arXiv:2303.16652v1 [math.LO] 28 Mar 2023

贝尔空间的分割与点有限覆盖

Joanna Jureczko

关键词：贝尔空间，Kuratowski 分割，点有限族，K-理想，可测基数。

摘要

本文证明，豪斯多夫贝尔空间存在 Kuratowski 分割，当且仅当该空间存在点有限覆盖。

1 引言

Kuratowski 分割的存在性与 K. Kuratowski 于 1935年提出的一个古老问题有关，见 [1]，（继 Lusin 于 1912年发表的结果之后，([2])）：他提出的问题是，设函数 $f\colon X \to Y$（其中X 是完全可度量的，而 Y是可度量的），如果 Y中每个开集的原像都具有贝尔性质，那么该函数是否除去一个瘦集外处处连续。

上世纪 70 年代，Solovay（未发表的结果）和 Bukovsky 等人对这一问题进行了深入研究，([3])。关于 Kuratowski 分割的更多历史信息和相关结果可见 [4]。

1979年，在《波兰科学院通报》的同一期（Bull. Ac. Pol.: Math. 27 (1979)）中，发表了三篇关于这一问题的论文。在前两篇论文中，[5, 6] A. Emeryk、R. Frankiewicz 和 W. Kulpa 证明，Kuratowski 问题等价于断言：存在将完全可度量空间分割成贫集的分割，使得该分割中每个子族的并都具有贝尔性质（这样的分割称为 Kuratowski 分割）；并指出，如果 $\mathcal{F}$ 是一个

*数学主题分类：主要分类 03C25、03E35、03E55、54E52

权为 $\leqslant 2^{\omega}$的 Cech完备空间的分割，那么存在一个族$\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，使得 $\bigcup \mathcal{F}'$ 不具有贝尔性质。在第三篇论文中， [7],J. Brzuchowski、J. Cicho ´n、E. Grzegorek 和 C. Ryll-Nardzewski 对点有限覆盖而非分割证明了类似结果。

本文的主要结果是证明：豪斯多夫贝尔空间可被点有限覆盖覆盖，且覆盖中的集合均为瘦集并关于贝尔性质完全可加，当且仅当该空间存在一个由瘦集组成、具有相同可加性质的分割（定理 1 和定理2）。值得补充的是，不可能针对整个空间得到类似于定理2的结果，因为正如 [8] 所示，存在一个带有 Kuratowski 分割的不完备度量空间，而其完备化没有 Kuratowski 分割。

有了这样的结果，我们便可以为点有限覆盖给出此前针对分割所得的相应结果（见 [8, 9, 10]）。本文证明，关于可测基数存在性的结果（针对分割在 [11] 中给出）对于点有限覆盖也成立。其他例子见 [12] ，其中证明了 Marczewski 结构、Laver结构以及具有 Ellentuck拓扑的结构中不存在 Kuratowski 分割。最近，研究表明，在这些结构中可以得到类似结果，即以点有限覆盖取代分割（见 [13]）。

对于此处未引用的定义和事实，我们可参见例如 [14, 15] （拓扑学）和 [16] （集合论）。

2 定义和前文结果

全文中，我们假设 X 是豪斯多夫贝尔空间，即满足贝尔定理的豪斯多夫空间。

集合 $U \subseteq X$ 具有贝尔性质，当且仅当存在一个开集 $V \subset X$ 和一个贫集 $M \subset X$，使得 $U = V \triangle M$，其中 $\triangle$ 表示集合的对称差。

集合 $A \subseteq X$ 在 X 中是余瘦的，当且仅当 $X \setminus A$ 在 X 中是贫集。

事实1。（民间结果）设 X 是贝尔空间。设 $A \subseteq X$ 是 X 中的余瘦集，且 $C \subseteq X$ 是 X 中的贫集。那么集合 $A \cap C$ 是 A 中的贫集。

族 $\mathcal{A} \subset P(X)$ 关于性质 $\mathcal{P}$ 是完全可加的，简称

$\mathcal{A}$ 是 $CA(\mathcal{P})$，当且仅当 $\bigcup \mathcal{A}'$ 对所有 $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$都具有性质 $\mathcal{P}$。

设 X 是一个固定空间。若 $\mathcal{F}$ 将 X 分割为 X 的瘦子集，且 $\mathcal{F}$ 是 $CA(Baire)$，则称其为 Kuratowski 分割。我们定义并假设全文中

$$\kappa = \min\{|\mathcal{F}|: \mathcal{F} \text{ is Kuratowski partition of } X\}.$$

对于给定的基数 κ，我们将 $\mathcal{F} = \{F_\alpha: \alpha < \kappa\}$ 编号。在全文中，我们可以假设 κ 是正则基数。这是标准假设，（例如参见 [16]）。如果 κ 是奇异的，那么 $cf(\kappa)$将是最小的。事实上，少于 κ 个集合的任何并都是瘦的，这可由并定理 [15, 第 82] 页推出。若其不是瘦的，因而包含一个开集，就会得到一个大小小于 κ的 Kuratowski 分割。根据贝尔定理，κ 不可数。

对于任意一个由 κ 编号的 Kuratowski 分割 $\mathcal{F} = \{F_\alpha: \alpha < \kappa\}$，我们可以关联一个理想

$$I_{\mathcal{F}} = \{A \subset \kappa: \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha \text{ is meager}\},$$

我们称之为 K-理想。显然，$I_{\mathcal{F}}$ 是非主的，并且 $[\kappa]^{<\kappa} \subseteq I_{\mathcal{F}}$。$K$-理想是 κ-完备的，这是并定理 [15, 第 82] 页的推论。此外，根据 [8, 事实 13]，如果 $\pi w(X) \leqslant 2^\omega$，则 X上不存在 Kuratowski 分割。因此，κ 至少为 ω_1。

如果一个族 $\mathcal{F}$ 中的每个点 X 只属于其中有限多个成员 $\mathcal{F}$，则称该族为点有限的。

3 主要结果

定理 1 设 X 为一个 Hausdorff空间，且 $A \subset X$ 是 X 的一个贝尔子空间，并且 $A \subset X$ 具有 Kuratowski 分割。则存在一个 $CA(Baire)$ 点有限覆盖 $\mathcal{G}$，由贫集覆盖 A。

证明。设 $\mathcal{F}$ 是 A 的一个 Kuratowski 分割。于是

$$|\{F \in \mathcal{F}: x \in F\}| = 1$$

对于任意 $x \in A$。因此，$\mathcal{F}$ 是 A的点有限覆盖。 ■

命题 1 假设 $n<\omega$ 和 $\{Z_\alpha\colon\ \alpha<\kappa\}$ 是集合 X的一个覆盖，使得对于每个 $x\in X$, $|\{\alpha<\kappa\colon\ x\in Z_\alpha\}|=n$ 。那么存在不相交的集合 $\{Y_\alpha\colon\ \alpha<\kappa\}$ ，使得

$$Y_\alpha\subseteq Z_\alpha\ for\ \alpha<\kappa\ and\ \bigcup_{\alpha<\kappa}Y_\alpha=X.$$

证明。设 $\{Z_\alpha\colon\alpha<\kappa\}$ 是集合 X 的一个覆盖。根据假设

$$|\{\alpha<\kappa\colon x\in Z_\alpha\}|=n\text{ for each }x\in X.$$

对每个 $x\in X$ 记作

$$A_x^n=\{\alpha<\kappa\colon x\in Z_\alpha\}.$$

显然， $|A_x^n|=n$。对于每个这样的 $\alpha<\kappa$ ，我们将构造集合 $\{Z_\alpha^k\colon 1\leqslant k\leqslant n\}$ 的一个递减序列。我们从 $Z_\alpha^n=Z_\alpha$ 开始。然后取

$$Z_\alpha^{n-1}=Z_\alpha^n\setminus\{x\in X\colon\min A_x^n=\alpha\}.$$

现在，定义 $A_x^{n-1}=\{\alpha<\kappa\colon x\in Z_\alpha^{n-1}\}$。则 $|A_x^{n-1}|=n-1$。接下来，取

$$Z_\alpha^{n-2}=Z_\alpha^{n-1}\setminus\{x\in X\colon\min A_x^{n-1}=\alpha\}$$

并定义 $A_x^{n-2}=\{\alpha<\kappa\colon\ x\in Z_\alpha^{n-2}\}$。则 $|A_x^{n-2}|=n-1$。继续这一构造，我们最终定义 Z_α^1 ，使得 $|A_x^1|=|\{\alpha<\kappa\colon x\in Z_\alpha^1\}|=1$。因此，对于每个 $\alpha<\kappa$ ，我们得到 $\{Z_\alpha^1\colon\alpha<\kappa\}$ 的两两不交子集 X。令 $Y_\alpha=Z_\alpha^1$ ，即可得到所要证明的结论。

■

定理2 设 X 是一个豪斯多夫贝尔空间，它允许由贫集构成一个 CA（$Baire$）点有限覆盖。则存在一个余贫子集 $B\subseteq X$ ，它具有 Kuratowski 分割。

证明。设 $\mathcal{G}$ 表示由贫集构成的 X 的一个 CA（$Baire$）点有限覆盖。对于任意 $n\in\omega$，考虑集合

$$W(n)=\{x\in A\colon|\{G\in\mathcal{G}\colon x\in G\}|=n\}.$$

注意，只要 $n\neq m$，对于任意 $n,m<\omega$， $W(n)\cap W(m)=\emptyset$。根据贝尔定理，某些 $W(n)$ 不是瘦集。令

$$K=\{n\in\omega\colon W(n)\text{ is non-meager}\}.$$

Let

$$B = \bigcup \{W(n) : n \in K\}.$$

显然， B 是余瘦集。令

$$\mathcal{G}_B = \{G \cap B : G \in \mathcal{G}\}$$

是 B 的点有限覆盖。根据事实1，我们注意到 $G \cap B \in \mathcal{G}_B$ 是瘦的。

现在，对每个 $n \in K$ 以及每个 $x \in W(n)$，定义

$$C_x^n = \{G \cap B \in \mathcal{G}_B : x \in G\}.$$

显然，$|C_x^n| = n$。对于每个这样的 C_x^n，我们应用命题1，得到一族互不相交的瘦集

$$\mathcal{F}_B = \{F \subseteq G \cap B : G \cap B \in C_x^n, n \in K, x \in W(n)\}.$$

根据并定理， [15, p.82] 这一族是所需的库拉托夫斯基分划。

■

4 推论

定理3 若 $ZFC+$ 存在一个贝尔豪斯多夫空间 X，且存在一个由瘦集组成的 CA（$Baire$）点覆盖 X，则 $ZFC+$ 存在可测基数这一命题也成立。

证明。设 κ 是某个贝尔空间 X 的一个由贫集构成的 CA($Baire$) 点有限覆盖的最小正则基数。选取这样的一个覆盖，并记为 $\mathcal{G}$。

由定理2，存在一个余贫子集 $B \subseteq X$，它具有一个 Kuratowski 分割。

设 $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是 B 的一个 Kuratowski 分割。考虑与 $\mathcal{F}$ 相关联的一个 $K-$ 理想 $I_{\mathcal{F}}$。这样的理想是 κ-完备且非主的。

现在，我们将修改 [11] 中给出的证明。定义函数族 $P(V)$，其中 V 是全集，即当且仅当 $f : X \to V$ 且存在 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}_f$，它在 X 中稠密，并且对于任意 $U \in \mathcal{U}_f$ 和 $F_\alpha \in \mathcal{F}$， f 在 $U \cap F_\alpha$ 上为常数时， $f \in P(V)$。

对于任意 $f, g \in P(V)$，这些集合

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} : f(x) = g(x)\} \text{ and } \{x \in \bigcup \mathcal{F} : f(x) \in g(x)\}$$

具有贝尔性质。为此，取 $W \in \{U \cap V\colon U \in \mathcal{U}_f, V \in \mathcal{U}_g\}$。那么

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F}\{\cap W\colon f(x) = g(x)\} = \bigcup\{F_\alpha \cap W\colon \alpha \in A\}$$

and

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F}\{\cap W\colon f(x) \in g(x)\} = \bigcup\{F_\alpha \cap W\colon \alpha \in B\}$$

对某些 A、$B \subseteq \kappa$。由于 $\mathcal{F}$ 是 B 的 Kuratowski 分割，因此

$$\mathcal{F} \cap W = \{F_\alpha \cap W\colon F_\alpha \in \mathcal{F}\}$$

是 W 的 Kuratowski 分割。根据 Banach 局部化定理，两者

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F}\colon f(x) = g(x)\} \text{ and } \{x \in \bigcup \mathcal{F}\colon f(x) \in g(x)\}$$

都具有贝尔性质。

令 $\mathbb{B}$ 为 X 的正则开子集构成的布尔代数，并令 G 为 $\mathbb{B}$ 上的泛滤子。

考虑极限超幂 $P(V)/G$（取 Keisler 意义，参见例如 [17]），它是 ZFC 的一个模型。根据 Lo´s 定理 $[16, p.159]$，我们有

$$P(V)/G \models \varphi([f_1], [f_2], ..., [f_n])$$

iff

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F}\colon \models \varphi(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))\} \in G,$$

其中 f_1、f_2、.....、$f_n \in P(V)$。

如同 [16, 第 284-288] 页所示，我们可以定义一个自然嵌入 $j_G\colon V \to P(V)/G$，$j_G(x) = [c_x]$，其中 $c_x\colon \bigcup \mathcal{F} \to V$ 满足：对所有 $t \in \bigcup \mathcal{F}$，$c_x(t) = x$。$P(V)/G$ 是良基的（见 [16, 第 286] 页），即

$$P(V)/G \models f_1 \ni f_2 \ni ... \ni f_n \ni ...,$$

then

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F}\colon f_n(x) \ni f_{n+1}(x)\}$$

在 $\bigcup \mathcal{F}$ 中是余瘦的。

根据贝尔范畴定理，存在 $x_0 \in \bigcup \mathcal{F}$

$$f_0(x_0) \ni f_1(x_0) \ni ... \ni f_n(x_0) \ni ...$$

如 [16, 第 287] j_G 页所示（κ）$> \kappa$。根据 [16, 第 287] 页，存在一个可测基数。

■

致谢 作者非常感谢审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见，这些意见帮助作者避免了所呈现结果中的错误和不足。

参考文献

[1]K. Kuratowski，关于不可分度量空间的一些问题，Fund. Math. 25 (1935) 534–545。[2] N. Lusin，关于可测函数的性质，Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 154 (1912)，1688–1690。[3] L. Bukovsk´y，任意将集合划分为勒贝格零测集都会产生一个不可测集，Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. 27(6) (1979) 431–435。[4] J. Jureczko，库拉托夫斯基划分，Raporty Katedry Telekomunikacji i Teleinformatyki。2022年，Ser. PRE nr 6，175页，（弗罗茨瓦夫科技大学预印本）。[5] A. Emeryk、R. Frankiewicz 和 W. Kulpa，关于具有贝尔性质的函数，Bull. Ac. Pol.: Math. 27 (1979) 489–491。[6]A. Emeryk、R. Frankiewicz 和 W. Kulpa，关于库拉托夫斯基的瘦集定理的评注，Bull. Ac. Pol.: Math. 27 (1979) 493-498。[7] J. Brzuchowski，J. Cicho´n，E. Grzegorek，C. Ryll-Nardzewski，关于不可测并集的存在性。Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. 27 (1979)，第6期，447–448。[8] J. Jureczko，完备理想上的新运算，Open Math. 17(1) (2019)，415–422。[9] J. Jureczko，贝尔空间的特殊分割与骤降理想，Top. App.，322 (2022)。[10] J. Jureczko，关于度量空间中库拉托夫斯基划分的一则短札。Raporty Katedry Telekomunikacji i Teleinformatyki。2022年，Ser. PRE nr 22，9页，（弗罗茨瓦夫科技大学预印本）。[11] R. Frankiewicz 和 K. Kunen，具有贝尔性质的函数的库拉托夫斯基问题的解，I，Fund.Math. 128 (1987)，第3期，171–180。[12] R. Frankiewicz，J. Jureczko，B. Weglorz，关于 Marczewski 结构和 Laver 结构及 Ellentuck拓扑中的库拉托夫斯基划分。Georgian Math. J. 26(4) (2019)，591–598。

[13]J. Jureczko，《树结构中的不可测集与 Ellen-tuck 拓扑》，电信与信息技术系报告。2022年，PRE 系列第 21 号，15 页，（弗罗茨瓦夫科技大学预印本）。[14] R. Engelking，《一般拓扑学》，Heldermann 出版社，柏林，1989年。[15] K. Kuratowski，《拓扑学》，第 1 卷，学术出版社，纽约和伦敦，1966年。[16] T. Jech，《集合论》，第三千年版，修订并扩充。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003年。[17] C. C. Chang、H. J. Keisler，《模型论》，北荷兰出版社，1978年。

Joanna Jureczko弗罗茨瓦夫科技大学，弗罗茨瓦夫，波兰 电子邮件：joanna.jureczko@pwr.edu.pl