arXiv:2303.16650v1 [math.LO] 28 Mar 2023

# 树结构与 Ellentuck 拓扑中的不可测集

Joanna Jureczko

摘要

本文旨在给出相关结果，以回答 Kuratowski 于 1935年提出的关于不可测集是否存在的问题。Kuratowski问题最初针对划分进行研究；本文则将其推广到树结构和 Ellentuck 空间结构中的点有限族。本文的主要结果推广了此前关于不可测集的研究成果。

## 1 引言

各种结构中不可测集是否存在的问题，长期以来一直受到关注。Bernstein 集和 Vitali 集就是这类集合的例子。多年来，人们一直试图构造这类集合，或证明它们确实存在。关于不可测集存在性这一主题的论文日益增多，表明这一研究仍在持续。然而，迄今为止发表的显著不同的不可测集仍然寥寥无几。其中之一是 Kuratowski 于 1935年提出的集合；事实上，这一研究方向的开端正是他在论文 [15] 中提出的问题。

1935年，K. Kuratowski 提出了问题（[15]），该问题等价于从函数的角度来看 Kuratowski划分不存在。后来发现，它等价于以下结果（见 [16]）。

*2010年数学主题分类：54C30、03E05、03E40、28A20。关键词：Kuratowski划分、点有限族、Sacks 强迫、Laver 强迫、Ellentuck 拓扑学、融合引理。

定理（Kuratowski）（连续统假设）若 $\mathcal{F}$ 是区间 $[0,1]$ 的一个划分，其基数至多为 $\omega_1$，且划分成无处稠密集，则存在一个族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$，使得 $\bigcup \mathcal{A}$ 不具有贝尔性质。

由于“具有贝尔性质”与“不可测”这两个概念之间存在对偶性，通过 Kuratowski 定理，我们可以得到不可测集的存在性。

自上世纪20世纪70年代以来，人们采用不同的证明方法，对不可测集的存在性问题进行了深入研究。例如，R. Solovay 在 [18] 和 L. Bukovsky 在 [4] 中，借助力迫方法和自然嵌入，在不假设连续统假设（CH）的情况下证明了这一结果。在 [7], 中，作者将这一结果推广到一类权为 $\leq 2^{\omega}$ 的空间。此外， [3] 在特殊情形下以及 [17] 也考虑了这一问题。

在 [3] 中，作者考虑的不是划分，而是所谓的点有限族情况下不可测集的存在性问题。更准确地说，作者证明了以下结果

定理([3]) 令 $\mathbb{R}$ 为实数集，令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}$ 中由博雷尔集构成的 $\sigma$-代数。令 $I$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 $\sigma$-理想，使得 $I \cap \mathcal{B}$ 是 $I$ 的一个基。若 $\{A_s \colon s \in S\} \subseteq I$ 是一个点有限族，则存在 $S' \subseteq S$，使得

$$\bigcup_{s \in S'} A_s \notin \{B \triangle N \colon B \in \mathcal{B}, N \in I\}.$$

关于这一主题的另一项重要结果见于 [10], ，作者在那里引用了以下源自 Prikry 的结果。

定理 [10] 令 $Y$ 为一个配备有限正则博雷尔测度 $\mu$ 的非瘦拓扑空间，并令 $\{A_s \colon s \in S\}$ 为 $Y$ 的一个点有限子集族，使得对于任意 $s \in S$ $\mu(A_s) = 0$（分别地， $A_s$ 是瘦的），但 $\mu(\bigcup_{s \in S} A_s) > 0$（分别地，$\bigcup_{s \in S} A_s$ 是非瘦的）。那么存在 $S' \subseteq S$，使得 $\bigcup_{s \in S'} A_s$ 不可测（分别地，不具有贝尔性质）。

在 [5], 中，作者证明了，波兰空间 $X$ 的任意不可数解析子集点有限族，都必然包含一个并集不是解析集的子族。

这似乎是一种自然的推广，因为划分是一种特殊的点有限族。遗憾的是，这一结论甚至无法推广到所谓的点可数族。

将不可测集存在性问题推广到点有限族会引发更多问题。一般而言，不可能将用于划分的方法转用于这一新情形。这要求修改甚至改变用于证明的方法。然而，有一种方法被证明是唯一能够证明对于划分和点有限族都不可测的集合存在的方法。

2019年，在 [9],发表了树结构中不可测集存在性的研究结果。文中对 Marczewski 结构和 Laver 结构给出了确切证明。由于证明中所用方法具有相似性，还获得了 Ellentuck 空间中不可测集合存在性的结论。这里所采用的主要证明方法是使用融合引理，该引理对于树结构以及 Ellentuck 空间中的结构均成立。这种方法似乎具有足够的普适性，可以尝试将 [9]关于点有限族的工作成果加以推广，而这正是本文所呈现结果的主要目标。

从形式的角度来看，本文给出的主要结果比 [9], 中的结果更一般，因为如上所述，划分是点有限覆盖的一种特殊情况。从技术角度来看，这两项结果的证明也都基于融合引理（见 [1, 2, 11]），而该引理在证明中不可省略，不过有一些细微之处非常值得强调。（第 3 节所述结果的证明略微借鉴了 [9] 中结果的证明，但在必要之处作了修改。）本文展示的这种将方法适配于新假设的做法，是对先前方法的推广，可用于证明其他结构的存在性，在这些情形中也可以进行推广。

需要强调的是，我们的结果不仅对整个空间成立，对“大的”子集也成立。

本文考察三种结构：Marczewski 集合结构（Sacks 强迫）、Laver 结构（Laver 强迫）——我们尚不清楚它们是否构成拓扑——以及 Ellentuck 拓扑（Mathias 强迫）。对于 Marczewski 结构，($s$)-集和($s^0$)-集分别等同于大集合和小集合；对于 Laver 结构，($l$)-集和($l^0$)-集分别等同于大集合和小集合。最后，对于 Ellentuck 结构，$CR$-集和 $NR$ -集分别等同于大集合和小集合。如果我们采用测

度论和范畴论中大集合与小集合的术语，那么小集合对应于无处稠密集（零测集），大集合对应于具有贝尔性质的集合（正测度集合）。

我们的结果推广了此前关于点有限覆盖和划分的结果；这些结果也来自 [9]，并且是定理 1 的推论。

本文结构如下：第 2 节给出定义和已有结果，第 3 节给出主要结果。

我们采用该领域的标准术语。此处未引用的定义和事实可见于 [8, 14]（拓扑学）、[6]（Ellentuck 拓扑）、[12]（集合论）和 [2, 11, 13]（力迫）。

# 2 定义和已有结果

## 2.1 树理想

设 $K \subseteq \omega$ 是一个集合（有限或无限）。集合 $T \subseteq K^{<\omega}$ 称为树，当且仅当 $t \restriction n \in T$ 对所有 $t \in T$ 和 $n \leqslant |t|$ 都成立；也就是说，$T$ 在初始段向下封闭。假定树没有终端节点。令 $\mathbb{T}$ 表示所有树构成的族。对于每个 $T \in \mathbb{T}$ 和 $t \in T$，集合

$$split(t,T) = |\{n \in K : t^\frown n \in T\}|$$

表示 $T$ 中节点的后继节点数。

定义 1 树 $T$ 称为

1. 当且仅当 $K = \{0,1\}$ 且对每个 $t \in T$，存在一个 $s \in T$，使得 $t \subseteq s$ 且 $split(t,T) = 2$ 时，称为 Sacks 树或完美树，
2. 当且仅当 $K = \omega$ 且存在 $s \in T$，使得对每个 $t \in T$
   (a) 要么 $t \subseteq s$，要么 $s \subseteq t$；(b) 对每个 $t \in T$，$split(t,T)$ 都是无限的。

我们分别用 $\mathbb{S}$ ($\mathbb{L}$) 表示所有 Sacks 树（Laver 树）组成的族。

在下面的结果中，我们使用树的 Laver型结构（它与超集树或 Miller 树相当接近），因为我们将节点的第 $n-$ 层划分为 $(n+1)$ 个节点子集，因此对每个 $n \in \omega$ 都如此。

我们称 $t \in Lev_n(T)$（即 $t$ 属于 $T$ 的 $n-$层）当且仅当在 $t$ 下方存在 $n-$个分叉。

Let

$$[T] = \{s \in K^{\omega} : \forall_{n\in\omega}\ s \restriction n \in T\}$$

是所有经过 $T$ 的无限路径组成的集合。
注意，$[T]$ 在贝尔空间 $K^{\omega}$ 中是闭集（例如参见 [12]）。

我们用 $stem(T)$ 表示满足以下条件的节点 $s \in T$：对于任意 $s \subsetneq t$，$split(s,T) = 1$ 且 $split(t,T) > 1$。

$\mathbb{S}$ 上的序定义如下：$Q \leqslant T$ 当且仅当 $Q \subseteq T$ 且

$Q \leqslant_n T$ 当且仅当 $Q \leqslant T$，并且 $n$ 的任何节点都是 $T$ 的 $n$ 层级上的节点 .

如果 $T \in \mathbb{L}$，那么 $\{s \in [T] : stem(T) \in s\}$（即 $T$ 中位于 $stem(T)$ 之上的部分）可按如下方式枚举：

$$s_0^T = stem(T), s_1^T, ..., s_n^T, ... .$$

因此，我们可以按如下方式定义 $\mathbb{L}$ 上的序：令 $Q,T \in \mathbb{L}$,$Q \leqslant T$ 当且仅当 $Q \subseteq T$ 且

$$Q \leqslant_n T \text{ iff } stem(Q) = stem(T) \text{ and } s_i^Q = s_i^T \text{ for all } i = 0, ..., n.$$

我们称集合 $A \subseteq K^{\omega}$ 为一个$(t)$–集合，当且仅当

$$\forall_{T\in\mathbb{T}}\ \exists_{Q\in\mathbb{T}}\ Q \subseteq T \wedge ([Q] \subseteq A \vee [Q] \cap A = \emptyset).$$

我们称集合 $A \subseteq K^{\omega}$ 为一个$(t^0)$–集合，当且仅当

$$\forall_{T\in\mathbb{T}}\ \exists_{Q\in\mathbb{T}}\ Q \subseteq T \wedge [Q] \cap A = \emptyset.$$

全文中，我们假设一族树是一个$(t^0)$–集合，当且仅当其无限路径集合是实数集 $K^{\omega}$ 中的一个$(t^0)$–集合。因此，我们分别用 $\mathbb{S}^0$ ($\mathbb{L}^0$)表示所有$(s^0)$–集合（$(l^0)$–集合）组成的族。

$(s^0)-$ 集合和$(l^0)$–集合分别是 $2^{\omega}$ 和 $\omega^{\omega}$中的 $\sigma$–理想，这一事实是融合引理的应用（见下文第 2.3 节）。

在后续讨论中，除非另有说明，$\mathbb{T}$ 和 $\mathbb{T}^0$ 分别表示以下结构的 $\sigma$–理想：Sacks 树（即分别为 $(s)-$ 和 $(s_0)$–树）以及 Laver 树（即分别为 $(l)$–和 $(l^0)$–树）。随后，$(t)$、$(t^0)$和 $K$ 将根据这些结构相应确定。

## 2.2 Ellentuck 拓扑

实数集 $[\omega]^\omega$ 上的 Ellentuck 拓扑 $[\omega]^\omega_{EL}$ 由以下形式的集合生成:

$$[a, A] = \{B \in [A]^\omega \colon a \subset B \subseteq a \cup A\},$$

其中 $a \in [\omega]^{<\omega}$ 和 $A \in [\omega]^\omega$。我们称这类集合为 Ellentuck 集（简称$EL$-集）。显然

$$[a, A] \subseteq [b, B] \text{ iff } b \subseteq a \text{ and } A \subseteq B.$$

集合 $M \subseteq [\omega]^\omega$ 称为完全 Ramsey 集（简称 $CR$-集），当且仅当对于每个 $[a, A]$，都存在 $B \in [A]^\omega$ 使得

$$[a, B] \subseteq M \text{ or } [a, B] \cap M = \emptyset.$$

集合 $M \subseteq [\omega]^\omega$称为 Ramsey 零集（简称 $NR$-集），如果对于每个$[a, A]$，都存在 $B \in [A]^\omega$ 使得

$$[a, B] \cap M = \emptyset.$$

请注意，正是融合引理的应用（见第 2.3 节），使得所有 $NR$-集在$[\omega]^\omega_{EL}$ 中构成一个 $\sigma$-理想，我们将其记作 $\mathbb{NR}$。

以下事实将在后续论述中用于简化记号。

事实 1（[2]）设 $M$ 是一个开稠密集（就 Ellentuck 拓扑而言）。那么对于每个 $A \subseteq [\omega]^\omega$ 以及每个 $a \in [\omega]^{<\omega}$，存在 $B \subseteq [\omega]^\omega$，使得 $B \subseteq A$ 集合 $[\emptyset, B \cup a] \subseteq M$。

## 2.3 融合引理

设 $\mathbb{T}$ 为所有树组成的族。一个树的序列 $\{T_n\}_{n\in\omega}$ 满足

$$T_0 \geqslant_0 T_1 \geqslant_1 \ldots \geqslant_{n-1} T_n \geqslant_n \ldots$$

称为融合序列。

**Fact 2 ([11])** 若 $\{T_n\}_{n\in\omega}$ 是一个融合序列，则 $T = \bigcap_{n\in\omega} T_n$，（该融合

由 $\{T_n\}_{n\in\omega}$ 得到）属于 $\mathbb{T}$。

称一列 $\{[a_n, A_n]\}_{n\in\omega}$ $EL$集为融合序列，若其为无限列且

(1) $\{a_n\}_{n\in\omega}$ 是趋于无穷的非递减整数序列；(2) 对所有 $n \in \omega$, $A_{n+1} \in [a_n, A_n]$。

事实3（[11]）若 $\{[a_n, A_n]\}_{n\in\omega}$ 是融合序列，则

$$[a, A] = \bigcap_{n\in\omega} [a_n, A_n] = [a, \bigcap_{n\in\omega} A_n],$$

（$\{[a_n, A_n]\}_{n\in\omega}$的融合）是一个 $EL$集。

## 2.4 点有限覆盖

设 $B \in K^\omega$，其中 $K$ 如第2.1节所述。若一个族 $\mathcal{A} \subseteq P(B)$ 满足 $\bigcup\mathcal{A} = B$ 且

$$\{A \in \mathcal{A}\colon b \in A\}$$

对每个 $b \in B$ 都是有限的。

设 $M \subseteq [\omega]^\omega$。若一个族 $\mathcal{A} \subseteq P(M)$ 是 $M$ 的点有限覆盖，当且仅当 $\bigcup\mathcal{A} = M$ 且

$$\{A \in \mathcal{A}\colon a \in A\}$$

对每个 $a \in M$ 都是有限的。

# 3 主要结果

本部分将介绍本文的主要结果。我们先给出辅助引理，它们在定理 1 中起着关键作用。正如第 2.1 节所述，在引理 1 给出的构造中，我们更倾向于使用树的 Laver型结构，因为我们将节点的第 $n-$ 层划分为 $(n+1)$ 个节点子集，因此对每个 $n \in \omega$。

引理1 1. 设 $A \in P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$。对于由 $(t^0)$-集合组成的 $A$ 的任意点有限覆盖 $\mathcal{F}$，以及任意完美树 $T \in \mathbb{S}$，都存在一个完美子树 $Q \leqslant T$，使得该族

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q]\colon F_\alpha \in \mathcal{F}\}$$

的基数为连续统基数。

2. 令 $M \in P([\omega]^{\omega}) \setminus \mathbb{NR}$ 为一个开稠密集。对于由 $NR$ 集组成的 $M$ 的任意点有限覆盖 $\mathcal{F}$，以及任意 $[a, A] \subseteq [\omega]^{\omega}_{EL}$，存在 $[b, B] \subseteq [a, A]$，使得族

$$\mathcal{F}_{[b,B]} = \{F \cap [b, B] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

的基数为连续统基数。

证明。1. 令 $A \in P(K^{\omega}) \setminus \mathbb{T}^0$ 为任意集合，并令 $T \in \mathbb{T}$。令 $\mathcal{F}$ 为由 $(t^0)$– 集组成的 $A$ 的点有限覆盖。我们将通过 $n \in \omega$ 归纳构造一族子族 $\{\mathcal{F}_h \colon h \in k^n\}$（对于 Sacks 树，$k = 2$；对于 Laver 树，$k = n$），它们属于 $\mathcal{F}$；并构造一族完美子树 $\{T_h \colon h \in k^n\}$，它们是 $T$ 的子树，且满足以下性质：对于任意不同的 $h$、$h' \in k^n$

(i) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}$ and $T_h \leqslant T$;

(ii) $\bigcup\{\mathcal{F}_h \colon h \in k^n\} = \bigcup \mathcal{F}$;

(iii) $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}^0$;

(iv) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}_g$ and $T_h \leqslant_n T_g$, i.e. $[T_h] \subseteq [T_g]$, for $h \cap g = g$;

(v) $\mathcal{F}_h \cap \mathcal{F}_{h'} = \emptyset$ and $[T_h] \cap [T_{h'}] = \emptyset$;

(vi) $A \cap [T_h] \subseteq \mathcal{F}_h$ and $A \cap [T_h] \notin \mathbb{T}^0$.

第一步与后继步骤本质上相同。假设对于某个 $m \in \omega$，我们已经构造了这些族

$$\{\mathcal{F}_h \colon h \in k^m\} \text{ and } \{T_h \colon h \in k^m\}$$

性质 (i) - (vi)。

现在，固定 $h \in k^m$。记

$$W_n = \{x \in A \colon |\{F \in \mathcal{F} \colon x \in F\}| = n\}.$$

由于 $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}^0$，因此存在 $n \in \omega$，使得

$$W_n \cap \bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}^0.$$

Let

$$n_h = \min\{n \in \omega : W_n \cap \bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}_0\}.$$

W我们证明，对于任意满足 $W_{n_h} \cap A_\varepsilon \notin \mathbb{T}^0$ 且 $A_0$ 和 $A_1 = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus A_0$ 的

$$W_{n_h} \cap A_\varepsilon \cap (\bigcup \mathcal{F}_{h^\frown \nu} \setminus \bigcup \mathcal{F}_{h^\frown (1-\nu)}) \notin \mathbb{T}^0$$

对所有的 $\varepsilon$、$\nu \in \{0,1\}$。

考虑

$$\{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_h : \bigcup \mathcal{G} \cap A_0 \cap W_{n_h} \in \mathbb{T}^0\}.$$

那么，根据乌拉姆定理（见 [19] 和 [14, 第86]页），存在 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_1 = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_0$ 和

$$\bigcup \mathcal{G}_\nu \cap A_0 \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0$$

对每个 $\nu \in \{0,1\}$。

如果这些交集之一属于 $\mathbb{T}^0$，那么第二个交集必定属于 $P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$ 和

$$A' = \bigcup \mathcal{G}_0 \cap \bigcup \mathcal{G}_1 \cap A_0 \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0.$$

然后，我们按照上述类似的方法继续划分 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_1$，得到$\mathcal{G}_{00}$、$\mathcal{G}_{01} = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_{00}$、$\mathcal{G}_{10}$、$\mathcal{G}_{11} = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_{10}$，使得

$$A'' = A' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{00} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{01}) \notin \mathbb{T}^0$$

$$A''' = A' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{01} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{00}) \notin \mathbb{T}^0$$

$$A^{iv} = A'' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{10} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{11}) \notin \mathbb{T}^0$$

and

$$A^v = A'' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{11} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{10}) \notin \mathbb{T}^0.$$

现在，令 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_{00} \cup \mathcal{G}_{10}$ 和 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_{01} \cup \mathcal{G}_{11}$.。显然，$\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \bigcup \mathcal{F}_h$ 和

$$A^v \cap (\bigcup \mathcal{G}_{11} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{10}) \subseteq A' \cap (\bigcup \mathcal{H}_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}_0)$$

$$A^v \cap (\bigcup \mathcal{G}_{10} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{11}) \subseteq A' \cap (\bigcup \mathcal{H}_0 \setminus \bigcup \mathcal{H}_1)$$

$$A_0 \cap (\bigcup \mathcal{H}_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}_0) \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0$$

and

$$A_0 \cap (\bigcup \mathcal{H}_0 \setminus \bigcup \mathcal{H}_1) \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0.$$

如果上述集合之一属于 $\mathbb{T}^0$ ，那么我们就像上面一样继续，得到$\mathcal{H}_{00}$、 $\mathcal{H}_{01}$、$\mathcal{H}_{10}$、 $\mathcal{H}_{11}$等，直到得到两个都不属于 $\mathbb{T}^0$ 的集合。因此，令

$$\mathcal{F}_{h^\frown 0} = \{F \in \mathcal{F}_h \colon F \in \mathcal{H}_0\}$$

and

$$\mathcal{F}_{h^\frown 1} = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_{h^\frown 0}.$$

显然， $\mathcal{F}_{h^\frown 0}$ 和 $\mathcal{F}_{h^\frown 1}$ 具有性质 (i)–(iii)。

现在，我们将构造具有性质 (iv) 和 (vi) 的 $T_{h^\frown 0}$、 $T_{h^\frown 1} \leqslant_m T_h$ 。令$B_h(m)$为 $T_h$ 中 $m$层的所有节点构成的集合，并满足性质

$$t \in B_h(m) \text{ iff } \exists_{x \in [T_h]} \, (t \in x \wedge x \cap \bigcup \mathcal{F}_h \neq \emptyset).$$

由于对于任意 $t \in B_h(m)$， $split(t, T) = 2$，我们可以将 $B_h(m)$划分为互不相交的集合$B_{h^\frown 0}(m+1)$ $B_{h^\frown 1}(m+1)$，它们分别是满足 (iv)–(vi) 的树 $T_{h^\frown 0}$、 $T_{h^\frown 1} \leqslant_m T_h$ 的 $(m+1)$ –层。

定义

$$t \in B_{h^\frown 0}(m+1) \leftrightarrow \exists_{x \in [T_h]} \, (t \in x \wedge x \cap \bigcup \mathcal{F}_{h^\frown 0} \neq \emptyset).$$

以类似的方式定义 $B_{h^\frown 1}(m+1)$。注意，由于 (ii)， $B_{h^\frown 0}(m+1)$ 和$B_{h^\frown 1}(m+1)$ 均非空。至此，Sacks 树和 Laver 树的证明过程有所不同。

对于 Sacks 树，取子树 $T_{h^\frown 0}$、 $T_{h^\frown 1} \leqslant_m T_h$ ，使得

$$\{x \in [T_h] \colon \exists_{t \in B_{h^\frown 0}(m+1) \setminus B_{h^\frown 1}(m+1)} \, t \in x\} \subseteq [T_{h^\frown 0}]$$

$$\{x \in [T_h] \colon \exists_{t \in B_{h^\frown 1}(m+1) \setminus B_{h^\frown 0}(m+1)} \, t \in x\} \subseteq [T_{h^\frown 1}].$$

$(m+1)$-步的构造已完成。现在取

$$Q = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{h \in 2^n} T_h.$$

根据事实 2，我们有 $Q \in \mathbb{T}$。那么 $\mathcal{F}_{[Q]}$ 具有所需的性质。

对于 Laver 树。令 $B_h(m)$ 为 $T_h$ 中具有以下性质的所有 $m$ 层节点的集合

$$t \in B_h(m) \text{ iff } \exists_{x \in [T_h]} \, (t \in x \wedge x \cap \bigcup \mathcal{F}_h \neq \emptyset).$$

由于对于任意 $t \in B_h(m)$, $split(t,T) = \omega$，我们可以将 $B_h(m)$ 划分为互不相交的集合 $B_{h^\frown k}(m+1)$ $k = 0$、...、$m$，它们将分别成为 Laver 树 $T_{h^\frown k} \leqslant_m T_h$、$k = 0$、...、$m$ 的 $(m+1)-$层，并满足性质 (iv) - (vi)。定义

$$t \in B_{h^\frown 0}(m+1) \text{ iff } \exists_{x \in [T_h]}\ (t \in x \wedge x \cap \bigcup \mathcal{F}_h \neq \emptyset)$$

并且对于 $t \in B_{h^\frown k}(m+1)$，当 $k = 1, ..., m$ 时成立，当且仅当

(a) $t \notin \{B_{h^\frown l}(m+1)\colon\ l < k\}$ 且
(b) $\exists_{x \in [T_h]}\, (t \in x \wedge x \cap \bigcup \mathcal{F}_h \neq \emptyset)$。
注意，由于 (iii)，对于所有 $k = 0, ..., m$，所有 $B_{h^\frown k}(m+1)$ 都非空。

现在取子树 $T_{h^\frown k} \leqslant_m T_h, k = 0, ..., m$，使得

$$\{x \in [T_h]\colon \exists_{t \in B_{h^\frown 1}(m+1)}\ t \in x\} = [T_{h^\frown 1}].$$

$(m+1)$-步的构造已完成。现在，取

$$Q = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{h \in 2^n} T_h.$$

根据事实 2，树 $Q \in \mathbb{T}$。因此 $\mathcal{F}_{[Q]}$ 具有所需的性质。

2. 令 $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ 为任意集合。令 $\mathcal{F}$ 为由 $NR-$个集合组成的 $M$的点有限覆盖。根据事实 1，对于某个 $B \subseteq A$，我们可以考虑 $[\emptyset, B \cup a]$ 而不是 $[a, A]$。我们将按 $n \in \omega$归纳构造一族子族 $\{\mathcal{F}_h\colon h \in 2^n\}$，它们是 $\mathcal{F}$ 的子族；以及一族 $EL$-子集$\{[a_{h^\frown n,}, A_{h^\frown n}]\colon\ h \in 2^n\}$，它们是 $[\emptyset, B \cup a]$ 的子集，并满足以下性质：对于任意不同的 $h, h' \in 2^n$
(i) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}$ 和 $[a_h, A_h] \subseteq [\emptyset, B \cup a]$; (ii) $\bigcup\{\mathcal{F}_h\colon$ $h \in 2^n\} = \bigcup \mathcal{F}$; (iii) $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{NR}$; (iv) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}_{h\restriction(n-1)}$ 和 $[a_h, A_h] \subseteq [a_{h\restriction(n-1)}, A_{h\restriction(n-1)}]$;
(v) $\mathcal{F}_h \cap \mathcal{F}_{h'} = \emptyset$ 和 $a_h \cap a_{h'} = \emptyset$; (vi) $M \cap [a_h, A_h] \subseteq \mathcal{F}_h$ 和 $M \cap [a_h, A_h] \notin \mathbb{NR}$。

第一步和后继步骤本质上是相同的。假设对于某个 $m \in \omega$，我们已经构造出了这些族

$$\{\mathcal{F}_h\colon h \in 2^m\} \text{ and } \{[a_h, A_h]\colon h \in 2^m\}$$

性质 (i)–(vi)。

现在，固定 $h \in 2^m$。记

$$W_n = \{x \in M : |\{F \in \mathcal{F} : x \in F\}| = n\}.$$

由于 $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{NR}$，因此存在 $n \in \omega$，使得

$$W_n \cap \bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{NR}.$$

Let

$$n_h = \min\{n \in \omega : W_n \cap \bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{NR}\}.$$

我们证明，对于任意满足 $W_{n_h} \cap M_\varepsilon \notin \mathbb{NR}$ 和 $M_1 = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus M_0$ 的 $M_0$，

$$W_{n_h} \cap M_\varepsilon \cap (\bigcup \mathcal{F}_{h^\frown \nu} \setminus \bigcup \mathcal{F}_{h^\frown (1-\nu)}) \notin \mathbb{NR}$$

对所有 $\varepsilon$、$\nu \in \{0, 1\}$,

考虑

$$\{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_h : \bigcup \mathcal{G} \cap M_0 \cap W_{n_h} \in \mathbb{NR}\}.$$

那么，由乌拉姆定理（参见 [19] 和 [14,，第 86] 页），存在 $\mathcal{G}_0$、$\mathcal{G}_1 = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_0$ 和

$$\bigcup \mathcal{G}_\nu \cap M_0 \cap W_{n_h} \notin \mathbb{NR}$$

对每个 $\nu \in \{0, 1\}$。

如果这些交集中的一个属于 $\mathbb{NR}$，那么第二个必然属于 $P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ 并且

$$M' = \bigcup \mathcal{G}_0 \cap \bigcup \mathcal{G}_1 \cap M_0 \cap W_{n_h} \notin \mathbb{NR}.$$

接下来，我们按照上面的方法继续对 $\mathcal{G}_0$ 和 $\mathcal{G}_1$ 进行划分，得到 $\mathcal{G}_{00}$、$\mathcal{G}_{01} = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_{00}$、$\mathcal{G}_{10}$、$\mathcal{G}_{11} = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_{10}$，使得

$$M'' = M' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{00} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{01}) \notin \mathbb{NR}$$

$$M''' = M' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{01} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{00}) \notin \mathbb{NR}$$

$$M^{iv} = M'' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{10} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{11}) \notin \mathbb{NR}$$

and

$$M^{v} = M'' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{11} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{10}) \notin \mathbb{NR}.$$

现在，令 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_{00} \cup \mathcal{G}_{10}$ 和 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_{01} \cup \mathcal{G}_{11}$.。显然， $\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \bigcup \mathcal{F}_h$ 和

$$M^v \cap (\bigcup \mathcal{G}_{11} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{10}) \subseteq M' \cap (\bigcup \mathcal{H}_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}_0)$$

$$M^v \cap (\bigcup \mathcal{G}_{10} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{11}) \subseteq M' \cap (\bigcup \mathcal{H}_0 \setminus \bigcup \mathcal{H}_1)$$

$$M_0 \cap (\bigcup \mathcal{H}_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}_0) \cap W_{n_h} \notin \mathbb{NR}$$

and

$$M_0 \cap (\bigcup \mathcal{H}_0 \setminus \bigcup \mathcal{H}_1) \cap W_{n_h} \notin \mathbb{NR}.$$

如果上述集合之一属于 $\mathbb{NR}$ ，那么我们就按上述方法继续，得到 $\mathcal{H}_{00}$、$\mathcal{H}_{01}$、 $\mathcal{H}_{10}$、 $\mathcal{H}_{11}$ 等，直到得到两个都不属于 $\mathbb{NR}$ 的集合。因此，令

$$\mathcal{F}_{h^\frown 0} = \{F \in \mathcal{F}_h \colon F \in \mathcal{H}_0\}$$

and

$$\mathcal{F}_{h^\frown 1} = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_{h^\frown 0}.$$

显然， $\mathcal{F}_{h^\frown 0}$、 $\mathcal{F}_{h^\frown 1}$ 具有性质 (i)–(iii)。

（为了构造 $EL$-集 $[a_{h^\frown 0}, A_{h^\frown 0}]$、 $[a_{h^\frown 1}, A_{h^\frown 1}]$，我们将使用类似于 Mathias 强迫的构造方法 [2]。）

取与 $\mathcal{F}_h$ 相关联的 $[a_h, A_h]$。将 $a_h$ 的所有子集枚举为 $s_1$、.....、 $s_k$，其中 $k = 2^m$。构造 $A_h$ 的子集序列:

$$C_0^h \supseteq C_1^h \supseteq ... \supseteq C_k^h \text{ and } D_0^h \supseteq D_1^h \supseteq ... \supseteq D_k^h$$

如下: 令 $C_0^h$、 $D_0^h \subseteq [A_h \backslash a_h]^\omega$ 和 $C_0^h \cap D_0^h = \emptyset$。给定 $C_i^h$、 $D_i^h$，如果存在 $C \subseteq C_i^h$ 和 $D \subseteq D_i^h$，使得 $M \cap [s_i, C] \subseteq \bigcup \mathcal{F}_{h^\frown 0}$ 且 $M \cap [s_i, D] \subseteq \bigcup \mathcal{F}_{h^\frown 1}$，那么令 $C_{i+1}^h$ : $= C$ 且 $D_{i+1}^h$ : $= D$。如果不存在，那么我们就令 $C_{i+1}^h$ : $= C_i^h$ 且 $D_{i+1}^h$ : $= D_i^h$。

Take

$$[a_{h^\frown 0}, A_{h^\frown 0}] = [a_h \cup \{\min C_k^h\}, C_k^h \setminus \{\min C_k^h\}]$$

and

$$[a_{h^\frown 1}, A_{h^\frown 1}] = [a_h \cup \{\min D_k^h\}, D_k^h \setminus \{\min D_k^h\}].$$

因此，我们构造出了族的集合 $\{\mathcal{F}_h \colon f \in 2^n\}$ ，并与之关联了满足 (i) - (vi) 的 $[a_h, A_h] \subseteq [\omega]^\omega_{EL}$ ，对所有 $n \in \omega$ 均成立。现在取

$$[\emptyset, B] = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{h \in 2^n} [a_h, A_h].$$

根据事实3，集合 $[\emptyset, B]$ 是一个 $EL$-集合。因此，我们得到 $\mathcal{F}_{[\emptyset,B]}$ 具有所需的性质。 ■

定理 1 1. 设 $A \in P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$，且 $\mathcal{F}$ 是由 ($t^0$)-集合组成的 $A$ 的点有限覆盖。若对于每个 $T \in \mathbb{T}$，满足 $A \cap [T] \neq \emptyset$，存在一个子树 $Q \leqslant T$（满足 $A \cap [Q] \neq \emptyset$），使得

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

具有连续统基数，则对于某个子族 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$， $\bigcup \mathcal{F}'_{[Q]}$ 不是 ($t$)-集合。

2. 设 $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$，且 $\mathcal{F}$ 是由 $NR$-集合组成的 $M$ 的点有限覆盖。若对于每个 $EL$-集合 $[a, A]$，满足 $M \cap [a, A] \neq \emptyset$，存在一个 $EL$-集合 $[b, B] \leqslant [a, A]$（满足 $M \cap [b, B] \neq \emptyset$），使得

$$\mathcal{F}_{[b,B]} = \{F \cap [b, B] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

具有连续统基数，那么对于某个子族 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$， $\bigcup \mathcal{F}'_{[b,B]}$ 不是一个 $CR$-集合。

证明。为方便起见，我们将给出定理第一部分的证明。第二部分类似。

枚举

$$\mathbb{T}' = \{T_\alpha \in \mathbb{T} \colon A \cap [T_\alpha] \neq \emptyset, \alpha \in 2^\omega\}.$$

设 $\mathcal{F}$ 是由 ($t^0$)-集合构成的 $A$ 的点有限覆盖。根据假设，对每棵树 $T_\alpha \in \mathbb{T}'$，都存在一棵子树 $Q_\alpha \leqslant T_\alpha$，使得该点有限

$$\mathcal{F}_{[Q_\alpha]} = \{F \cap [Q_\alpha] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

具有连续统基数。因此，对每个 $\alpha \in 2^\omega$，我们将选取不同的元素 $x_\alpha$、$y_\alpha \in [Q_\alpha]$，使得这些族

$$\mathcal{B}^0_\alpha = \{F \in \mathcal{F} \colon x_\alpha \in F \cap [Q_\alpha]\} \setminus \{F \in \mathcal{F} \colon F \in \{\mathcal{B}^0_\beta \cup \mathcal{B}^1_\beta \colon \beta < \alpha\}\}$$

$$\mathcal{B}^1_\alpha = \{F \in \mathcal{F} \colon x_\alpha \in F \cap [Q_\alpha]\} \setminus \{F \in \mathcal{F} \colon F \in \{\mathcal{B}^0_\beta \cup \mathcal{B}^1_\beta \cup \mathcal{B}^0_\alpha \colon \beta < \alpha\}\}$$

均非空。（这样的选择是可行的，因为 $\mathcal{F}_{[Q_\alpha]}$ 的基数为连续统，但每个 $\mathcal{F}^0_\beta$和 $\mathcal{F}^1_\beta$都是有限的，且 $\beta < \alpha$。）注意， $\mathcal{B}^0_\alpha$和 $\mathcal{B}^1_\alpha$互不相交。

现在，令 $\mathcal{B}^0 = \{\mathcal{B}^0_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ 且 $\mathcal{B}^1 = \{\mathcal{B}^1_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$。显然， $\mathcal{B}^0$ 和$\mathcal{B}^1$ 互不相交。

注意，对于任意 $\varepsilon \in \{0,1\}$， $\bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$ 都不是 (*t*)-集合。事实上，假设$\bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon \in \{0,1\}$ 是 (*t*)-集合。那么，存在 $Q_\alpha \leqslant T_\alpha$ 使得 $[Q_\alpha] \cap \bigcup \mathcal{B}^\varepsilon = \emptyset$。但根据构造，我们有

$$\{F \in \mathcal{F} : F \cap [Q_\alpha] \cap \bigcup \mathcal{B}^\varepsilon \neq \emptyset\}$$

非空。矛盾。

如果对于某个 $\varepsilon \in \{0,1\}$， $\bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$ 不是 (*t*)-集合，那么存在 $Q_\alpha \leqslant T_\alpha$ 使得 $[Q_\alpha] \subseteq \bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$，并且根据构造有 $[Q_\alpha] \cap \bigcup \mathcal{B}^{1-\varepsilon} \neq \emptyset$，这与族 $\mathcal{B}^0$ 和 $\mathcal{B}^1$ 的不相交性相矛盾。 ■

# 参考文献


[1]S. Argyros、S. Todorcevic S.，《分析中的 Ramsey 方法》，高等数学课程，巴塞罗那 CRM，2005 年。

[2] J. E. Baumgartner，《迭代强迫》，载于：集合论综述（编者：A. R. D. Mathias），伦敦数学学会讲义丛书第 87 卷，剑桥大学出版社，1983 年，第 1–59 页。

[3] J. Brzuchowski、J. Cicho´n、E. Grzegorek、C. Ryll-Nardzewski，《关于不可测并集的存在性》。Bull. Acad. Polon. Sci. S´er.Sci. Math. 27（1979），第6期，447–448。[4] L. Bukovsky，将任意划分为勒贝格零测集都会产生一个不可测集，Bull. Ac. Pol.: Math.，27（1979），431-435。[5] P. Dodos，解析集的稳定族，《数学讨论》98（2003）第2期，277–281。[6] E. Ellentuck，解析集是 Ramsey 集的新证明，《符号逻辑杂志》39（1974），163–165。[7] A. Emeryk、R. Frankie wicz 和 W. Kulpa，关于 Kuratowski 无处稠密集定理的评注，Bull. Ac. Pol.: Math.，27（1979），493-498。[8] R. Engelking，《一般拓扑学》（修订完成版），Heldermann Verlag，柏林，1989年。

[9] R. Frankiewicz、J. Jureczko、B. Weglorz，关于Marczewski 结构和拉弗结构中的 Kuratowski划分及 Ellentuck 拓扑，《格鲁吉亚数学杂志》26（2019年）第4期，591-598。[10] E. Grzegorek、I. Labuda，将集合划分为薄集以及 Kunugi 和卢津–诺维科夫被遗忘的定理。《数学讨论》155（2019年）第2期，267–285。[11] T. Jech，《多重强迫》，剑桥数学丛书，第88卷。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。[12] T. Jech，《集合论》，第三千年版，修订扩充版。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003年。[13] H. Judah、A. W Miller 和 S. Shelah，《Sacks 强迫、Laver 强迫和马蒂亚斯公理》，《数学逻辑档案》31（1992），145–161。[14] K. Kuratowski，《拓扑学》第1卷，波兰科学出版社；纽约；伦敦：学术出版社，1966年。[15] K. Kuratowski，关于不可分离度量空间的若干问题，´《基础数学》25（1935年），534–545。[16] K. Kuratowski，关于理想的一个定理及其在波兰空间中贝尔性质上的若干应用（俄文），《俄罗斯数学评论》31(5)（1976），124-127。[17] A. Louveau、S. G. Simpson，关于Ramsey 映射的可分像定理，《波兰科学院通报：数学辑》30（1982），第105-108页。[18]R. H. Solovay，一个每个实数集都是勒贝格可测的集合论模型，《数学年刊》92（1970），1-56。.[19] S. Ulam，关于集合的某些分解，《基础数学》20（1933），第222页。Joanna Jureczko弗罗茨瓦夫科技大学，电子学院，弗罗茨瓦

w，

波兰*e-mail: joanna.jureczko@pwr.edu.pl*