，给出 T-一般性的明确判据十分重要。若 X 的皮卡德数 ρ 为奇数，则$\phi(2g)$必为奇数，所以 $|G_X| = 2$和 X是 T-一般的。此外，我们有以下可追溯至 Oguiso [Ogu02]的结果：

引理2.7 ([SZ20, 引理3.9])。 若 X 是任意*K3*曲面格极化模空间中的一非常一般*K3*曲面，其皮卡德数为 $\rho < 20$，则 X 是*T*-一般。

有关一个显式的 T-特殊 K3 曲面，请参见例 3.13。

2.3. 非细模空间的 Căldăraru 类。 带有截面的椭圆 K3 曲面的 Brauer 群是本文使用的主要技术工具之一。我们遵循 [Gee05] 和 [Căl00]中的讨论。对于每个复 K3 曲面，我们都有一个典范同构

$$\mathrm{Br}(X) \simeq \mathrm{Hom}(T(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \tag{2.6}$$

I特别地，Br(X) 是一个无限扭群，并且对于所有整数 $t \geq 1$，我们有 e

$$\mathrm{Br}(X)_{t-tors} \simeq \mathrm{Hom}(T(X), \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^{22-\rho}, \tag{2.7}$$

其中 ρ 是 X 的皮卡德数。

我们说明与 K3 曲面上的层模空间相关联的布劳尔类的显式描述[Muk87], [Căl00]。设 X 为一个复 K3 曲面，并考虑一个 Mukai 向量

$$v = (r, D, s) \in N(X) := \mathbb{Z} \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

我们假设 v 是一个本原向量，满足 $v^2 = 0$，即 $D^2 = 2rs$。

设 M 为 X 上类为 v 的稳定层的模空间。根据 Mukai 的结果，若 M 非空，则它本身也是一个 K3 曲面，参见例如 [Huy16，推论 3.5] （我们假设 v 是本原的，因此对于极化的一般选取，稳定性与半稳定性一致）。设 t 为 v 的整除数，即

$$t = \gcd_{u \in N(X)} u \cdot v = \gcd\left(r, s, \gcd_{E \in \mathrm{NS}(X)} E \cdot D\right).$$

我们考虑在 $X \times M$ 上存在泛层的障碍 $\alpha_X \in$ Br(M)；在同构 (2.6) 下，我们等价地将 α_X 视为同态 $T(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。如果 v的整除数等于 t，那么α_X 的阶为 t，并且我们有

$$0 \to T(X) \to T(M) \xrightarrow{\alpha_X} \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \to 0.$$

这里， $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 是由 $1/t$生成的 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的子群。注意， $t = 1$ 情形对应于细模空间，此时 $T(X) \simeq T(M)$。一般而言，我们有

$$\mathbb{Z}/t\mathbb{Z} = T(M)/T(X) \subset T(X)^*/T(X) = A_{T(X)}. \tag{2.8}$$

我们称 1 在 (2.8) 下的像 w 为 M （或 v）的 ***Căldăraru*** 类 。根据构造，Căldăraru 类 w生成了引理 2.1 所给出的 $A_{T(X)}$中的各向同性子群，该子群对应于超格 $T(X) \subset T(M)$。

引理 2.8 ([Căl00])。 在同构 (2.5) 下，整除数为 t 的 ***Mukai*** 向量 (r, D, s) 的 ***Căldăraru*** 类 w 对应于 $-\frac{1}{t}D$。

证明。 根据 [Muk87，命题 6.4(3)]，， i 的余核 $T(X) \hookrightarrow T(M)$ 由$\frac{1}{t}\lambda$ 生成，其中 $\lambda \in T(X)$ 的选取满足：对于某个 $a \in H^2(X, \mathbb{Z})$，有 $D + \lambda = ta$。这里， D 和 λ 在自然同构 (2.5) 下彼此对应：

$$\begin{array}{ccccc} A_{T(X)}(-1) & \to H^2(X,\mathbb{Z})/(T(X) \oplus \mathrm{NS}(X)) & & \to A_{\mathrm{NS}(X)} \\ \frac{1}{t}\lambda & \mapsto & \frac{1}{t}(D+\lambda) = a & \mapsto \frac{1}{t}D. \end{array}$$

此外， λ 的定义方程也可以在 X 的整系数上同调中等价地写为

$$v + \lambda = t\widetilde{a}$$

其中 $\widetilde{a} = (r/t, a, s/t)$（此向量是整的）。我们断言，$-\frac{1}{t}\lambda$ 是 (r, D, s) 的 Căldăraru 类。为证明这一点，我们计算布劳尔类 α_X 在元素 $\frac{1}{t}\lambda \in T(M)$ 上的取值；将其视为映射 $T(M) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$（其像为 $(\frac{1}{t}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$）。取满足 $u \cdot v = 1$ 的 $u \in H^*(X, \mathbb{Z})$（由幺模性可知此向量存在）。于是

$$\alpha_X(\lambda/t) = u \cdot \lambda/t = u \cdot (\widetilde{a} - v/t) = u \cdot \widetilde{a} - u \cdot v/t \equiv -1/t \pmod{\mathbb{Z}}.$$

这里在第一个等式中用到了 [Căl00 定理 5.3.1] ，在第二个等式中用到了 $\widetilde{a}$ 的定义。因此，根据 Căldăraru 类的定义，我们有 $w = -\frac{1}{t}\lambda$，而 $A_{\mathrm{NS}(X)}$ 中相应的元素为 $-\frac{1}{t}D$。□

2.4. **椭圆 K3 曲面**。回顾一下，椭圆曲面是指满足以下条件的曲面 X： 存在满射态射 $f\colon X \to C$，其中 C 是一条光滑曲线，并且 f 的纤维是连通的，一般纤维的属为 1 [（IS96，§10]）。我们的椭圆曲面均假定为相对极小的，即其 f 的纤维中不含 (-1)-曲线；对于 K3 曲面，这一条件自动成立。若椭圆曲面的所有光滑纤维都彼此同构，则称该椭圆曲面为等变的。

对于椭圆 K3 曲面，我们有基底 $C \simeq \mathbb{P}^1$。椭圆 K3 曲面 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ 与 $\phi\colon Y \to \mathbb{P}^1$ 之间有两种自然的同构概念。

定义 2.9. *(1)* 若存在保持纤维类的同构 $X \simeq Y$，则曲面 X、Y 作为椭圆曲面同构；等价地，存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\beta]{\sim} & Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow[\overline{\beta}]{\sim} & \mathbb{P}^1. \end{array} \tag{2.9}$$

在这种情况下，我们称同构 $X \simeq Y$ 将基底扭转了 $\overline{\beta}$.
(2) 若存在一个将基底按恒等元扭转的同构 $X \simeq Y$，则曲面 X 和 Y 在 $\mathbb{P}^1$ 上同构；等价地，存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \phi} & \\ & \mathbb{P}^1. & \end{array}$$

在 $\mathbb{P}^1$ 上同构比作为椭圆曲面同构的条件更严格。例如，对于每个$\overline{\beta} \in$Aut($\mathbb{P}^1$)， $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ 和 $\overline{\beta}f\colon X \to \mathbb{P}^1$ 作为椭圆曲面同构，但通常不在 $\mathbb{P}^1$ 上同构。

设 $S \to \mathbb{P}^1$ 是一个带有固定截面的椭圆 K3 曲面。我们用 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{P}^1}(S)$（分别用 $\mathrm{Aut}(S, F)$）表示 S 上的自同构群（分别表示保持纤维类的 S 的自同构群）。有 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{P}^1}(S) \subset \mathrm{Aut}(S, F)$。我们用 $A_{\mathbb{P}^1}(S)$（分别用 $A(S, F)$）表示 S 上（分别是保持纤维类的）且同时保持零截面的自同构群。这类自同构称为群自同构 （例如参见 [DM22]）。

注 2.10. 相对极小椭圆曲面及其在 $\mathbb{P}^1$ 上的同构所构成的范畴，等价于 $\mathbb{C}$ 上的亏格一曲线及其同构所构成的范畴(t)。该函子通过取一般纤维给出。例如，根据 *[IS96, Theorem 7.3.3] or [DM22, Theorem 3.3]*，该函子是一个等价。

3. 皮卡德秩为 2 的椭圆 K3 曲面

3.1. **Néron-Severi 格**。 我们沿用[Ste04；Gee05]，回顾皮卡德秩为 2 的椭圆 K3 曲面的一些基本事实。设 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ 为复射影椭圆 K3 曲面。设 $F \in \mathrm{NS}(X)$ 为一个纤维的类。回忆一下， t 的多截面指标 f 是满足下述条件的最小正 $t > 0$： 存在一个除子$D \in \mathrm{NS}(S)$，使得 $D \cdot F = t$。

命题 3.1。 *[Gee05，注 4.2], [SZ20，引理 3.3]* 设 X 为皮卡德秩为 *2* 的椭圆 *K3* 曲面。则存在 X 上的一个极化 H，使得 H， F 构成$\mathrm{NS}(X)$ 的一个基，并且 $H \cdot F = t$。特别地， X 的 *Néron-Severi* 格由如下形式的矩阵给出

$$\begin{pmatrix} 2d & t \\ t & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

我们记 $\Lambda_{d,\,t}$为关于某组基 H, F，矩阵为 (3.1) 的秩 2 格。容易看出，格 $\Lambda_{d,\,t}$ 恰有两个相差一个符号的各向同性本原向量：一个是 F，另一个是

$$F' = \tfrac{1}{\text{最大公约数}(d,t)}(tH - dF)。 \tag{3.2}$$

下面的引理描述了类 F' 何时会在 X 上诱导出另一个椭圆纤维化。

引理 3.2. *[Gee05, §4.7]* 一个 *K3* 曲面 X 满足 $\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,t}$ 当且仅当 $d \not\equiv -1$<*style id='16'*>(模 t) 时有两个椭圆纤维化。若 $d \equiv -1$ (模 t)，则 X 有一个椭圆纤维化。若 X 是 T-一般的，且 $t > 2$ 和 $d \not\equiv -1$ (模 t)，那么这两个纤维化同构（作为椭圆曲面）当且仅当 $d \equiv 1$ (模 t)。

我们将$A_{d,t}$ 称为 $\Lambda_{d,t}$ 的判别格，并且有

$$|A_{d,t}| = t^2. \tag{3.3}$$

容易计算得出（例如参见 [Ste04，引理 3.2] 的证明），对偶格 $\Lambda^*_{d,t}$ 由以下元素生成

$$F^* = \frac{-2d}{t^2}F + \frac{1}{t}H, \quad H^* = \frac{1}{t}F \tag{3.4}$$

因此，(3.4) 的像生成 $A_{d,t}$。此外，对于 $a, b \in \mathbb{Z}$，我们有

$$q(aF^* + bH^*) = \frac{2a(bt - ad)}{t^2}. \tag{3.5}$$

引理 3.3. 判别群 $A_{d,t}$ 同构于 $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$，其中 $a =$ 最大公约数$(2d, t)$ 且 $b = t^2/a$。特别地，$A_{d,t}$ 是循环的，当且仅当最大公约数$(2d, t) = 1$。

此外，若 Λ 是与 $\Lambda_{d,t}$ 属于同一属的格，则 $\Lambda \simeq \Lambda_{e,t}$，且 最大公约数$(2e, t) =$ 最大公约数$(2d, t)$。

证明. 第一个结论可通过将 $\Lambda_{d,t}$ 化为史密斯标准形得出。

设 Λ 是与 $\Lambda_{d,t}$ 属相同的格。按照 [HT17 命题 16] 的证明，Λ 含有一个本原各向同性向量 v。因此，$\Lambda \simeq \Lambda_{e,s}$ 对某些 e、$s \in \mathbb{Z}$、$s > 0$ 成立。比较 $\Lambda_{d,t}$ 与 $\Lambda_{e,s}$ 的判别群，可得 $t = s$，且 gcd$(2d, t) =$ gcd$(2e, s)$。□

例 3.4。设 $d = 0$，则由引理 *3.3*，$A_{0,t} \simeq \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$。具体而言，对偶格 $\Lambda^*_{0,t}$ 的生成元(3.4) 为 $F^* = \frac{1}{t}H$ 和 $H^* = \frac{1}{t}F$，它们在 $A_{0,t}$ 中的像是两个阶为 t 的生成元，且是 $A_{0,t}$ 中的各向同性元素。

我们介绍一些判别群的性质，稍后将用它们来计算傅里叶-穆凯伙伴。

定义 3.5。我们称阶为 t *in*$A_{d,\ t}$ 的各向同性元素为拉格朗日元素。我们称阶为 t 的循环各向同性子群 $H \subseteq A_{d,\ t}$ 为拉格朗日子群。

~我们将 $A_{d,\ t}$的拉格朗日元素（分别为拉格朗日子群）集合记作 L($A_{d,\ t}$)（分别为 L($A_{d,\ t}$)）。我们之所以对研究 $A_{d,\ t}$ 的拉格朗日子群感兴趣，主要是因为它们与傅里叶-穆凯伙伴相对应，而这种对应关系将在第 5 节中建立。

命题 3.6。设 d，t 为整数，并设 $m = \gcd(d,\ t)$。则有

$$|\widetilde{\mathrm{L}}(A_{d,t})| = \phi(t) \cdot 2^{\omega(m)}, \quad |\mathrm{L}(A_{d,t})| = 2^{\omega(m)}. \tag{3.6}$$

尽管 gcd$(2d, t)$ 决定了 $A_{d,\ t}$的结构，但在命题 3.6 中出现的是 gcd(d, t)。例如，如果 d 和 t 互素且 t 为偶数，则判别群 $A_{d,\ t}$ 不是循环的，但 $|$L($A_{d,\ t}$)$| = 1$。

证明。任意阶为 t 的循环子群 $H \subset A_{d,\ t}$ 有 $\phi(t)$ 个生成元。H 是拉格朗日子群，当且仅当其生成元是拉格朗日元素。因此，(3.6) 中的两个公式等价，只需证明第二个公式。

设 $t = \prod_p p^{k_p}$ 是 t 的素因数分解。对于任意素数 p，我们有 p-进格的同构 $\Lambda_{d,\ t} \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \Lambda_{d,\ p^{k_p}} \otimes \mathbb{Z}_p$（该等距由 $H \mapsto H$ 和 $F \mapsto \alpha F$ 给出，其中 α 是 $\mathbb{Z}_p$ 中由 $\alpha p^{k_p} = t$ 给出的单位）。根据 Nik80 命题 1.7.1]，$A_{d,\ t}$ 等距于所有素数 p 对应的 $A_{d,\ p^{k_p}}$ 的正交直和。因此我们有

$$|\mathrm{L}(A_{d,t})| = \prod_p |\mathrm{L}(A_{d,p^{k_p}})|.$$

因此，我们需要证明：当 d 与 p 互素时，$|$L($A_{d,\ p^k}$)$| = 1$；否则，$|$L($A_{d,\ p^k}$)$| = 2$。结论由下文的引理 3.7 和引理 3.8 得出。□

引理 3.7。这些元素

$$v = \frac{1}{t}F, \quad v' = \frac{1}{t}F' \tag{3.7}$$

是 $\Lambda^*_{d,t}$ 中的本原各向同性向量，而它们在 $A_{d,t}$ 中的像 $\overline{v}$ 和 $\overline{v'}$ 生成 $A_{d,t}$中的拉格朗日子群。当且仅当 $m := \gcd(d, t) = 1$时，我们有 $\langle\overline{v}\rangle = \langle\overline{v'}\rangle$；此时

$$\overline{v'} = -d \cdot \overline{v} \tag{3.8}$$

证明。 第一部分是一个简单的计算。当且仅当$v' = \frac{1}{tm}(tH - dF) = \frac{1}{m}H - \frac{d}{tm}F$模 $\Lambda_{d,t}$是 $v = \frac{1}{t}F$的倍数时，相应的拉格朗日子群才相等。只有当 $m = 1$时才会出现这种情况。□

引理 3.8. 设 $t = p^k$，其中 p 为素数且 $k \geq 1$。那么，子群 $\langle \overline{v} \rangle, \langle \overline{v'} \rangle$ 是$A_{d,t}$的唯一拉格朗日子群。

证明. 将 $d = \ell \cdot p^n$ 写成某个与 p 互素的 $\ell \in \mathbb{Z}$ 和某个 $n \geq 0$。注意，每当 $n \geq k$时，我们有 $d \equiv 0$（模 p^k），因此 $\Lambda_{d,p^k} \simeq \Lambda_{0,p^k}$，并且可以假设 $d = 0$。在这种情况下，我们有 $\overline{v'} = \overline{F^*}$，不难看出 $\langle \overline{H^*} \rangle$ 和 $\langle \overline{F^*} \rangle$ 是 A_{0,p^k} 的唯一拉格朗日子群（见例 3.4）。因此我们可以假设$0 \leq n < k$。

以生成元 (3.4) 表示，二次型为

$$q(aF^* + bH^*) = \frac{2a}{p^{2k-n}} \left(bp^{k-n} - a\ell \right). \tag{3.9}$$

为了找出所有拉格朗日子群，我们先描述$A_{d,t}$ 中阶整除$t = p^k$的元素所构成的子群。我们考虑向量（3.7），在本例中它们为

$$\overline{v} = \frac{F}{p^k}, \quad \overline{v'} = \frac{H}{p^n} - \frac{\ell F}{p^k}.$$

此外，$\overline{v}$ 和 $\overline{v'}$ 的阶均为 p^k，且这些元素满足关系

$$p^n(\ell \overline{v} + \overline{v'}) = 0. \tag{3.10}$$

现在需要考虑两种情况。若 $p > 2$，则

$$(A_{d,t})_{p^k-tors} = \left\langle \frac{F}{p^k}, \frac{H}{p^n} \right\rangle = \langle \overline{v}, \overline{v'} \rangle.$$

向量$\overline{v}$ 和 $\overline{v'}$ 是各向同性的，且用这些元素表示的判别形式为

$$\overline{q}(a\overline{v} + b\overline{v'}) = \frac{2ab}{p^n}.$$

因此，元素$a\overline{v} + b\overline{v'}$是各向同性的，当且仅当 p^n 整除 ab。另一方面，若 $a\overline{v} + b\overline{v'}$的阶恰为$p^k$，则 a 或 b 至少有一个与 p互素。因此，$A_{d,t}$ 中阶为 p^k 的各向同性元素为

$$a\overline{v} + bp^{n+j}\overline{v'}, \quad ap^{n+j}\overline{v} + b\overline{v'},$$

其中 a 和 b 均与 p 和 $j \geq 0$互素。利用（3.10），我们可以将这些类型的元素改写为

$$a'\overline{v}, \quad b'\overline{v'},$$

其中 a' 和 b' 与 p 互素。这就完成了 $p > 2$ 情形的证明。

若 $p = 2$，则

$$\frac{1}{2^{n+1}} H \cdot F = \frac{2^k}{2^{n+1}} \quad \text{and} \quad \frac{1}{2^{n+1}} H^2 = 2\ell \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

均为整数。这意味着，根据 (2.1)，$\frac{1}{2^{n+1}}H$ 是 A_d中的2^k 一个元素，并且我们有

$$(A_{d,t})_{2^k-tors} = \left\langle \frac{F}{2^k}, \frac{H}{2^{n+1}} \right\rangle \supsetneq \langle \overline{v}, \overline{v'} \rangle = \left\langle \frac{F}{2^k}, \frac{H}{2^n} \right\rangle.$$

然而，简单计算可知，所有各向同性向量实际上都包含在 $\langle \overline{v}、\ \overline{v'} \rangle$ 中，证明过程与 $p > 2$ 情形相同。□

引理 3.8 使我们能够在 $A_{d、\ t}$ 的拉格朗日子群集合上定义一个典范对合，定义如下。对于 $H \subset A_{d,\ t}$ 一个拉格朗日子群，我们取其关于 (2.2) 的主分解

$$H = \bigoplus_p H_p, \quad H_p \subset A_{d,t}^{(p)}$$

其中每个 H_p 都是 $A_{d\ t}^{(p)}$ 中的拉格朗日子群。我们用 $\iota_p(H_p)$ 表示由引理 3.8 确定的另一个拉格朗日子群；在 p 不整除 d 的情况下，$\iota_p(H_p) = H_p$。我们设

$$\iota(H) := \bigoplus_p \iota_p(H_p) \subset A_{d,t}. \tag{3.11}$$

几何的 si 这种对合的重要性将在定理 5.10 中予以解释。目前我们注意到 t

$$\iota(\langle\overline{v}\rangle) = \langle\overline{v'}\rangle \tag{3.12}$$

在引理 3.7 中定义的 $\overline{v}$, $\overline{v'}$ 。

3.2. **自同构与霍奇等距**。 回顾霍奇等距群 G_X ，其定义见第 2.2 节。**引理 3.9**。 若 X 是皮卡德秩为 *2* 的 *K3* 曲面，则 G_X 是以下阶之一的循环群：

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 22, 44, 50, 66.$$

证明。 G_X 是一个阶为偶数 $2g$ 的有限循环群，且满足 $\phi(2g)|\operatorname{rk} T(X)$，这一事实已在 [Hos+02 附录 B] 中得到证明。我们求解方程 $\phi(2g) \mid 20$。可能出现在$2g$ 的素因数分解中的素数有 2、3、5、11。使 $\phi(p^k) \mid 20$ 成立的这些素数的最高次幂为 $2^3, 3, 5^2, 11$ ，结合这些幂或更小的素数幂即可得出结论。□

命题 3.10。 设 X 是一个皮卡德秩为 *2* 的椭圆 *K3* 曲面。那么我们有一个典范同构

$$\operatorname{Aut}(X) \simeq \operatorname{Ker}\left(G_X \to O(A_{T(X)})/O^+(\operatorname{NS}(X))\right), \tag{3.13}$$

其中 $O^+(\operatorname{NS}(X))$ 是保持丰沛锥不变的$\operatorname{NS}(X)$ 的等距群。特别地，$\operatorname{Aut}(X)$ 是一个有限循环群，并且 $|\operatorname{Aut}(X)| \leq 66$。此外，对于任意椭圆纤维化 $X \to \mathbb{P}^1$，上述同构诱导出一个同构

$$\operatorname{Aut}(X, F) \simeq \operatorname{Ker}\left(G_X \to O(A_{T(X)})\right), \tag{3.14}$$

其中 $\operatorname{Aut}(X, F)$ 是固定椭圆纤维化的纤维类 F的自同构群。

证明。 根据 Torelli 定理 2.3， X 的自同构与保持丰沛锥不变的 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 的霍奇等距之间存在双射。利用 [Nik80, 推论 1.5，2], 我们可以写成

$$\operatorname{Aut}(X) \simeq \left\{(\sigma, \tau) \in G_X \times O^+(\operatorname{NS}(X)) \mid \overline{\sigma} = \overline{\tau} \in O(A_{T(X)})\right\}. \tag{3.15}$$

这个同构诱导出一个满射映射 $(\sigma,\tau) \mapsto \sigma$

$$\operatorname{Aut}(X) \to \operatorname{Ker}\left(G_X \to O(A_{T(X)})/O^+(\operatorname{NS}(X))\right). \tag{3.16}$$

此映射的核由满足 $\overline{\tau} = \mathrm{id}^{A_{T(X)}}$ 的配对 $(\mathrm{id}^{T(X)}, \tau) \in G_X \times O^+(\operatorname{NS}(X))$ 构成

我们断言，同态 $O^+(\operatorname{NS}(X)) \to O(A_{T(X)})$ 是单射。由于 $\operatorname{NS}(X)$ 含有四个各向同性向量 $\pm F, \pm F'$，且 $-1 \in O(\operatorname{NS}(X))$ 从不保持丰沛锥，因此我们注意到 $O^+(\operatorname{NS}(X))$ 必定是平凡群，或同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ，其中非平凡元交换 F 与 F'。后一种情形仅当 F' 表示 X 上椭圆纤维化的一个类时才可能发生；根据引理 3.2，这对应于情形 $d \neq -1 (\mathrm{mod}\ t)$。此时，$\frac{1}{t}F$ 与 $\frac{1}{t}F'$ 在 $A_{T(X)}$ 中表示不同类（见 (3.8)），且 $O^+(\operatorname{NS}(X))$ 中交换 F 与 F' 的元在 $O(A_{T(X)})$ 中的像非平凡。因此，由于 $O^+(\operatorname{NS}(X)) \to O(A_{T(X)})$ 是单射，映射 (3.16) 是双射。关于 $|\operatorname{Aut}(X)|$ 的同构类型的断言由引理 3.9 得出。对于最后一个陈述，注意 $O^+(\operatorname{NS}(X))$ 中唯一固定 F 的元是恒等元。因此，(3.14) 也由 (3.15) 得出。□

例 3.11. 设 X 为椭圆 *K3* 曲面，满足 Néron–Severi 群$(X) \simeq \Lambda_{d,\ t}$ 并假设 最大公约数$(2d,\ t) = 1$。在此情形下$A_{d,\ t}$ 是阶为 t^2 的循环子群（由引理 *3.3* 可知）。等距 $\sigma \in O(A_{d,\ t})$ 由乘以单位 $\alpha \in \mathbb{Z}/t^2\mathbb{Z}$给出，其中 $\alpha^2 \equiv 1$ (模 t)，因此群 $O(A_{d,\ t})$ 是2-挠的。因此，根据命题 *3.10*，自同构群$(X) \subset G_X$ 是指数为一或二的循环子群。

引理 3.12. 设 S 和 S' 是皮卡德秩为 *2* 且具有截面的椭圆纤维化的 *K3* 曲面。那么， $T(S)$ 与 $T(S')$ 之间的每个霍奇等距都可提升为 S 与 S'之间的唯一同构。特别地，我们有 自同构群$(S) \simeq G_S$。最后， S 具有唯一的椭圆纤维化和唯一的截面，因此 S 的每个自同构都是群自同构。

证明。 由命题 3.1 可知 $\operatorname{NS}(S) \simeq \Lambda_{d,1}$，它与双曲格 U 同构；特别地，$\operatorname{NS}(S)$ 是幺模的，且 $A_{\operatorname{NS}(S)} = 0$。若存在 $T(S)$ 与 $T(S')$ 之间的霍奇等距，并将其扩展为 $H^2(S,\mathbb{Z})$ 与 $H^2(S',\mathbb{Z})$ 之间保持丰沛锥的霍奇等距，则如命题 3.10 的证明所示，由 Torelli 定理可得 $S \simeq S'$。因此我们可以假设 $S = S'$ ，此时结论由命题 3.10 得出。

由引理 3.2， S 有唯一的椭圆纤维化。由于 $\operatorname{NS}(S) = U$，存在唯一一条与椭圆纤维化的纤维相交重数为 1 的 (-2) 曲线，即唯一的截面。□

例 *3.13*。令 $S \to \mathbb{P}^1$ 为由魏尔斯特拉斯方程 $y^2 = x^3 + t^{12} - t$ 给出的带截面的椭圆 *K3* 曲面。该曲面是等变的，且 j-不变量为 *0*。*[Keu16]* 和 *[Kon92]* 对其进行了研究。我们有 $\mathrm{rk}\,NS(S) = 2$，且 S 是 T-特殊的。事实上，群 G_S 是 *66* 阶循环群，并且 S 是具有此性质的唯一对象。此外，由引理 *3.12*，$Aut(S) \simeq \mathbb{Z}/66\mathbb{Z}$。子群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \subset Aut(S)$ 的作用与到 $\mathbb{P}^1$ 的投影可交换，并对 x 和 y 坐标进行缩放；子群 $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \subset Aut(S)$ 保持纤维类 $F \in NS(S)$，并在 $\mathbb{P}^1$ 上诱导一个 *11* 阶自同构 $t \mapsto \zeta_{11} t$。

推论 3.14。设 X 是皮卡德秩为 *2*、多截面指标为 $t > 2$ 的 *T*-一般椭圆 *K3* 曲面，则 $\mathrm{Aut}(X,\ F) = \{\mathrm{id}\}$.

证明。根据命题 3.10，存在同构 $\mathrm{Aut}(X, F) \simeq \mathrm{Ker}(G_X \to O(A_{T(X)}))$. 根据假设，我们有 $G_X = \{\pm 1\}$。由于 $t > 2$，且 $A_{T(X)}$ 的阶为 t^2，可知 -1 在 $A_{T(X)}$上作用非平凡。因此 $\mathrm{Ker}(G_X \to O(A_{T(X)}))$ 是平凡的。□

4. 雅可比簇

4.1. Ogg-Shafarevich 理论。给定椭圆 K3 曲面 $f : X \to \mathbb{P}^1$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们可以定义椭圆 K3 曲面 $\mathrm{J}^k(f) : \mathrm{J}^k(X) \to \mathbb{P}^1$，称为 X 的第 k 个雅可比簇，它是由支撑在 f 的纤维上且次数为 k [的层构成的模空间（Huy16，第 11] 章）。特别地，我们有 $S := \mathrm{J}^0(X)$，这是一个具有特定截面的椭圆 K3 曲面。

在下文中，当椭圆纤维化的基底不具有规范同构时，我们有时将其记为 C、C'。

引理 4.1. 设 $X \to C$ 和 $X' \to C'$ 是椭圆 *K3* 曲面，其零阶雅可比分别为 $S \to C$ 和 $S' \to C'$。那么，椭圆曲面同构 $\gamma :\ X \simeq X'$ 按照 $\overline{\beta} :\ C \to C'$ 扭转基底（见定义 *2.9*），会诱导出群同构 $\mathrm{J}^0(\gamma) : S \simeq S'$，其按 $\overline{\beta}$ 扭转基底。

证明. 当 $\overline{\beta}$ 是恒等元时，这是一个标准结果，可由注 2.10 立即推出。一般情形请参见 [DM22, §3, (3.3)]。□

Ogg–Shafarevich 理论将带有截面的椭圆 K3 曲面 S 的 Brauer 群 $\mathrm{Br}(S)$ 中的元素与 S-挠子联系起来。对我们的目的而言，以下对挠子的定义较为方便。关于它与标准定义等价的证明，见 [Fri98], [Huy16, Proposition 5.6]

定义 4.2. 设 $f\colon S \to \mathbb{P}^1$ 是带有一个截面的椭圆 *K3* 曲面。f-挠子是一个二元组 $(g\colon X \to \mathbb{P}^1, \theta)$，其中 $g :\ X \to \mathbb{P}^1$ 是一个椭圆 *K3* 曲面，且 $\theta :\ \mathrm{J}^0(X) \to S$ 是一个在 $\mathbb{P}^1$ 上保持零截面的同构，即一个在 $\mathbb{P}^1$ 上的群同构。

f-挠子 $(g\colon X \to \mathbb{P}^1, \theta)$ 与 $(h\colon Y \to \mathbb{P}^1, \eta)$ 之间的同构是指一个在 $\mathbb{P}^1$ 上的同构 $\gamma\colon X \to Y$，满足

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{J}^0(X) & \xrightarrow{\mathrm{J}^0(\gamma)} & \mathrm{J}^0(Y) \\ & {\scriptstyle\theta}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\eta} & \\ & S & \end{array}$$

交换。

例 4.3. 若 X 是一个椭圆 *K3* 曲面，则 X 自然具有 $(X, \mathrm{id}_{\mathrm{J}^0(X)})$ 作为 $\mathrm{J}^0(X)$ 上的挠子结构。由于 $\mathrm{J}^0(\mathrm{J}^k(X)) = \mathrm{J}^0(X)$（例如可利用注 *2.10* 验证），所有雅可比簇 $\mathrm{J}^k(X)$ 也自然具有 $\mathrm{J}^0(X)$-挠子结构。

f-挠子的同构类集合与 f 的泰特–沙法列维奇群之间存在双射：$S \to \mathbb{P}^1$[Huy16, 11.5.5(ii)], ，我们将其记为 Ш($f : S \to \mathbb{P}^1$)；若不会引起混淆，也简记为 Ш(S)。若 $S \to \mathbb{P}^1$ 是带截面的椭圆 K3 曲面，则存在一个同构

$$\mathrm{Br}(S) \simeq Ш(S), \tag{4.1}$$

参见 [Căl00], [Huy16，推论 11.5.5]。我们回顾泰特–沙法列维奇群的构造，以及引理 4.5 证明中的 (4.1)。对于一个 S-挠子 (X, θ)，我们用 $\alpha_X \in \mathrm{Br}(S)$ 表示在 (4.1) 下对应于 $[X] \in Ш(S)$ 的类。更精确地说，记号中应包含 θ，但我们不这样做，并假定 X 上的挠子结构是固定的。对于关于 (2.6) 的相应元素，我们也记作 $\alpha_X :\ T(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

引理 4.4。 设 (X,θ) 是一个 S-挠子。设 t 为 $\alpha_X \in \mathrm{Br}(S)$ 的阶。
(i) X 有截面，当且仅当 $\alpha_X = 0$；在这种情况下， X 作为 S-挠子与 S 同构。*(ii)* 对所有 $k \in \mathbb{Z}$，我们都有 $\alpha_{\mathrm{J}^k(X)} = k \cdot \alpha_X$。*(iii)* X 的多截面指标等于 t。*(iv)* 我们有一个霍奇等距 $T(X) \simeq \mathrm{Ker}(\alpha_X \colon T(S) \to \mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$。

证明。 (i) 由构造可知， S 上的所有 S-挠子结构都彼此同构，并在 (4.1) 下对应于 $0 \in \mathrm{Br}(S)$。因此，若 $\alpha_X = 0$，则 X 作为 S-挠子与 S同构；特别地， X 与 S 作为椭圆曲面彼此同构，故 X 有截面。反过来，若 X 有截面，则有 $S \simeq \mathrm{J}^0(X) \simeq X$，因此 X作为挠子与 S上的某个挠子结构同构，于是由上述论证可得 $\alpha_X = 0$。

第 (ii) 部分见 [Căl00，定理 4.5。2] 第 (iv) 部分见 [Căl00，定理 5.4。3]。

(iii) 对于带有选定椭圆纤维化的 K3 曲面 X，记该纤维化的多截面指标为 $\mathrm{ind}(X)$。由于 $\mathrm{J}^{\mathrm{ind}(X)}(X)$ 有截面，根据 (i)，$\mathrm{J}^{\mathrm{ind}(X)}(X) \simeq S$ 作为挠子同构。因此，由 (ii) 可得$0 = \alpha_{\mathrm{J}^{\mathrm{ind}(X)}(X)} = \mathrm{ind}(X)\alpha_X$，故 $\mathrm{ord}(\alpha_X)$ 整除 $\mathrm{ind}(X)$。为证明二者相等，我们利用 [Huy06，第 4 章，(4.5)、(4.6)]，推得对所有 $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{ind}(\mathrm{J}^k(X)) = \frac{\mathrm{ind}(X)}{\gcd(\mathrm{ind}(X), k)}.$$

特别地,

$$1 = \mathrm{ind}(\mathrm{J}^{\mathrm{ord}(\alpha_X)}(X)) = \frac{\mathrm{ind}(X)}{\gcd(\mathrm{ind}(X), \mathrm{ord}(\alpha_X))} = \frac{\mathrm{ind}(X)}{\mathrm{ord}(\alpha_X)}$$

因此 $\mathrm{ind}(X) = \mathrm{ord}(\alpha_X)$，这就证明了 (ii) 部分。 □

设 $S \to \mathbb{P}^1$ 为带有截面的椭圆 K3 曲面。回顾一下，我们将 $A_{\mathbb{P}^1}(S)$（分别为 $A(\mathbb{P}^1, F)$）记为 S 在 $\mathbb{P}^1$ 上的群自同构群（分别为保持纤维类$F \in \mathrm{NS}(S)$ 的 S 的群自同构群）。我们有 $A_{\mathbb{P}^1}(S) \subset A(S, F)$，并关注这两个群作用在 Brauer 群 $\mathrm{Br}(S)$ 上所产生的轨道。我们将更一般地说明 $Ш(S)$ 和 $\mathrm{Br}(S)$ 关于S的函子性。

设 $f \colon S \to C$ 和 $f' \colon S' \to C'$ 是带有固定截面的椭圆 K3 曲面。假设存在群同构 $\beta \colon S \simeq S'$，其通过 $\overline{\beta} \colon C \simeq C'$ 对基底进行扭转。我们定义映射 $\beta_* \colon Ш(f \colon S \to C) \to Ш(f' \colon S' \to C')$ 如下:

$$\beta_*(g : X \to C, \theta) = (\overline{\beta} \circ g : X \to C', \beta \circ \theta).$$

注意，右侧的元素属于 $Ш(f')$，由引理 4.1 可知。

此外，在相同的设定下，我们定义 $\beta_* \colon \mathrm{Hom}(T(S), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(T(S'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为 $\beta_*(\alpha) = \alpha \circ \beta^*$，其中 $\beta^* \colon T(S') \to T(S)$ 是由 β 诱导的霍奇等距。这两个推前与 (4.1) 相容，这一点对应用而言十分重要:

引理 4.5. 设 $f \colon S \to C$ 和 $f' \colon S' \to C'$ 是带有固定截面的椭圆 *K3* 曲面，且 $\beta \colon S \simeq S'$ 是一个将基底扭曲为 $\overline{\beta}$ 的群同构。那么存在如下由同构构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} Ш(f : S \to C) & \xrightarrow{\beta_*} & Ш(f' : S' \to C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(T(S), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Hom}(T(S'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array} \tag{4.2}$$

证明. 式 (4.2) 中的垂直箭头，是下列图表中垂直映射的复合；其中上同调群分别取自解析拓扑：

$$
\begin{array}{ccc}
Ш(f:S\to C) & \xrightarrow{\beta_*} & Ш(f':S'\to C') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1(C,\mathcal{X}_0) & \xrightarrow{(1)} & H^1(C',\mathcal{X}_0') \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2(S,\mathbb{G}_m) & \xrightarrow{(2)} & H^2(S',\mathbb{G}_m) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^2_{an}(S,\mathcal{O}_S^*)_{tors} & \xrightarrow{(3)} & H^2_{an}(S',\mathcal{O}_{S'}^*)_{tors} \\
\downarrow{\scriptstyle (4)} & & \downarrow{\scriptstyle (4)} \\
\mathrm{Hom}(T(S),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Hom}(T(S'),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),
\end{array}
\tag{4.3}
$$

参见 [Huy16，推论 11.5。6]其中，$\mathcal{X}_0$和 $\mathcal{X}_0'$分别是 f和 f'的 étale 局部截面层。水平箭头 (1)、(2)、(3) 由 $\overline{\beta}_*\mathcal{X}_0 \simeq \mathcal{X}_0'$ 和 $\beta_*\mathbb{G}_m \simeq \mathbb{G}_m$. 诱导。箭头 (4) 由指数正合列诱导。可以验证 (4.3) 中每个方块都交换，由此得到所需结果。□

命题 *4.6.* 设 $f\colon S\to C$、 $f'\colon S'\to C'$ 是带截面的椭圆 *K3* 曲面。设 $(g\colon X\to C,\theta)$、$(g'\colon X'\to C',\theta')$ 分别是 f和 f'的挠子。那么，存在一个群同构 $\beta\colon S\simeq S'$，其将基底扭转为 $\overline{\beta}\colon C\simeq C'$，并且 $\beta_*(g,\theta)\simeq(g',\theta')$，当且仅当存在一个将基底扭转为 $\overline{\beta}$.的椭圆曲面同构$X\simeq X'$

证明。 假设存在群同构 $\beta\colon S\simeq S'$，其通过 $\overline{\beta}$扭曲基底，并且满足 $\beta_*(g,\theta)=(g',\theta')$。根据 β_* 的定义可知，存在一个椭圆曲面同构 $X\simeq X'$，其通过 $\overline{\beta}$. 扭曲基底。反之，假设存在一个椭圆曲面同构 $\gamma\colon X\simeq X'$，其通过 $\overline{\beta}$扭曲基底。考虑同构 $\beta:=\theta'\circ \mathrm{J}^0(\gamma)\circ\theta^{-1}\colon S\to S'$。将 β_* 分解为同构的复合，我们可以计算 $\beta_*(g,\theta)$

$$
Ш(S)\xrightarrow{\theta_*^{-1}} Ш(\mathrm{J}^0(X))\xrightarrow{\mathrm{J}^0(\gamma)_*} Ш(\mathrm{J}^0(X'))\xrightarrow{\theta'_*} Ш(S')
$$

从而得到 $\beta_*(g,\theta)=(g',\theta')$。 □

注 4.7。 命题 *4.6* 的证明事实上表明，给定如陈述中所示的 $(g,\ \theta)$、$(g',\ \theta')$，在椭圆纤维化 g 和 g' 之间、通过 $\overline{\beta}$ 扭曲基底的同构集合（忽略 θ、θ' 的选择）与以下集合之间存在自然双射：通过 $\overline{\beta}$ 扭曲基底的 S 与 S' 之间的群同构 β，以及一个所选取的同构 γ，该同构连接 $\beta_*(g,\ \theta)$ 与 $(g',\ \theta')$。

对我们来说，采用 Brauer 群而非泰特–沙法列维奇群会更方便：

命题 4.8。 沿用命题 *4.6* 中的记号，存在群同构 $\beta:S\simeq S'$，它将基底扭转为 $\overline{\beta}\colon C\simeq C'$，且 $\beta_*\alpha_X=\alpha_{X'}$ 当且仅当存在一个椭圆曲面同构$X\simeq X'$，它将基底扭转为 $\overline{\beta}$.

证明。 这可由命题 4.6 和引理 4.5 立即推出。 □

推论 4.9。 设 $g\colon X\to C$、 $g'\colon X'\to C'$ 是两个椭圆 *K3* 曲面，它们通过一个将基底扭转为 $\overline{\beta}\colon C\to C'$ 的同构彼此同构。那么对所有 $k\in\mathbb{Z}$，都存在一个椭圆曲面同构 $\mathrm{J}^k(X)\simeq\mathrm{J}^k(X')$，它将基底扭转为 $\overline{\beta}$.

证明。 设 $S\to C$和 $S'\to C'$分别是 $X\to C$和 $X'\to C'$的零阶雅可比。由命题 4.8，存在群同构 $\beta\colon S\to S'$，使得 $\beta_*\alpha_X=\alpha_{X'}$。这意味着，对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，$\beta_*(k\cdot\alpha_X)=k\cdot\beta_*\alpha_X=k\cdot\alpha_{X'}$。由于 $\mathrm{J}^k(X)\to C$和 $\mathrm{J}^k(X')\to C'$的布劳尔类分别为 $k\cdot\alpha_X$和 $k\cdot\alpha_{X'}$，结论由命题 4.8 得出。□

推论 4.10。 设 $S \to C$ 是一个带有截面的椭圆 *K3* 曲面。$\mathrm{Br}(S)$ 的 $A(S,F)$-轨道（分别为 $A_C(S)$-轨道）集合按椭圆曲面同构（分别按C上的同构）对 S-挠子进行参数化。

证明。 在命题 4.8 中，我们令 $S = S'$，考虑 S-挠子（X，θ）和（X'，θ'），并将相应的布劳尔类记为 α_X、$\alpha_{X'} \in \in \mathrm{Br}(S)$。根据命题 4.8，椭圆曲面 X、X' 之间存在一个扭曲基底的同构（分别为基底上的同构），当且仅当存在 $\beta \in A$（S，F）（分别为 $\beta \in A_C$（S））， 使得β_*（α_X）$= \alpha_{X'}$。因此，所得轨道集如推论所述。□

例 4.11。 自同构 $\beta = -1 \in A_C(S)$ 在 $\mathrm{Br}(S)$ 上的作用是乘以 -1。这样，每个椭圆 *K3* 曲面 X 至少总有两种挠子结构。如果 X 没有截面，那么这两种挠子结构同构，当且仅当 $\alpha_X \in \mathrm{Br}(X)$ 的阶为二；根据引理 *4.4*，这等价于X 的多截面指标为二。

我们将 EllK3 记为椭圆 K3 曲面同构类的集合（允许同构扭曲基底）。我们可以将 Ogg–Shafarevich 理论表述为 EllK3 与扭曲雅可比 K3 曲面同构类集合之间的自然双射。

定义 4.12. 扭曲雅可比 *K3* 曲面是一个三元组 (S, f, α) 其中 S 是一个带有椭圆纤维化f 的 *K3* 曲面，并配有一个固定截面，而 α 是 S上的一个布劳尔类。

两个扭曲雅可比 K3 曲面 $(S, f\colon S \to C, \alpha)$ 和 $(S', f'\colon S' \to C', \alpha')$ 之间的同构是一个群同构 $\beta\colon S \simeq S'$，使得 $\beta_*\alpha = \alpha'$. 。我们将 BrK3 记为扭曲雅可比 K3 曲面同构类的集合。上述结果给出以下结论。

定理 4.13. 由$(X, g) \mapsto (\mathrm{J}^0(X), \mathrm{J}^0(g)\ \alpha_X)$ 给出的映射 $\mathrm{EllK3} \to \mathrm{BrK3}$ 是一个双射。

证明. 由命题 4.8 可知，映射 EllK3 $\to$ BrK3 定义良好且是单射。为证明满射性，取 $(S, f, \alpha) \in$ BrK3。利用同构 (4.1)，我们得到一个 S-挠子 $(g\colon X \to \mathbb{P}^1, \theta\colon \mathrm{J}^0(X) \simeq S) \in Ш(f)$，它对应于 α。特别地，映射 EllK3 $\to$ BrK3 将 $(X, g) \mapsto (\mathrm{J}^0(X), \mathrm{J}^0(g)\ \theta_*^{-1}\alpha) \simeq (S, f, \alpha)$. □

4.2. **雅可比簇的同构.** 我们考虑一个椭圆 K3 曲面 X；回忆例 4.3， X及其所有雅可比簇 $\mathrm{J}^k(X)$ 都自然地具有作为 $\mathrm{J}^0(X)$ 上挠子的结构。

引理 4.14。 *[Căl00，定理 4.5。2]* 设 X 是一个椭圆 *K3* 曲面，且 k，$\ell \in \mathbb{Z}$。那么，作为$\mathrm{J}^k(\mathrm{J}^\ell(X)) \simeq \mathrm{J}^{k\ell}(X)$ 上的挠子，二者$\mathrm{J}^0(X)$同构。

证明。 根据引理 4.4，在 $\mathrm{J}^0(X)$ 的泰特–沙法列维奇群中，有 $[\mathrm{J}^k(\mathrm{J}^\ell(X))] = k \cdot [\mathrm{J}^\ell(X)] = k\ell \cdot [X] = [\mathrm{J}^{k\ell}(X)]$. 特别地，作为 $\mathrm{J}^0(X)$ 上的挠子，$\mathrm{J}^k(\mathrm{J}^\ell(X)) \simeq \mathrm{J}^{k\ell}(X)$。□

设 t 是 X的多截面指标。我们尤其关注满足 $\gcd(k, t) = 1$的那些雅可比簇。我们称这些互素雅可比簇 为 X的互素雅可比簇。根据下文的定理 5.1，每个互素雅可比簇都是 X的一个傅里叶–穆凯伙伴。对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，在 $\mathbb{P}^1$上都有众所周知的同构：

$$\mathrm{J}^{k+t}(X) \simeq \mathrm{J}^k(X), \quad \mathrm{J}^{-k}(X) \simeq \mathrm{J}^k(X). \tag{4.4}$$

这里，第一个同构是通过在一般纤维上加上多截面，再如注 2.10 中那样延拓得到的；同理，第二个同构可以通过对线丛取对偶得到，也可以由命题 4.8 推出，其中 β 在纤维上通过 -1作用（见例 4.11）。

我们看到， X的互素雅可比簇的同构类至多有 $\phi(t)/2$ 个。下一个结果旨在精确计算这个数目；关于计数结果的形式，见 (4.7)。

命题 4.15. 设 $X \to \mathbb{P}^1$ 是一个多截面指标为 $t > 2$的椭圆 *K3* 曲面。那么 $\mathrm{J}^k(X) \simeq \mathrm{J}^\ell(X)$ 作为$\mathrm{J}^0(X)$-挠子同构，当且仅当 $k \equiv \ell$ (模 t)。此外，存在子群 $B_X \subset \widetilde{B}_X \subset (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$，使得对于 k，$\ell \in (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$，我们有

$$\mathrm{J}^k(X) \simeq \mathrm{J}^\ell(X)\ over\ \mathbb{P}^1 \iff k\ell^{-1} \in B_X,$$

and

$$\mathrm{J}^k(X) \simeq \mathrm{J}^\ell(X)\ as\ elliptic\ surfaces \iff k\ell^{-1} \in \widetilde{B}_X.$$

此外， B_X 是一个阶为2、4 或6的循环群，包含 $\{\pm 1\}$；且只有当 X 是一个具有 j-不变量 $j = 1728$ （分别为 $j = 0$）的等变椭圆纤维化时，情形 $B_X \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ （分别为情形$B_X \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$）才会出现。

最后，如果 X 是 T-一般的，那么 $B_X = \widetilde{B}_X = \{\pm 1\}$；也就是说，在这种情况下，$\mathrm{J}^k(X)$ 和$\mathrm{J}^\ell(X)$ 在$\mathbb{P}^1$ 上同构，当且仅当它们作为椭圆曲面同构，而这又当且仅当 $k \equiv \pm\ell$ (模 t)。

在陈述中，我们排除了平凡情形 $t = 1, 2$，因为这类椭圆 K3 曲面不具有非平凡的互素雅可比簇。

在给出命题的证明之前，我们需要先约定一些记号。设 S 为带有截面的椭圆 K3 曲面。对于任意子群 $H \subset A(S,F)$ 以及任意类 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)$，令 H^α 为 H的子群，它由满足性质 $\beta_*(\langle\alpha\rangle) \subset \langle\alpha\rangle$的元素 $\beta \in H$ 组成。考虑 H^α 在 $\langle\alpha\rangle = \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 上的作用，我们得到一个自然的同态 $H^\alpha \to (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$，并定义

$$\overline{H}^\alpha := \mathrm{Im}(H^\alpha \to (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*).$$

命题 *4.15* 的证明。记 $S = \mathrm{J}^0(X)$。我们考虑 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$的以下子群：

$$B_X := \overline{A_{\mathbb{P}^1}(S)}^{\alpha_X} \tag{4.5}$$

$$\widetilde{B}_X := \overline{A(S,F)}^{\alpha_X}. \tag{4.6}$$

我们有 $B_X \subset \widetilde{B}_X$，且 $-1 \in A_{\mathbb{P}^1}(S)$ 诱导出 $-1 \in (\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$，特别是 $\{\pm 1\} \subset B_X$。注意，我们假设 $t > 2$，因此 $-1 \neq 1$ (模 t)。

由推论 4.9，$\mathrm{J}^k(X)$ 与 $\mathrm{J}^\ell(X)$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上同构，当且仅当 $\mathrm{J}^{\ell^{-1}}(\mathrm{J}^k(X))$ 与 $\mathrm{J}^{\ell^{-1}}(\mathrm{J}^\ell(X))$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上同构。这里，ℓ^{-1} 是满足 $\ell\ell^{-1} \equiv 1$ (模 t) 的任意整数。由引理 4.14，我们有 $\mathrm{J}^{\ell^{-1}}(\mathrm{J}^k(X)) \simeq \mathrm{J}^{k\ell^{-1}}(X)$，且 $\mathrm{J}^{\ell^{-1}}(\mathrm{J}^\ell(X)) \simeq \mathrm{J}^{\ell\ell^{-1}}(X) \simeq \mathrm{J}^1(X)$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上成立，其中最后一个同构由 (4.4) 得出。由推论 4.10，这成立当且仅当 $k\ell^{-1} \in B_X$。用同样的论证，$\mathrm{J}^k(X)$ 与 $\mathrm{J}^\ell(X)$ 作为椭圆曲面同构，当且仅当 $\mathrm{J}^{k\ell^{-1}}(X)$ 与 X 作为椭圆曲面同构，当且仅当 $k\ell^{-1} \in \widetilde{B}_X$。群 B_X 是 $A(S,F)$ 的一个子群的商。根据注 2.10，后一个群与 S 一般纤维的群自同构群同构。因此，$A(S,F)$（从而 B）与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 同构；但若 j 不变量等于 1728 或 0，则 $A(S,F)$（从而 B_X）分别可以是 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$。

尚需证明 $B_X = \{\pm 1\}$ 若 X 是 T-一般的。由命题 4.8，作为椭圆曲面的同构 $X \simeq \mathrm{J}^k(X)$ 会诱导 $S = \mathrm{J}^0(X)$ 的群自同构 β，满足 $\beta_*\alpha_X = k \cdot \alpha_X$. 这意味着 $T(S)$ 存在一个霍奇等距 σ，它将 $T(X) = \mathrm{Ker}(\alpha_X)$ 映到自身。由 T-一般性可得 $\sigma = \pm\mathrm{id}$，因此 $\beta_* = \pm 1$，进而 $k \equiv \pm 1$ (模 t)。□

推论 4.16。若 $A(\mathrm{J}^0(X)\ F) = A_{\mathbb{P}^1}(\mathrm{J}^0(X))$ 则 $\mathbb{P}^1$ 上互素雅可比簇的同构类，与作为椭圆曲面的互素雅可比簇的同构类相同。

证明。这由命题 4.15 得出，因为在此情形下 $B_X = B_X$ 是由构造得到的。 □

推论 4.16 适用于 $X \to \mathbb{P}^1$ 的奇异纤维位于点集 $Z \subset \mathbb{P}^1$之上的情形，即当 $\overline{\beta} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 满足 $\overline{\beta}(Z) = Z$ 仅对 $\overline{\beta} = \mathrm{id}$ 成立时。另一方面，如果 Z 具有对称性，且该对称性可以提升为 $\mathrm{J}^0(X)$ 的一个自同构，我们通常有 $B_X \subsetneq \widetilde{B}_X$。关于一个明确的此类曲面，参见例 4.19。

4.3. ***j*-特殊的等变椭圆 K3 曲面**。我们将 j-特殊等变椭圆 K3 曲面定义为：其光滑纤维的 j-不变量均为 0 或 1728 的椭圆 K3 曲面。

注 *4.17.* 存在具有 $j = 0$ 的皮卡德秩 *2* 的等变 *K3* 曲面（见例 *3.13*），然而对于$j = 1728$，由于以下原因，最小秩为 *10*。设 X 是一个具有$j = 1728$的等变椭圆 *K3* 曲面 X。X的零阶雅可比 S将具有魏尔斯特拉斯方程 $y^2 = x^3 + F(t)x$，其中 t中的 $F(t)$ 是一个 *8* 次多项式。我们有 $\rho(S) = \rho(X)$。根据皮卡德秩的半连续性，我们可以假设 $F(t)$ 具有互异的根。在这种情况下，S 具有八个奇异纤维，并且魏尔斯特拉斯方程在该纤维的奇点处具有普通双点，因此 S 是将魏尔斯特拉斯模型在这 *8* 个点处吹起所得的结果。因此，除纤维类和截面类之外，S 还具有 *8* 个可约纤维，所以 $\rho(S) \geq 10$。具有 $j \neq 0$、*1728* 的等变 *K3* 曲面都是库默尔曲面，因此其皮卡德秩至少为 17 *[Saw14*，推论 *2]*。

我们并不声称 j-特殊与 T-特殊这两个概念之间存在直接关系，但这两个概念都要求存在额外自同构。

设 $X \to \mathbb{P}^1$ 是多截面指标为 $t > 2$ 的椭圆 K3 曲面，$S \to \mathbb{P}^1$ 是它的零阶雅可比。令 $H = A_{\mathbb{P}^1}(S)$；除非 S 是 j-特殊的，否则这个群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；若是，则当.....时它可以等于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$（分别为 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$）

$j = 1728$ （分别为 $j = 0$）。根据命题 4.15， X 在 $\mathbb{P}^1$ 上同构意义下的互素雅可比簇数量等于 $\phi(t)/|B_X|$，即

$$\begin{cases} \phi(t)/2 & \text{if } X \to \mathbb{P}^1 \text{ is not isotrivial with } j = 0 \text{ or } j = 1728; \\ \phi(t)/4 & \text{for some isotrivial } X \text{ with } j = 1728, \text{ and } H = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}; \\ \phi(t)/6 & \text{for some isotrivial } X \text{ with } j = 0 \text{ and } H = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.7}$$

现在我们证明，最后两种情形确实是可能的。为简单起见，假设 $t = p$ 是一个奇素数。

命题 4.18. 设 $S \to \mathbb{P}^1$ 是带截面的椭圆 *K3* 曲面。假设 S 是等变的，具有 $j = 1728$（分别为 $j = 0$）和 $H = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$（分别为 $H = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$）。设 $p > 2$ 是一个素数。那么， S 存在一个多截面指标为 p 的挠子 $X \to \mathbb{P}^1$，使得在 $\mathbb{P}^1$ 上，恰有 $\phi_{(p)\ 4}$（分别为 $\phi_{(p)\ 6}$）个互素雅可比簇在同构意义下，当且仅当 $p \equiv 1 \pmod 4$（分别为 $p \equiv 1 \pmod 3$）。

证明. 存在这样的挠子 X，意味着 p 满足所需的数值条件，因为 4（分别为 6）整除 $\phi(p) = p - 1$。

反过来，假设 p 满足数值条件。对于每个非平凡元素 $\beta \in H$，不变子空间 $(T(S) \otimes \mathbb{C})^{\langle\beta\rangle}$ 为零；这是因为 $S/\langle\beta\rangle$ 允许存在一个以 $\mathbb{P}^1$为底的双有理 $\mathbb{P}^1$-纤维化，因此必定是有理曲面。因此， $T(S) \otimes \mathbb{C}$作为循环群 H 的表示，是由对应于阶为 $|H|$的本原单位根的一维表示直和而成。

这使我们能够将 $T(S) \otimes \mathbb{Q}$ 描述为一个 H-表示，因为 H 的不可约 $\mathbb{Q}$-表示是伽罗瓦共轭的一维表示的直和。因此，在这两种情况下， $T(S) \otimes \mathbb{Q} = V^{\oplus(\frac{22-\rho}{2})}$，其中 V分别是二维表示 $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ 和 $\mathbb{Q}[\omega] = \mathbb{Q}[x]/(x^2+x+1)$。至此可知，在我们的假设下，皮卡德数 $\rho = \rho(X)$ 是偶数。

另一方面， H-表示 $T(S)\otimes\mathbb{Q}$ 的分解由 $T(S)\otimes\mathbb{Z}[1/|H|]$的分解诱导。因此，由于 $|H|$ 与 p 互素，它诱导出分解 $T(X) \otimes \mathbb{F}_p \simeq V_p^{\oplus(\frac{22-\rho}{2})}$，其中 V_p 分别由 $\mathbb{F}_p[x]/(x^2+1)$ 和 $\mathbb{F}_p[x]/(x^2+x+1)$ 定义。在关于 p 的数值条件下，相应的多项式有根，且表示 V_p 是两个一维表示 $V_p = \chi \oplus \chi'$ 的直和。

因此，对偶表示 $\mathrm{Br}(S)_{p-tors}$ (2.7) 也分解为一维表示 χ, χ'。取其中一个表示的生成元 $\alpha \in \mathrm{Br}(S)_{p-tors}$，并令 X 为相应的挠子。显式描述 (4.5) 表明 $B_X = H$。□

关于满足命题 4.18 条件的曲面的具体例子，见例 3.13 和注 4.17。最后，我们说明在 $\mathbb{P}^1$ 上同构与作为椭圆曲面同构之间的区别。

例 4.19. 考虑例 *3.13* 中的 $j = 0$ 等变椭圆 *K3* 曲面 $S \to \mathbb{P}^1$，并设 $\beta \in A(S,F)^{\sim}$是一个阶为 11 的自同构。注意 $\beta \notin A_{\mathbb{P}^1}(S)$，因此我们可以应用命题 *4.15*。由引理 *3.12*， β 在 $T(S)$上的作用非平凡。仿照命题 *4.18* 的证明，我们推得，对每个素数$p \equiv 1$ (模 11)，特征向量主齐性空间的互素雅可比簇，按椭圆曲面同构分类时的数量，将比按在 $\mathbb{P}^1$上同构分类时少11 倍。

5. 导出等价 K3 曲面与雅可比簇

以下著名结果可追溯至 Mukai，另见 [Căl00，注记 5.4。6]。为完整起见，我们给出证明，因为从目前为止的说明可以轻易推出该结果。

定理 5.1。 设 $S \to \mathbb{P}^1$ 为带有截面的椭圆 *K3* 曲面，且 $X \to \mathbb{P}^1$ 为 $S \to \mathbb{P}^1$上的一个挠子。设 $t \in \mathbb{Z}$ 为 $X \to \mathbb{P}^1$的多截面指标。那么，$\mathrm{J}^k(X)$ </style}是 的一个傅里叶–穆凯伙伴，当且仅当最大公约数$(k,\ t) = 1$。

证明。 设 $\alpha_X \in \mathrm{Br}(S)$ 为 $X \to \mathbb{P}^1$的布劳尔类。由引理 4.4 很容易推出 th at

$$\det(T(X)) = t^2 \cdot \det(T(S)) \tag{5.1}$$

（参见 [HS05，注记 3。1]）。

回想一下，根据引理 4.4， $t = \mathrm{ord}(\alpha_X)$。我们知道，根据引理 4.4， $T(\mathrm{J}^k(X))$ 与 $k \cdot \alpha_X$:$T(S) \to \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ 的核霍奇等距。如果 $\gcd(k,t) = 1$，那么 α_X和 $k\alpha_X$具有相同的核，因此

$$T(\mathrm{J}^k(X)) \simeq \ker(k \cdot \alpha_X) = \ker(\alpha_X) \simeq T(X),$$

因此，根据导出托雷利定理，$\mathrm{J}^k(X)$ 是 X 的傅里叶–穆凯伙伴。

我们来 证明逆向蕴含。由（5.1）可知，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\frac{\det(T(X))}{\det(T(\mathrm{J}^k(X)))} = \left(\frac{\mathrm{ord}(\alpha)}{\mathrm{ord}(k\alpha)}\right)^2 = \gcd(k, \mathrm{ord}(\alpha))^2.$$

因此，若 X 与 $\mathrm{J}^k(X)$ 导出等价，则由导出托雷利定理，左边等于 1，因此 k 与 $t = \mathrm{ord}(\alpha)$ 互素。□

5.1. **导出椭圆结构**。 本小节中，我们建立导出椭圆结构和 Hodge 椭圆结构的理论。

定义 5.2。 设 X 为一个 *K3* 曲面。 X 上的导出椭圆结构是一个有序对 (Y, ϕ)，其中 Y 是一个 *K3* 曲面，使得 Y 与 X 导出等价，且 $\phi\colon Y \to \mathbb{P}^1$ 是一个椭圆纤维化。

若两个导出椭圆结构作为椭圆曲面同构，则称它们同构。我们将 X 上的导出椭圆结构的同构类集合记为 $\mathrm{DE}(X)$（将 X 上多截面指标为 t 的导出椭圆结构的同构类集合记为 $\mathrm{DE}_t(X)$ ）。

引理 5.3. 设 X 是一个 *K3* 曲面。则有：

(i) $\mathrm{DE}(X)$ 是有限集；(ii) $\mathrm{DE}(X)$ 非空，当且仅当 X 是椭圆的；(iii) $\mathrm{DE}_t(X)$ 仅当 t 满足 t^2 整除判别群 $A_{T(X)}$的阶时才可能非空；(iv) 若 X 是椭圆的，具有 $\rho(X) = 2$ 且多截面指标为 t，那么 X 的每个傅里叶-穆凯伙伴上的每种椭圆结构也都具有多截面指标 t，即 $\mathrm{DE}(X) = \mathrm{DE}_t(X)$。

证明。 (i) X 的傅里叶–穆凯伙伴的同构类集合是有限的 [BM01, 命题 5.3]，[Hos+02]，且它们每一个都只有有限多个椭圆结构（按同构分类） [Ste85]。因此，$\mathrm{DE}(X)$是有限集。

(ii) 若 X 是椭圆的，则带有其椭圆结构的 X 是 $\mathrm{DE}(X)$ 的一个元素，因此该集合非空。反过来，若 $\mathrm{DE}(X)$ 非空，则 X 存在一个作为椭圆 K3 曲面的傅里叶 – 穆凯伙伴。由导出托雷利定理，$\mathrm{NS}(X)$ 与 $\mathrm{NS}(Y)$ 属于同一属；又由于 Y 是椭圆的，交形式 $\mathrm{NS}(Y)$ 表示零，因此由标准的格论论证可知，$\mathrm{NS}(X)$也表示零，且X 是椭圆的。

(iii) 若 (Y, ϕ) 是 X 的多截面指标为 t 的导出椭圆结构，则有

$$|A_{T(X)}| = |A_{T(Y)}| = t^2 \cdot |A_{T(\mathrm{J}^0(Y))}|$$

其中，第一个等式由导出托雷利定理得出，第二个等式可由 (5.1) 推得（参见 [HS05，注 3.1]）。特别地，当 t^2 不整除 $A_{T(X)}$ 的阶时，$\mathrm{DE}_t(X)$ 为空。

(iv) 每个 X 的傅里叶–穆凯伙伴 Y 的皮卡德数也为 $\rho(Y) = 2$。根据命题 3.1， Y 上每个椭圆纤维化的多截面指标都等于$|A_{T(Y)}| = |A_{T(X)}| = t^2$ 的平方根。□

我们可以取导出椭圆结构 (Y, ϕ) 的互素雅可比簇，记作 $\mathrm{J}^k(Y, \phi)$。根据引理 4.14 和定理 5.1，这定义了 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 在 $\mathrm{DE}_t(X)$ 上的群作用。$\mathrm{DE}_t(X)$ 上的 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$-轨道集合将导出椭圆结构在取互素雅可比簇的意义下分类；有时，使用这个集合更为自然。

现在我们解释导出椭圆结构在霍奇理论中的类比。下面的定义受导出托雷利定理启发。

定义 5.4. 设 X 是一张 *K3* 曲面。 X 上的霍奇椭圆结构是一个扭曲雅可比 *K3* 曲面(S, f, α) (见定义 *4.12*)，并满足存在一个霍奇等距 $\mathrm{Ker}(\alpha) \simeq T(X)$。

霍奇椭圆结构的指数定义为其布劳尔类 α 的阶。霍奇椭圆结构 (S, f, α)、(S', f', α') 之间的同构是椭圆曲面之间的同构 $\gamma\colon S \to S'$，满足 $\gamma_*(\alpha) = \alpha'$。我们用 $\mathrm{HE}(X)$ 表示 X 上霍奇椭圆结构的同构类集合。用 $\mathrm{HE}_t(X)$ 表示指数为 t 的霍奇椭圆结构的同构类集合。运算 $k * (S, f, \alpha) = (S, f, k\alpha)$ 在 $\mathrm{HE}_t(X)$ 上定义了一个由 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 给出的群作用。

例 5.5. 设 X 是皮卡德秩为2且多截面指标为 t 的椭圆 *K3* 曲面。设(S, f, α) 是 X 上的霍奇椭圆结构。由于 X 的判别式等于 t^2，由该序列

$$0 \to T(X) \to T(S) \to \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \to 0,$$

我们可推出 $T(S)$ 是幺模的。因此， S 是皮卡德秩为二的椭圆 *K3* 曲面，且它有唯一的椭圆纤维化，该纤维化有唯一的截面（见引理 *3.2*）。我们看到，在皮卡德秩为二的情形下，可以从霍奇椭圆结构的数据中排除 f，并且存在一个双射

$$\mathrm{HE}_t(X) = \{(S,\alpha)\}/\simeq, \tag{5.2}$$

其中，同构是指保持布劳尔类的 *K3* 曲面之间的同构。

命题 5.6. 设 X 是一个 *K3* 曲面， t 是一个正整数。则定理 *4.13* 的双射 $\mathrm{EllK3} \simeq \mathrm{BrK3}$ 诱导出一个$(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$-等变双射 $\mathrm{DE}_t(X) \simeq \mathrm{HE}_t(X)$。

证明。 首先请注意，根据定义，$\mathrm{DE}_t(X)$ 是 EllK3 的子集，由同构类 (Y,ϕ) 组成，其中 Y 与 X 导出等价，且 ϕ 的多截面指标为 t。类似地，$\mathrm{HE}_t(X)$ 是 BrK3 的子集，由满足 $\mathrm{ord}(\alpha) = t$ 且 $\mathrm{Ker}(\alpha) \simeq T(X)$ 的 (S,f,α) 组成。若 $(Y,\phi) \in \mathrm{EllK3}$，则根据引理 4.4，$(Y,\phi)$ 属于 $\mathrm{DE}_t(X)$ 当且仅当相应的三元组 $(\mathrm{J}^0(Y), \mathrm{J}^0(\phi)\ \alpha_Y) \in \mathrm{BrK3}$ 属于 $\mathrm{HE}_t(X)$。

该映射的（$\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$）*等变性直接源于以下事实：$k\alpha_Y = \alpha_{\mathrm{J}^k(Y)}$；根据引理 4.4，这一点再次成立。

□

定义 5.7. 设 T 是一个格。对于 $t \in \mathbb{Z}$，我们将$\mathrm{I}_t(A_T)$ 记为 A_T, 中阶为$\backsim t$ 的循环各向同性子群的集合，并将$\mathrm{I}_t(A_T)$ 记为 A_T.中阶为 t 的各向同性向量的集合

~对于 K3 曲面 X， G_X在 $\mathrm{I}_t(A_{T(X)})$ 和 $\mathrm{I}_t(A_{T(X)})$ 上有自然作用。设(S,f,α)是 X 上的一个指数为 t的霍奇椭圆结构。存在唯一同构 $r_\alpha\colon\ \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \simeq T(S)/\mathrm{Ker}(\alpha)$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} & T(S) & \\ {\scriptstyle\alpha}\swarrow & & \searrow \\ \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} & \xrightarrow[r_\alpha]{\sim} & T(S)/\mathrm{Ker}(\alpha) \end{array} \tag{5.3}$$

交换。特别地，布劳尔类 α 指定了 $T(S)/\mathrm{Ker}(\alpha)$的一个生成元 $r_\alpha(1)$。任取霍奇等距 $T(X) \simeq \mathrm{Ker}(\alpha)$。自然嵌入 $T(S)/T(X) \subset A_{T(X)}$ 使我们可以将 $r_\alpha(1)$视为$A_{T(X)}$的一个元素，记作 w_α。我们将由 w_α生成的 $A_{T(X)}$的子群记为 H_α。注意， w_α，因此 H_α，仅在 $A_{T(X)}$上的 G_X 作用下才定义良好，因为其构造依赖于最初选取的霍奇等距 $T(X) \simeq \mathrm{Ker}(\alpha)$。另一方面，根据引理 2.1， X 上的同构霍奇椭圆结构会给出同一 G_X-轨道中的各向同性向量。我们定义映射

$$w : \mathrm{HE}_t(X) \to \widetilde{\mathrm{I}}_t(A_{T(X)})/G_X, \quad w(S,f,\alpha) = w_\alpha. \tag{5.4}$$

运算 $k * w = k^{-1}w$（其中 k^{-1} 是 k 模 t 的逆元）定义了 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 在 $\widetilde{\mathrm{I}}_t(A_T)/G_T$ 上的群作用。

引理 5.8。 映射 (5.4) 是$(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$-等变的。

证明。 回顾引理 4.4(ii)，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$， $\alpha_{\mathrm{J}^k(Y)} = k \cdot \alpha_Y$ 都属于 $\mathrm{Br}(\mathrm{J}^0(Y))$。由 (5.3) 可得 $r_{k\alpha} = k^{-1}r_\alpha$。因此，根据定义可得

$$w_{k\alpha} = r_{k\alpha}(\overline{1}) = k^{-1}r_\alpha(\overline{1}) = k^{-1}w_\alpha = k * w_\alpha,$$

这意味着映射 w 是等变的。 □

命题 5.6 和引理 5.8 得到如下交换图，其中垂直箭头表示对应的 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 作用的商：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{DE}_t(X) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{HE}_t(X) & \xrightarrow{w} & \widetilde{\mathrm{I}}_t(A_{T(X)})/G_X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{DE}_t(X)/(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^* & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{HE}_t(X)/(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & \mathrm{I}_t(A_{T(X)})/G_X \end{array} \tag{5.5}$$

对于 (Y,ϕ) 这一 X 的导出椭圆结构，我们考虑 $w_\phi := w_{\alpha_Y}$，即 (Y,ϕ) 经由 (5.5) 顶行中的映射复合所得的像。特别地，若 $f\colon\ X \to \mathbb{P}^1$ 是一个椭圆纤维化，其纤维类为 $F \in \mathrm{NS}(X)$,

那么根据构造，w_f 是模空间 $\mathrm{J}^0(X)$ 的 Căldăraru 类，该模空间参数化 X 上 Mukai 向量为 $(0, F, 0)$ 的层，因此由引理 2.8 w_f 可知，它对应于

$$\frac{1}{t}F \in \mathrm{I}_t(A_{NS(X)})/G_X \tag{5.6}$$

（此时我们可以去掉公式中的负号，如 $-1 \in G_X$。）

5.2. 秩 2 情形下的傅里叶-穆凯伙伴。 本小节中，我们研究皮卡德秩为 2 的椭圆 K3 曲面。由命题 3.1 可知，$\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,\ t}$ 由 (3.1) 给出。以下结果是我们将讨论重点放在皮卡德秩为 2 的椭圆曲面上的原因之一。

引理 5.9。 *对于一个椭圆 K3 曲面 X，其 $\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,\ t}$，其上的所有导出椭圆结构和所有霍奇椭圆结构都具有相同的指数 t。*

证明。 这由引理 5.3 和命题 5.6 得出。 □

对于引理 5.9 中的 X，我们有 $\mathrm{DE}(X) = \mathrm{DE}_t(X)$。特别地，通过取互素雅可比簇，$(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 在 $\mathrm{DE}(X)$ 上有一个作用。回顾一下，对于一个 K3 曲面 X，其 $\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,\ t}$，我们有 $A_{T(X)} \simeq A_{\mathrm{NS}(X)}(-1) \simeq A_{d,\ t}(-1)$，且由引理 3.3 可知其阶为 t^2。因此，阶为 t 的各向同性元素（分别为循环各向同性子群）恰为拉格朗日元素（分别为拉格朗日子群），见定义 3.5：

$$\mathrm{I}_t(A_{T(X)}) = \mathrm{L}(A_{T(X)}), \quad \widetilde{\mathrm{I}}_t(A_{T(X)}) = \widetilde{\mathrm{L}}(A_{T(X)}),$$

下面的结果与 [Ma10 的命题 3.3] 有关。

定理 5.10. *设 X 是皮卡德秩为 2 且多截面指标为 t 的椭圆 K3 曲面。那么映射 $w(5.4)$ 是一个双射。此外，我们有一个双射*

$$\mathrm{DE}(X)/(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^* \simeq \mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X. \tag{5.7}$$

作用 (3.11) 在 $\mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X$ 上诱导一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-作用；在双射 (5.7) 下，该作用对应于在$\mathrm{DE}(X)$ 上交换 X 的傅里叶–穆凯伙伴的两个椭圆纤维化的作用。

证明. 我们首先证明 w 是双射。我们从双射 (5.2) 开始。为证明 w 的单射性，取满足 $T(X) \simeq \mathrm{Ker}(\alpha) \simeq \mathrm{Ker}(\alpha')$ 的 (S, α) 和 (S', α')。假设存在霍奇等距 $\sigma \in G_X$，使得$\overline{\sigma}(w_\alpha) = w_{\alpha'}$。那么引理 2.1 表明，$\sigma$ 可以扩张为霍奇等距 $T(S) \to T(S')$。由于 S 和 S' 的皮卡德秩均为 2，引理 3.12 表明，此霍奇等距由群同构β：$S \simeq S'$. 诱导。由 $\overline{\sigma}(w_\alpha) = w_{\alpha'}$ 可知，(S, α) 和 (S', α') 同构。

为证明 w 的满射性，设 $u \in A_{T(X)}$ 是阶为 t 且 $H = \langle u \rangle$ 的各向同性向量。根据引理 2.1，H对应于一个超格 $i\colon T(X) \hookrightarrow T$，它继承了 $T(X)$ 上的 Hodge 结构，即 $i\colon T(X) \hookrightarrow T$ 是一个霍奇超格。注意，T是幺模的，因为 $T(X) \subset T$的指数为 t，且 $A_{T(X)}$的阶为 t^2。因此，$T \oplus U$ 是一个秩为 22、符号为 (3, 19) 的偶幺模格。这意味着它同构于 K3 格 Λ_{K3}。由周期映射的满射性（定理 2.2），我们得到一个 K3 曲面 S，满足 $T(S) \simeq T$且 Néron–Severi 群 $\mathrm{NS}(S) \simeq U$。因此，超格 $i\colon T(X) \hookrightarrow T(S)$ 是一个霍奇超格，满足 $T(S)/T(X) = H$。我们定义布劳尔类 $\alpha\colon T(S) \to H \simeq \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$，其中第二个映射由 $u \mapsto \overline{1}$给出。因此，我们构造出一对 (S, α)，其 Căldăraru 类为 u，且 $\mathrm{Ker}(\alpha) \simeq T(X)$。

由于 w 是双射，图表 (5.5) 立即推出 (5.7)。作用 (3.11) 诱导了在 $\mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X$ 上的作用，因为 ι 与 G_X 可交换。事实上，可以在每个主分量 (2.2) 上验证这一点；根据引理 3.8，其中至多有两个拉格朗日子群，因此 G_X 的作用可通过由 ι_p 生成的作用因子化。为证明 ι 对应于交换傅里叶–穆凯伙伴 Y 上的椭圆纤维化，我们可以使用同一化 $\mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X = \mathrm{L}(A_{T(Y)})/G_Y$，并假设 $Y = X$。由 (3.12) 可得结论，因为由 $\overline{v}$ 和 $\overline{v'}$ 生成的拉格朗日子群，通过 (5.7) 与 (5.6)，对应于 X 上的两种椭圆纤维化。□

回顾引理 3.2：具有 $\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,t}$ 的 K3 曲面 X 有两种椭圆纤维化，但当 $d \equiv -1$（模 t）时例外；在这种情况下，X 只有一种椭圆纤维化。利用定理 5.10，我们可以轻松比较这两种纤维化的互素雅可比簇。

例 5.11. *设 X 是一个皮卡德秩为二的椭圆 K3 曲面，且满足 Néron–Severi 群$(X) \simeq \Lambda_{d,\ t}$ 使得 最大公约数$(d,\ t) = 1$且 $d \not\equiv -1$（模 t）。设 $(X,\ f)$ 和 $(X,\ g)$ 是 X 上的两个椭圆纤维化（见引理 3.2），并设 w_f 和 w_g 是它们的 Căldăraru 类，它们是 $A_{d,\ t}$ 中的拉格朗日元素。由引理 3.8，$A_{d,\ t}$ 有唯一的拉格朗日*

子群，因此我们有 $\langle w_f\rangle = \langle w_g\rangle$。由定理 *5.10* 可知，这意味着 f 和 g 互为互素雅可比簇。我们可以进一步精确地说明如下。回顾由 (5.6)，w_f 和w_g 分别对应于类 $\overline{v}$、 $\overline{v'}(3.7)$ 。利用 (3.8)，我们计算

$$w_g = \overline{v'} = -d\overline{v} = -dw_f = -d^{-1} * w_f.$$

这里， d^{-1} 是模 t下 d 的逆元。因此我们有一个椭圆曲面同构

$$(X, g) \simeq \mathrm{J}^{-d^{-1}}(X, f) \simeq \mathrm{J}^{d^{-1}}(X, f)$$

且 $(X, f) \simeq \mathrm{J}^{d}(X, g)$。

推论 5.12。 设 X 是一个皮卡德秩为二的椭圆 *K3* 曲面。将 X的傅里叶–穆凯伙伴按曲面同构分类，并按互素雅可比簇分类（在 X的每个导出椭圆结构上），所得集合与双商之间存在自然双射

$$\langle \iota\rangle \backslash \mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X.$$

证明。 这是由 ι 在 $\mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X$ 上的作用所导致的结果：该作用通过交换两个椭圆纤维化实现，详见定理 5.10。 □

推论 5.13。 设 X 是一个皮卡德秩为 *2* 的椭圆 *K3* 曲面。设 d， $t \in \mathbb{Z}$ 使得 Néron–Severi 群$(X) \simeq \Lambda_{d,\ t}$，并记 $m =$ 最大公约数$(d,\ t)$。

(i) 如果 $m = 1$，那么 *DE(X)* 是单个 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$-轨道。具体而言， X 的每个傅里叶-穆凯伙伴都可在固定椭圆纤维化 *(X, f)* 的互素雅可比簇中找到。*(ii)* 如果 $m = p^k$，对于素数 p 和 $k \geq 1$，那么 *DE(X)* 至多由两个 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$-轨道组成，它们由对合 ι 互换。具体而言， X 的每个傅里叶-穆凯伙伴都可在 X 上两个椭圆纤维化之一的互素雅可比簇中找到。*(iii)* 如果 m 有至少 *7* 个不同的素因子，那么 *DE(X)* 至少有三个 $(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$-轨道。特别地，存在一些 X 的傅里叶-穆凯伙伴，作为曲面，它们与 X 上椭圆结构的任何雅可比簇都不同构。

证明。 在每种情况下，我们都结合命题 3.6 给出的拉格朗日子群计数使用定理 5.10。

(i) 固定一个椭圆纤维化 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$，并令 $H_f \subseteq A_{T(X)}$ 为相应的拉格朗日子群。由于$m = 1$，命题 3.6 表明， $H_f \subseteq A_{T(X)}$ 是唯一的拉格朗日子群。因此，根据定理 5.10，所有导出椭圆结构都具有如下形式：对于与 t 互素的 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{J}^k(X) \to \mathbb{P}^1$。

(ii) 根据命题 3.6， $A_{T(X)}$ 恰好包含两个拉格朗日子群。条件 $m = p^k$ 特别意味着 $d \neq -1$ (模 t)，因此曲面 X 存在两个椭圆纤维化 $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ 和 $g\colon X \to \mathbb{P}^1$。由引理 3.7，按照例 5.11 中的论证可知，这两个椭圆纤维化所诱导的 $A_{T(X)}$ 的子群并不相同。因此， H_f 和 H_g 是 $A_{T(X)}$仅有的两个拉格朗日子群，所以根据定理 5.10， X 上的每个导出椭圆结构，要么是 f 的互素雅可比，要么是 g 的互素雅可比。

(iii) 假设 $\omega(m) \geq 7$。由于 $-1 \in G_X$在 $\mathrm{L}(A_{T(X)})$ 和 $|G_X| \leq 66$上平凡作用，根据命题 3.6，集合 $\mathrm{L}(A_{T(X)})/G_X$ 的基数至少为 $2^{\omega(m)}/33 \geq 128/33$，也就是说至少有三个元素。最后的结论由推论 5.12 得出。□

推论 5.14. 假设 X 是一个 T-一般椭圆 *K3* 曲面，且 $\mathrm{NS}(X) = \Lambda_{d,t}$ ，其中 $t > 2$，并令$m = \gcd(d, t)$。那么

$$|\mathrm{DE}(X)| = 2^{\omega(m)-1} \cdot \phi(t), \quad |\mathrm{DE}(X)/(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*| = 2^{\omega(m)}. \tag{5.8}$$

特别地，如果 m 不是素数的幂，那么 X 就有一些傅里叶–穆凯伙伴，它们作为曲面并不同构于 X上任何椭圆结构的雅可比。

证明。 公式 (5.8) 中的第二个公式是定理 5.10、 $G_X = \widetilde{\{\pm 1\}}$在 $\mathrm{L}(A_{T(X)})$ 上平凡作用这一事实，以及拉格朗日计数 (3.6) 的直接推论。

由命题 4.15， T-一般椭圆 K3 曲面的互素雅可比簇构成 $\phi(t)/2$ 个同构类。换言之，$(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 在 $\mathrm{DE}(X)$ 上的作用轨道大小均为 $\phi(t)/2$ ，因此 (5.8) 中的第一个公式可由第二个公式推出。

最后的结论由推论 5.12 得出，因为如果 m 不是某个素数的幂，那么根据 (5.8)，$\mathrm{DE}(X)/(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})^*$ 至少有四个元素，因此不可能构成单个 ι-轨道。□

5.3. **零阶雅可比**。在本小节中，我们应用第 5.2 节的结果，考察导出等价的椭圆 K3 曲面是否具有同构的零阶雅可比簇。先验地看，这是一个比问题 1.1 弱的问题。不过，我们现在证明，在非常一般的情形下，这两个问题是等价的。特别是，答案是否定的。

命题 5.15. 设 $f: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个皮卡德秩为 *2* 的椭圆 *K3* 曲面，并记 $S := \mathrm{J}^0(X)$。假设 $T(X)$ 没有非平凡的有理霍奇等距，也就是说

$$O_{Hodge}(T(X)_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{5.9}$$

设 (Y,ϕ) 是 X 上的一个导出椭圆结构，满足 $S' := \mathrm{J}^0(Y) \simeq S$。那么 (Y,ϕ) 同构于 (X,f) 的一个互素雅可比。

证明。固定任意一个霍奇等距 $T(X) \simeq T(Y)$，我们将 $T(X) \simeq T(Y) \hookrightarrow T(S')$ 视为 $T(X)$ 的一个超格。根据假设，存在一个霍奇等距 $\beta^*: T(S') \simeq T(S)$，它由一个同构 $\beta: S \simeq S'$ 诱导。现在，β^* 诱导出有理霍奇等距

$$T(X)_{\mathbb{Q}} \simeq T(S')_{\mathbb{Q}} \overset{\beta^*_{\mathbb{Q}}}{\simeq} T(S)_{\mathbb{Q}} \simeq T(X)_{\mathbb{Q}}$$

根据假设，它等于 $\pm\mathrm{id}$，因此 β^* 将 $T(X)$ 保持为 $T(S)$ 和 $T(S')$ 的子格。特别地，$\beta_*\alpha_X = k\alpha_Y$ 对于某个 $k \in \mathbb{Z}$ 成立，因此 Y 是 X 的互素雅可比。□

众所周知，若 X 是一个非常一般的 $\Lambda_{d,\,t}$-极化椭圆 K3 曲面，则 (5.9) 成立，参见例如 [SZ20，引理 3.9] 中的论证。因此，若 X 是一个皮卡德秩为二且具有两个椭圆纤维化的非常一般的椭圆 K3 曲面，命题 5.15 使我们能够比较相应的零阶雅可比簇，这推广了[Gee05，命题 4.8]。

推论 5.16。设 X 是一个皮卡德秩为二的椭圆 *K3* 曲面，且满足 $\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,\,t}$ 并假设 $d \not\equiv \pm 1$模 t，因此根据引理 *3.2*，X 具有两个不同构的椭圆纤维化。假设 X满足 (5.9) 。那么，X 上的两个椭圆纤维化的零阶雅可比簇同构，当且仅当 $\gcd(d,t) = 1$。

证明。若 $\gcd(d,t) = 1$，则根据推论 5.13，X 上的两个椭圆纤维化互为互素雅可比，因此零阶雅可比簇同构。若 $\gcd(d,t) \neq 1$，则由 X的 T-一般性，X 上两个椭圆纤维化的 Căldăraru 类在 $A_{T(X)}$中不成比例，因此这两个椭圆纤维化不互为互素雅可比，结论由命题 5.15 得出。□

注记 5.17。在推论 *5.16* 的情形下，若零阶雅可比簇不同构，则它们也不导出等价。事实上，带截面的椭圆 *K3* 曲面没有非平凡的傅里叶–穆凯伙伴*[Hos+02，命题2.7(3)]*。

5.4. **Hassett 和 Tschinkel 关于非闭域提出的问题**。本小节将运用扭曲形式理论，将我们的结果推广到子域 $k \subset \mathbb{C}$。设 $f: X \to \mathbb{P}^1$ 是一个复椭圆 K3 曲面，且 $\mathrm{NS}(X) \simeq \Lambda_{d,\,t}$。回顾一下，我们用 $\mathrm{Aut}(X,F)$ 表示 X的自同构群，其中的自同构固定 $\mathrm{NS}(X)$中的纤维类。由推论 3.14 可知，只要 $t > 2$且 X是 T-一般的，自同构群 $\mathrm{Aut}(X,F)$ 就是平凡群。

设 $k \subset L$ 是一个域扩张。椭圆 K3 曲面 $(Y, \phi: Y \to C)$ 在 k 上的一个 L-扭曲形式 是指任意椭圆 K3 曲面 $(Y', \phi': Y' \to C')$，它定义在 k 上，且作为椭圆曲面，(Y_L, ϕ_L) 与 (Y'_L, ϕ'_L) 同构。

引理 5.18。设 (Y,ϕ) 是定义在 k 上的椭圆 *K3* 曲面，且 自同构群$(Y_{\mathbb{C}}, F) = \{\text{恒等}\}$. 那么，$(Y,\phi)$ 的每个 $\mathbb{C}$-扭曲形式都与 Y 作为曲面同构。

证明。(Y',ϕ') 作为 (Y,ϕ) 的任意 $\mathbb{C}$-扭曲形式，也同时是 (Y,ϕ) 的一个 $\overline{k}$-扭曲形式 [Mil08，引理 16.27]。因此，只需证明对于任意伽罗瓦扩张 L/k，(Y,ϕ) 的所有 L-扭曲形式都与 Y 同构。设 (Y',ϕ') 是 (Y,ϕ) 的一个 L-扭曲形式，并设 $g: Y_L \simeq Y'_L$ 是一个椭圆曲面同构，它可能会通过自同构扭曲基底。于是，对于任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/k)$，映射 $h := g \circ (\sigma g)^{-1}$ 是 Y_L 的一个椭圆曲面自同构。

利用映射 $\mathrm{Aut}(Y_L) \to \mathrm{Aut}(Y_{\mathbb{C}})$ 的单射性（参见 [Stacks，], 引理 02VX], ），以及关于 $Y_{\mathbb{C}}$ 的自同构的假设，我们看到 h 是恒等元，即 g 与伽罗瓦作用相交换。因此，g 下降为同构 $Y \simeq Y'$ [Mil08，命题 16.9]。□

引理 5.19. 若(X,f) 是定义在 k 上的椭圆 *K3* 曲面，且满足 $\rho(X_{\mathbb{C}}) = 2$，则 $X_{\mathbb{C}}$ 的所有椭圆纤维化都由 X 的椭圆纤维化诱导。

证明. 由引理 3.2 $X_{\mathbb{C}}$ 可知，其有一个或两个椭圆纤维化。若只有一个纤维化，它必定来自给定的椭圆纤维化 f。若 $X_{\mathbb{C}}$ 上有两个椭圆纤维化，它们定义在某个伽罗瓦扩张L/k上。设 F 和 F' 是 X_L 上相应的除子类。伽罗瓦群不会置换这两个类，因为其中一个对应于 f，因此在伽罗瓦群作用下不变。于是另一个类也在伽罗瓦群作用下不变，相应的态射 $X \to C$ 定义在 k 上，参见例如 [Lie17、命题 2.7、定理 3.4(2)]。□

命题 5.20。设 X 是定义在 k 上的椭圆 *K3* 曲面，且 $\mathrm{NS}(X_{\mathbb{C}}) \simeq \Lambda_{d,\ t}$。假设 $\mathrm{Aut}(X_{\mathbb{C}},\ F) = \{\mathrm{id}\}$。若 d 与 t 互素，或仅有一个公共素因子，则 X 的每个傅里叶–穆凯伙伴作为曲面都同构于 X 上某个椭圆纤维化的一个互素雅可比。

证明。设 Y 是 X 的一个傅里叶–穆凯伙伴，并设 $\phi\colon Y \to C$ 是 Y 的一个椭圆纤维化；根据[HT17，命题 16]，该纤维化存在。由推论 5.13(i, ii)，$\phi_{\mathbb{C}}\colon Y_{\mathbb{C}} \to C_{\mathbb{C}}$ 作为椭圆曲面同构于某个椭圆纤维化 $f_{\mathbb{C}}$（位于 $X_{\mathbb{C}}$ 上）的互素雅可比 $\mathrm{J}^k(X_{\mathbb{C}}, f_{\mathbb{C}})$。由引理 5.19，$f_{\mathbb{C}}$ 来自 X 上的一个椭圆纤维化 f，因此 (Y, ϕ) 是 $\mathrm{J}^k(X, f)$ 的一个 $\mathbb{C}$-扭曲形式。

由命题 3.10 中对自同构群的描述，我们可推出

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{J}^k(X_{\mathbb{C}}), F) \simeq \mathrm{Aut}(X_{\mathbb{C}}, F)$$

且根据假设，该群是平凡群。由引理 5.18 可知，Y 作为曲面同构于 $\mathrm{J}^k(X)$。□

命题 5.20 推出以下结论：

推论 5.21. 设 X 如命题 *5.20* 所述。设 Y 是 X的任意傅里叶–穆凯伙伴。那么，X 有一个k-有理点，当且仅当 Y 有一个 k-有理点。

证明. 由命题 5.20 可知，存在一个椭圆纤维化 $f\colon X \to C'$ 以及一个整数 $\ell \in \mathbb{Z}$，使得 $Y \simeq$作为曲面 $\mathrm{J}^\ell(X, f)$。存在一个有理映射 $X \dashrightarrow \mathrm{J}^\ell(X) \simeq Y$，由 $P \mapsto \ell \cdot P$给出。由朗–西村定理 [Lan54], [Nis55], 可知，$X(k) \neq \emptyset$ 推出 $Y(k) \neq \emptyset$。反过来，由于 X 也是 Y的一个互素雅可比，同样的论证表明，$Y(k) \neq \emptyset$ 推出 $X(k) \neq \emptyset$。□

参考文献

[BM01] T. Bridgeland 和 A. Maciocia。《导出范畴等价的复曲面》。载于：《数学杂志》236.4 (2001)，第 677–697 页。[BM19] T. Bridgeland 和 A. Maciocia。导出范畴等价的复曲面。2019年。arXiv：1909.08968。[BPV12] W. Barth、C. Peters 和 A. van de Ven。紧复曲面。数学及其边界领域成果。第 3 辑 / 现代数学综述系列。施普林格柏林海德堡，2012年。ISBN：9783642967542。[Căl00] A. Căldăraru。卡拉比–丘流形上的扭曲层导出范畴。康奈尔大学，2000年5月。[DM22] I. Dolgachev 和 G. Martin。“任意特征下有理椭圆曲面与准椭圆曲面的自同构群”。载于：《数学进展》（纽约，*1965*）400 (2022)。ISSN：0001-8708。[Fri98] R. Friedman。代数曲面与全纯向量丛。英文。Universitext。纽约：Springer，1998年。ISBN：0387983619。[Gee05] B. van Geemen。“关于 K3 曲面的 Brauer 群的一些评述”。载于：《数学进展》197.1 (2005)，第 222–247 页。ISSN：0001-8708。[Hos+02] S. Hosono、B. H. Lian、K. Oguiso 和 S. Yau。“K3 曲面的傅里叶–穆凯数”。载于：*CRM* 代数结构与模空间研讨会。2002年2月。arXiv：math/0202014。[HS05] D. Huybrechts 和 P. Stellari。“扭曲 K3 曲面的等价”。载于：《数学年刊》332.4 (2005)，第 901–936 页。ISSN：0025-5831。[HT17] B. Hassett 和 Y. Tschinkel。“K3 曲面上的有理点与导出等价”。载于：布劳尔群与障碍问题。第 320 卷。数学进展丛书。Birkhäuser/Springer，Cham，2017年，第 87–113 页。[Huy06] D. Huybrechts。代数几何中的傅里叶–穆凯变换。牛津数学专著。克拉伦登出版社，2006年。ISBN：9780199296866。[Huy16] D. Huybrechts。*K3* 曲面讲义。剑桥大学出版社，2016年。

[IS96] V. Iskovskikh 和 I. Shafarevich。《代数几何 II：代数曲面》。Springer Verlag Berlin-Heidelberg，1996年。ISBN：978-3-642-64607-2。[Keu16] J. Keum。“K3 曲面自同构的阶”。载于：《数学进展》303 (2016)，第 39–87 页。ISSN：0001-8708。[Kon92] S. Kondo。“在 Picard 群上作用平凡的代数 K3 曲面的自同构”。载于：日本数学会杂志44.1 (1992)，第 75–98 页。[KS18] A. Kuznetsov 和 E. Shinder。“簇的 Grothendieck 环、D-等价与 L-等价，以及二次曲面族”。载于：Selecta Math. (N.S.) 24.4 (2018)，第 3475–3500 页。ISSN：1022-1824。[Lan54] S. Lang。“局部一致化定理的一些应用”。载于：American Journal of Mathematics 76.2 (1954)，第 362–374 页。ISSN：00029327，10806377。[Lie17] C. Liedtke。“到 Brauer-Severi 簇的态射及其在 del Pezzo 曲面中的应用”。载于：《非闭域上的几何》。Simons Symp. Springer，Cham，2017年，第 157–196 页。[Ma10] S. Ma。“K3 曲面的扭曲 Fourier-Mukai 数”。载于：Transactions of the American Mathematical Society 362.1 (2010)，第 537–552 页。ISSN：0002-9947。[Mil08] J. Milne。《代数几何》（v5.10）。2008年。[Muk87] S. Mukai。“关于 K3 曲面的向量丛模空间 I。代数簇上的向量丛（孟买，1984），341–413，Tata Inst”。载于：Fund. Res. Stud. Math 11 (1987)。[Nik80] V. V. Nikulin。“整对称双线性型及其若干应用”。载于：Mathematics of the USSR-Izvestiya 14.1 (1980年2月)，第 103–167 页。[Nis55] H. Nishimura。“关于有理点的一些评述”。载于：京都大学理学部纪要，A 辑：数学 29.2 (1955)，第 189–192 页。[Ogu02] K. Oguiso。“通过几乎素数研究 K3 曲面”。载于：Math. Res. Lett. 9.1 (2002)，第 47–63 页。ISSN：1073-2780。[Orl03] D. O. Orlov。“凝聚层的导出范畴及其间的等价”。载于：Russian Mathematical Surveys 58.3 (2003年6月)，第 511–591 页。[PS71] I. I. Pjatecki-Shapiro 和 I. R. Shafarevich。“K3 型代数曲面的 Torelli 定理”。载于：Izvestiya: Mathematics 5.3 (1971年6月)，第 547–588 页。[Saw14] J. Sawon。等变椭圆 K3 曲面与拉格朗日纤维化。2014年。arXiv：1406.1233。[Stacks] T. Stacks Project 作者。Stacks Project。https://stacks.math.columbia.edu。2018年。[Ste04] P. Stellari。“关于 Picard 数为 1 和 2 的 $K3$ 曲面的 FM-伴侣的一些评述”。载于：Geom. Dedicata 108 (2004)，第 1–13 页。ISSN：0046-5755。[Ste85] H. Sterk。“代数 K3 曲面的有限性结果”。载于：《数学杂志》189.4 (1985)，第 507–513 页。ISSN：0025-5874。[SZ20] E. Shinder 和 Z. Zhang。“五次椭圆曲线、椭圆纤维化与 K3 曲面的 L-等价”。载于：Bulletin of the London Mathematical Society 52.2 (2020)，第 395–409 页。[Tod80] A. N. Todorov。“Kähler-Einstein-Calabi-Yau 度量在曲面模空间中的应用”。载于：Invent. Math. 61.3 (1980)，第 251–265 页。ISSN：0020-9910。

谢菲尔德大学数学与统计学院，英国霍恩斯菲尔德路 S3 7RH；以及波恩大学豪斯多夫数学中心，恩登尼希大道 60 号，53115。电子邮箱地址：r.r.meinsma@gmail.com

谢菲尔德大学数学与统计学院，英国霍恩斯菲尔德路 S3 7RH；以及波恩大学豪斯多夫数学中心，恩登尼希大道 60 号，53115。电子邮箱地址：eugene.shinder@gmail.com