arXiv:2303.16705v1 [cs.CC] 29 Mar 2023

平面三路 边完美匹配导出 Holant 二分定理

Jin-Yi Cai* Austen Z.Fan*
jyc@cs.wisc.edu afan@cs.wisc.edu

摘要

我们证明了一个关于平面三正则二分图上一类 Holant 问题的复杂性二分定理。该复杂性二分定理指出，对于每个定义此问题的加权约束函数f（权重甚至可以为负），如果 f 满足可处理性判据，则该问题可在多项式时间内计算；否则，该问题是 #P-困难。该问题空间中的一个特定问题，是 Moore 和 Robson [MR01]提出的、关于计数三次平面 X3C 的一个长期未解问题。该二分定理通过证明这个问题是 #P-困难，解决了这一问题。我们的证明依赖于在 Holant 问题研究中发展起来的签名理论工具。证明主要二分定理的一个关键要素是一个纯粹的图论结果：除了一些平凡情形，每个 3-正则平面图都有一个平面三路边完美匹配。该图论结果的证明技巧结合了代数方法和组合方法。

该二分定理的 P 时间可处理性判据是明确的。除了已知的可处理约束函数类别（退化、仿射、乘积型、可变换为匹配门）外，我们还发现了一组新的无限集合，其中的平面 Holant 问题均可在 P 时间内计算；不过，这些问题的可处理性并非通过直接进行全息变换而变换为匹配门来实现，而是结合了这种方法与全局论证。复杂度二分定理指出，该 Holant 类中的其他所有问题都是 #P-困难的。

*计算机科学系，威斯康星大学麦迪逊分校。

1 引言

Holant 问题也称为边着色模型。它们可以表达广泛的计数问题，例如匹配计数、完美匹配计数（#PM）、正常边着色、环覆盖，以及大量定向计数问题，如欧拉定向计数或六顶点模型。每个计数约束满足问题（#CSP）都可以表示为 Holant 问题。另一方面，Freedman、Lov´asz 和 Schrijver [FLS07] 证明了，典型的 Holant 问题 #PM 无法通过任何实值约束函数表示为图同态函数（顶点着色模型）。即使是复值约束函数，这一结论也成立 [CG19]。

有些问题一般情况下是#P-困难的，但在平面图上却可以计算。问题#PM就是这样一个问题 [Val79, Jer87]。一种极为精妙的算法——FKT算法 [Kas67, Kas61, TF61]——能够在多项式时间内（FP，即可在多项式时间内计算的函数）计算平面图上的#PM。Valiant引入了全息算法，这些算法是针对FKT算法的非保数归约，从而将许多原本看似不可处理的平面计数问题置于FP之中。为了理解这些算法，人们发展出了签名理论，并引入了Holant框架。在这一签名理论中，Valiant的全息算法归结为：在全息变换下，哪些约束函数（签名）能够由所谓的匹配门签名实现。刻画这些问题中FP可解性的精确边界，一直是计数问题分类理论的核心研究方向 [Bac21, CF17, CFGW22, GW20, CLX17, Val08]。一个普遍的主题逐渐显现：对于非常广泛的计数问题类别，可以将其中的每个问题分类为恰好以下三种类型之一：（1）FP；（2）一般情况下是#P-困难的，但在平面图上属于FP；或（3）在平面图上也是#P-困难的。此外，对于所有布尔变量上的#CSP（其中包括顶点模型），Valiant的全息算法是一种通用算法 [CF17]，能够解决类型（2）中的问题[1]。在本文中，我们证明，对于一类二分Holant问题，这种三分分类成立。然而，类型（2）中的平面可解性存在两种方法：除了通过全息变换得到匹配门之外，还有另一种方法，它将这种变换与全局论证相结合。单独使用其中任一方法都不能实现通用性，但二者结合后确实构成了一种平面可解性的通用策略。

我们简要定义布尔变量上的 Holant 问题。一个输入是一个签名网格 Ω，由图 $G = (V, E)$ 构成，其中每个顶点 v 都标记有一个约束函数 f_v（也称为签名）。Holant 问题是计算积和 Holant(Ω) $= \sum_{\sigma: E\to\{0,1\}} \prod_{v\in V} f_v(\sigma|_{E(v)})$，其中 $E(v)$ 表示与 v关联的边。例如，#PM 是一个计数问题，其中每个 f_v都是取值为 0-1 的 Exact-One函数。在平面 Holant 问题（记为 Pl-Holant）中，要求 G 是平面图，且 f_v 的输入来自 $E(v)$，并按从某条边开始的循环次序排列（该边由 Ω 指定）。

本文研究一类输入图为平面、3-正则且二分的 Holant问题。更准确地说，设 $f = [f_0, f_1, f_2, f_3]$ 是任意一个三元约束函数：当输入的汉明重量为 i 时取值 $f_i \in \mathbb{Q}$。我们允许正值和负值。我们研究 Pl-Holant（$f \mid (=_3)$）问题，即定义在平面、3-正则二分图上的 Holant问题，其中左侧顶点赋予 f，右侧顶点赋予三元相等约束（$=_3$）。在没有平面性限制的情况下，文献 [CFL23]已证明这类二分 Holant问题具有复杂度二分定理。平面性与

[1]然而，对于一般的 Holant 问题，情况并非如此[CFGW22]。回想一下，FKT算法可以解决平面图上的完美匹配计数；而它是一个 *the* 典型的 Holant 问题，却不是顶点模型，这一点尤其耐人寻味。

正则性使问题变得更加困难。

可以将它们视为3-正则3-均匀超图上的计数问题，或者视为集合系统，其中每个子集的基数均为3，且每个元素都出现在3个子集中。这里的平面性指的是其（二分）关联图的平面性。这些问题中包括一些经过充分研究的问题。Moore 和 Robson 在 [MR01] 提出的一个长期悬而未决的问题是：对三次平面X3C进行计数（X3C代表 Exact-3-Cover），或者等价地，对三次平面单调1-in-3 SAT进行计数。将其表述为 Holant问题，就是 Pl-Holant ($[0,1,0,0] \mid (=_3)$)，其中 $[0,1,0,0]$ 是三元 Exact-One 函数。Schaefer [Sch78] 证明了单调1-in-3 SAT 是 NP 完全的。Lichtenstein [Lic82] 首先研究了许多平面问题的复杂性，而 Laroche [Lar93] 证明了平面单调1-in-3 SAT 是 NP 完全的。单调1-in-3 SAT 与 X3C 相同。Dyer 和 Frieze [DF86]证明了平面 X3C 以及三维匹配的 NP 完全性，其中每个元素属于2个或3个基数为3的子集。Moore 和 Robson [MR01], 通过一次使用巧妙组合构件的归约，证明了当每个元素恰好属于3个子集时，该问题仍然是 NP 完全的。然而，他们指出，无法据此得出其计数版本的#P困难性；该计数版本恰好是 Pl-Holant ($[0,1,0,0] \mid (=_3)$)，而此前这里列出的所有 NP 完全性证明都确实可以扩展为其计数版本的#P困难性。我们注意到，这些证明都是组合性的；随着平面性和正则性限制的加入，它们变得愈发精细复杂。

我们的证明运用了研究 Holant 问题时发展起来的签名理论工具。这些代数证明表明，底层的组合构造是可行的。这套工具展现了运用代数方法证明具有组合性质的复杂度结果的力量。事实上，这恰恰体现了 Valiant 全息算法的精神：通过算术抵消实现对计数整体有效的归约，但解之间并非一一对应（即非保数归约）。

研究 3-正则二分Holant问题的一大难点，在于可构造构件受到严格限制。可以证明，在二分问题的任一侧，每个可构造构件所定义的约束函数，其元数都是 3 的倍数。因此，无法直接在任一侧构造一元签名或二元签名。 可以 构造“跨侧”签名，使其从一侧和另一侧各取一些输入变量。通常，“退化”签名对证明二分定理并无太大用处。CFL 提出的一个反直觉想法是 [CFL23] 利用跨侧和退化签名，“虚拟地”构造一元签名。这一想法为忽略平面性的情形下这些二分计数问题带来了复杂度二分。而 Valiant 全息算法的精髓以及 Holant 问题研究的核心，在于考量平面可解性；我们知道，这一类中有些问题一般情况下是 #P-困难的，但在平面图上属于 FP（函数多项式时间）。

本文通过证明一个平面复杂性二分定理，解决了这一问题。一个主要的技术挑战是如何以平面方式“虚拟地”构造一元签名。我们证明了一个纯粹的图论结果：除了一些平凡情形外，每个 3-正则平面图 [2] 都有一个平面三路边完美匹配（P3EM）。我们将其作为证明该二分定理的关键要素。这一结果本身也值得关注。证明这一匹配定理所用的技巧结合了代数方法和组合方法。该定理使我们能够在 #P 困难性归约中虚拟地“构造”并随后“吸收”一元签名，从而得以用平面方式完成所需的 #P 困难性归约。

[2] 3-正则图也称为 *cubic* 图。三次平面图的性质已被广泛研究[HM88，ABHM00，NRR20，HT06，Sch74]。

2 预备知识与主要定理

一个元数为 n 的（对称）约束函数（又称签名）是 $f = [f_0, f_1, \ldots, f_n]$，其中 f_i表示汉明重量为 i 的输入所对应的函数值。例如，三元 Exact-One 函数是 $[0,1,0,0]$,，而三元 Equality 函数（$=_3$）是 $[1,0,0,1]$。本文考虑以下一组 Holant 问题，记作 Pl-Holant（$f \mid (=_3)$），其中 f 是三元函数。输入是一个签名网格 Ω，由一个平面 3-正则二分图 $G = (U, V, E)$ 构成，其中 U中的每个顶点都被赋予取值为 $f_i \in \mathbb{Q}$的 $f = [f_0, f_1, f_2, f_3]$，而 V中的每个顶点都被赋予（$=_3$）。Holant 问题要求计算

$$\text{Holant}(\Omega) = \sum_{\sigma: E \to \{0,1\}} \prod_{u \in U} f\left(\sigma|_{E(u)}\right) \prod_{v \in V} (=_3)\left(\sigma|_{E(v)}\right).$$

为清晰起见，我们称 U 中的顶点位于左侧（LHS），称 V 中的顶点位于右侧（RHS）。我们可以将元数为 n 的签名写成向量 $\mathbb{Q}^{2^n}$，其分量按字典序排列。若存在一元签名 $u \in \mathbb{C}^2$，使得 $f = f = u^{\otimes n}$（即 n 次张量幂），则（对称）签名 f 是退化的。

本文的主要结果是以下二分定理:

定理 2.1. Pl-Holant ($f \mid (=_3)$)，其中 $f = [f_0, f_1, f_2, f_3]$ 且 $f_i \in \mathbb{Q} (0 \le i \le 3)$，是 #P-困难的，但以下情况除外；在这些情况下，问题属于 FP：(1) f 是退化的；(2) $f =[a,0,0,b]$，其中某些 a、b；(3) $f = [a,0,\pm a,0]$、$[0,a,0,\pm a]$、$[a,-a,-a,a]$、$[a,a,-a,-a]$，其中某些 a；(4) $f = [a,b,b,a]$ 或 $f = [a,b,-b,-a]$，其中某些 a、b；(5) $f = [3a+b,-a-b,-a+b,3a-b]$，其中某些 a、b。不施加平面限制时，Holant($f \mid (=_3)$) 在情况 (1)、(2) 和 (3) 下仍属于 FP，但在情况 (4) 和 (5) 下是 #P-困难的。

在情况（1）中，签名 f可分解为三个一元签名。在情况（2）中，f是一个广义相等。在情况（3）中，f 属于仿射类。在情况（4）中，Holant问题可归约为带有匹配门的平面#PM（关于这些可处理类的更多细节，参见 [CC17]）。在情况（5）中，平面情形下的多项式时间可处理性既不单是 依靠 Valiant 的全息归约，也不 完全独立于它，而是通过全息归约与全局论证相结合实现的。

如第 1 节所述，对 三次平面X3C 进行计数就是 Pl-Holant（$[0,1,0,0] \mid (=_3)$，也就是 Moore 和 Robson [MR01]所提出的计数问题。显然，它属于这一类。它也等价于三次平面单调1-in-3 SAT。根据定理 2.1，该问题是 #P 完全的。

为证明情形 (5) 可在平面情形下高效求解，我们证明：对于任意 a 和 b，在任意平面签名网格上，$f = [3a+b,-a-b,-a+b,3a-b]$ 的 Pl-Holant ($f \mid (=_3)$) 的值恰好等于同一签名网格上 Pl-Holant ($[0,2a,0,0] \mid [0,1,0,0]$) 的值。因此，可以用 FKT 算法计算完美匹配。事实上，通过使用$H = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ 进行全息变换，我们得到以下一系列等价关系：

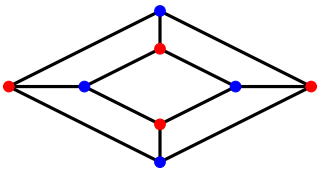
$$\begin{aligned}
\text{Pl-Holant}\left(f \mid (=_3)\right) &\equiv_T \text{Pl-Holant}\left(fH^{\otimes 3} \mid (H^{-1})^{\otimes 3}(=_3)\right) \\
&\equiv_T \text{Pl-Holant}\left([0,0,2a,2b] \mid [1,0,1,0]\right) \\
&\equiv_T \text{Pl-Holant}\left([0,0,2a,0] \mid [0,0,1,0]\right) \\
&\equiv_T \text{Pl-Holant}\left([0,2a,0,0] \mid [0,1,0,0]\right)
\end{aligned}$$

其中，第三个等价关系源于以下观察：对于 Holant 求和中的每个非零项，左侧的每个顶点都有三条边中的至少两条被赋值为 1（来自 $[0,0,2a,2b]$），而右侧的每个顶点都有三条边中的至多两条被赋值为 1（来自 $[1,0,1,0]$）。由于该图是二分且为 3-正则，左右两侧的顶点数必须相等，因此每个顶点恰有两条关联边被赋值为 1。

属于情形 (5) 的一个平面可解问题示例如下。它可以看作是一个关于度为 3 的 3-均匀超图的覆盖问题。如果 $\mathcal{S}$ 由一族集合 $S \subset X$组成，其中每个集合的大小为 $|S| = k$，且每个 $x \in X$ 恰好属于 3 个集合，那么我们称 $(X, \mathcal{S})$ 为一个 3-正则k-均匀集合系统（或 3-正则 k-均匀超图）。如果 $k = 2$，这就是一个普通3-正则图（其中的 2 元子集是普通的边）。我们考虑 3-正则3-均匀集合系统。如果每个 $x \in \bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S$ 都属于多个集合 $S \in \mathcal{S}'$，那么我们称 $\mathcal{S}'$ 为无叶部分覆盖。如果 x 满足 $|\{S \in \mathcal{S}' : \ x \in S\}|$ 为 2，那么我们称其为轻度覆盖；如果该数值为 3，则称其为重度覆盖。

问题：加权无叶部分覆盖。
输入：一个 3-正则 3-均匀集合系统 $(X, \mathcal{S})$。
输出：$\sum_{\mathcal{S}'}(-1)^l 2^h$，其中求和遍历所有无叶部分覆盖 $\mathcal{S}'$，而 l （分别是 h）表示轻度覆盖（分别是重度覆盖）的 $x \in X$ 数量。

用 Holant 框架表示，该问题就是 Holant $(f \mid (=_3))$，其中 $f = [1, 0, -1, 2]$。该问题属于情形 (5)，其中 $a = 1/2$ 和 $b = -1/2$。



Fi图 1：加权无叶部分覆盖问题的一个小实例

图1 展示了该问题的一个小实例。蓝点表示元素 x，红点表示集合族 S。元素 x 属于集合 S 当且仅当 x的蓝点与 S的红点相连。不难看出，恰有 6 个无叶部分覆盖，分别为 $\emptyset$、任意由 3 个集合组成的族（共有 4 个），以及包含全部 4 个集合的族。因此，该实例的 Holant 值为 $1+4(-1)^3 2^1 + 2^4 = 9$。还可以验证，图 1 中的图恰有 9 个不同的完美匹配。1。

因此，已知情形 (1)–(5) 属于 FP（函数多项式时间）。主要结论在于，其他所有情形在平面图上都是 #P-困难的。情形 (4) 和 (5) 恰好涵盖了那些在一般图上是 #P-困难、但在平面图上属于 FP 的问题；单独一个情形都无法做到这一点。

本文中的构件（例如图 19和图 26中所示的构件）是一个平面 3-正则二分图 $G = (U, V, E_{\text{in}}, E_{\text{out}})$，包含内部边 E_{in} 和悬挂边 E_{out}。其中可以有m条悬挂边在内部与来自 U 的顶点相接，以及 n 条悬挂边在内部与来自 V的顶点相接。这些 $m+n$ 条悬挂边对应于布尔变量 x_1、……、x_m，y_1、……、y_n，且该构件定义了一个签名

$$f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma: E_{\text{in}} \to \{0,1\}} \prod_{u \in U} f\left(\widehat{\sigma}|_{E(u)}\right) \prod_{v \in V} (=_3)\left(\widehat{\sigma}|_{E(v)}\right),$$

其中，$\widehat{\sigma}$ 表示由悬挂边上的赋值对 σ 进行扩展。变量

$x_1,\dots,x_m$（分别为 $y_1,\dots,y_n$）称为左侧（分别为右侧）变量，并需在 Pl-Holant ($f \mid (=_3)$) 中与右侧（分别为左侧）签名在外部连接。

由于平面性和二分性的限制，Pl-Holant ($f \mid (=_3)$)中可构造的构件受到严重限制。设 g 是一个构件构造的签名，且其所有变量都位于左侧。通过简单的计数论证可知， g 的元数必须是 3 的倍数。对于所有变量都位于右侧的构件构造，同样如此。尤其是，我们无法期望在任一侧构造出任何一元函数或二元签名。然而，研究 Holant 问题时，能够使用一元函数或二元签名已被证明非常有用。

为了解决这一困难， [CFL23] 引入了跨侧构件，这类构件同时具有左侧和右侧变量。例如，在图 19 中的构件 G_1 中，若我们在方形顶点处放置 f ，并在圆形顶点处放置$(=_3)$，那么它有一个左侧变量（连接到方形顶点的悬挂边）和一个右侧变量（连接到圆形顶点的悬挂边）。我们将签名 f 的各项取值列于签名矩阵 M_f 中，其中行 R 和列 C 分别对应输入变量 $X = R \cup C$的赋值，且按字典序排列。我们可以将 f 与M_f等同起来。当通过合并 f 的列变量所对应的悬挂边与 g的行变量所对应的悬挂边来复合两个签名 M_f 和 M_g 时，所得签名的签名矩阵就是矩阵乘积 $M_f M_g$。在我们的论文中，复合必须遵循二分性和平面性。另外请注意，若一个跨侧构件有 m 条悬挂边要连接到右侧，并有 n 条悬挂边要连接到左侧，那么 $m - n \equiv 0$ 模 3。

CFL 中的一个关键思想是 [CFL23] 对退化跨接二元签名进行插值，并将它们用作两个一元签名；其中一个是所需的，另一个则与其他项归并在一起，形成一个易于计算的正常数，不会影响复杂度。然而，这种“归并在一起”的过程会破坏平面结构，因此归约对平面图不再适用。不过，如果能在每个面内每次将三个剩余的一元函数归并在一起，就能让它适用于平面图。这正是平面三路边匹配（P3EM）发挥作用之处。我们的 P3EM 定理将使我们能够做到这一点。

更正式地说，设 $G = (V, E)$ 是一个无向平面嵌入图，即给定了平面嵌入的平面图。我们允许 G是一个多重图，也就是说，允许存在平行边和自环。平面三路边匹配（P3EM）是对 E 的一种划分，划分所得的集合 M 由三边子集构成$E = \bigcup_{t \in M} t$ ，使得我们可以为每个 v_t 添加一个顶点 $t \in M$ ，并将 v_t 与 E 中的三条边相连 t ，且所得图仍是平面图。在第 3 节中，我们证明，任何平面 3-正则图（除了一些平凡情形）都存在 P3EM，而且还可以在多项式时间内构造出来。处理平面图时常用的一种技巧是，先取对偶图的一棵生成树并选定一个根节点，例如与外面对应的节点。从一个叶节点出发，论证某种不变性质可以沿树“传播”，直至最终到达根节点。该技巧既用于 [MR01] ，也用于此前关于平面性的二分定理的证明 [CF17、CFGW22]。然而，这种技巧在此处行不通，必须发明新的技巧。我们的 P3EM 定理的证明融合了代数与组合学，且本身也值得独立关注。

3 平面三路边匹配（P3EM）

我们先给出以下引理。

引理 3.1。一个三正则平面图 G 有 P3EM，当且仅当存在一种赋值，将每条边赋给一个相邻的面，使得赋给每个面的边数为 3 的倍数。

证明。如果 $E = \bigcup_{t \in M} t$ 是一个 P3EM，那么对于每个 3-边子集 $t \in M$，点 v_t 属于一个与 t中的全部三条边相邻的面。这就给出了 E的赋值。

反过来，假设存在这样的赋值 σ，其对应于 G，并先假设 G 是连通平面图。沿着F边界的循环遍历，对任意面 F，将指派给该面的边按顺序每三条一组收集起来，即可将 E 划分为三边子集。由此得到 G的一个 P3EM。

现在假设 G 是不连通的，并将 G 视为给定在球面 S^2上。存在一条与 G 不相交的简单闭曲线 S（同胚于圆 S^1），它将 S^2 分隔成两个圆盘 D_1 和D_2，并将 G 分隔成两个非空且不相交的平面图 $G_1 \cup G_2$，其中 $G_i \subset D_i$（$i = 1$，2）。 S包含在某个面 F中。对于 $i = 1$，2， D_i 中除 F外的每个面，其边仅从E（G_i）指派给 σ，且边数模3余0。由于 G_i 是3-正则的，因此 $|E(G_i)| \equiv 0$ 模3。于是，从 E（G_i）指派给 F 的边数也模3余0。因此，将 σ 限制在E（G_i）上，便得到 G_i 的一个边指派，满足引理陈述中的条件。形式上，为了得到 G_1 的$\widehat{\ }$，我们可以移除 G_2，这样 F 就成为包含 D_2的扩展面 F，从而得到一个$\widehat{\ }$赋值 σ_1，它将 E（G_1）映射到 D_1 中各面的集合与 F的并集。对于 G_1，我们可以将$\sim D_2$ 收缩为一个点，而 F 实质上就成为 F 与 D_1的交集。类似地，我们有一个对应于 G_2的赋值 σ_2。

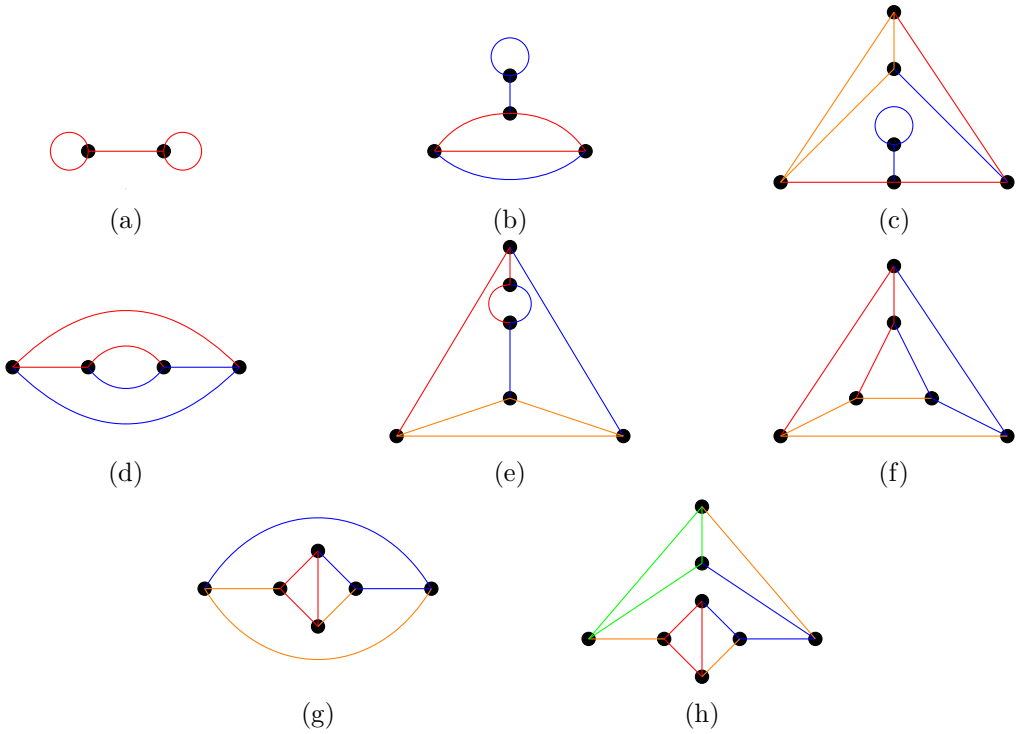
通过归纳法，我们分别为 G_1 和 G_2 得到了 P3EM，它们分别由 G_1 和 G_2 的边三元组组成。由于将 D_2 收缩为 G_1，从 G_1 赋给 F 的三元组 t 对应于 D_1 内部的点 v_t。 G_2 也满足同样的结论。因此，将两个 P3EM 组合起来形成 G 的 P3EM 时，不会对平面性造成任何潜在干扰。□

因此，为了证明 G 存在 P3EM，我们将证明存在这样的赋值。还可推出， G 存在 P3EM，当且仅当 G 的每个连通分量都存在 P3EM。

如果存在 V_1 与 V_2 之间的一个一一对应，使其通过关联诱导出边和面的一个一一对应，则平面图 $G_i = (V_i, E_i)$、（$i = 1$，2）是平面同构的。显然，具有 P3EM 是一个在平面同构下保持不变的性质。

定理 3.2。每个三正则平面图，除了包含连通分量 K_4或具有 2 个顶点和 3 条平行边的多重图 $M_{2,3}$ 之外，都存在平面三路边匹配，并且可以在多项式时间内找到该匹配。

我们注意到，两个例外图确实不存在 P3EM。此外，在平面同构意义下，这两个图以及图2中所示的所有图都只有一种平面嵌入；这些图将作为我们的归纳基例。在图2中，相同颜色的边构成一个三元组。



定理证明中的基本情形3.2

证明。根据引理3.1，只需证明 G 为连通图的情形，因为为每个连通分量分别构造 P3EM 后，将它们组合起来即可得到 G的 P3EM。

我们通过归纳法证明定理 3.2 。我们的归纳假设如下：如果 $|V(G)| \leq k$ 对于某个整数 k 成立，并且它不是两个例外情形之一，那么它具有一个 P3EM。给定一个较大的图G，我们尝试将其归约为一个较小的图 G' ，使得我们可以根据 G'的 P3EM 得到 G的 P3EM；每当归约步骤产生两个例外情形之一时，我们将直接为原图赋予一个 P3EM。



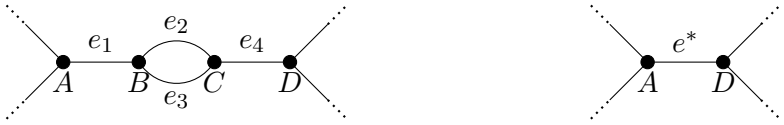
(a) 原图中的自环　　(b) 所得图

图3：变换自环

我们首先证明，只需考虑简单平面3-正则图。

如果 G 有一个自环，那么它局部具有图3所示的片段，除非它与基本情形图2a平面同构；对于这种情况，我们直接给出一个 P3EM。现在执行图3所示的变换。如果所得图是两个例外情形之一，那么原图与基本情形图2b 或图2c平面同构；对于这两种情况，我们给出它们的

P3EM。否则，根据归纳假设，所得图存在一个 P3EM M 。如果图 e^* 3b 中的边被映射到右侧（分别地，被映射到左侧），那么我们可以通过模拟 e_4 ，使其如 e^* 所示被映射到右侧（分别地，被映射到左侧），并连接 e_1、 e_2 和 e_3，从而得到原图的一个 P3EM。注意，无论顶点 C 或 D处是否有自环，自环变换都是有效的。

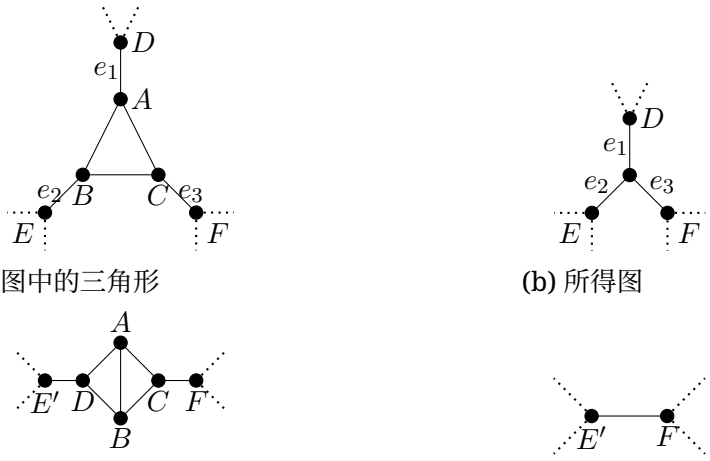


(a) 原图中的重边　　(b) 所得图

图4：变换重边

如果 G 在两个顶点（记为 B 和 C）之间有平行边，由于 G 是3-正则的，且 G 与M_2不平面同构于3，因此它们之间恰好有两条边。如果 B 和 C 有一个公共邻点（记为 A），我们可以删除 B、 C 及其关联的边，并在 A处添加一个自环。所得图不是例外情形，根据归纳法，它具有一个P3EM。随后可以很容易地得到 G的一个P3EM。现在假设 B和 C的第三条边分别是 $e_1 = \{A, B\}$ 和 $e_4 = \{C, D\}$，且与 $A \neq D$相连，如图4所示。我们同样进行一次变换，将带有重边的 B 和C “删除”，并将 e_1 和 e_4 合并为一条单边 $e^* = \{A, D\}$。如果所得图是两个例外情形之一，则原图同构于基本情形图2d或图2e，我们直接给出它们的P3EM。否则，根据归纳假设，所得图存在一个P3EM M。如果边 e^* 在 M （图4b）中向上（分别向下）映射，那么通过将 e_2 （分别为 e_3）模拟为 e^* ，并连接 e_3 （分别为e_2）、 e_1 和 e_4，即可得到原图的一个P3EM。

下文假设 G 是简单图，即不含平行边或自环。



(a) 原图中的三角形　　(b) 所得图

(c) 原图中的三角形（$D = E$）　　(d) 所得图（$D = E$）

图 5：三角形的变换

接下来考虑 G包含如图 5a所示三角形面的情形。由于它是简单图，三条边 e_1、 e_2、 e_3 彼此不同，并且 D、 E、 $F \notin \{A, B, C\}$。如果顶点 D、 E、 F

彼此都不同，则我们执行从图 5a 到图 5b 的变换。根据归纳假设，所得图存在一个 P3EM，除非它是 K_4 （在这种情况下，所得图不可能是 M_2，3，因为它有超过两个顶点）。如果所得图是 K_4，那么原图是基本情形图 2f（或与其平面同构），对于该情形我们直接给出一个 P3EM。如果所得图不是 K_4，因而根据归纳假设存在一个 P3EM M，那么原图可以通过在三角形面的内部连接各边来模拟 M。现在考虑顶点 D、E、F 不全相同的情形。由于原图不是 K_4，顶点 D、E、F 不全是同一个顶点。不失一般性，设 $D = E \neq F$。示意见图 5c。 D 有一个关联顶点 $E' \neq A$、B。设 $E' \neq F$。然后我们执行图 5d 所示的变换。与上述情况类似，如果所得图不是例外情形之一，那么我们可以很容易地在所得图中模拟 P3EM（该 P3EM 由归纳法给出）。如果所得图图 5d 与例外情形 M_2、3 或 K_4 平面同构，那么原图与基本情形图 2g 或图 2h 平面同构，对于这些情形我们直接给出一个 P3EM。最后设 $E' = F$，则我们通过删除顶点 A、B、C、D 及其关联边来变换原图，并在 $E' = F$ 处形成一个自环。所得图的顶点数更少（并且含有自环，因此不是 M_2、3 或 K_4），所以根据归纳假设它存在一个 P3EM。容易验证，所得图中的 P3EM 与之前一样，可以在原图中进行模拟。在下文中，我们可以假设 G 是不含三角形面的简单图。



(a) 原图中的桥　　(b) 所得图

图 6：桥的变换

接下来考虑图中含有桥的情况，也就是说，移除某条边后图会变得非连通（见图 6a）。这意味着在 G 中，同一个面 f 位于桥 $\{B, E\}$ 的两侧。执行图 6 所示的变换。所得图有两个非连通分支，它们都不同构于任何例外情形。事实上，两者都不同构于 M_2,3，因为 G 没有平行边；而如果它同构于 K_4，那么原图 G 就含有一个三角形面。因此，根据归纳法，这两个连通分量分别有 P3EM， M_1 和 M_2。我们将使用边 $\{B, C\}$ 和 $\{E, F\}$ 分别模拟 $\{A, C\}$ 和 $\{D, F\}$，并直接匹配三条边 $\{A, B\}$、$\{B, E\}$ 和 $\{E, D\}$。于是，我们可以由 M_1 和 M_2 得到 G 的一个 P3EM。注意， $\{B, C\}$ 和 $\{E, F\}$ 都位于面 f 上。由于 $\{B, E\}$ 是一座桥，无论 $\{A, C\}$ 和 $\{D, F\}$ 分别如何由 M_1 和 M_2 匹配，我们都可以分别用 $\{B, C\}$ 和 $\{E, F\}$ 替代它们。在球面嵌入中，我们可以假设两个非连通分支中的 $\{A, C\}$ 和 $\{D, F\}$ 都位于外面。于是，在 G 中，用 $\{B, C\}$ 替代 $\{A, C\}$，并用 $\{E, F\}$ 替代 $\{D, F\}$，使得分配给 G 中面 f 的边总数等于 M_1 和 M_2 各自所分配的相应数量之和，因此该总数模 3 为 $\equiv 0$。下文假设图中没有桥。

接下来证明，若 G 有一个正方形面，则它存在一个 P3EM。示意见图7。由于它是简单图， E与 B不同 D。此外， $E \neq C$，否则 $\{B, F\}$ 或 $\{D, I\}$ 会是



（a）原图中的正方形　　（b）所得图

图7：正方形的变换

一条桥。理由相同，顶点 E、F、H、I 均不能属于 $\{A,B,C,D\}$。若 $E=H$，则同样会有一条桥。此外，$E\neq F$、I，因为 G 没有三角形面。因此，所有 A、B、C、D、E、F、H、I 都互不相同。现在我们进行图7中的变换，用一条边 e 替换正方形 $ABCD$。显然所得图不是例外图之一（它至少有 6 个顶点）。根据归纳假设，所得图存在一个 P3EM M。若所得图中的 e 被匹配到左侧，则可通过将 $\{A,B\}$ 匹配到左侧，在 G 中模拟 M，并在正方形内匹配 $\{A,D\}$、$\{D,C\}$ 和 $\{C,B\}$。类似地，若 e 被匹配到右侧，则用 $\{D,C\}$ 替代它，并在正方形内匹配 $\{A,D\}$、$\{A,B\}$ 和 $\{B,C\}$。由此得到 G 的一个 P3EM。下文假设 G 没有正方形面。



（a）原图中的弦　　（b）所得图

图8：弦的变换

现在我们考虑图包含一条弦的情形。设 $\mathcal{C}$ 为该平面图的外部面的边界。由于我们现在可以假设 G 是无桥的，$\mathcal{C}$ 是一个简单环。若 $\mathcal{C}$ 上存在两个顶点，它们由一条不属于 $\mathcal{C}$的边相连，则称其包含一条弦。图8a给出了示意图。由于 $\mathcal{C}$ 是外边界，任何弦都必定在 $\mathcal{C}$的内部连接。设 $\{A,B\}$ 为一条弦，设 C、E 以及 D、F为它们在 $\mathcal{C}$上的邻点。注意，不存在连接 $\{C,D\}$ 或 $\{E,F\}$ 的边，因为 G 没有四边形面。在图8a中，我们将 G 中位于边 $\{A,B\}$ 左侧（包括该边）的部分标记为区域1，右侧（包括该边）的部分标记为区域2。由平面性可知，连接区域1和区域2的仅有边是与A 或 B关联的边。将区域1和区域2中的边数分别记为 E_1 和 E_2 （两者均包括 $\{A,B\}$）。则 $E_1+E_2\equiv 1 \pmod 3$。施行图8所示的变换后，我们得到一个不连通的所得图，其两个连通分支均为三正则平面图。由于在原图中，E 和 F 不相邻，区域2中存在一个不同于 E 和 F 的顶点。因此，所得图中的左侧连通分支比G至少少一个顶点，并且根据归纳假设，它存在一个P3EM M_1'。类似地，右侧连通分支也存在一个P3EM M_2' （它不可能是M_2,3，因为 G 是简单环；也不可能是 K_4，因为那将意味着 G 有一个三角形面）。边 $\{E',F'\}$ 被分配在三角形 $AE'F'$ 内部或 $BE'F'$ 内部。在

前一种情形中，边 $\{B, E'\}$ 和 $\{B, F'\}$ 必须被分配在三角形 $BE'F'$ 外部。在后一种情形中，边 $\{A, E'\}$ 和 $\{A, F'\}$ 被分配在三角形 $AE'F'$ 外部。无论哪种情形，边 $\{A, E'\}$ 或 $\{B, E'\}$ 中恰有一条被向左分配，而边 $\{A, F'\}$ 或 $\{B, F'\}$ 中恰有一条被向外分配。因此，沿着圈 C 的路径 $(A, C, \ldots, D, B)$ 上被向外分配的边有 $N_1 \equiv 2$ 条 (mod 3)。类似地，设 N_2 表示 M_2' 中沿外部面被向外分配的边数，则 $N_2 \equiv 0$ (mod 3)。现在我们在 G 中构造一个3边方向分解。在区域1中，边 $\{A, B\}$ 将被向左分配（取代 M_1' 中被向左分配的 $\{A, E'\}$ 或 $\{B, E'\}$）。其余所有边均按 M_1' 中的方式分配。在区域2中，我们按如下方式分配除 $\{A, B\}$ 之外的所有边。边 $\{B, F\}$ 将被向外分配（取代 M_1' 中被向外分配的 $\{A, F'\}$ 或 $\{B, F'\}$）；$\{A, E\}$ 将按 M_2' 中的 $\{E, F\}$ 进行分配；其余所有边均按 M_2' 中的方式分配。如此一来，所有内部面都被分配了0条边 (mod 3)，如 M_1' 和 M_2' 的情形一样。对于外部面，注意到分配给它的边总数也是 $N_1 + 1 + N_2 \equiv 0$ (mod 3)。因此，我们的构造在 G 中给出了一个有效的P3EM。

综上，现在可以假设 3-正则平面图 G 是简单图，不含三角形面和四边形面，且无桥、无弦。现在证明该图必有一个五边形面。令 v、e、f 分别表示 G 的顶点数、边数和面数（包括外部面）。由于 G 是 3-正则的，因此有 $3v = 2e$。假设任意一个面的边界上边数的最小值为 n，则 $2e \geq nf$。根据欧拉公式，有 $2 = v - e + f \leq (2/n - 1/3)e$，从而 $n < 6$。由于 G 是简单图，且不含三角形面和四边形面，因此有 $n = 5$。

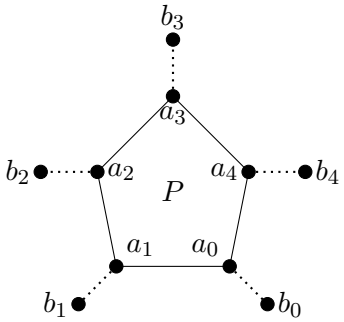


图9：原图中的五边形

现在，在图中固定一个顶点为 $\{a_0, a_1, \ldots, a_4\}$ 的五边形面 P。示意图见图9。由于 G 是 3-正则、简单且无桥的，对于每个 $0 \leq i \leq 4$，a_i 都有一个不同于 $\{a_0, a_1, \ldots, a_4\}$ 的邻点 b_i。例如，根据简单图的定义，$b_0 \neq a_1$。如果 $b_0 = a_2$，即如果 $\{a_0, a_2\}$ 是一条边，那么就会有一条桥 $\{a_1, b_1\}$。事实上，边 $\{a_0, a_2\}$ 必定位于五边形面 P 之外。若沿着边 $\{a_2, a_1\}$、$\{a_1, a_0\}$ 行进，使 P 位于左侧，然后接着沿边 $\{a_0, a_2\}$ 行进，就会得到一个圈，将 G 中包含 P 的部分与通过边 $\{a_1, b_1\}$ 连接到 a_1 的部分 G 分隔开（注意，$\{a_0, a_1, a_2\}$ 中每个顶点的三个邻点都已计入，因此该圈右侧不存在其他相邻边）。因此，删除 $\{a_1, b_1\}$ 会使 G 不连通，于是 $\{a_1, b_1\}$ 是一条桥。这与 G 无桥矛盾，所以 $b_0 \neq a_2$。示意图见图10。根据对称性，$b_0 \neq a_3$、a_4 也成立。同理，对于所有 $0 \leq i \leq 4$，都有 $b_i \notin \{a_0, a_1, \ldots, a_4\}$。

此外，由于 G 没有三角形面或四边形面，且无桥，我们声称不失一般性地，b_i 彼此不同（$0 \leq i \leq 4$）。为说明这一点，我们首先注意到 $b_0 \neq b_1$、b_4，因为

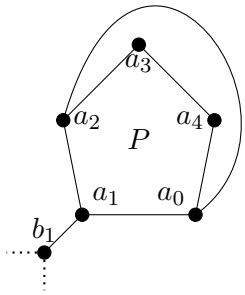


图10：为什么 $b_0 \neq a_2$

否则就会有一个三角形面。接下来讨论 $b_0 = b_2$ 或 $b_0 = b_3$的情形。根据对称性，不妨设 $b_0 = b_2$。b_0还有第三个相邻顶点 b，它不同于 a_0、a_2。考虑圈 $C =$（a_2、a_1、a_0、$b_0 = b_2$、a_2），其左侧为 P；该圈在 G的球面嵌入中确定了两个单连通区域。将包含 P 的区域称为内部区域。若边$\{b_0, b\}$ 位于内部区域中，则根据证明 $b_0 \neq a_2$时所用的同一论证，$\{a_1, b_1\}$ 是桥。因此，我们可以假设 $\{b_0, b\}$ 位于圈 C的外部区域中。（见图11。）

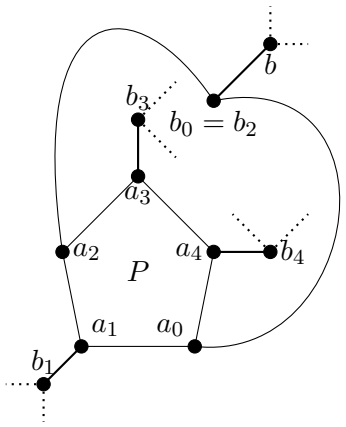


图11：$\{b_0, b\}$ 位于圈 C的外部区域中

显然 $b \neq b_1$，否则就会存在一个四边形面。现在有一个面 Δ，其边界环包含位于 P另一侧的边 $\{a_1, a_0\}$。该边界环包含路径（b_1、a_1、a_0、b_0、b），随后是一条路径 $\pi =$（$b = x_0$、x_1、...、$x_\ell = b_1$），由从 b返回 b_1的 $\ell \geq 1$ 条边组成。这里，第一条边 $\{b, x_1\}$ 是我们从 b_0 前往 b时所采取的右分支，而最后一条边 $\{x_{\ell-1}, b_1\}$ 是我们从 a_1 前往 b_1时所采取的左分支。类似地，还有另一个面Δ'，其边界环包含位于 P另一侧的边 $\{a_1, a_2\}$。该边界环包含路径 b_1、a_1、a_2、b_0、b，随后是一条路径 π'，由从 b 返回 b_1的 $\ell' \geq 1$ 条边组成。（见图12。）

现在我们定义两个辅助图 G_1 和 G_2。G_1 由圈 C 及其内部

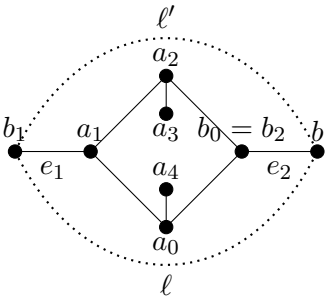


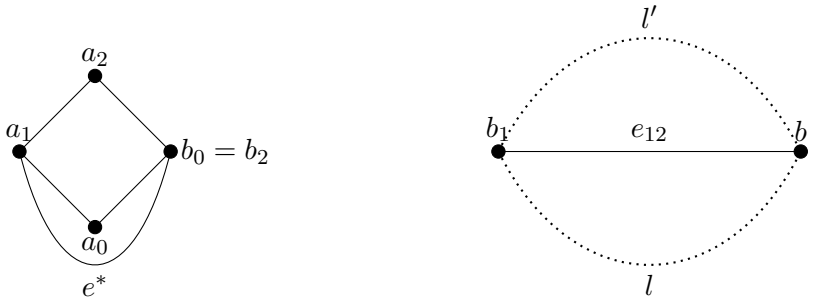
图12：当 $b_0 = b_2$

区域构成，并增添一条单边 $e^* = \{a_1, b_0\}$。 G_2 由 G 中严格位于圈 C 外部的所有部分（即不包含 C 及其内部的部分）构成，并将两条边 $e_1 = \{a_1, b_1\}$ 和 $e_2 = \{b, b_0\}$ 替换为一条新边 $e_{12} = \{a_1, b_0\}$。（见图13）。 G_1 不是例外图之一，因为它包含一个五边形。若 G_2 是 M_2，则由虚线标记为 ℓ 和 ℓ' 的两条路径 π 和 π' 都由一条单边构成，且存在于 G中，这与 G 是简单图矛盾。若 G_2 是 K_4，则球面嵌入中有四个三角形面，其中两个必定存在于 G中，这与 G 没有三角形面矛盾。因此，根据归纳法， G_1 和 G_2都有一个 P3EM。注意， G_1 包含两个由边 e^*隔开的三角形面。 G_1的任意一个 P3EM 都会将 e^* 分配给这两个三角形面之一，这意味着该三角形面的三条边都必须分配给这个面。因此，在图13a中，根据 e^* 是向下还是向上分配，四条边 $\{a_1, a_2\}$、 $\{a_2, b_0\}$、 $\{a_1, a_0\}$、 $\{a_0, b_0\}$必须全部向上或全部向下分配。在 G_2中，边 e_{12} 被分配给两个相邻面之一，可以向上或向下。如果 e_{12} 向上分配，那么沿着 ℓ （分别为 ℓ'）的路径 π （分别为 π'），分配给 e_{12} 所在边界的面的边数分别为 0（模 3）和 2（模 3）。如果 e_{12} 向下分配，则情况相反，即 π （分别为 π'）中分配给 e_{12} 所在边界的面的边数分别为 2（模 3）和 0（模 3）。

现在定义一个边指派，使其成为 G 的 P3EM。 G 中除 e_1 和 e_2 以外的每条边恰好属于 G_1 或 G_2 之一。我们分别按照 G_1 或 G_2 中的赋值对这些边进行指派。对于 G 中除 Δ 和 Δ' 以外的每个面，这都满足 P3EM 的要求。对于 e_1 和 e_2 上的指派，根据 e^* 在 G_1 中以及 e_{12} 在 G_2 中的指派方式，共有四种情况。第一种情况是 e^* 在 G_1 中和 e_{12} 在 G_2 中都被指派为向上，我们在 G 中将 e_1 指派为向下，将 e_2 指派为向上。于是，共有 3 条边 $e_1 = \{b_1, a_1\}$、 $\{a_1, a_0\}$ 和 $\{a_0, b_0\}$，以及 π 中有 0（模 3）条边被指向 Δ。此外，共有 1 条边 $e_2 = \{b_0, b\}$，以及 π' 中有 2（模 3）条边被指向 Δ'。第二种情况是 e^* 和 e_{12} 分别被指派为向上和向下，我们在 G 中将 e_1 和 e_2 都指派为向下。于是，共有 4 条边 $e_1 = \{b_1, a_1\}$、 $\{a_1, a_0\}$、 $\{a_0, b_0\}$ 和 $e_2 =$（b_0、 b），并且 π 中有 2（模 3）条边被指向 Δ，合计为 0（模 3）条。此外，这四条边之间没有边，并且 π' 中有 0（模 3）条边被指向 Δ'。另外两种情况类似。我们证明了 G 存在一个 P3EM。

因此，我们可以假设 b_0、.....、 b_4 互不相同。

我们声称，对于每个 $0 \le i \le 4$ （其中 $b_5 = b_0$），都存在一条连接 b_i 和 b_{i+1} 的简单路径；此外，利用这条路径得到的圈 $(a_i, b_i, \ldots, b_{i+1}, a_{i+1}, a_i)$ 是一个面的边界。定义如下的 a_i-R 路径：从 a_i 出发，沿第一条边 $\{a_i, b_i\}$前进；随后在每个新顶点（度为 3）处，选择右分支前往下一个顶点，直到遇到一个先前访问过的



(a) G_1 (b) G_2

图13： G_1 和 G_2

游走中的顶点，或遇到 $\{a_0, a_1, \ldots, a_4\}$之一，然后停止。为简化记号，我们考虑 $i = 0$的情况；其他情况都相同。假设 a_0-R 路径为 $\{x_0, x_1, ..., x_k, ..., x_m\}$，其中 $x_0 = a_0$ 和 $x_1 = b_0$。首先，我们声称 $x_m \neq a_0$。否则，前一步必定是 a_1、a_4 或 $b_1 = x_0$，但这样一来， a_0-R 路径就应该在 x_{m-1}处停止。接下来，我们声称$x_m \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$。事实上，如果 $x_m \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，那么它就是这条游走中先前访问过的顶点 x_k，且 $k \geq 1$。于是 x_{k-1} 存在。此外，$(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ 是一个圈，它是通过在每个后续顶点处始终选择右分支形成的。最后一条边 (x_{m-1}, x_m)（即 (x_{m-1}, x_k)）必定是从方向 (x_{k-1}, x_k)到达时的左分支边，因此圈 $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ 的遍历方向为逆时针。由此，边 $\{x_{k-1}, x_k\}$ 是桥，矛盾。图14展示了示意图。

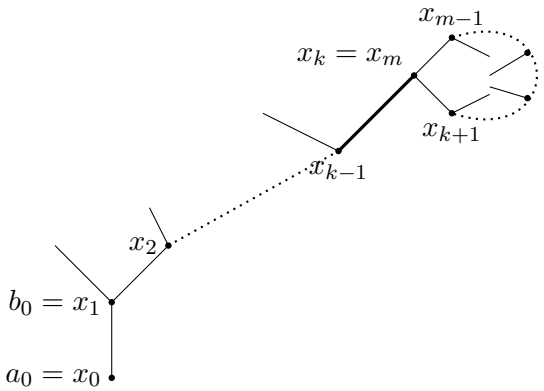


图14： b_i的简单路径

接下来我们断言， $x_m = a_1$和 $x_{m-1} = b_1$（见图9）。我们通过排除 $x_m \in \{a_2, a_3, a_4\}$的可能性来证明这一点。假设 $x_m = a_4$。根据 a_0-R路径的定义， $x_{m-1} \notin \{a_0, a_1, \ldots, a_4\}$是 x_m之前的一步，因此到达 $x_m = a_4$的唯一方式是 $x_{m-1} = b_4$。由于这条 a_0-R路径总是沿右分支前进，将平面图视为球面嵌入后，我们可以把这条 a_0-R路径右侧的面视为外面，于是边 $\{a_0, a_4\}$ 是一条弦。然而，根据我们的假设， G 是无弦的。现在假设$x_m = a_3$。于是考虑 a_2-R路径。根据平面性，以及只有一个面与以 a_3为终点的 a_0-R路径的右侧相邻这一事实， a_2-R路径不可能以 a_4为终点，因此

它必定以 a_1为终点。然而，考虑模5意义下的指标，这与 a_0-R路径以 a_4为终点的情形完全相同，从而再次产生矛盾。最后，如果 a_0-R路径以 $x_m = a_2$为终点，那么 a_1-R路径将违反平面性，或产生一座桥。我们得出 $x_m = a_1$。于是可推出 $x_{m-1} = b_1$，并且由这条 a_0-R路径得到一个边界为（a_0、b_0、...、b_1、a_1、a_0）的面。对于所有 a_i-R路径，情况同样如此。

换言之，现在我们得到一个五边形面 P 如图15所示。

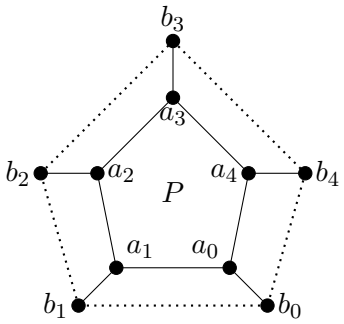
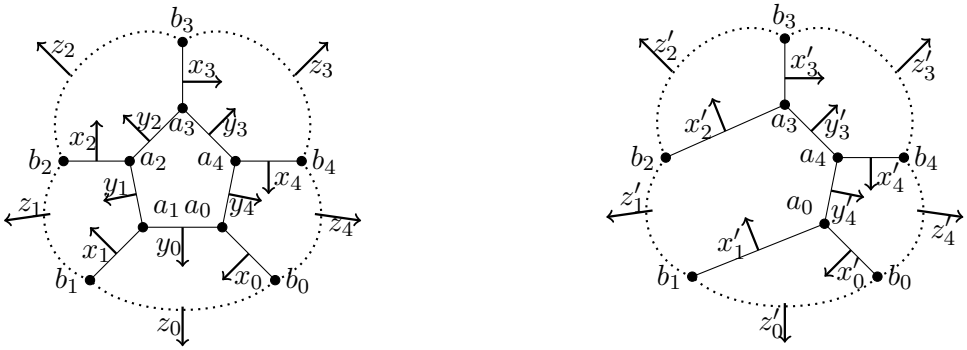


图15：原图中的五边形



(a) 原图中的五边形　　(b) 所得图

图16：五边形的变换

现在我们按照图16所示进行变换。右侧变换后的图 (b) 按顶点数既不是 M_2，也不是 K_4。根据归纳法，变换后的图上存在一个 P3EM M'。我们用布尔变量 x_i' $(0 \le i \le 4)$ 和 y_3', y_4' 表示图16b中这7条边上的赋值：若相应的边被赋给箭头所指的面，则变量为1；若被赋给另一侧的面，则变量为0。我们还用非负整数变量 z_i' $(0 \le i \le 4)$ 表示沿简单路径 b_i 到 b_{i+1}、被赋给所指一侧的边数。现在，我们按如下方式利用 M' 在 G 上定义一个 P3EM M。在 G 中，所有不与 a_0, a_1, a_2, a_3 或 a_4 相邻的边都保留其在 M' 中的赋值。这些边包括路径 b_i 到 b_{i+1} 上的所有边（以及这些简单路径之外、图16a中未画出的所有边）。特别地，若 z_i $(0 \le i \le 4)$ 表示在 G 中沿简单路径 b_i 到 b_{i+1}、被赋给所指一侧的边数，则 $z_i = z_i'$。对于图16a中与 a_0, a_1, a_2, a_3 或 a_4 至少一个相邻的10条边，我们将使用布尔变量 x_i 和 y_i $(0 \le i \le 4)$ 来

表示 G 上 M 的赋值：若相应的边被赋给箭头所指的面，则变量为1；否则为0。

稍加反射即可使读者确信， M 是 G上的 P3EM，当且仅当我们能够为 x_i 和 y_i （$0 \le i \le 4$）赋予布尔 0-1 变量的值，使其满足以下方程组（Σ），其中$\overline{x} = 1 - x \in \{0,1\}$ 表示布尔变量 x的取反。

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x_0 + y_0 + \overline{x_1} \equiv x'_0 + \overline{x'_1} \pmod 3 \\ x_2 + y_2 + \overline{x_3} \equiv x'_2 + \overline{x'_3} \pmod 3 \\ x_3 + y_3 + \overline{x_4} \equiv x'_3 + y'_3 + \overline{x'_4} \pmod 3 \\ x_4 + y_4 + \overline{x_0} \equiv x'_4 + y'_4 + \overline{x'_0} \pmod 3 \\ x_1 + y_1 + \overline{x_2} \equiv x'_1 + \overline{x'_2} + \overline{y'_3} + \overline{y'_4} \pmod 3 \\ \sum_{i=0}^{4} \overline{y_i} \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

我们注意到，虽然这个方程组由模 3 线性方程构成，但它并不是一个通常意义上定义在 $\mathbb{Z}_3$上的线性方程组；复杂之处在于，所有变量都必须取 $\{0,1\}$中的布尔值。颇为神奇的是，我们证明，对于 x'_i（$0 \le i \le 4$）和 y'_3、 y'_4的任意布尔值，总能为布尔变量 x_i和 y_i （$0 \le i \le 4$）求解方程组（Σ）。

若（y'_3， y'_4） $\neq$（0， 0），则我们令 $x_i = x'_i$取 $0 \le i \le 4$、 $y_3 = \overline{y'_3}$、 $y_4 = \overline{y'_4}$、 $y_0 = y_2 = 0$和 $y_1 = \overline{y'_3} + y'_4 \in \{0,1\}$的值。（注意，使用（$y'_3$， y'_4） $\neq$（0， 0）可得到 $y'_3 + y'_4 \in \{0,1\}$。）不难验证，这个赋值满足（Σ）。

现在假设 $(y'_3, y'_4) = (0, 0)$。方程组现在变为

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} x_0 + y_0 + \overline{x_1} \equiv x'_0 + \overline{x'_1} \pmod 3 \\ x_2 + y_2 + \overline{x_3} \equiv x'_2 + \overline{x'_3} \pmod 3 \\ x_3 + y_3 + \overline{x_4} \equiv x'_3 + \overline{x'_4} \pmod 3 \\ x_4 + y_4 + \overline{x_0} \equiv x'_4 + \overline{x'_0} \pmod 3 \\ x_1 + y_1 + \overline{x_2} \equiv x'_1 + \overline{x'_2} + 2 \pmod 3 \\ \sum_{i=0}^{4} \overline{y_i} \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

如果 $x'_1 = 0$，那么我们设定 $x_1 = 1$，并对 $0 \le i \le 4, i \neq 1$ 设定 $x_i = x'_i$ ，再设定 $y_2 = y_3 = y_4 = 0, y_0 = y_1 = 1$。可以验证，该赋值满足 ($\Sigma'$)。如果 $(x'_1, x'_2) = (1, 1)$，那么我们设定$x_2 = 0$，并对 $0 \le i \le 4, i \neq 2$ 设定 $x_i = x'_i$ ，再设定 $y_0 = y_3 = y_4 = 0, y_1 = y_2 = 1$。这满足 ($\Sigma'$)。因此，接下来只需考虑 $(x'_1, x'_2) = (1, 0)$ 的情况。还剩下八种情况，分别对应一个赋值 $(x'_0, x'_3, x'_4) \in \{0,1\}^3$。

此时，除了 $(x'_1, x'_2) = (1, 0)$ 之外，我们还有 $(y'_3, y'_4) = (0, 0)$，因此现在的情形如图16b所示，其中 x'_1、 x'_2、 y'_3 和 y'_4 都指向由圈 $(b_1, a_0, a_4, a_3, b_2, \ldots, b_1)$ 围成的面。沿 $\{a_4, b_4\}$ 轴反射后，我们只需考虑四种情况，其中 $x'_4 = 0$。这四种情况在图27中明确给出，其中我们用双箭头表示相应边实际赋值到所示的面中。例如，下面的图展示了 $(x'_0, x'_3, x'_4) = (0, 0, 0)$ 这一情形。

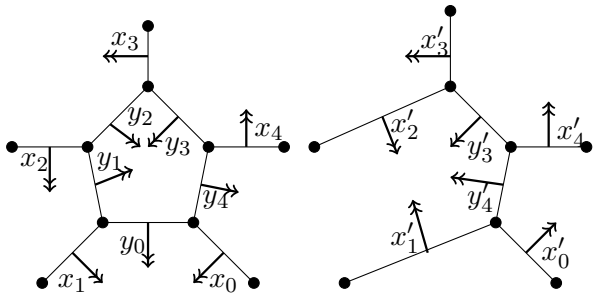


图17：$(x'_0, x'_3, x'_4) = (0,0,0)$

其他情况参见图27。

最后，我们指出该证明是构造性的。在为归纳法定义较小的图时，较小图的规模会严格减小；而在需要两个较小图的情形下（例如处理弦或获得不同的 b_i 时），较小图的规模之和大致等于原图的规模。沿着证明过程即可轻松验证，可以在多项式时间内找到一个平面三路边匹配。至此，定理 3.2 的证明完成。

□

4 二分定理

本节开始证明定理 2.1。当 $\neg(f_0 = f_3 = 0)$（即并非 $f_0 = 0$ 和 $f_1 = 0$ 同时成立）时，通过除以一个非零常数，并在不改变 Holant 复杂度的情况下，视情况交换 0 和 1，我们可以将签名 $[f_0, f_1, f_2, f_3]$ 规范化为 $[1, a, b, c]$。我们首先处理一个特殊情形，其中 $a = b$ 且 $c = 1$。

引理4.1。Pl-Holant（$[1, a, a, 1] \mid (=_3)$）属于FP（函数多项式时间）。

证明。在二部图设置中，通过哈达玛矩阵$H = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$进行全息变换，将左侧的 $[1, a, a, 1]$和右侧的 $(=_3) = [1, 0, 0, 1]$，我们得到

$$[1, a, a, 1]H^{\otimes 3} = [2 + 6a, 0, 2 - 2a, 0], \quad \text{and} \quad (H^{\otimes 3})^{-1}[1, 0, 0, 1] = \tfrac{1}{4}[1, 0, 1, 0].$$

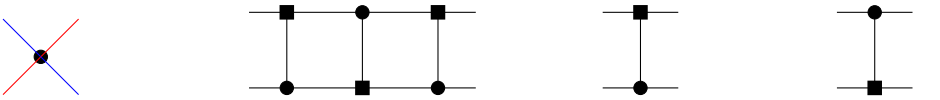
两个变换后的签名都是匹配门签名 [CL11] 因此可以通过FKT算法在多项式时间内解决该问题。

□

稍后还需要用到 $b = 1$ 和 $a = c$ 的另一个特殊情形。

引理 4.2。除非 $a = 0$ 或 ± 1，否则Pl-Holant（$[1, a, 1, a] \mid (=_3)$）是#P-困难的；在这两种情况下，它属于FP（函数多项式时间）。

为证明引理4.2，我们定义交叉签名 $\mathcal{C}$，其元数为4，如图18a所示。它的取值为0或1，当且仅当两条红色悬挂边相等且两条蓝色悬挂边相等时取值为1；此外，它还是一个跨接签名，其中顶端的两条悬挂边要在外部连接到右侧，底端的两条悬挂边要在外部连接到左侧。图18a 中图示的只有一个顶点。然而，当通过某种构造实际实现或插值构造这个签名时，顶端两条悬挂边所连接的内部顶点



(a) 交叉签名 $\mathcal{C}$　(b) 交叉装置 G_4　(c) 组件 A　(d) $B =$ 上下 A的翻转副本

图18：插值交叉签名 $\mathcal{C}$

是左侧顶点；底端两条悬挂边所连接的内部顶点是右侧顶点。

为方便后续表述，我们将 $\mathcal{C}$ 的签名矩阵定义为：其行（相应地，列）由 $(b_1,\ b_2) \in \{0,1\}^2$ 索引，对应于图 18a 中左侧（相应地，右侧）的悬挂边 b_1 所对应的顶边。签名矩阵为 $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$。注意，$\mathcal{C}$ 的签名矩阵在图 18a进行循环旋转 $90°$ 后保持不变。下列引理阐明了这一交叉签名的重要性。

如果存在一个多项式时间构造，能够构造平面构件，或者存在一系列具有外部悬挂边的平面构件，且这些悬挂边相对于其二分规范与 f 相符，并且该构造能够实现或插值构造 f，那么我们称签名 f 可以通过平面构造或插值获得。

引理 4.3. 对于任意签名集 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G}$，如果交叉签名 $\mathcal{C}$ 可以通过平面构造或插值获得，那么 Holant ($\mathcal{F} \mid \mathcal{G}$) 可归约到 Pl-Holant ($\mathcal{F} \mid \mathcal{G}$)。

证明。给定问题 Holant ($\mathcal{F} \mid \mathcal{G}$) 的任意输入签名网格，我们将其置于平面上，此时边可能在非顶点处相交。我们可以假设任意一点至多有两条边相交，且这类交点的数量有多项式上界。我们将每个这样的交点替换为一个 $\mathcal{C}$ 的副本，具体如下。注意，每条边都连接一个左侧顶点和一个右侧顶点。假设一条边 $e = \{u, v\}$ 依次与 $k \geq 1$ 条边相交，交点为非顶点 x_1、.....、x_k，其中 u 和 v 分别来自左侧和右侧。当我们从 u 遍历到 v 时，对每个 $1 \leq i \leq k$，在进入和离开 x_i 时分别标记为 R 和 L。对每条存在此类交点的边都这样标记后，我们发现，在每个交点处，沿循环方向相邻的两条边标记为 R，另外两条相邻边标记为 L。这是因为在每个局部交点处，任意一对不沿循环方向相邻的入射边总是分别标记为 R $\neq$ L。稍加反射即可看出，在每个交点处经过适当旋转后总能使用签名 $\mathcal{C}$，同时保持二分结构。因此，我们得到问题 Pl-Holant ($\mathcal{F} \mid \mathcal{G}$) 的一个输入，且其 Holant 值不变。

□

现在我们准备证明引理 4.2。

引理 *4.2* 的证明。当 $a = 0$ 或 ± 1时，该问题分别属于仿射类或退化情形，因此属于 FP（函数多项式时间）（算法的详细信息请参见 [CC17] ）。假设 $a \neq 0$ 且 $a \neq \pm 1$。文献 $[1, a, 1, a] \mid (=_3)$ 证明了不带平面限制的问题 Holant（[CFL23]）是 #P-困难的。根据引理 4.3，只需证明我们可以对交叉签名 $\mathcal{C}$进行插值。

考虑构件 G_4 图18b 其中我们将签名 $[1, a, 1, a]$ 放在方形顶点处，并将 $=_3$ 放在圆形顶点处。注意，G_4 是一个跨接签名，其两个悬挂

边位于顶部（分别为底部），需要在外部连接到右侧（分别为左侧），就像交叉签名 $\mathcal{C}$ 一样。用常数 $a+a^2\neq 0$ 归一化后， G_4 的签名矩阵为$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$，其中 $z=\frac{1+a^3}{a+a^2}=a+a^{-1}-1$。由于 $a\neq\pm 1$，若 $a>0$，则 $z=\left(a^{1/2}-a^{-1/2}\right)^2+1>1$；若 $a<0$，则 $z=-\left(|a|+|a|^{-1}\right)-1=-\left(|a|^{1/2}-|a|^{-1/2}\right)^2-3<-3$。这里，行（分别为列）按字典序由 $(b_1,\ b_2)\in\{0,1\}^2$ 编索引，对应于左侧（分别为右侧，如图18b所示）的悬挂边，其中 b_1 表示顶部的边。我们可以先计算图18c和图18d中的 A 和 B 的签名来验证这一点， $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$，而$B=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$则是通过交换 A 的中间两行和中间两列得到的。于是，作为矩阵乘积，我们有 $G_4=A\cdot B\cdot A$。注意，如果将 1 替换为 0，并将 z 替换为 1， G_4 的“形状”看起来就与$\mathcal{C}$ 完全一样。我们将在下文的证明中利用这一惊人的巧合。另请注意， G_4 的签名矩阵在构件的循环旋转下保持不变。

现在我们定义一个线性规模的构件序列 Γ_{2s+1}，它是由 $2s+1$ 个子构件顺序组合而成的：对于奇数索引 $i=1$、3、.....、$2s+1$，我们使用 G_4；对于偶数索引 $i=2$、4、.....、$2s$，我们使用 G_4 的一个旋转 180° 度后的副本，并将第 i 个子构件右侧的两条边与第 $(i+1)$ 个子构件左侧的两条边合并。该顺序组合满足二分限制。由于 G_4 的旋转副本与 G_4 具有相同的签名矩阵，因此 Γ_{2s+1} 的签名矩阵是 G_4 的 $(2s+1)$ 次幂。我们可以证明，它具有如下形式（归一化后）：$\Gamma_{2s+1}=\begin{pmatrix} x_s & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x_s & 1 \\ 1 & x_s & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x_s \end{pmatrix}$，其中 $\{x_s\}_{s\geq 0}$ 由递推关系定义，且 $x_0=z$ 和

$$x_{s+1}=\frac{6+6z+3x_s+z^2\cdot x_s}{7+4z+z^2+2x_s+2z\cdot x_s}.$$

我们将证明 x_s 两两不同。首先假设 $a>0$。我们有 $x_{s+1}-1=(z-1)^2(x_s-1)\,\overline{7+4z+z^2+2x_s+2z\cdot x_s}$，由此归纳可得，对于所有 $s\in\mathbb{N}$ 都有 $x_s>1$，因为分母显然为正。接下来， $\frac{x_{s+1}-1}{x_s-1}=(z-1)^2\,(z+2)^2+3+2x_s(z+1)<1$，因为 ~~$x_s,\ z>1$。因~~此 $x_{s+1}<x_s$，从而两两不同。现在假设 $a<0$。归纳地假设 $x_s<-3$，这在$x_0=z<-3$时成立。我们有 $x_{s+1}+3=(z+3)^2(x_s+3)\,\overline{7+4z+z^2+2x_s+2z\cdot x_s}$。分母为 $7+4z+z^2+2x_s+2z\cdot x_s=(z+2)^2+3+2(z+1)x_s>0$，因为 $z<-3$，并且根据归纳假设还有 $x_s<-3$。于是我们有 $x_{s+1}+3<0$，因为 $x_s+3<0$。现在分母为 $(z+2)^2+3+2(z+1)x_s>|z+2|^2>|z+3|^2$，因为 $z<-3$。因此 $\frac{x_{s+1}+3}{x_s+3}=(z+3)^2\,(z+2)^2+3+2(z+1)x_s<1$。所以， $\overline{x_{s+1}>x_s}$，特别地，它们两两不同。

还需注意，表示 x_s 所需的位数相对于输入规模是多项式有界的，因为根据定义， x_s 是由至多 $2^{n^{O(1)}}$ 项的和构成的，每一项都是 $n^{O(1)}$ 个因子的乘积。

给定任意签名网格 Ω，其中交叉签名 $\mathcal{C}$ 出现 n 次，我们通过将每个 $\mathcal{C}$ 替换为 Γ_{2s+1}，构造签名网格 Ω_s, $0\leq s\leq n$，同时遵守二分限制。现在，我们根据 $\mathcal{C}$ 的输入按循环次序为 (0,0,0,0)、(1,0,1,0)、(0,1,0,1) 或 (1,1,1,1) 的总次数 i, $0\leq i\leq n$，对 Ω 的 Holant 求和中的赋值进行分类（这些是 $\mathcal{C}$ 取值非零的唯一输入）。令 c_i 表示满足此 i 限制的所有相应赋值对应的、由其他签名计算所得乘积之和。那么

我们有 Holant(Ω) $= c_n$，并且

$$\mathrm{Holant}(\Omega_s) = \sum_{i=0}^{n} x_s^i \cdot c_i. \tag{4.1}$$

由于 x_s两两不同，(4.1) 是一个满秩范德蒙德系统，因此我们可以在多项式时间内求出所有c_i，尤其可以根据 Holant(Ω_s)、$0 \le i \le n$ 的值计算出 c_n。 □

下文中，我们称 $[1, a, b, c]$ 为 #P-困难或属于 FP，是指问题 Pl-Holant ($[1, a, b, c] \mid (=_3)$) 为 #P-困难或属于 FP。证明结果时，我们将用到 [KC16] 中的以下定理:

定理 4.4（Kowalczyk 和 Cai）。设 $a, b \in \mathbb{C}$，并令 $X = ab$, $Z = \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2$。那么 Pl-Holant ($[a, 1, b] \mid (=_3)$) 是 #P-困难的，但以下情形除外；在这些情形下，该问题属于 FP。

1. $X = 1$；2. $X = Z = 0$;
3. $X = -1$ 和 $Z = 0$;
4. $X = -1$ 和 $Z = -1$;
5. $X^3 = Z$。

将定理 4.4 限制到实数后，我们得到以下推论。

推论 4.5。设 a、$b \in \mathbb{R}$，则 Pl-Holant ($[a, 1, b] \mid (=_3)$) 是 #P-困难的，以下情况除外；对于这些情况，该问题属于 FP（函数多项式时间）。

1. $ab = 1$；2. $a = 1$
和 $b = -1$；3. $a = -1$
和 $b = 1$；4. $a = b$。

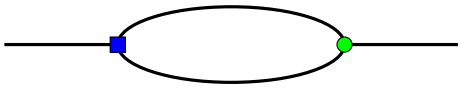


图 19：构件 G_1

考虑图 G_1 19 中的二元跨接构件。允许使用平行边。其签名为 $G_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ a & c \end{smallmatrix}\right]$，其中 $G_1(i, j)$（第 i 行、第 j列）表示当左侧悬挂边（来自“正方形”）和右侧悬挂边（来自“圆”（$=_3$））分别赋值为 i 和 j 时，该构件的值，其中 i，$j \in \{0, 1\}$。依次迭代 G_1 k 次可表示为矩阵幂 G_1^k。事实证明，直接构造或通过插值获得秩 亏缺的跨接签名都非常有用，因为在大多数情况下，这将使我们能够在两侧获得一元签名。利用一元签名，我们可以连接到一个三元签名，从而在一侧产生二元签名，然后应用推论 4.5。

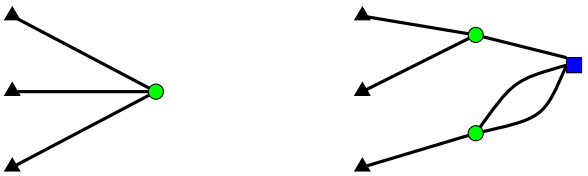
以下引理证明于 [CFL23]。

引理 4.6。给定二元跨接签名 $G_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ a & c \end{smallmatrix}\right]$，只要 $c \neq ab$, $a \neq 0$, $\Delta = \sqrt{(1-c)^2 + 4ab} \neq 0$ 和 $\frac{\lambda}{\mu}$ 不是单位根，我们就可以插值出退化二元跨接签名 $\left[\begin{smallmatrix} y & xy \\ 1 & x \end{smallmatrix}\right]$，其中 $\lambda = {}^{-\Delta+}_{(1+c)\ 2}$、$\mu = {}^{\Delta+}_{(1+c)\ 2}$ 是两个特征值，而 $x = {}^{\Delta-}_{(1-c)\ 2a}$ 和 $y = {}^{\Delta+}_{(1-c)\ 2a}$。

给定一个退化二元跨接签名，我们希望以平面方式将其用作一元签名。只有在这一步中，我们才需要 P3EM 定理。具体而言，在下一个引理中，我们将说明如何实质上分离一个二元跨接签名，从而得到一个一元签名。

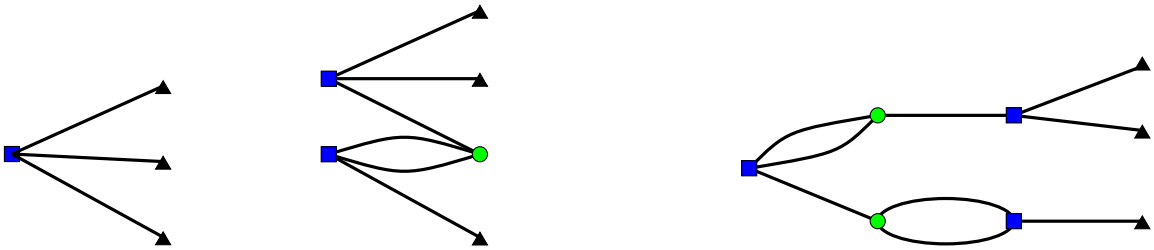
引理 4.7. 对于 Pl-Holant($[1,a,b,c]\mid=_3$)、 a、 b、 $c\in\mathbb{Q}$、 $a\neq 0$，在可使用二元退化跨接签名 $\left[\begin{smallmatrix} y & xy \\ 1 & x \end{smallmatrix}\right]$ 的情况下，其中 $x=\frac{\Delta-}{(1-c)\,2a}$、 $y=\frac{\Delta+}{(1-c)\,2a}$ 以及 $\Delta=\sqrt{(1-c)^2+4ab}$，我们有以下归约

1. Pl-Holant($[1+ax,a+bx,b+cx]\mid=_3$) $\leq_T$Pl-Holant($[1,a,b,c]\mid=_3$)，但有 2 种情况除外: $[1,a,a,1]$、 $[1,a,-1-2a,2+3a]$; 2. Pl-Holant($[1,a,b,c]\,|[y,0,1]$) $\leq_T$Pl-Holant($[1,a,b,c]\mid=_3$)。



(a) g_1 (b) g_2

图20：两个构件，其中每个三角形表示一元构件 $[y,1$ $]$



(a) f_1 (b) f_2 (c) f_3

图2 21：三个构件，其中每个三角形都表示一元构件 $[1,x]$

证明。签名 $[1+ax,a+bx,b+cx]$ 是通过将左侧的 $[1,a,b,c]$ 与右侧的 $[1,x]$ 连接而得到的二元签名。为简便起见，我们记 $f:=[1,a,b,c]$ 和 $f^\flat:=[1+ax,a+bx,b+cx]$。

为证明第一个归约 Pl-Holant($f^\flat\mid=_3$) $\leq_T$Pl-Holant($f\mid=_3$)，考虑左侧问题的任意输入实例。设 G 是其底层的 2-3 二部平面图。由于 G 的 Holant 值等于其各个连通分支的 Holant 值之积，我们可以假设 G 是连通的。我们可以将 G 视为平面 3-正则图 G' 的边-顶点关联图，其中左侧 G 中每个度为 2 的顶点都视为 G' 中的一条边。也可以通过合并 G 中每个度为 2 的顶点所关联的两条边来得到 G'。如果 G' 同构于定理 3.2 中的两个例外情形之一，那么 G 的大小为常数，我们可以直接计算 Holant 值。否则，我们按如下方式构造右侧问题的一个输入。首先，在 Pl-Holant ($[1,a,b,c]\mid(=_3)$) 中得到退化二元交错签名 $D=\left[\begin{smallmatrix} y & xy \\ 1 & x \end{smallmatrix}\right]$。然后，对于 G' 中的每条边（其被赋予二元签名 $f^\flat$），用 $[1,a,b,c]$ 的一个副本替换它，并将其连接到 D 中对应于 $[1,x]$ 的边上。这样，每个 D 副本都留下 1 条悬挂边，每条边在函数上等价于左侧的一个一元函数 $[y,1]$。它们需要连接

到其他（$=_3$）签名，并以平面方式连接。现在我们应用定理 3.2 到 3-正则平面图G'，该定理以构造性的方式为 G' 的每条边指定其两个关联面之一，使得我们得到一个 P3EM。然后，在每个面中添加适当数量的（$=_3$）和 f，并如图 20a 和20b所示，将它们恰好连接到 3 个 $[y,1]$ 副本。定理 3.2 保证可以以平面方式完成这一过程。图 20a 中的每次连接产生乘法因子 $g_1 = y^3 + 1$，而图 20b中的每次连接产生乘法因子 $g_2 = y^3 + by^2 + ay + c$。可以直接验证，对于 $y = \frac{\Delta + (1-c)}{2a}$，除非 $y = -1$，这些因子中至少有一个非零；在该情形下，该签名具有 $[1, a, a, 1]$ 或 $[1, a, -2a-1, 3a+2]$ 的形式。归约证明完成。

对于归约 Pl-Holant($[1,a,b,c] \mid [y,0,1]$) $\leq_T$ Pl-Holant($[1,a,b,c] \mid =_3$)，我们使用与上文相同的 P3EM 论证。因此，只需“吸收”那些悬垂一元函数 $[1,x]$，以产生某个非零因子。我们声称，图 21a、21b 和 21c 中的至少一个连接构件会产生非零全局因子。这四个构件的因子分别为

$$\begin{cases} f_1 = cx^3 + 3bx^2 + 3ax + 1 \\ f_2 = (ab+c)x^3 + (3bc + 2a^2 + b)x^2 + (2b^2 + ac + 3a)x + ab + 1 \\ f_3 = (ab + 2abc + c^3)x^3 + (2a^2 + b + 2a^2c + 3ab^2 + bc + 3b^2c)x^2 \\ \qquad + (3a + 3a^2b + ac + 2b^2 + 2b^2c + ac^2)x + 1 + 2ab + abc \end{cases}$$

将三个公式同时设为 0，并满足条件 $x = \frac{\Delta - (1-c)}{2a}$，其中 $a \neq 0$、a、b、$c \in \mathbb{Q}$，我们发现不存在公共解。[3] 证明至此完成。

□

我们注意到，形如 $[3x+y, -x-y, -x+y, 3x-y]$ 的签名（其中 x、y）在归一化后恰好要么具有 $[1, a, -2a-1, 3a+2]$ 的形式，要么具有 $[0, a, -2a, 3a]$的形式，其中a。

注 1。在引理 4.10 之前我们曾指出，我们可以 实质上 分离一个二元跨接签名以得到一个一元函数。这个表述比较微妙。若允许在右侧 $[1,x]$ 上不受限制地使用该一元函数，则为 Pl-Holant（$f \mid$（$=_3$） $[1,x]$）。以下两个问题是等价的。

$$\text{Pl-Holant}\left(f, f^{\flat} \mid (=_3)\right) \equiv_T \text{Pl-Holant}\left(f \mid (=_3), [1,x]\right).$$

这是因为对于第二个问题，$[1,x]$ 的每次出现都与 f相连，从而产生 $f^{\flat}$；反过来，对于第一个问题，$f^{\flat}$ 的每次出现都可以通过将 f的一份副本与 $[1,x]$相连来替换。然而，我们并未声称问题 Pl-Holant（$f \mid$（$=_3$） $[1,x]$）可以归约为 Pl-Holant（$f \mid$（$=_3$）），后者是比我们所展示的归约更强的以下归约：

$$\text{Pl-Holant}\left(f, f^{\flat} \mid (=_3)\right) \leq_T \text{Pl-Holant}\left(f \mid (=_3)\right).$$

[3] 我们使用 Mathematica 求解方程组

$$\begin{cases} g_1 = y^3 + 1 = 0 \\ g_2 = y^3 + by^2 + ay + c = 0 \\ y = \frac{\Delta + (1-c)}{2a} \end{cases}$$

通过柱面代数分解证明了该系统的解集为空；柱面代数分解是一种用于证明实闭域上塔斯基定理的算法。

问题在于，现在左侧问题的输入图并非某个三正则平面图的边-顶点关联图，因此我们无法像以前那样应用定理 3.2 。如果将所有 2 度顶点所关联的两条边合并（这些顶点赋予二元签名 $f^{\flat}$），确实可以得到一个平面三正则图。但该图仍可能有标记为 f 的 3 度顶点，而且并非每条边都由合并一个原先标记为 $f^{\flat}$ 的 2 度顶点而来。因此，并非每条边都参与三路完美匹配。总之，退化二元交错签名在右侧并不完全等价于一元函数 $[1, x]$ 。我们进一步指出，如果这一点成立，那么定理5.2 的证明就会简单得多。

注 2。 读者应主要将引理 9 视为我们将称为P3EM 论证的一个示例。关键要点是，只要我们在一侧的每个三元签名上使用其中一个悬垂一元函数，并将剩余的悬垂一元函数吸收以构造一个非零全局因子，就可以将退化二元跨接签名分离为一元函数。例如，在定理 4.16的证明中，我们实际上使用了图 24所示的构件。为便于表述，今后我们将称为在 $[1, x]$ 右侧进行插值，或在 $[y, 1]$ 左侧进行插值；当然，读者也可以检查备注1 中提到的细微问题是否已得到处理。

下面的命题在 [CFL23] 中得到了证明。

命题 4.8。对于 $G_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ a & c \end{smallmatrix}\right]$，其中 a、b、$c \in \mathbb{Q}$，若其非奇异（即 $c \neq ab$），则它有两个非零特征值 λ 和 μ。除非以下条件中至少有一个成立，否则比值 λ/μ 不是单位根：

$$\begin{cases} c + 1 = 0 \\ ab + c^2 + c + 1 = 0 \\ 2ab + c^2 + 1 = 0 \\ 3ab + c^2 - c + 1 = 0 \\ 4ab + c^2 - 2c + 1 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

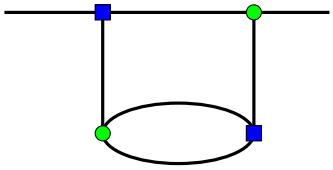


图 22：二元跨接签名 G_2

现在我们引入一个新的二元跨接签名 G_2，如图22所示。 G_2 的签名矩阵为$\left[\begin{smallmatrix} w & b' \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right]$，其中 $w = 1 + ab$、 $a' = a + b^2$、 $b' = a^2 + bc$ 和 $c' = ab + c^2$。类似于 G_1，我们有$\Delta' = \sqrt{(w - c')^2 + 4a'b'}$，两个特征值为 $\lambda' = \frac{-\Delta' + (w+c')}{2}$ 和 $\mu' = \frac{\Delta' + (w+c')}{2}$。~~如果~~ $a' \neq 0$，~~则有~~ $x' = \frac{\Delta' - (w-c')}{2a'}$、 $y' = \frac{\Delta' + (w-c')}{2a'}$；~~如果进一步~~ $\Delta' \neq 0$，我们可以将其乔丹标准形写为

$$G_2 = \begin{pmatrix} w & b' \\ a' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' & y' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x' & y' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{4.3}$$

类似于命题 4.8，我们对 G_2 有如下断言。

命题 4.9. 如果 G_2 的签名矩阵是非退化的，那么其特征值之比 λ'/μ' 不是单位根，除非以下条件中至少有一个成立，其中 $A = w + c'$、$B = (c' - w)^2 + 4a'b'$。

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ A^2 + B = 0 \\ A^2 + 3B = 0 \\ 3A^2 + B = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

引理 4.10。假设 a，b，$c \in \mathbb{Q}$，$a \neq 0$ 和 $c \neq ab$ 以及 a，b，c 均不满足（4.2）中的任何条件。令 $x = \frac{\Delta - }{(1-c)\,2a}$，~~$y = \frac{\Delta +}{(1-c)\,2a}$ 和 $\Delta =$~~ $\sqrt{(1-c)^2 + 4ab}$。那么对于 Holant($[1, a, b, c] \mid =_3$),

1. 我们可以在左侧对 $[y, 1]$ 进行插值；2. 除以下两种情况外，我们可以在右侧对 $[1, x]$ 进行插值：$[1, a, a, 1]$、$[1, a, -1 - 2a, 2 + 3a]$。

证明。该引理由引理 4.6 和引理 4.7 结合签名矩阵为 G_1的二元跨接构件 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ a & c \end{smallmatrix}\right]$可得。注意，$c \neq ab$ 表示矩阵 G_1 是非退化的，而 λ/μ不是单位根等价于（4.2）中的方程均不成立。

□

我们有与以下内容对应的类似结论：G_2。当签名矩阵非退化且不满足（4.4）中的任何条件时，我们可以在左侧插值相应的 $[y', 1]$，也可以在右侧插值相应的 $[1, x']$，但 $y' = -1$的情况除外。

定义 4.11。对于 Pl-Holant($[1, a, b, c] \mid =_3$)，给定 a、b、$c \in \mathbb{Q}$、$a \neq 0$，若二元跨接构件 G 有效，则称其可用；当 G 的签名矩阵非退化，且其两个特征值之比λ/μ 不是单位根时，该构件有效。

注 3。具体而言，G_1 有效的条件是 $c \neq ab$ 和 a、b、c 均不满足（4.2）中的任何条件，这正是引理4.10中的假设。G_1 有效意味着它可用于在左侧对 $[y, 1]$ 进行插值，也可用于在右侧对 $[1, x]$ 进行插值；有两种例外情形，我们已证明它们满足二分定理。x、y 如引理4.10所述。

类似地，当二元跨接构件 G_2 对相应的值 x' 和 y'有效时，我们可以在左侧对 $[y', 1]$ 进行插值；在 $y' = -1$的情况下除外，我们可以在右侧对 $[1, x']$ 进行插值。

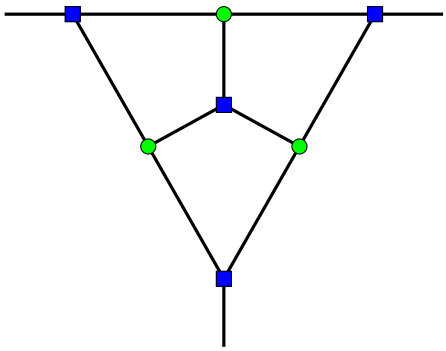


图23：一个三元构件 G_3

图 G_3 23 中的三元构件 将在此处及后续证明中使用。

一元签名 $\Delta_0 = [1,0]$ 和 $\Delta_1 = [0,1]$ 称为固定签名，因为它们可以将变量“固定”为 0 或 1。另一个有用的一元签名是 $\Delta_2 = [1,1]$。拥有一元签名的一个好处是，我们可以利用引理 4.13 得到这三个签名。如下列引理所示，它们很有用。

引理 4.12. 如果在 Pl-Holant($[1,a,b,c] \mid =_3$) 中，可以在右侧插值构造 Δ_0、Δ_1 和 Δ_2，其中 a、b、$c \in \mathbb{Q}$、$ab \neq 0$，那么除非 $[1,a,b,c]$ 是仿射或退化的，否则该问题是 #P-困难；在这两种情况下，该问题都属于 FP（函数多项式时间）。

证明. 分别将 $[1,0]$, $[0,1]$ 连接到左侧的 $[1,a,b,c]$，我们得到二元签名 $[1,a,b]$ 和 $[a,b,c]$。接着可以应用推论 4.5，除非 $[1,a,b]$ 和 $[a,b,c]$ 都属于 FP（函数多项式时间），否则该问题是 #P-困难。当 $ab \neq 0$ 时，只有在以下情形下，$[1,a,b]$ 和 $[a,b,c]$ 才都属于 FP（函数多项式时间）：(1) $[1,a,b,c]$ 退化，即 $b = a^2$ 和 $c = a^3$，此时该问题属于 FP（函数多项式时间）；(2) $[1,a,b,c]$ 具有 $[1,a,1,a]$ 的形式，这由引理 4.2 解决（当 $a = \pm 1$ 时，$[1,a,1,a]$ 退化）；(3) $[1,a,b,c]$ 具有 $[1,a,a^2,a]$ 的形式，我们将在本证明后文解决；(4) $[1,a,b,c] = [1,1,1,-1]$ 或 $[1,-1,1,1]$，我们将在本证明后文解决；或 (5) $[1,a,b,c] = [1,1,-1,-1]$ 或 $[1,-1,-1,1]$，它们是仿射的，因此属于 FP（函数多项式时间）。

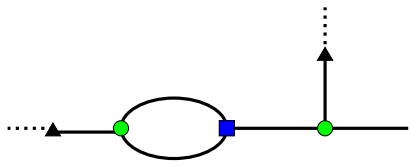
对于情形（2），如果将 $[1,1]$ 连接到 $[1,a,a^2,a]$，我们会得到一个二元签名 $[1+a, a+a^2, a+a^2]$，其归一化后（当 $a \neq -1$时）为 $[1,a,a]$。根据推论 4.5，该问题是 #P-困难的，除非$a = \pm 1$；在这些情况下，该问题 $[1,a,b,c]$ 是 $[1,1,1,1]$ 或 $[1,-1,1,-1]$，它们是退化的，因此属于 FP（函数多项式时间）。

对于情形（3），由于对签名中的 0 和 1 进行翻转具有对称性，只需考虑 $f = [1,1,1,-1]$ 和 $g = [1,-1,1,1]$；它们既不是仿射的，也不是退化的。对于 f 和 g，我们使用构件 G_3 分别生成三元签名 $f' = [1,1,3,3]$ 和 $g' = [1,1,-1,3]$。它们都不属于上述例外情况。因此，Holant($f \mid =_3$) 和 Holant($g \mid =_3$) 均为 #P- 困难。 □

下面的引理允许我们在右侧插值任意一元签名，尤其是 Δ_0、Δ_1 和 Δ_2；方法是使用一个带有跨接签名的二元构件，以及右侧一个合适的一元签名 s。

引理4.13 (Vadhan, [Vad01])。设 $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是一个用于二元跨接构件的非奇异签名矩阵，且可对角化并具有互异的特征值；设 $s = [a,b]$ 是右侧一个不属于 M的行特征向量的一元签名。那么 $\{s \cdot M^j\}_{j\geq 0}$可用于插值右侧任意一元签名。

4.1 当 $ab \neq 0$和 G_1成立时，$[1,a,b,c]$ 的二分定理



Fig图24：非线性构件，其中三角形表示一元构件 $[y,1$]

我们来介绍图24中的一个非线性构件。若在该非线性构件中放入二元退化跨接签名 D，使其作用于三角形（并遵循二分

结构），f作用于方块，并将（$=_3$）作用于圆，我们便得到它的签名 $[1,x]\otimes[1,x]\otimes[y^2+yb,ya+c]$。注意，这是一个右侧的三元平面构件。以下两个引理将在定理4.16的证明中使用。

引理 4.14. 设 a、b、$c\in\mathbb{Q}$、$ab\neq 0$ 和 满足 (con1) $a^3-b^3-ab(1-c)=0$ 以及 (con2) $a^3+ab+2b^3=0$。那么，除非 $[1,-1,1,-1]=[1,-1]^{\otimes 3}$（它是退化的或是匹配门），否则 Pl-Holant($[1,a,b,c]\mid=_3$) 是 #P-困难；这两种情况下，该问题都属于 FP（函数多项式时间）。

证明. 如果 $a+b^2=0$除了满足 (con1) 和 (con2) 之外，还满足 $ab\neq 0$，那么 $[1,a,b,c]=[1,-1,1,-1]$，它是退化的。现在我们假设 $a+b^2\neq 0$。这里我们使用构件 G_2。

首先假设 G_2成立。结合 $a+b^2\neq 0$以及（con1）和（con2），我们可以验证$\Delta=\sqrt{4(a+b^2)(a^2+bc)+(c^2-1)^2}\neq 0$，并可将乔丹标准形写为

$$G_2=\begin{pmatrix}1+ab & a^2+bc\\ a+b^2 & ab+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x & y\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & y\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1},$$

其中 $\lambda=\frac{1+2ab+c^2-\Delta}{2}$，$\mu=\frac{1+2ab+c^2+\Delta}{2}$，$x=\frac{\Delta+c^2-1}{2\ a+b^2}$( )，$y=\frac{\Delta-c^2+1}{2\ a+b^2}$( )。由于 G_2 成立，左侧可用到 $[y,1]$。将这个 $[y,1]$ 用于图 24 中的非线性构件，我们得到右侧的一元签名 $[y^2+yb,ya+c]$。根据引理 4.13，我们可以对任意一元签名进行插值，尤其是右侧的 Δ_0, Δ_1 和 Δ_2，并应用引理 4.12；除非 $[y^2+yb,ya+c]$ 与 G_3的某个行特征向量成比例，即 $[1,-y]$ 和 $[1,x]$。因此，例外情形为 $ya+c=x(y^2+yb)$ 和 $ya+c=-y(y^2+yb)$。注意，此时 $xy=\frac{a^2+bc}{a+b^2}$。第一个方程意味着 $c=ab$ 或$a+b^2=0$ 或 $a^3-b^3c+ab(-1+c^2)=0$。第二个方程意味着 $a+b^2=0$ 或 $f_1=0$，其中 $f_1=a^3+4a^6+3a^5b^2+a^3b^3-c-4a^3c+6a^4bc-6a^2b^2c-b^3c-3a^2b^5c-3a^3c^2-3abc^2-4b^3c2-a^3b^3c^2-6ab^4c^2-4b^6c^2+3c^3+4a^3c^3+6a^2b^2c^3+3b^3c^3+a^3c^4+3abc^4+4b^3c^4-3c^5-b^3c^5+c^7$。因此共有四种例外情况，

$$\begin{cases}c=ab\\ a+b^2=0\\ a^3-b^3c+ab(-1+c^2)=0\\ f_1=0\end{cases}\tag{4.5}$$

对于其中每一种情况，结合 ($con1$) 和 ($con2$)，我们得到 3 个方程，可以使用 MathematicaTM求解。对于有理数 a，b，c，当 $ab\neq 0$ 时，只有两种可能的结果—— $[1,-1,1,-1]$和 $[1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1]$。第一种违反了 $a+b^2\neq 0$，第二种是匹配门，因此属于 FP（函数多项式时间）。对于其他所有 G_2 成立的情况，我们在右侧得到钉扎签名 Δ_0，Δ_1 和 Δ_2，于是由引理4.12可证得该引理。

现在假设 G_2 不成立。那么根据命题 4.9，我们至少还能得到一个条件，即 (4.4) 中的一个条件，或 $(a+b^2)(a^2+bc)=(1+ab)(ab+c^2)$ 中的一个条件，这表明 G_2是退化的。对于这 6 个条件中的每一个，结合 ($con1$) 和 ($con2$)，我们都可以使用 MathematicaTM求解有理数 a，b，c。唯一的解是 $[1,-1,1,-1]$，它违反了 $a+b^2\neq 0$。引理的证明至此完成。□

引理 4.15。设 a、b、$c\in\mathbb{Q}$、$ab\neq 0$，并满足
(con1) $a^3-b^3-ab(1-c)=0$ 以及

(con2) $(a^4b+ab^4)^2=(a^5+b^4)(b^5+a^4c)$。

那么，除非 $[1,a,b,c]\,|\,{=_3}$ 是 $[1,a,a^2,a^3]$（它是退化的）或匹配门，否则 Pl-Holant($[1,a,b,c]\,|\,{=_3}$) 是 #P-困难；这两种情况下，该问题都属于 FP（函数多项式时间）。

证明。消去 c，由（$con1$）和（$con2$）得到 $a^{11}-a^9b+a^6b^4+a^5b^6-a^4b^5-a^3b^7+a^2b^9-b^{10}=0$。令人惊讶的是，它可以分解为 $(a^2-b)\ (a^9+a^4b^4+a^3b^6+b^9)\ =0$。若 $b=a^2$，则由（$con1$）可得 $c=a^3$，因此该签名变为 $[1,a,a^2,a^3]$，它是退化的。我们假设$a^9+a^4b^4+a^3b^6+b^9=0$，那么证明的其余部分与引理 4.14基本相同。 □

定理 4.16。对于 a，b，$c\in\mathbb{Q}$，$ab\neq 0$，如果 G_1 成立，那么 Pl-Holant$([1,a,b,c]|\ {=_3})$ 是 #P-困难的，除非它属于定理 *2.1* 中的易处理情形，因而属于 FP（函数多项式时间）。

证明。如果 $[1,a,b,c]$ 具有 $[1,a,a,1]$ 或 $[1,a,-1-2a,2+3a]$ 的形式，那么该问题属于 FP（函数多项式时间）。现在我们假设该签名不属于这两种形式。根据引理4.10，当 G_1 成立时，我们可以在左侧对 $[y,1]$ 进行插值，同时在右侧对 $[1,x]$ 进行插值。

让我们再次写出乔丹标准形：

$$G_1=\begin{pmatrix}1&b\\a&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x&y\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x&y\\1&1\end{pmatrix}^{-1},$$

$\lambda=\frac{-\Delta+(1+c)\ 2}{}$，$\mu=\frac{\Delta+}{(1+c)\ 2}$，$x=\frac{\Delta-}{(1-c)\ 2a}$，$y=\frac{\Delta+}{(1-c)\ 2a}$，$\Delta=\sqrt{\cancel{(1-c)^2+4ab}}$

使用 $[y,1]$ 以及图 24 中的构件，我们在右侧得到 $\left[y^2+yb,ya+c\right]$。除非 $\left[y^2+yb,ya+c\right]$ 与 G_1的某个行特征向量成比例，即根据引理 4.13，$[1,-y]$ 或 $[1,x]$，否则我们可以在右侧对 Δ_0、Δ_1 和 Δ_2 进行插值。因此，例外情形是 $ya+c=\ (y^2+yb)\ x$ 或 $ya+c=-y\ (y^2+yb)$。第一个方程意味着 $a^3-b^3-ab\ (1-c)\ =0$ 或 $c=ab$。第二个方程意味着 $c=ab$ 或 $c=1+a-b$。

根据假设，G_1 成立，因此 $c\neq ab$。因此，我们考虑两种例外情况。

情况 1：$a^3-b^3-ab\ (1-c)\ =0$

在这种情况下，我们有 $1-c=\frac{a^3-b^3}{ab}$因此$\Delta=\sqrt{(1-c)^2+4\overline{ab=|\frac{a^3+b^3}{ab}|}}$。$(4ab+c^2-2c+1=0)$ 中的一个条件 (4.2) 与 $\Delta=0$相同。由于 G_1 成立，我们有 $\Delta\neq 0$ 因此$a^3+b^3\neq 0$，这等价于 $a+b\neq 0$ 当 a时，$b\in\mathbb{Q}$。

S子情况 1：$\frac{a^3+b^3}{ab}>0$。右侧有 $[1,x]=[1,\frac{\Delta-}{(1-c}]=[1,\frac{b^2}{a^2}]$)。将左侧的 $[1,x]$ 连接到 $[1,a,b,c]$，可得到左侧的二元签名 $[1+\frac{b^2}{a},a+\frac{b^3}{a^2},b+\frac{b^2c}{a^2}]$。注意，当 $a+b\neq 0$时，$a+\frac{b^3}{a^2}\neq 0$。除非推论 4.5 中的某个可处理条件成立，否则这是 #P-困难的（因此问题 $[1,a,b,c]$ 也是 #P-困难的）。事实证明，唯一的可能性是：(1) 推论 4.5 中的第一种情况，即 $(1+\frac{b^2}{a})(b+\frac{b^2c}{a^2})\ =(a+\frac{b^3}{a^2})^2,$，代入 $c=\frac{ab-a^3+b^3}{ab}$ 后变为$\left(a^2-b\right)\left(a^3+ab+2b^3\right)\ =0$；或 (2) 推论 4.5 中的第二种和第三种情况，这意味着 $(a=-b^2)\wedge(c=-b^3)$，因此问题 $[1,a,b,c]$变为问题 $[1,-b^2,b,-b^3]$；或 (3) 推论 4.5 中的第四种情况，这意味着 $(a=b)\wedge(c=1)$ 或 $(a=-b^2)\wedge(c=-b^3)$。在前一种情况下，$[1,a,b,c]$ 具有匹配门形式 $[1,a,a,1]$，因此属于 FP（函数多项式时间）。

现在处理情形 (1)。当 $a^2-b=0$，结合 $a^3-b^3=ab(1-c)$，我们有 $c=a^3$，因此 $[1,a,b,c]$ 是退化的。当 $a^3+ab+2b^3=0$，结合$a^3-b^3=ab\,(1-c$，根据引理 4.14，$[1,a,b,c]$ 是 #P-困难的（其中 $a+b\neq 0$排除了例外情况）。

现在处理情形 $[1,-b^2,b,-b^3]$。若 $b=0,\ \pm1$，则它是退化的或仿射的。现在假设$b\neq 0,\ \pm1$。$G_1=\begin{bmatrix}1 & b\\ -b^2 & b^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -b^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & b\end{bmatrix}$。于是我们可以在左侧得到 $[1,-b^2]$。注意，将 $[1,b]$ 的三个副本与 $[1,-b^2,b,-b^3]$ 在左侧连接，会产生一个全局因子 $1-b^6\neq 0$。将 $[1,-b^2]$ 连接两次到右侧的 $[1,0,0,1]$，我们便在右侧得到 $[1,b^4]$。将 $[1,b^4]$ 接回左侧的$[1,-b^2,b,-b^3]$，便得到一个二元签名 $g=[1-b^6,-b^2+b^5,b-b^7]$，根据推论 4.5，除非 $b=\pm1$（该情形已讨论过），否则它是 #P-困难的，因此 $[1,-b^2,b,-b^3]$也是 #P-困难的。

子情况 2：$\frac{a^3+b^3}{ab}<0$。我们在左侧有 $[y,1]=[-\frac{b^2}{a^2},1]$。将 $[y,1]$ 的两个副本连接到 $(=_3)$，我们在右侧得到 $[y^2,1]=[\frac{b^4}{a^4},1]$。将其再连接回左侧，我们在左侧得到一个二元签名 $[\frac{b^4}{a^4}+a,\frac{b^4}{a^3}+b,\frac{b^5}{a^4}+c]$。除非满足推论 4.5 中的某个可处理条件，否则该问题是 #P-困难。事实证明，唯一的可能性要么是 $(a^4b+ab^4)^2=(a^5+b^4)(b^5+a^4c)$，要么是 $(a=b)\wedge(c=1)$，后者属于匹配门情形，因此属于 FP（函数多项式时间）。现在我们处理前一种情况。结合 $a^3-b^3=ab(1-c)$，根据引理 4.15，$[1,a,b,c]$ 除非是退化的，否则为 #P-困难。

情况 2：$1+a-b-c=0$

在这种情况下，$\Delta=|a+b|$，并且由于 G_1 可行，一个条件是 $4ab+c^2-2c+1=0$，其中说明 $\Delta\neq 0$，因此 $a+b\neq 0$。(4.2)

如果 $a+b>0$，那么 $\Delta=a+b$，且 $x=\frac{a+b-(1-c)}{2a}=1$。接着我们可以在右侧插值 $[1,x]=[1,1]$（因为 $y=\frac{a+b+(1-c)}{2a}=\frac{b}{a}\neq -1$））。否则，$a+b<0$，那么 $\Delta=-(a+b)$，且 $y=\frac{-a-b+(1-c)}{2a}=\frac{-a-b+(b-a)}{2a}=-1$。通过将两份 $[y,1]=[-1,1]$ 连接到 $[1,0,0,1]$，我们可以在右侧得到 $[1,1]$。接着将 $[1,1]$ 连接到左侧的 $[1,a,b,c]$，便可在左侧得到一个二元签名 $[a+1,a+b,a+c]$。同样，我们可以对其应用推论 4.5，并得出它是 #P-困难的。事实证明，唯一可行的易解情形会导致 $[1,a,-1-2a,2+3a]$，以及 $(c=1)\wedge(a=b)$；这两种情况下，该问题都属于 FP。由此证明了 Holant$([1,a,b,c]\mid=_3)$ 的 #P困难性。□

4.2 $[1,a,b,0]$的二分定理

定理 4.17. 问题 $[1,a,b,0]$ 对于 $a,b\in\mathbb{Q}$ 是 #P-困难的，除非它属于定理 *2.1* 中的易处理情形，因此属于 FP（函数多项式时间）。

证明. 若 $ab\neq 0$ 和 G_1 成立，则定理 4.16已给出证明。若 $a=b=0$，则它是退化的，且属于 FP（函数多项式时间）。我们将其余情况分为三种：

1. $ab\neq 0$ 和 G_1 不成立；2. $f=[1,a,0,0]$ 与 $a\neq 0$；3. $f=[1,0,b,0]$ 与 $b\neq 0$。

• 情况 1：$ab\neq 0$ 在 $f=[1,a,b,0]$ 和 G_1 不成立。由于 $c=0\neq ab$，这意味着 (4.2) 中至少有一个方程成立。经过简单推导，得到以下待考察的签名族：$[1,a,-\frac{1}{ka},0]$，其中 $k=1$、2、3、4。

在每种情况下，我们使用 G_3 生成另一个对称三元签名。如果新签名是#P-困难的，那么给定签名也是#P-困难的。我们将更详细地描述情况 $[1,a,-\frac{1}{a},0]$；另外三种类型（$k=2$、3、4）与此类似。

对于 $k=1$，构件 G_3 会产生 $g=[3a^3+4,a^4-a-\frac{2}{a^2},-a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^4},a^3+3]$。对于 $a=-1$，这是 $[1,0,-1,2]$，其形式为 $[1,a',-1-2a',2+3a']$，且属于 FP（函数多项式时间）。下文假设 $a\neq -1$。那么 g 的所有条目都非零。

我们声称，构件 G_1 使用 g 即可实现。由于 $a \in \mathbb{Q}$，可以验证 g 是非退化的，因为 ($a^4 - a - \frac{2}{a^2}$)($-a^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^4}$) $= (3a^3 + 4)(a^3 + 3)$ 无解；并且将其应用于 g 时，(4.2) 中的方程均无解。因此，G_1 使用 g 即可实现，我们可以将定理 4.16 应用于 g。利用 $a \in \mathbb{Q}$ 这一事实，可以证明 g 不可能是 Gen-Eq，因为它没有零项；它也不可能是仿射的或退化的。此外，可以验证，如果施加条件 g 是匹配门，即 $(3a^3+4 = a^3+3) \wedge (a^4-a-\frac{2}{a^2} = -a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^4})$，那么 a 无解；并且 g 具有形式 $[1, a', -1-2a', 2+3a']$ 时，$a = -1$ 是唯一解。因此，$[1, a, -\frac{1}{a}, 0]$ 是 #P- 困难的。

• 情况 2：$f = [1, a, 0, 0]$ 与 $a \neq 0$。构件 G_3 产生 $g' = [3a^3 + 1, a^4 + a, a^2, a^3]$。由于$a \in \mathbb{Q}$，$3a^3 + 1 \neq 0$。如果 $a = -1$，$g' = [-2, 0, 1, -1]$，只需考虑 $[1, -1, 0, 2]$（它是通过交换 0 和 1 的角色得到的反转 $[-1, 1, 0, -2]$ 的-1 倍），在这种情况下，G_2成立，其中矩阵为 $G_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$。我们可以在右侧对 $[1, x] = [1, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ 进行插值。将其连接回 $[1, -1, 0, 2]$，在左侧得到一个二元签名 $[\frac{5+\sqrt{5}}{2}, -1, -(3 + \sqrt{5})]$，根据推论 4.5，该问题是 #P-困难的。因此，$[1, -1, 0, 2]$ 是 #P-困难的，$[1, a, 0, 0]$也同样如此。

否则，$a \neq -1$。我们声称构件 G_1 利用 g' 可行。签名 g' 是非退化的，因为 $a \in \mathbb{Q}$ 非零，因此 $(a^4 + a)a^2 \neq (3a^3 + 1)a^3$。(4.2) 中也没有任何方程在 g' 上有解。因此，G_1 利用 g' 可行，我们可以对 g' 应用定理 4.16。利用 $a \in \mathbb{Q}$ 这一事实，可以证明 g' 不可能是 Gen-Eq，因为它没有零项；它也不可能是仿射或退化的。此外，g' 不可能是匹配门，也不可能具有 $[1, a', -1-2a', 2+3a']$ 的形式。因此，$[1, a, 0, 0]$ 是 #P-困难的。

• 情形 3：$f = [1, 0, b, 0]$ 其中 $b \neq 0$。构件 G_1 生成一个二元跨接签名$G_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot [1\ b]$，它分解为右侧的一个一元签名 $[1, b]$ 和左侧的一个一元签名 $[1, 0]$。由此，我们通过 P3EM 论证得到一个归约：Pl-Holant($[1, b^2, b] | (=_3)$) $\leq_T$ Pl-Holant($f \mid =_3$)。除 $[1, b^2, b] \mid =_3$外，问题 Pl-Holant($b = \pm 1$) 是 #P- 困难的；根据推论 4.5，这意味着当 $f \mid =_3$ 时，Pl-Holant($b \neq \pm 1$) 也为 #P- 困难。如果 $b = \pm 1$，那么f 是仿射的，且 Pl-Holant($f \mid =_3$) 属于 FP（函数多项式时间）。 □

4.3 $[1, a, 0, c]$的二分定理

定理 4.18。问题 $[1, a, 0, c]$，其中包含 a、$c \in \mathbb{Q}$，是 #P-困难的；除非满足 $a = 0$，此时它属于 Gen-Eq，因此也属于 FP（函数多项式时间）。

证明。当 $a = 0$时，它属于 Gen-Eq，因此也属于 FP（函数多项式时间）。当 $a \neq 0$时，如果 $c = 0$，则由定理4.17可知它是 #P-困难的。下面我们讨论 $[1, a, 0, c]$ 以及 $ac \neq 0$。

如果 $c = \pm 1$，则该签名为 $[1, a, 0, 1]$ 或 $[1, a, 0, -1]$。我们使用 G_2 构造一个三元签名 $g = [3a^3 + 1, a^4 + a, a^2, a^3 + 1]$（令人惊讶的是，两者映射到同一个签名）。如果 $a = -1$，则归一化后它是 $[1, 0, -\frac{1}{2}, 0]$，根据定理 4.17，该签名是 #P-困难的，因此给定的签名$[1, -1, 0, 1]$也是如此。如果 $a \neq -1$，那么 g 没有零项。接下来我们声称，构件 G_1 使用 g即可奏效。可以验证，g是非退化的，因为 $(a^4 + a)a^2 = (3a^3 + 1)(a^3 + 1)$无解；并且将 g代入后，方程 (4.2) 中没有任何一个有解。因此，G_1 使用 g 即可奏效，我们可以对 g应用定理 4.16。利用 $a \in \mathbb{Q}$这一事实，可以证明 g 不可能属于 Gen-Eq，因为它没有零项；它也不可能是仿射或退化的。此外，可以验证，如果我们施加条件，要求 g为匹配门或具有某个 a'对应的 $[1, a', -1-2a', 2+3a']$形式，那么 a唯一的解是 $a = 0$。因此，$[1, a, 0, \pm 1]$ 都是 #P-困难的。

现在假设 $c \neq 0$、± 1。我们声称构件 G_1 有效。可以验证，对于非退化矩阵 $G_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ a & c \end{smallmatrix}\right]$，$\Delta = |1 - c|$、$\lambda/\mu \in \{c, \frac{1}{c}\}$ 不是单位根。接下来我们声称

我们可以在右侧获得 $[1,0]$。如果 $c<1$，根据引理 4.10，我们可以在右侧对 $[1,x]=[1,0]$ 进行插值，但有两个例外情形；对于这两个例外情形，我们已经给出了二分定理（见定义 4.11 后的备注）。如果 $c>1$，我们可以在左侧对 $[y,1]=[0,1]$ 进行插值，因此图 24 中的构件会在右侧产生 $[0,c]$，它与 $[1,-y]=[1,0]$ 和 $[1,x]=[1,\frac{c-1}{a}]$（G_1的行特征向量）不成比例。根据引理 4.13，我们可以在右侧对任意一元构件进行插值，包括 $[1,0]$。因此，我们总能在右侧得到 $[1,0]$。将 $[1,0]$ 连接到 $[1,a,0,c]$，我们将在左侧得到一个二元签名 $[1,a,0]$；根据推论 4.5，这是 #P- 困难的。因此，当 $c\neq 0$、± 1 时，$[1,a,0,c]$ 是 #P- 困难的。 □

4.4 当 $abc\neq 0$ 时 $[1,a,b,c]$ 的二分定理

我们需要三个引理来处理一些特殊情况。引理 4.19 是定理 4.16 的一部分（可以验证 G_1 确实适用；事实上，对于 $[1,-b^2,b,-b^3]$，条件 (4.2) 等价于 $b=1$，而$b=0$ 情形是退化的，因此显然属于 FP）。为方便起见，我们在此明确陈述。

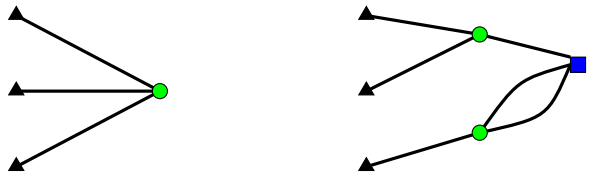
引理 4.19. 问题 $[1,-b^2,b,-b^3]$ 在 $b\in\mathbb{Q}$ 下是 #P-困难的，除非 $b=0,\pm 1$，此时该问题属于 FP。

下一个引理并非定理 4.16 的一部分，因为对于 $[1,a,-\frac{1}{a},-1]$，条件 (4.2) 不成立。

引理 4.20. 问题 $[1,a,-\frac{1}{a},-1]$ 在 $a\in\mathbb{Q}$, $a\neq 0$ 下是 #P-困难的，除非 $a=\pm 1$；在此情形下，该问题属于 FP。

证明。如果 $a=\pm 1$，$[1,1,-1-1]$ 是仿射的，且 $[1,-1,1,-1]$ 是退化的，则二者都属于 FP（函数多项式时间）。现在我们假设 $a\neq\pm 1$（因此矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} a^{-2} & a \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right]$ 可逆）。我们使用三元构件 G_3 在左侧得到签名 $g=[3a^3+\frac{1}{a^3}+4, a^4-\frac{1}{a^2}, -a^2+\frac{1}{a^4}, a^3+\frac{3}{a^3}+4]$。直接计算（使用 Mathematica）表明，$G_1$ 对于 g 始终有效，除非 $a=-1$。因此，根据定理 4.16，我们有g是 #P-困难的，并且 $[1,a,-\frac{1}{a},-1]$ 是 #P-困难的，除非 g属于定理 2.1中的易处理情形。使 g 属于定理 2.1 中的易处理情形的唯一解是 $a=\pm 1$。证明完毕。 □

引理 4.21。问题 $[1,a,b,ab]$ with $a,b\in\mathbb{Q}$ and $a,b\neq 0$ 是 #P-困难的，除非它是退化的或仿射的；后者属于 FP（函数多项式时间）。



(a) (b)

图 25：两个构件，其中每个三角形表示一元构件 $[1,a$]

证明。如果 $a=-1$ and $b=\pm 1$，则该问题属于 FP（函数多项式时间）。事实上，$[1,-1,1,-1]$ 是退化的，并且 $[1,-1,-1,1]$ 可以转换为匹配门；这两个问题都属于 FP（函数多项式时间）。因此，我们现在假设 $a=-1$ 和 $b=\pm 1$ 不同时成立。

我们首先使用 G_3 构造一个三元签名 $h=[-b^4+3b^2-2, b^4-2b^3-b^2+2b, 2b^3-b^2-2b+1, -2b^4+3b^2-1]$ 位于左侧，该签名在除以

$(b+1)(b-1)$ 后可规范化为 $[1,b]$。使用构件 G_1，我们得到一个退化矩阵 $G_1=\left[\begin{smallmatrix}1 & b\\ a & ab\end{smallmatrix}\right]=\left[\begin{smallmatrix}1\\ a\end{smallmatrix}\right]\cdot[1\ b]$。如果 $[1,a]$ 能够适当地形成某个非零全局因子，我们将在右侧得到 $[1,b]$。

图 25 展示了在左侧“吸收” $[1,a]$ 的两种不同方式。重要的是，我们在方形顶点上放置 g，而不是 $[1,a,b,ab]$。图 25a 给出了一个因子 $1+a^3$，当 $a\neq -1$时该因子非零。当 $a=-1$时，图 25b 给出了一个因子 $2b^2-4b+2=2(b-1)^2$，除非 $b=1$，否则该因子非零。因此，我们可以在右侧插值 $[1,b]$。将 $[1,b]$ 连接回左侧的 $[1,a,b,ab]$，得到二元签名 $g=[1+ab,a+b^2,b+ab^2]$。若 $a+b^2=0$，给定的签名为 $[1,-b^2,b,-b^3]$；根据引理 4.19，该问题是 #P-困难的（引理 4.19 中的例外情形不适用，因为 $b\neq 0$，且若 $b=\pm 1$，则 $a=-b^2=-1$，这已被排除。）现在假设 $a+b^2\neq 0$。将 g除以 $a+b^2$进行归一化，得到左侧的二元签名 $[\frac{1+ab}{a+b^2},1,\overset{b+ab^2}{)}_{a+b^2}]$。将推论 4.5 应用于 g，该问题是 #P-困难的（给定的签名 $[1,a,b,ab]$也一样），除非

1. $(1+ab)(b+ab^2)=(a+b^2)^2$。这意味着 $\left(a^2-b\right)\left(b^3-1\right)=0$。如果 $a^2-b=0$，给定的签名为 $[1,a,a^2,a^3]$，且是退化的。如果 $b^3-1=0$，由于 $b\in\mathbb{Q}$，我们有 $b=1$和 $a\neq -b^2=-1$，给定的签名为 $[1,a,1,a]$。这由引理 4.2 解决。2. $\frac{1+ab}{a+b^2}=1$ 和 $\frac{b+ab^2}{a+b^2}=-1$。将这两个表达式相除，得到 $b=-1$。这意味着 $a=0$，因此违反了我们的假设 $a\neq 0$。3. $\frac{1+ab}{a+b^2}=-1$ 和 $\frac{b+ab^2}{a+b^2}=1$。在假设$a+b^2\neq 0$的情况下，不存在满足这两个方程的 (a,b) 对。4. $\frac{1+ab}{a+b^2}=\frac{b+ab^2}{a+b^2}$。我们有 $b=1$或 $ab=-1$。如果 $b=1$，那么 $[1,a,b,ab]$变为 $[1,a,1,a]$；根据引理 4.2，除非 $a=0$（这违反了我们的假设）或 $a=\pm 1$，否则它是 #P-困难的；在这几种情况下，签名是仿射的，因此该问题属于 FP（函数多项式时间）。如果 $ab=-1$，那么 $[1,a,b,ab]$变为 $[1,a,-\frac{1}{a},-1]$；根据引理 4.20，除非 $a=\pm 1$，否则它是 #P-困难的；在这种情况下，签名是仿射的，因此该问题属于 FP（函数多项式时间）。

注意，由于 a、$b\neq 0$、$[1,a,b,ab]$ 不能是 Gen-Eq。引理得证 . □

现在我们证明

定理 4.22。问题 $[1,a,b,c]$对于 a、b、$c\in\mathbb{Q}$、$abc\neq 0$，是 #P-困难的，除非它属于定理 2.1中的易处理情形。

证明。根据命题 4.8、定理 4.16 和引理4.21，只需考虑 $G_1=\left[\begin{smallmatrix}1 & b\\ a & c\end{smallmatrix}\right]$ 中两个特征值之比为单位根且 $c\neq ab$ 的情形。如果G_1 中的特征值之比为单位根，我们知道条件（4.2）中至少有一个成立。为方便起见，我们在此列出（4.2）中的条件，并将它们标记为 R_i，其中 $i=1$、2、3、4、5：

$$R=\bigvee_{i=1}^{5}R_i,\quad \text{where}\begin{cases}R_1: c=-1\\ R_2: ab+c^2+c+1=0\\ R_3: 2ab+c^2+1=0\\ R_4: 3ab+c^2-c+1=0\\ R_5: 4ab+c^2-2c+1=0\end{cases}\tag{4.6}$$

我们将 G_3应用于 $[1,a,b,c]$，也就是说，将方块放置为 $[1,a,b,c]$，将圆放置为 $=_3$，从而得到一个三元签名 $[w,x,y,z]=[1+3a^3+3a^2b^2+b^3c,a+a^4+2a^2b+a^2bc+2ab^3+b^2c^2,a^2+ab^2+2a^3b+b^4+2ab^2c+bc^3,a^3+3a^2b^2+3b^3c+c^4]$。若 $w\neq 0$和 G_1在 $[w,x,y,z]$上成立，根据定理4.16可得 $[w,x,y,z]$是 #P-困难，因此 $[1,a,b,c]$是 #P-困难，除非至少有一个条件 S_i

以下条件成立，其中 $i=1$、2、3、4、5、6、7:

$$S=\bigvee_{i=1}^{7} S_i \quad \text{where} \begin{cases} S_1: x^2=wy \wedge y^2=xz \text{ (degenerate form)} \\ S_2: x=0 \wedge y=0 \text{ (Gen-Eq form)} \\ S_3: w=y \wedge x=0 \wedge z=0 \text{ (affine form } [1,0,1,0]) \\ S_4: w+y=0 \wedge x=0 \wedge z=0 \text{ (affine form } [1,0,-1,0]) \\ S_5: w=z \wedge x=y \text{ (matchgate-realizable form } [a',b',b',a']) \\ S_6: w=-z \wedge x=-y \text{ (matchgate-realizable form } [a',b',-b',-a']) \\ S_7: -w-2x=y \wedge 2w+3x=z \text{ (form } [3a'+b',-a'-b',-a'+b',3a'-b']) \end{cases} \tag{4.7}$$

注意，仿射形式 $[1,1,-1,-1]$ 和 $[1,-1,-1,1]$ 是 $[a,b,b,a]$ 和 $[a,b,-b,-a]$的特殊形式。求解关于变量 $a,b,c\in\mathbb{Q}$的方程组 $R\wedge S$，得到以下解:

- $a=c=-1$、$b=1$；问题 $[1,-1,1,-1]$ 属于 FP（函数多项式时间），因为它是退化的；
- $a=1$、$b=c=-1$；问题 $[1,1,-1,-1]$ 属于 FP（函数多项式时间），因为它是仿射的；
- $a=c=1$，$b=-1$；问题 $[1,1,-1,1]$ 是 #P-困难的（使用构件 G_3 生成$[1,1,-1,3]$，翻转 0 和 1 后，再次使用它生成 $[1,1,-5,19]$，根据定理 4.16，该问题是 #P-困难的。注意，我们需要两次应用 G_3，以便使条件G_1 在定理 4.16 中对新生成的三元签名成立）；
- $a=-b,c=-1$；问题 $[1,a,-a,-1]$ 可进行匹配门变换，因此属于 FP（函数多项式时间）。

继续讨论三元签名 $[w,x,y,z]$，接下来需要考虑 $w=0$或 G_1在 $[w,x,y,z]$上不起作用的情形。对于 $w\neq 0$，我们将 $[w,x,y,z]$归一化为 $[1,\frac{x}{w},\frac{y}{w},\frac{z}{w}]$，并将 $\frac{x}{w}$、$\frac{y}{w}$、$\frac{z}{w}$分别代入 (4.2) 中的 a、b、c，得到以下至少一个条件 T_i，其中 $i=1$、2、3、4、5、6:

$$T=\bigvee_{i=1}^{6} T_i, \quad \text{where} \begin{cases} T_1: zw+w^2=0 \\ T_2: xy+z^2+zw+w^2=0 \\ T_3: 2xy+z^2+w^2=0 \\ T_4: 3xy+z^2-zw+w^2=0 \\ T_5: 4xy+z^2-2zw+w^2=0 \\ T_6: xy=wz \end{cases} \tag{4.8}$$

注意，T_1 涵盖了 $w=0$的情况。因此，我们得到条件 $R\wedge T$。现在，我们再次使用 $[w,x,y,z]$ 应用 G_3，生成另一个新的三元签名 $[w_2,x_2,y_2,z_2]$，其中 $w_2=w^4+3wx^3+3x^2y^2+y^3z$、$x_2=w^3x+2wx^2y+x^4+2xy^3+x^2yz+y^2z^2$、$y_2=w^2x^2+wxy^2+2x^3y+y^4+2xy^2z+yz^3$、$z_2=wx^3+3x^2y^2+3y^3z+z^4$。与前面的论证类似，如果 $w_2\neq 0$ 且 G_1 在 $[w_2,x_2,y_2,z_2]$上成立，我们知道 $[w_2,x_2,y_2,z_2]$ 是#P-困难的，因此

除非以下至少一个条件 U_i 成立，否则$[1,a,b,c]$是#P-困难的，条件列举如下，其中 $i=1$、2、3、4、5、6、7:

$$U=\bigvee_{i=1}^{7}U_i,\ \text{where}\begin{cases}U_1:x_2^2=w_2y_2\wedge y_2^2=x_2z_2\ \text{(degenerate form)}\\ U_2:x_2=0\wedge y_2=0\ \text{(Gen-Eq form)}\\ U_3:w_2=y_2\wedge x_2=0\wedge z_2=0\ \text{(affine form }[1,0,1,0])\\ U_4:w_2+y_2=0\wedge x_2=0\wedge z_2=0\ \text{(affine form }[1,0,-1,0])\\ S_5:w_2=z_2\wedge x_2=y_2\ \text{(matchgate-realizable form }[a',b',b',a'])\\ S_6:w_2=-z_2\wedge x_2=-y_2\ \text{(matchgate-realizable form }[a',b',-b',-a'])\\ S_7:-w_2-2x_2=y_2\wedge 2w_2+3x_2=z_2\ \text{(form }[3a'+b',-a'-b',-a'+b',3a'-b'])\end{cases}\tag{4.9}$$

对有理数值变量 a、b、c 求解方程组 $R\wedge T\wedge U$，可得以下解:

- $a=c=-1$、$b=1$；问题 $[1,-1,1,-1]$ 属于 FP（函数多项式时间），因为它是退化的;
- $a=1$、$b=c=-1$；问题 $[1,1,-1,-1]$ 属于 FP（函数多项式时间），因为它是仿射的;
- $a=-1$，$b=c=1$；问题 $[1,-1,1,1]$ 是 #P-困难（使用构件 G_4 生成$[1,1,-1,3]$，再次使用它生成 $[1,1,-5,19]$，根据定理 4.16，其为 #P-困难）；
- $a=c=1$、$b=-1$；问题 $[1,1,-1,1]$ 是 #P-困难（这是 $[1,-1,1,1]$ 的反转）；

否则，我们知道 $w_2=0$ 或 G_1 在 $[w_2,x_2,y_2,z_2]$上不起作用。同样，我们知道下面列出的至少一个条件 V_i 成立，其中 $i=1$、2、3、4、5、6:

$$V=\bigvee_{i=1}^{6}V_i,\quad\text{where}\begin{cases}V_1:z_2w_2+w_2^2=0\\ V_2:x_2y_2+z_2^2+z_2w_2+w_2^2=0\\ V_3:2x_2y_2+z_2^2+w_2^2=0\\ V_4:3x_2y_2+z_2^2-z_2w_2+w_2^2=0\\ V_5:4x_2y_2+z_2^2-2z_2w_2+w_2^2=0\\ V_6:x_2y_2=w_2z_2\end{cases}\tag{4.10}$$

最后，求解关于变量 a、b、$c\in\mathbb{Q}$ 的方程组 $R\wedge T\wedge V$，我们得到以下解:

- $a=-1$、$b=c=1$；问题 $[1,-1,1,1]$ 是 #P-困难的（关于 $R\wedge T\wedge U$，参见上面的情形）；
- $a=c=1$、$b=-1$；问题 $[1,1,-1,1]$ 是 #P-困难的（这是 $[1,-1,1,1]$ 的反转）；
- $a=-b$、$c=-1$；问题 $[1,a,-a,-1]$ 可进行匹配门变换，因此属于 FP（函数多项式时间）。

定理4.22 的证明至此完成。 □

5 $[0,a,b,0]$的二分定理

现在我们完成关于 $[0,a,b,0]$ 的讨论，并借助先前关于 $[1,a,b,c$的定理].

定理 5.1。问题 $[0,a,b,0]$，其中 a、$b\in\mathbb{Q}$、$ab\neq 0$，是#P-困难的，除非 $a=\pm b$。

证明。我们将构件 G_3 应用于 $[0,a,b,0]$，以生成三元签名 $g=[3a^2b^2,a(a^3+2b^3)\ b(2a^3+b^3)\ 3a^2b^2]$。

我们可以将 g规范化为以下形式: $[1,a',b',c']$。由于 a，b，$c\in\mathbb{Q}$，因此有 $a'b'c'\neq 0$。根据定理 4.22，我们知道 $[1,a',b',c']$ 是 #P-困难的（ $[0,a,b,0]$也是），除非它属于定理

2.1中的可解情形。然而，问题 $[1, a', b', c']$ 属于 FP（函数多项式时间）意味着 $a = \pm b$。证明至此完成。 □

若此时 $a = b = 0$，则 Holant 值为 0，该问题显然属于 FP。假设 a 和 b 中恰有一个为 0。在这种情况下，通过归一化并在输入中视情况交换 0 和 1，只需考虑三元签名 $[0, 1, 0, 0]$。

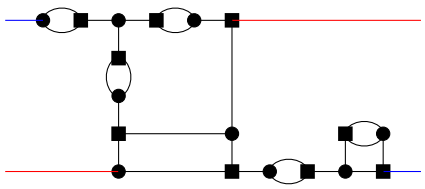


图 26：交叉固定 0 构件 $\mathcal{P}$

定理 5.2. 问题 Pl-Holant $([0, 1, 0, 0] \mid (=_3))$ 是 #P 完全。

证明。 在 [DF86], Dyer 和 Frieze 证明了平面 X3C 问题是 NP 完全的：输入是一个集合 $\mathcal{S}$ 的三元子集的集合 U，其二分关联图是平面图；我们要判断是否存在 U 的精确覆盖，且该覆盖由某些 $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$组成。他们的归约实际上产生了这样的实例：每个$x \in U$ 恰好出现在 $\mathcal{S}$的两个或三个集合中。还可以进一步验证，他们的归约是保解数的。因此，他们的证明给出了 Pl-Holant $([0, 1, 0, 0], [0, 1, 0] \mid (=_3))$ 的 #P 完全性。我们通过归约证明本定理

$$\text{Pl-Holant}\left([0, 1, 0, 0], [0, 1, 0] \mid (=_3)\right) \leq_T \text{Pl-Holant}\left([0, 1, 0, 0] \mid (=_3)\right). \tag{5.11}$$

注意，一元固定 0 签名 Δ_0 与 $[0, 1, 0, 0]$ 相连会产生 $[0, 1, 0]$。如果将 Ω 中的每个 $[0, 1, 0]$ 替换为与 $[0, 1, 0, 0]$ 相连的 Δ_0，Holant 值保持不变。因此，如果我们能在 Pl-Holant $([0, 1, 0, 0] \mid (=_3))$ 的右侧构造出 Δ_0，那么结论 (5.11) 就成立了。然而，在任何二分三正则问题中，都可以证明不存在能够构造单个一元签名的方法。接下来注意，对于 Pl-Holant $([0, 1, 0, 0], [0, 1, 0] \mid (=_3))$ 的任意签名网格 Ω，根据左右两侧总度数的计数，$[0, 1, 0]$ 出现的次数都与 0 模 3 同余。因此，我们的思路是构造 Δ_0 的三元组，以便一次应用一组三元组。

剩下的问题是在 Pl-Holant $([0, 1, 0, 0] \mid (=_3))$ 的右侧如何构造 Δ_0，更重要的是，构造不仅必须是平面的，还必须能够在 Ω 中以平面方式每次应用三个。请注意，$[0, 1, 0]$ 在 Ω 中的出现通常不允许这种平面分组（事实上，[DF86] 中的输出实例也不具备这一性质）。

下面的构造一举满足了所有这些要求！平面交叉固定为 0 的构件 $\mathcal{P}$ 如图 26所示，其中我们将 $[0, 1, 0, 0]$ 放在方块处，将 $=_3$ 放在圆处。它具有以下性质：

1. 外部将左侧的两条左悬挂边连接到左侧，将两条右悬挂边连接到右侧；2. 两条蓝色悬挂边固定为 0；3. 两条红色悬挂边可以赋值为 0 或 1，但必须取相同的值，且无论选择哪一个值，都会导出唯一的内部边赋值。

还要注意，如果我们沿着两条蓝色边的“轴”翻转 $\mathcal{P}$，从而交换两条红色边，就会得到 $\mathcal{P}$ 的镜像副本，记作 $\mathcal{P}'$。其中，东北红色边在外部连接到左侧，西南红色边在外部连接到右侧，恰好与 $\mathcal{P}$ 相反。

因此，构件 $\mathcal{P}$ 可以让一条交叉边“跨越过去”（一对红边将取代它），同时将两条端点蓝边固定为 0。我们可以用蓝边连接任意 $k \geq 1$ 个 $\mathcal{P}$ 或 $\mathcal{P}'$ 的副本，从而“跨越” k 条交叉边。注意，连接两条端点蓝边符合二分结构，而 $\mathcal{P}$ 或 $\mathcal{P}'$ 允许交叉边具有任意一种二分取向。我们称之为连接式 $\mathcal{P}$ 构件。

令 $n = 3m$ 表示 Ω 中某个整数 $m \geq 0$的 $[0,1,0]$ 数。现在，我们在右侧添加 m 个新顶点，并赋予它们签名 $=_3$。接着，我们使用三个连接式 $\mathcal{P}$ 构件的副本，将这个 $=_3$ 连接到 Ω 中 $[0,1,0]$ 的三个出现位置，同时将这些位置上的签名替换为 $[0,1,0,0]$。（如果从 $=_3$ 到 $[0,1,0]$ 的某条通路没有遇到任何交叉边，我们就人为引入两条这样的交叉边！）这就定义了 Pl-Holant ($[0,1,0,0] \mid (=_3)$) 中的一个签名网格 Ω'，且 Holant(Ω') =Holant(Ω)。 □

注4。 通过将圆放置为 $[1,0,0,0] = [1,0] \otimes [1,0] \otimes [1,0]$，并将方块放置为 $[0,1,0,0]$，可轻易构造出一个退化三元签名$=_3$，位于 G_2右侧。然而，我们无法应用定理3.2 并得出 Pl-Holant ($[0,1,0,0]$、$[0,1,0] \mid (=_3)) \leq_T$Pl-Holant $([0,1,0,0] \mid (=_3))$。另请参见备注1。 构件 $\mathcal{P}$ 的使用至关重要。

6 主要定理

现在我们可以证明主要定理了。在证明的末尾，我们给出了定理2.1的证明逻辑结构流程图。

定理2.1的证明。 首先，若 $f_0 = f_3 = 0$，我们将讨论分为 $f_1 f_2 \neq 0$是否成立两种情况。若$f_1 f_2 \neq 0$，根据定理5.1 可知，该问题是 #P-困难的，除非 $f_1 = f_2$；在这种情况下，它可通过匹配门变换，因此属于 FP（函数多项式时间）。若 $f_1 f_2 = 0$，则根据定理5.2 可知，该问题是 #P-困难的，除非$f_1 = f_2 = 0$；在这种情况下，该问题显然属于 FP（函数多项式时间）。这就完成了 $f_0 = f_3 = 0$时的情形。

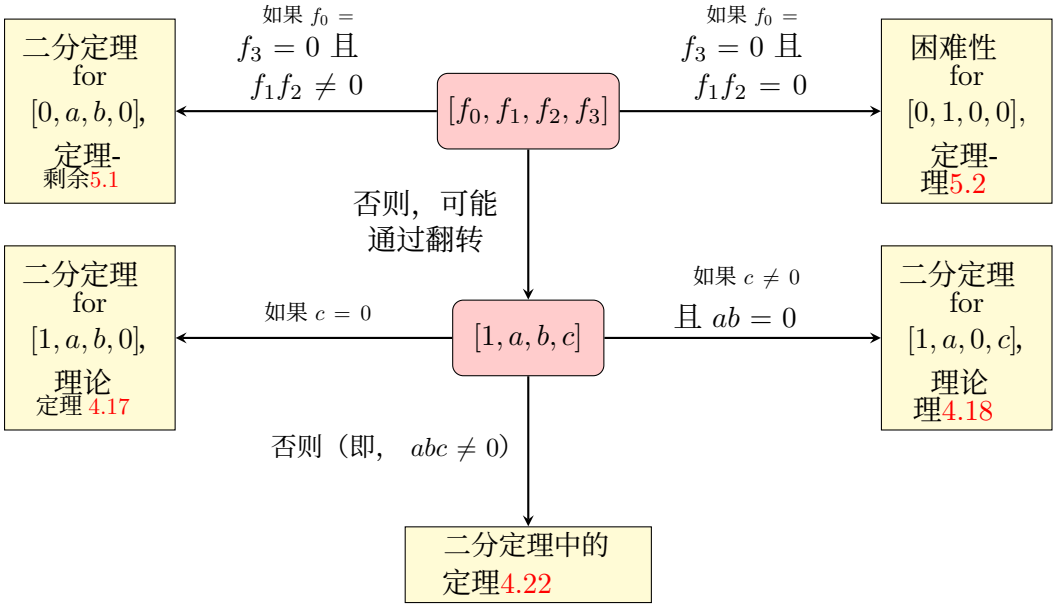
现在假设 f_0 和 f_3 中至少有一个不为 0。考虑签名的反转后，我们可以假设 $f_0 \neq 0$，那么归一化后的签名变为 $[1,a,b,c]$。

若 $c = 0$，则 $[1,a,b,0]$ 的二分定理由定理 4.17证明。

若在 $[1,a,b,c]$中，$c \neq 0$，则 a和 b通过翻转互为对称。现在若 $ab = 0$，根据上述对称性，我们可以假设$b = 0$，即签名变为 $[1,a,0,c]$。根据定理 4.18，除非 $a = 0$，否则该问题是 #P-困难；在这种情况下，它属于 Gen-Eq。

最后，对于问题 $[1,a,b,c]$，其中 $abc \neq 0$，定理 4.22 证明了如下二分定理：除非该签名属于定理 2.1中的易处理情形，否则该问题是 #P-困难。 □

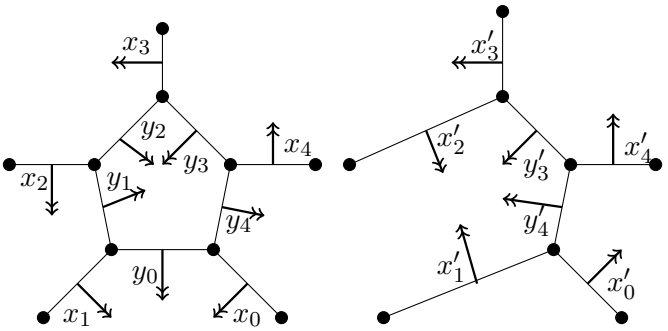
证明结构流程图：


二分定理 for $[0,a,b,0]$, 定理-剩余5.1
如果 $f_0 = f_3 = 0$ 且 $f_1 f_2 \neq 0$
$[f_0, f_1, f_2, f_3]$
如果 $f_0 = f_3 = 0$ 且 $f_1 f_2 = 0$
困难性 for $[0,1,0,0]$, 定理-理5.2
否则，可能通过翻转
二分定理 for $[1,a,b,0]$, 理论定理 4.17
如果 $c = 0$
$[1,a,b,c]$
如果 $c \neq 0$ 且 $ab = 0$
二分定理 for $[1,a,0,c]$, 理论理4.18
否则（即，$abc \neq 0$）
二分定理中的定理4.22

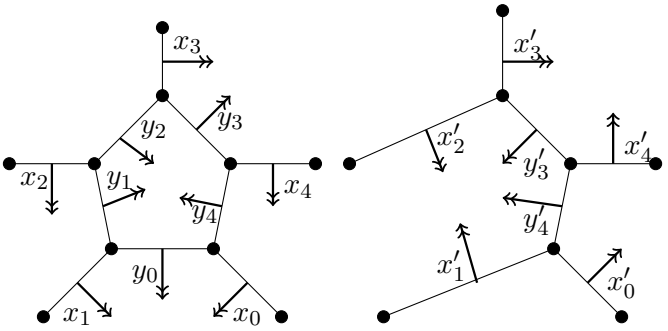
参考文献

[ABHM00] Robert E. L. Aldred、Sheng Bau、Derek A. Holton 和 Brendan D. McKay。非哈密顿三连通三次平面图。《SIAM 离散数学杂志》，13(1):25–32，2000。[Bac21] Miriam Backens。受量子计算启发的 Holant 完整二分定理。SIAM 计算杂志，50(6):1739–1799，2021。[CC17] Jin-Yi Cai 和 Xi Chen。《计数问题的复杂性二分：第 1 卷，布尔域》。剑桥大学出版社，2017。[CF17] Jin-Yi Cai 和 Zhiguo Fu。基于匹配门的全息算法对于布尔域上的平面 #CSP 是通用的。载于 STOC，第 842–855 页。ACM，2017。[CFGW22] Jin-Yi Cai、Zhiguo Fu、Heng Guo 和 Tyson Williams。FKT 并非通用——对称约束的平面 Holant 二分定理。FOCS 2015：1259–1276。《理论计算机系统》，66(1):143–308，2022。[CFL23] Jin-Yi Cai、Austen Z. Fan 和 Yin Liu。带混合符号的二部三正则计数问题。《计算机与系统科学杂志》，135:15–31，2023。[CG19] Jin-Yi Cai 和 Artem Govorov。完美匹配、连接张量的秩与图同态。载于 SODA，第 476–495 页。SIAM，2019。[CL11] Jin-Yi Cai 和 Pinyan Lu。全息算法：从艺术到科学。《计算机与系统科学杂志》，77(1):41–61，2011。[CLX17] Jin-Yi Cai、Pinyan Lu 和 Mingji Xia。基于匹配门的全息算法恰好刻画了可处理的平面 #CSP。SIAM 计算杂志，46(3):853–889，2017。[DF86] Martin E. Dyer 和 Alan M. Frieze。平面三维匹配是 NP 完全的。《算法杂志》，7(2):174–184，1986。[FLS07] Michael Freedman、L´aszl´o Lov´asz 和 Alexander Schrijver。反射正性、秩连通性与图同态。《美国数学学会杂志》，20(1):37–51，2007。[GW20] Heng Guo 和 Tyson Williams。带复权重的平面布尔 #CSP 的复杂性。《计算机与系统科学杂志》，107:1–27，2020。[HM88] Derek A. Holton 和 Brendan D. McKay。最小的非哈密顿三连通三次平面图有 38 个顶点。《组合理论杂志》B 辑，45(3):305–319，1988。[HT06] Christopher Carl Heckman 和 Robin Thomas。无三角形三次平面图中的独立集。《组合理论杂志》B 辑，96(2):253–275，2006。[Jer87] Mark R. Jerrum。二维单体-二聚体系统在计算上难以处理。《统计物理杂志》，48(1):121–134，1987。[Kas61] Pieter W. Kasteleyn。晶格上的二聚体统计：I. 方格晶格上的二聚体排列数。Physica，27(12):1209–1225，1961。

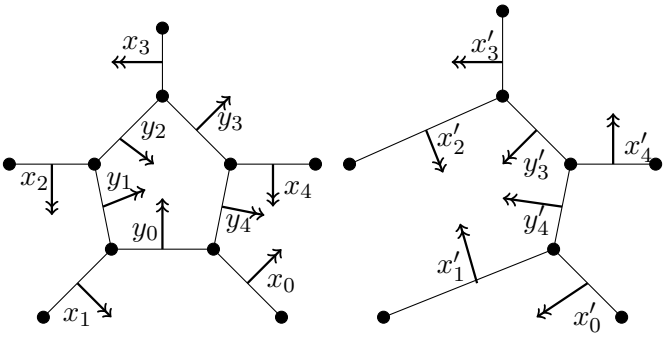
[Kas67] Pieter W. Kasteleyn。图论与晶体物理。载于《图论与理论物理》，第 43–110 页，1967。[KC16] Michael Kowalczyk 和 Jin-Yi Cai。具有复边函数的 3-正则图 Holant 问题。《理论计算机系统》，59(1):133–158，2016。[Lar93] Philippe Laroche。平面 1-in-3 可满足性是 NP 完全的。《法国科学院学报·数学辑》，316(4):389–392，1993。[Lic82] David Lichtenstein。平面公式及其用途。SIAM 计算杂志，11(2):329–343，1982。[MR01] Cristopher Moore 和 John M. Robson。使用简单铺砖片的困难铺砖问题。《离散计算几何》，26(4):573–590，2001。[NRR20] Marc Noy、Cl´ement Requil´e 和 Juanjo Ru´e。关于随机三次平面图的进一步结果。《随机结构与算法》，56(3):892–924，2020。[Sch74] David E. Scheim。平面三次图的边 3-着色数作为积和式。《离散数学》，8(4):377–382，1974。[Sch78] Thomas J. Schaefer。可满足性问题的复杂性。载于 STOC，第 216–226 页。ACM，1978。[TF61] Harold N. V. Temperley 和 Michael E. Fisher。统计力学中的二聚体问题——一个精确结果。《哲学杂志》，6(68):1061–1063，1961。[Vad01] Salil P. Vadhan。稀疏图、正则图和平面图中计数的复杂性。《SIAM 计算杂志》，31(2):398–427，2001。[Val79] Leslie G. Valiant。计算积和式的复杂性。《理论计算机科学》，8:189–201，1979。[Val08] Leslie G. Valiant。全息算法。SIAM 计算杂志，37(5):1565–1594，2008。



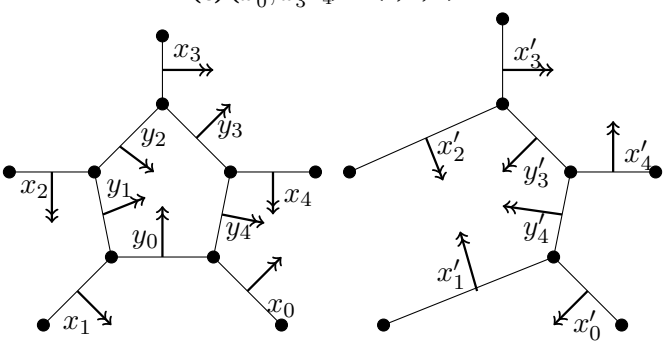
(a) $(x'_0, x'_3x'_4) = (0, 0, 0)$



(b) $(x'_0, x'_3x'_4) = (0, 1, 0)$



(c) $(x'_0, x'_3x'_4) = (1, 0, 0)$



(d) $(x'_0, x'_3x'_4) = (1, 1, 0)$

图27：定理3.2证明中的几何图示