arXiv:2303.16706v1 [math.AT] 29 Mar 2023

扭曲过程与任意环上 Maurer-Cartan 单纯集合的 Lie 理论方法

Niek de Kleijn[1] 和 Felix Wierstra[2]

[1]代尔夫特应用数学研究所，代尔夫特理工大学，梅克尔韦赫4号，代尔夫特，荷兰，n.dekleijn@tudelft.nl[2]科特韦赫-德弗里斯数学研究所，阿姆斯特丹大学，科学园105-107号，阿姆斯特丹，荷兰，felix.wierstra@gmail.com

摘要

Deligne-Getzler-Hinich–∞-群胚或 L_∞ 代数的 Maurer-Cartan 单纯集合，在变形理论及数学的许多其他领域中发挥着重要作用。遗憾的是，这一构造仅适用于特征为 0 的域。本文旨在说明，Maurer-Cartan 方程和 Maurer-Cartan 单纯集合的概念可以定义在远多于 L_∞ 运算子的范围内。更确切地说，我们证明，每个具有零元运算的含幺 Hopf 余算子（含幺结合代数范畴中的余算子）的 Koszul 对偶都允许定义扭曲过程和自然的 Maurer-Cartan 方程；在一些温和的附加假设下，还可以将其积分为 Maurer-Cartan 单纯集合。特别地，我们证明 Barratt-Eccles 算子及其 $\mathcal{E}_n$子运算子的 Koszul 对偶允许定义 Maurer-Cartan 单纯集合。本文将在任意环上开展研究。

1 引言

同伦意义下的李代数（更常称为 L_∞ 代数）在数学的许多领域中都发挥着重要作用，例如变形量子化、变形理论、数学物理、辛几何、有理同伦理论等。众所周知的一种观点是，在特征为 0 的域上，所有变形问题都由 L_∞ 代数中的 Maurer-Cartan 元控制。这一观点可追溯至 Deligne、Drinfeld、Feigin、Hinich、Kontsevich-Soibelman、Manetti 等人，并由 Lurie 在 [21] 和 Pridham 在 [26] 中予以精确阐述。此类变形问题的信息可以方便地组织成一个单纯集，称为 Deligne-Getzler-Hinich–∞ 群胚、Maurer-Cartan 单纯集或神经。Getzler 首先在 [13] 中定义了 L_∞ 代数情形下的这个单纯集。

在一般特征的域上进行研究时，情况要复杂得多。变形问题或形式模问题不再由 L_∞-代数控制，而是由 E_n-代数控制。更明确地说，Lurie 证明，对于 $n < \infty$，形式 E_n-模空间问题的 ∞-范畴与增广的 E_n-代数的 ∞-范畴之间存在等价。后来，Brantner 和 Mathew [5] 以及 Brantner、Campos 和 Nuiten [4]将这一结果推广到了 $n = \infty$ 。

尽管从理论角度来看，所有这些方法都很出色，但一直没有 Deligne-Hinich-Getzler–∞-群胚的类似物。我们所说的是一种单纯集，它

能够编码变形问题的同伦信息，其中单形（Maurer-Cartan 元素）由显式方程定义，而扭曲等运算则由显式公式定义。在 [6], 中，我们为此迈出了第一步，证明 A_∞-代数（也称为 E_1-代数）具有 Maurer-Cartan 单纯集合。本文将证明，更多的运算子都具有自然定义的 Maurer-Cartan 方程、扭曲过程和 Maurer-Cartan 单纯集合。

为了在一般环 R 上构造 Maurer-Cartan 单纯集合，我们采用 Kontsevich 从 [18] 出发提出的形式有基流形视角，并将其推广到可视为“形式有基李群”的对象。在特征 0 的域上，Kontsevich 在分次向量空间 V 上定义了一个 L_∞-代数：一个次数为 -1 的余导子 Q：$C(V) \to C(V)$，其平方为零；其中 $C(V)$ 表示由 V 余生成的余自由余幂零余交换余代数。余导子 Q 可视为 $\mathcal{C}(V)$ 上的“向量场”。本文通过采用更一般的余算子 $\mathcal{C}$，而非余交换余算子，来推广这一思想。进一步假设 $\mathcal{C}$ 是含幺 Hopf 余上同调算子（即含幺结合代数范畴中的余算子），并且它具有一个表示余单位的零元数运算，那么我们便将分次 R-模 V 上的 $\Omega\mathcal{C}$-代数定义为余自由余幂零$\mathcal{C}$余代数上的平方为零的余导子 Q：$\mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(V)$，该余代数由 V 余生成。这里，$\Omega\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 上的拟合子余巴构造，而 $\Omega\mathcal{C}$-余代数与余导子之间的对应关系来自 Rosetta Stone 定理（参见 [20], 定理 10.1.13）。为确保某些无穷和收敛，我们需要引入滤过，并将讨论范围限制在完备或原幂零的 $\Omega\mathcal{C}$-代数。为确保该理论适用于任意环，我们还需要假设：在元数 r 下，$\mathcal{C}(r)$ 是一个自由的 $R[\mathsf{S}_r]$- 模，其中 S_r 表示 r 个元素上的对称群。

满足这些假设的运算子类别相当广泛。例如，它包含任意单纯集合中的运算子 $\mathcal{P}$ 的归一化上链，其中 $\mathcal{P}(0) = *$, $\mathcal{P}$ 在每个元数上都具有自由对称群作用，并且每个元数上只有有限多个非退化单纯形。这是因为拓扑运算子的上链具有上链层面的杯积，使其成为含幺 Hopf 余上同调算子。此类运算子的具体例子包括交换拟合子、结合拟合子、Barratt-Eccles 算子以及 Barratt-Eccles 算子的 $\mathcal{E}_n$-子运算子。

根据 Moerdijk 的一个定理 [24], ，我们可以在 $\mathcal{C}(V)$ 上赋予一个结合乘积

$$\star : \mathcal{C}(V) \otimes \mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(V)$$

它是余自由余幂零余交换余代数上洗牌乘积的推广，因此称为广义洗牌乘积。这个乘积使 $\mathcal{C}(V)$ 成为一个 $\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数，可以将其解释为李群的类比，其中 $\star$ 对应群结构，而微分 Q：$\mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(V)$ 对应流形结构。在这种情况下，链复形 V 对应切空间，或称 “ 李代数 ”。

这种“李群”与李群理论有许多相似之处，我们将经典李理论中的某些概念推广到这一新背景下。我们首先定义指数映射的对应物，它是一个映射

$$\exp : V_0 \to \mathcal{C}(V)$$

从“李代数” V到“李群” $\mathcal{C}$（V）的映射具有许多与通常指数映射相同的性质。该指数映射使我们能够定义一个扭曲过程，通过次数为 0 的元素 $v \in V_0$ 对微分 Q： $\mathcal{C}$（V） $\to \mathcal{C}$（V）进行扭曲，其方式类似于经典李群的伴随表示。更准确地说，如果 $x \in \mathcal{C}$（V），那么扭曲微分 Q^v： $\mathcal{C}$（V） $\to \mathcal{C}$（V）定义为

$$Q^v := \exp(-v) \star Q(\exp(v) \star x).$$

Maurer-Cartan 方程随后自然地作为这一扭曲的平坦性条件出现。这进一步为来自 [8], 的扭曲过程提供了一种替代方案；该方案适用于微分分次拟运算子，并且适用于任意环，而不是特征零域。

如果余合作代数 $\mathcal{C}$ 配备了一个映射 $\mathcal{E}_\infty \to \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{E}_\infty$ 表示 Barratt-Eccles 运算子的上链 $\mathcal{E}_\infty$，那么我们可以将每个 $\Omega\mathcal{C}$-代数积分为一个单纯集，称之为 Maurer-Cartan 单纯集合。满足这一要求的主要例子是 Barratt-Eccles 余算子及其 E_n-子余合作代数。最后，我们证明这个单纯集是 Kan 复形，因此是一个 ∞-群胚。

致谢

作者谨向 Daniel Robert-Nicoud、Martin Markl、Igor Khavkine、Dion Leijnse、Noah Olander、Sergey Shadrin 和 José Moreno-Fernández 致谢，感谢他们进行有益的交流并提出宝贵意见。第二作者获得荷兰研究组织（NWO）编号为 VI.Veni.202.046 的资助。

2 预备知识与约定

本节回顾所需的预备知识，并确立本文的记号与约定。

2.1 约定与记号

本文研究带单位的一般环 R 上的链复形范畴。我们采用同调分次，因此微分的次数为 -1。除非另有说明，所有张量积均取自 R，并默认采用 Koszul 符号规则，即若 V 和 W 是两个链复形，则交换映射 $V \otimes W \to W \otimes V$ 会引入一个额外的符号。两个链复形 V 和 W 之间的 R-线性映射所成的链复形记作 $\hom_R(V,W)$，通常我们省略 R，仅写作 $\hom(V,W)$。

设 G 是一个有限群， V 是一个带有线性 G-作用的链复形，则我们将关于 G 作用的余不变量记作 V_G。关于 G-作用的不变量记作 V^G。含 r 个元素的对称群记作 S_r；按照惯例，我们称 S_1 和 S_0 都是平凡群。

2.2 关于运算子与余合作代数的约定

我们假设读者熟悉代数歌剧和余合作代数的基本理论，否则请参阅 [9], [10] 和 [20]。尽管著作 [20] 是在特征 0 下撰写的，但大多数结果只需稍作修改，便适用于任意环；本文稍后会说明这些修改。

除非另有说明，所有运算子都定义在环 R 上的链复形范畴中（第 6 节除外，我们还会考虑单纯集合中的运算子）。由于我们是在一般环 R上工作，而非特征为 0 的域，因此本文采用了几项不太常见的特殊约定，现于此列出。更多细节请参阅 [10], ，这是少数适用于这种一般情形的参考文献之一。

单位算子代数和单位余算子代数均记为 I，并定义为 $I(r) = 0$ 当且仅当$r \neq 1$，且 $I(1) = R$，其上配备相应的（余）运算子结构。根据上下文，应当可以判断这里指的是运算子还是余算子。若运算子 $\mathcal{P}$ 存在额外映射 $\epsilon\colon \mathcal{P} \to I$，且该映射是算子代数单位的一个截面，则称其为增广的。若余算子存在余算子代数余单位的一个截面 $\eta : I \to \mathcal{C}$，则称其为余增广的。

若运算子 $\mathcal{P}$（分别地，余算子 $\mathcal{C}$）满足 $\mathcal{P}(0) = R$（分别地， $\mathcal{C}(0) = R$），则称其为幺元的；幺元运算记为 $\mathbb{I}$。我们用 $u\mathcal{P}$（分别地，用 $u\mathcal{C}$）表示幺元运算子（分别地，幺元余算子），以表明其为幺元的。每个幺元运算子（分别地，余算子）都有一个非幺元子运算子（分别地，非幺元商余算子系），记为 $\mathcal{P}$（分别地， $\mathcal{C}$），其定义为 $\mathcal{P}(0) := 0$ 且 $\mathcal{P}(r) := u\mathcal{P}(r)$，其中 $r \geq 1$（分别地， $\mathcal{C}(0) := 0$ 且 $\mathcal{C}(r) := u\mathcal{C}(r)$，其中$r \geq 1$，余乘法称为约化余乘法）。若幺元运算子 $\mathcal{P}$（分别地，幺元余算子 $\mathcal{C}$）满足 $\mathcal{P}(1) = R$ 是算子代数单位（分别地， $\mathcal{C}(1) = R$ 是余算子代数余单位），则称其为约化的。若非幺元运算子 $\mathcal{P}$（分别地，余算子 $\mathcal{C}$）满足 $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(1) = 0$（分别地，$\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(1) = 0$），则称其为约化的。注意，每个约化的运算子（分别地，余算子）都可被典范地增广（分别地，余增广）。每个约化的幺元运算子的非幺元部分都带有自然的权分次，且该分次与元数分次一致。

为简便起见，我们进一步假设，所考虑的所有运算子和余合作代数均为有限R型，即它们在每个元数的每个次数上都是有限生成的 R模。假设所有运算子和余合作代数在每个元数上都是投射的 R模。最后，我们还假设所有余合作代数的非幺元部分都是余幂零的。基于这些假设，我们可以在运算子和余合作代数之间自由地取对偶。注意，幺元运算子的对偶通常并非余幂零。

2.3 （余）代数上的（余）运算子

本节回顾（余）运算子上的（余）代数及其同伦意义下版本的细节。

2.3.1 不变量与余不变量

由于我们是在一般环上而非特征为 0 的域上工作，因此对称算子系上的代数定义有一些微妙之处。主要问题在于，在任意环上工作时，考虑对称群作用有两种方式：我们可以相对于对称群作用取不变量，也可以取余不变量。正如 [9], 中所解释的，在特征为 0 的域上，这两种选择是同构的；但在任意环上，这两种选择可能大不相同。本节回顾必要的定义，并明确我们关于运算子上的代数以及余合作代数上的余代数的约定。更多细节请参见 [9]。

给定两个对称序列 M 和 N， M 和 N 的张量积定义为

$$(M \otimes N)(r) = \bigoplus_{i+j=r} \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j}^{\mathbf{S}_r} M(i) \otimes N(j),$$

其中 Ind 表示诱导表示。除了张量积之外，复合积还有两个版本。第一个版本，即通常所说的复合积，定义为

$$M \circ N = \bigoplus_{r \geq 0} \left(M(r) \otimes N^{\otimes r}\right)_{\mathbf{S}_r}.$$

带除对称性的复合积定义为

$$M \tilde{\circ} N = \bigoplus_{r \geq 0} \left(M(r) \otimes N^{\otimes r}\right)^{\mathbf{S}_r},$$

因此，我们不使用余不变量，而是使用相对于对称群 $\mathbf{S}_r$ 的不变量。

利用复合积的这两个版本，我们可以定义运算子上的代数（分别是余运算子上的余代数）；这里同样有两个不同的版本，一个使用不变量，另一个使用余不变量。

设 V 是一个链复形， $\mathcal{P}$ 是一个运算子。若存在一个映射，使其满足通常的公理，则称 V 为一个 $\mathcal{P}$-代数

$$\gamma_V : \mathcal{P} \circ V \to V$$

若存在一个映射，使其满足通常的公理，则称链复形 V 为具有除对称性的 $\mathcal{P}$-代数

$$\tilde{\gamma_V} : \mathcal{P}\tilde{\circ}V \to V,$$

同样满足通常的公理。

设 $\mathcal{C}$ 是一个（非幺元的）约化运算子，则链复形 V 上的余自由余幂零 $\mathcal{C}$-余代数，记作 $\mathcal{C}(V)$，定义为

$$\mathcal{C}(V) := \bigoplus_{r\geq 1} \left(\mathcal{C}(r) \otimes V^{\otimes r}\right)_{\mathbf{S}_r}.$$

注意，直和从 1 开始，因为我们假设 $\mathcal{C}$ 是约化的。余乘法由 $\mathcal{C}$ 的余代数结构诱导（更多详情见 [20] ）。

设 M 和 N 是两个对称序列。假设 $M(r)$ 在每个元数 $r \geq 0$ 上都是自由的 $R[\mathsf{S}_r]$-模，则复合积与带除幂的复合积之间存在一个同构。该同构由范数映射诱导。若 X 是一个带有 S_r 作用的链复形，则存在一个自然映射，称为范数映射，它从余不变量映到不变量，定义如下

$$Tr : X_{\mathbf{S}_r} \to X^{\mathbf{S}_r}$$
$$Tr(x) = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_r} \sigma x,$$

与 $x \in X_{\mathbf{S}_r}$。范数映射一般不是同构，但若 X 作为 $R[\mathsf{S}_r]$-模是自由的，则范数映射是同构。当 $\mathbb{Q} \subseteq R$ 时，范数映射有一种变体，给定为 $Tr(x) = \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_r} \frac{\sigma x}{r}$ ！，它也是同构。由于我们假设 M 作为 $R[\mathsf{S}_r]$-模是自由的，范数映射诱导出一个同构

$$Tr_{M,N} : M \circ N \to M\tilde{\circ}N. \tag{1}$$

因此，若 $\mathcal{P}$ （分别为 $\mathcal{C}$）是一个运算子（分别为余算子），且在每个元数上都是自由的 $R[\mathsf{S}_r]$-模，那么代数（分别为余代数）与带除对称性的代数（分别为带除对称性的余代数）之间便没有区别。

2.3.2 同伦代数与巴构造与余巴构造

In t本节讨论同伦意义下的代数，并建立相关情形，使得这些内容能够
be 扭曲的。

设 $\mathcal{P}$ 是一个约化运算子（不含幺元运算）；若 $\mathbb{Q} \not\subseteq R$，我们进一步假设 S_r 的作用在每个元数 r 上都是自由的。设 $\mathcal{C}$ 是一个约化余幺半群（同样不含幺元），并配有 Koszul 扭曲态射 $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$。于是，我们将 $\mathcal{P}_\infty$-代数定义为 $\Omega\mathcal{C}$ 上的代数，其中 $\Omega\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的拟合子余巴构造。

注 2.1. 这个定义与 *[20],* 中的 *a* $\mathcal{P}_\infty$-代数定义略有不同：在他们的定义中，运算子 $\mathcal{P}$ 被假定为二次且为 *Koszul*，而 $\mathcal{C}$ 则是其二次对偶。为使记号严谨，也可以在 *a*$\mathcal{P}_\infty$-代数的记号中包含余算子 $\mathcal{C}$，但本文中所指的余算子 $\mathcal{C}$ 始终是明确的。

或者，我们也可以将分次 R-模 V 上的 $\mathcal{P}_\infty$-代数定义为余自由余幂零 $\mathcal{C}$-余代数（带除对称性 $\mathcal{C}(V)$）上的平方为零的余导子。根据 Rosetta Stone 定理（ [20] 中的定理 10.3.1），这一定义成立；由于我们假设所有对称群作用都是自由的，因此该结论可推广到任意环。

命题 2.1. 设 V 是一个链复形，且 $\tau\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ 是约化余算子 $\mathcal{C}$ 与约化运算子 $\mathcal{P}$ 之间的 *Koszul* 扭曲态射；若 $\mathbb{Q} \subsetneq R$ 进一步假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{P}$ 在每个元数上都是自由的 $R[\mathbf{S}_r]$-模，则 $\mathcal{P}_\infty$-代数的概念，即运算子态射 $\gamma\colon\ \mathcal{P}_\infty = \Omega\mathcal{C} \to \mathrm{End}(V)$，等价于一个次数为 -1 的平方为零的余导子 $Q\colon\ \mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(V)$，其中 $\mathcal{C}(V)$ 是余自由余幂零的 $\mathcal{C}$-余代数。

由于 $\mathcal{C}(V)$ 是余自由的，因此余导子 Q 由其在余生成元上的像唯一确定。

引理 2.1. 在命题 *2.1* 的假设下，余导子 $Q\colon\ \mathcal{C}(V) \to \mathcal{C}(V)$ 由 $Q\colon\ \mathcal{C}(V) \to V$ 唯一确定；该映射是到 $\mathcal{C}(V)$ 的余生成元上的投影。

证明与 [20] 中命题 6.3.8 的证明完全类似，因此略去。引理的逆命题不成立，并非每个映射 $f\colon\ \mathcal{C}(V) \to V$ 都能确定一个平方为零的余导子。每个次数为 -1 的映射 $f\colon\ \mathcal{C}(V) \to V$ 都能确定一个余导子，但它的平方可能不为零。

映射 $\mathcal{C}(V) \tilde{\to} V$ 可以分解，从而定义 V 上的乘法集合。我们将元数为 r 的分量记作 $Q_r\colon\ \mathcal{C}(r) \otimes V^{\otimes r} \to V$。每个元素 $\delta \in \mathcal{C}(r)$ 都定义了一个乘法 $Q_\delta\colon V^{\otimes r} \to V$：首先取包含映射 $\mathcal{C}(r) \otimes V^{\otimes r} \hookrightarrow \bigoplus_{r\geq 1}(\mathcal{C}(r) \otimes V^{\otimes r})\mathbf{s}_r$，然后投影到 V。

2.3.3 滤过与完备化

在本文其余部分中，我们需要考虑某些无穷和，因此需要引入某些滤过。我们主要采用 [6] 中的约定（但本文使用同调分次，而非 [6]中的上同调分次）。

设 V 为一个链复形，那么从现在起，我们假设 V 配备了一个递降滤过

$$V = F^1V \supset F^2V \supset F^3V \supset ...,$$

该滤过在微分下保持不变，并满足 $\cap_k F^kV = \{0\}$。我们进一步假设该滤过是完备的，即 $V = \varprojlim F^iV$。

两个链复形的张量积定义为：先取滤过的张量积，再关于这个诱导滤过取完备化（更多细节见 [12]第7.3节）。我们还需要：若 W 是一个有限生成链复形，且 V 是一个滤过链复形，那么 $\hom(W,V)$也带有滤过，其滤过为

$$F^n \hom(W,V) := \hom(W, F^nV).$$

若 V上的滤过是完备的，那么 $\hom(W,V)$上的滤过也完备。类似地，我们可以给滤过链复形 V 与未滤过的有限生成链复形 W 的张量积赋予如下滤过：

$$F^n(W \otimes V) := W \otimes F^nV.$$

同样，如果 V 上的滤过是完备的，那么 $W \otimes V$ 上的滤过也完备。

利用这个完备张量积，dg-R-模 V 的 r 重张量积也成为一个完备的 R-模。对于余算子 $\mathcal{C}$，我们可以将这个诱导滤过扩展到$\mathcal{C}(V)$。

若平方为零的余导子保持滤过，即

$$\tilde{Q}_r\left(\mathcal{C}(r)\otimes F^{i_1}V\otimes\ldots\otimes F^{i_r}V\right)\subseteq F^{i_1+\ldots+i_r}V.$$

约定 2.1. 从现在起，我们将始终假设所研究的对象都带有滤过，并且关于此滤过是完备的。

2.3.4 弯曲的 $\mathcal{P}_\infty$-代数与 ∞-态射

若假设 $u\mathcal{C}$ 是约化的幺元运算子，且所有链复形都配备完备滤过，那么我们可以将 $\mathcal{P}_\infty$-代数推广为弯曲的 $\mathcal{P}_\infty$-代数。弯曲代数最早由 Positselski 在 [25], 中引入；他证明了一个重要事实：含幺代数与曲余代数之间存在 Koszul 对偶。

定义 2.1. 设 $u\mathcal{C}$ 是一个幺元约化余代数，其非幺元部分为 $\mathcal{C}$，并设 V 是一个带滤过的分次 R-模。由于 $u\mathcal{C}$ 是约化的，其非幺元部分 $\mathcal{C}$ 自动带有权分次。我们将 $u\mathcal{C}(V)$ 记作 $\bigoplus_{r\geq 0}(u\mathcal{C}(r)\otimes V^{\otimes r})_{\mathbb{S}_r}$ 关于此权分次的完备化，其中我们将 $\mathbb{I}\in u\mathcal{C}(0)$ 置于权 0。我们称之为完备的余幂零余自由 $\mathcal{C}$-余代数。

利用余代数分解映射，$u\mathcal{C}(V)$ 成为一个 $u\mathcal{C}$-余代数。

定义 2.2. 设 $u\mathcal{C}$ 是一个幺元的余算子，$\mathcal{C}$ 是其非幺元部分。定义分次 R-模 V 上的曲 $\Omega\mathcal{C}$-代数为平方为零的余导子 $Q\colon\ u\mathcal{C}(V)\to u\mathcal{C}(V)$。与引理 *2.1* 类似，每个平方为零的余导子都由其在余生成元上的像确定。$Q\colon\ u\mathcal{C}(V)\to V$。

曲 $\Omega\mathcal{C}$-代数 $(V,Q\colon\ u\mathcal{C}(V)\to V)$ 的曲率 $\mathcal{R}$ 定义为 $\mathcal{R}:=Q(\mathbb{I})\in V$，其中 $\mathbb{I}$ 是 $u\mathcal{C}$ 的幺元运算。若 $\mathcal{R}=\tilde{Q}(\mathbb{I})=0$，则称曲 $\Omega\mathcal{C}$-代数是平坦的。

备注 2.2. 为求简便，我们选择只将曲余代数定义为余自由余幂零幺元 $u\mathcal{C}$-余代数上的余导子。也有一种利用弯曲模运算子研究曲余代数的理论；似乎该理论的大部分内容也适用于这种表述方式，但这超出了本文的范围。更多详情请参见例如 *[1]*。

为定义指数映射，我们还需要元素的切向量这一概念

定义 *2.3.* 设 $Q:\ u\mathcal{C}(V)\to V$ 是一个弯曲完备 $\Omega\mathcal{C}$-代数，则余算子代数余单位映射 $\epsilon:\ u\mathcal{C}\to I$ 诱导出映射 $T:\ u\mathcal{C}(V)\to I(V)\cong V$，其中 $I(V)$ 是由余算子 I生成的余自由余代数。我们称之为 $u\mathcal{C}(V)$ 的切空间。若 $v\in u\mathcal{C}(V)$，则称$T(v)$ 为 v 的切向量。

引理 2.2. 设 V 是一个平坦弯曲$\Omega\mathcal{C}$-代数，则 V 是运算子 Ω 上的一个代数 $\mathcal{C}$.

证明。由于 V是一个平坦弯曲 $\Omega\mathcal{C}$-余代数，它由余导子 $Q\colon u\mathcal{C}(V)\to V$定义，且满足 $Q(\mathbb{I})=0$。因此，我们可以将余导子 Q 限制为余导子 $Q'\colon\mathcal{C}(V)\to V$。这个余导子的平方也为零，因为 $\tilde{Q}$ 的平方为零，且 $R=0$。由此，根据罗塞塔石碑（命题 2.1），可知这是一个 $\Omega\mathcal{C}$-代数。 □

定义 2.4. 如果存在一个 $N\in\mathbb{N}$，使得余导子 $Q\colon u\mathcal{C}(V)\to V$ 的元数 r 部分对所有元数为 $r>N$ 的元素都为零，则称曲弯的 $\Omega\mathcal{C}$- 代数是幂零的。

曲弯的 $\Omega\mathcal{C}$-代数有两类态射：严格态射和 ∞-态射。设 A 和 B 是两个曲弯的 $\Omega\mathcal{C}$-代数，其余导子分别为 $\tilde{Q}^A$ ： $u\mathcal{C}(A) \to A$ 和 $\tilde{Q}^B$:$u\mathcal{C}(B) \to B$，则严格态射是一个线性映射 f: $A \to B$，它与所有结构映射和滤过严格交换，即若 $a_1, ..., a_r \in A$ 且 $\delta \in u\mathcal{C}(r)$，则 $f\tilde{Q}_r^A($ $\delta \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_r) = Q_r^B(\delta \otimes f(a_1) \otimes ... \otimes f(a_r))$。更有趣的一类态射称为 ∞-态射，其定义如下。 ∞-态射 Φ： $A \rightsquigarrow B$ 是一个 $u\mathcal{C}$-余代数映射

$$\Phi : u\mathcal{C}(A) \to u\mathcal{C}(B),$$

使得 $\Phi \circ Q^A = Q^b \circ \Phi$。由于 $u\mathcal{C}(B)$ 是余自由的，这等价于一列映射 s

$$\phi_r : u\mathcal{C}(r) \otimes A^r \to B,$$

满足由余算子的分解映射导出的某个方程。我们称映射ϕ_r 为 Φ 的元数 r 分量。注意，对于满足 $\phi_r = 0$ （对所有 $r \neq 1$ ）的 ∞-态射，它与严格态射相同。

注 2.3。 还有第二种 ∞-态射的概念，它通过将 $u\mathcal{C}(A)$ 和$\frown\!\!\!\!\!\!\frown$ $\frown\!\!\!\!\!\!\frown u\mathcal{C}(B)$ 替换为它们的完备化 $u\mathcal{C}(A)$ 和 $u\mathcal{C}(B)$来定义。这些概念可能大不相同。例如，在未完备的情形下， $u\mathcal{C}(A)$ （分别是 $u\mathcal{C}(B)$）中唯一的类群元素是 $\mathbb{I}^A$ （分别是 $\mathbb{I}^B$），因此 $\Phi(\mathbb{I}^A) = \mathbb{I}^B$。而在完备的情形下，情况不再如此，这些代数的同伦理论表现得非常不同（例如，参见模的情形下的 *[16]* ）。由于未完备的 ∞-态射概念与 ∞-态射的经典概念相同，我们选择只关注这一概念。

3 （广义）洗牌乘积

本节中，我们回顾洗牌乘积的一种推广。不过，在此之前，我们先回顾 Hopf（余）运算子这一概念。更多详情请参见例如 [24] 或 [19]。

3.1 Hopf（余）运算子与（余）代数的张量积

设 $\mathcal{P}$ 是一个运算子， A 和 B 是两个 $\mathcal{P}$-代数。一般而言，张量积 $A \otimes B$ 不具有 $\mathcal{P}$-代数结构，而仅具有 $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$-代数结构，其中 $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ 表示运算子 $\mathcal{P}$ 与自身的逐元张量积。有一类特殊的运算子，称为 Hopf 运算子代数；对于这类运算子，张量积具有自然的 $\mathcal{P}$-代数结构。

Hopf 运算子代数 $\mathcal{P}$ 是余结合余代数范畴中的一个运算子；也就是说，对每个元数 r，都有一个余乘法 Δ_r: $\mathcal{P}(r)$ $\to \mathcal{P}(r) \otimes \mathcal{P}(r)$，使得运算子复合映射与余乘法相容。若余乘法 Δ^r 均含余单位，则称 Hopf 运算子代数为含余单位的。

假设 A 和 B 是 Hopf 运算子代数 $\mathcal{P}$ 上的代数，那么我们可以为张量积 $A \otimes B$ 赋予一个 $\mathcal{P}$-代数结构，其乘法映射

$$\mathcal{P}(r) \otimes (A \otimes B)^{\otimes r} \to A \otimes B$$

由下列映射给出

$$\mathcal{P}(r) \otimes (A \otimes B)^{\otimes r} \xrightarrow{\Delta_r \otimes \mathrm{id}_{(A\otimes B)^{\otimes r}}} \mathcal{P}(r) \otimes \mathcal{P}(r) \, (A \otimes B)^{\otimes r} \xrightarrow{\tau} \mathcal{P}(r) \otimes A^{\otimes r} \otimes \mathcal{P}(r) \otimes B^{\otimes r} \xrightarrow{\gamma_A \otimes \gamma_B} A \otimes B,$$

其中 τ 是对张量因子进行置换的映射，而 γ_A 和 γ_B 是 A 和B的结构映射。

类似地，我们可以定义 Hopf 余合作代数：它们是结合代数范畴中的余合作代数。更准确地说，Hopf 余合作代数 $\mathcal{C}$ 是一个余合作代数，并配备映射 $\mu_r\colon \mathcal{C}(r)\otimes\mathcal{C}(r) \to\mathcal{C}(r)$，使得每个 μ_r 都在 $\mathcal{C}(r)$ 上构成一个结合乘积，且映射 μ_r 与余合作代数分解相容。我们指出，从技术上说，这应称为余 Hopf 余合作代数（如文献 [14]中的称呼），但稍微放宽术语用法，我们仍称之为 Hopf 余合作代数。若所有乘积 μ_r 都含幺，则称 Hopf 余合作代数为含幺的，其单位记为 $\eta_r \in \mathcal{C}(r)$。由于余合作代数分解映射保持单位，每个幺元的含幺 Hopf 余合作代数 $u\mathcal{C}$都带有一个映射 $\eta\colon u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} \to u\mathcal{C}$，其中 $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}$ 是幺元结合余交换余合作代数。该映射将 $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}$ 的元数为 r 的运算映到 η_r。

与代数类似，事实证明，两个带分割对称性的余代数 C 和 D 在 Hopf 余算子 $\mathcal{C}$ 上的张量积自然也是一个带分割对称性的 $\mathcal{C}$ 余代数。其余乘法

$$\delta_r^{C\otimes D} : C\otimes D \to \left(\mathcal{C}(r)\otimes (C\otimes D)^{\otimes r}\right)_{\mathbf{S}_r}$$

按照代数情形的对偶方式定义，并由以下复合显式给出

$$C\otimes D \xrightarrow{\delta_r^C\otimes\delta_r^D} \left(\mathcal{C}(r)\otimes C^{\otimes r}\otimes \mathcal{C}(r)\otimes D^{\otimes r}\right)_{\mathbf{S}_r} \xrightarrow{\tau} \left(\mathcal{C}(r)\otimes \mathcal{C}(r)\otimes (C\otimes D)^{\otimes r}\right)_{\mathbf{S}_r}$$

$$\xrightarrow{\mu_r\otimes \mathrm{id}_{(C\otimes D)^{\otimes r}}} \left(\mathcal{C}(r)\otimes (C\otimes D)^{\otimes r}\right)_{\mathbf{S}_r},$$

其中，δ_r^C 和 δ_r^D 是 C 和 D 的余乘法映射，而 τ 是置换张量因子的映射。

3.2 广义洗牌乘积

众所周知，链复形 V 上带余单位的余自由余幂零余交换余代数不仅是余交换余代数，还带有一种称为洗牌乘积的额外乘积。借助这一洗牌乘积，余自由余幂零余交换余代数成为一个 Hopf 代数。本节中，我们回顾洗牌乘积的一种推广，它最初由 Moerdijk 提出（参见 [24] 的例 2.3）。Moerdijk 证明，Hopf 运算子代数上的自由代数带有余结合余乘法。本文的构造需要 Moerdijk 构造的对偶形式，我们将在此加以描述。更多细节也可参见 [19] 的第 3.2.1 节。

设 $u\mathcal{C}$ 为一个约化幺 Hopf 余代数，V 为一个链复形。由于 $u\mathcal{C}$ 是约化的，因此它自然带有增广结构。于是，$u\mathcal{C}(V)$，即 V 上的余自由幂零余结合余代数，带有一个结合乘积

$$\star : u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$$

称为广义洗牌乘积，其定义如下。由于 $u\mathcal{C}$ 是一个 Hopf 余代数，张量积 $u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V)$ 也成为一个 $u\mathcal{C}$-余代数。由于 $u\mathcal{C}(V)$ 是余自由的，我们只需指定其在 $u\mathcal{C}(V)$ 的余生成元上的像。余增广 $\eta\colon I\to u\mathcal{C}$ of $u\mathcal{C}$ 诱导出一个映射 $V\cong I(V) \to u\mathcal{C}(V)$；为简便起见，我们将该映射的像记为 V。广义洗牌乘积在余生成元上的限制 $\tilde{\star}\colon u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V) \to V$定义为

$$\mathbb{I}\star v = v\star \mathbb{I} = v,$$

当 $v\in V$ 时成立，否则为零。根据余自由性，这可扩展为一个乘积 $\star\colon u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$。我们称这个乘积为广义洗牌乘积。

广义洗牌乘积与 $u\mathcal{C}(V)$ 的余乘法具有如下相容性 .

引理 3.1. 设 $u\mathcal{C}$ 是一个幺 *Hopf* 余代数， V 是一个分次 R-模。广义洗牌 $\star$： $u\mathcal{C}(V) \otimes u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$ 乘积是 $u\mathcal{C}$- 余代数的一个态射，特别地，以下交换图是可交换的

$$\begin{array}{ccc} u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V) & \xrightarrow{\Delta_{u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V)}} & u\mathcal{C}(u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V)) \\ \downarrow{\scriptstyle \star} & & \downarrow{\scriptstyle u\mathcal{C}(\star)} \\ u\mathcal{C}(V) & \xrightarrow{\Delta_{u\mathcal{C}(V)}} & u\mathcal{C}(u\mathcal{C}(V)), \end{array}$$

其中 $\Delta_{u\mathcal{C}(V)\otimes u\mathcal{C}(V)}$ 和 $\Delta_{u\mathcal{C}(V)}$ 是余代数映射。

由于这是广义洗牌乘积定义以及 Hopf 积与余代数结构相容性的直接推论，故省略引理的证明。根据附录 A 中 [6], 的同样论证，我们可以将广义洗牌乘积扩展到完备的 $u\mathcal{C}$-余代数。

引理 3.2。 设 $u\mathcal{C}$ 是约化幺 *Hopf* 余代数， V 是一个分次 R-模。广义洗牌乘积可扩展至完备余自由 $u\mathcal{C}$- 余代数

$$\star : \widehat{u\mathcal{C}(V)} \otimes \widehat{u\mathcal{C}(V)} \to \widehat{u\mathcal{C}(V)}.$$

因此， $u\mathcal{C}(V)$ 和 $u\mathcal{C}(V)$ 都成为 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数。

4 Hopf 运算子代数上的代数的扭曲过程

在上一节中，我们看到 $u\mathcal{C}(V)$——Hopf 余算子 $u\mathcal{C}$上分次 R-模 V的完备余自由余幂零 $u\mathcal{C}$-余代数——借助广义洗牌乘积成为一个 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数。本节将说明如何将这一双代数结构诠释为李群的类比。在这种诠释中，“群结构”由广义洗牌乘积给出，而流形结构则由 $u\mathcal{C}(V)$-余代数结构及其微分 Q ： $u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$ 给出。我们假设读者熟悉经典李理论的基础知识；否则，我们建议读者参考例如 [17] ，了解经典李理论的入门知识。

在这种类比中，“李群” $u\mathcal{C}(V)$ 的切空间由 V 给出。事实证明，流形经典李理论中的许多概念也可以推广到我们的框架中。例如，指数映射和伴随表示在此框架中都有对应概念，二者共同导出了扭曲过程。

本节中的大多数思想都可以看作是对 Dolgushev 从 [7] 出发处理 L_∞-代数扭曲过程的方法的推广。后来，作者将这种扭曲方法推广到了 A_∞-代数。

4.1 指数映射

本节中，我们定义指数映射，并证明它具有与经典李群理论中的指数映射相似的性质。回顾一下，对于一个李群 G ，其李代数为 $\mathfrak{g}$，指数映射是一个函数 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ，它将 $\mathfrak{g}$ 映射到 G ，并刻画其局部结构。对于一个元素 $v \in \mathfrak{g}$，其定义方式是先考虑唯一的单参数子群 γ_v : $\mathbb{R} \to G$ ，该子群在恒等映射处的切向量等于 v。于是， v 的指数映射定义为 $\exp(v) = \gamma_v(1)$, 其中 $1 \in \mathbb{R}$ 是$\mathbb{R}$的乘法单位元。

我们希望将这一构造推广到 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数。为此，我们首先需要找到实数直线的类似物，它由 $R[R]$ 给出，即 R 作为加法群、系数取自 R 的群环。接下来需要将其构造成一个 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数，其中 $u\mathcal{C}$-双代数结构具有除对称性。群环 $R[R]$ 具有自然的余交换余乘法：将加法群 R 中的元素定义为类群元素，再将其扩展为 $u\mathcal{C}$-余代数结构。为此，我们利用每个幺元结合 Hopf 余合作代数 $u\mathcal{C}$ 都带有一个自然映射 $\eta: u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} \to u\mathcal{C}$。

4.1.1 实数直线的类似物

如前所述，在我们的框架中，实数直线 $\mathbb{R}$ 的类似物是群环 $R[R]$。在经典李群的框架中，实数直线 $\mathbb{R}$ 的群结构由加法给出，其流形结构则由 $\mathbb{R}$ 上通常的流形结构给出。在我们的框架中，群环 $R[R]$ 具有一种“群”结构（严格来说是幺半群结构），但尚未具有 $u\mathcal{C}$ 余代数结构，而这将是 $\mathbb{R}$ 上流形结构的类似物。

为避免混淆作为系数环的 R 与作为加法群的 R，从现在起，我们将作为加法群的 R 记作 G。G 的元素记作 g_λ，其中 $\lambda \in G$；由于 G 和 R 作为加法群相同，我们有时也会用 R 作为元素 g_λ 的索引集。R 的加法单位元记作 e，乘法单位元记作 $g_{\mathbb{I}}$。采用这一记号，群环以元素 g_λ 为基，其环结构在这些基元素上定义为 $g_\lambda \cdot g_\mu = g_{\lambda+\mu}$，其中 λ、$\mu \in G$。群环 $R[G]$ 进一步成为一个具有经典余乘法的余交换余代数

$$\Delta : R[G] \to R[G] \otimes R[G]$$

在基 $\{g_\lambda\}$ 上定义为

$$\Delta(g_\lambda) = g_\lambda \otimes g_\lambda$$

对于 $g_\lambda \in G$。

$R[G]$ 的余乘法自然落在不变量中，而非余不变量中，因此这个余代数不具有除对称性。由于我们希望考察从 $R[G]$ 到 $u\mathcal{C}(V)$ 的态射，因此需要赋予 $R[G]$ 一个具有除对称性的 $u\mathcal{C}$-余代数结构。

首先，我们利用态射 $\eta: u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} \to u\mathcal{C}$ 将 $R[G]$ 变成一个 $u\mathcal{C}$-余代数（不具有除对称性），于是得到一个映射

$$R[G] \to \bigoplus_{r\geq 0} \widehat{(u\mathcal{C}(r) \otimes R[G]^{\otimes r})^{\mathbf{S}_r}}. \tag{2}$$

由于我们假设 $u\mathcal{C}$ 在每个元数上都是自由的 $R[\mathbf{S}_r]$-模，因此不变量与余不变量同构。于是，我们可以将这个同构应用于方程 2，得到一个映射

$$R[G] \to \bigoplus_{r\geq 0} \widehat{(u\mathcal{C}(r) \otimes R[G]^{\otimes r})_{\mathbf{S}_r}},$$

它将群代数变成一个具有除对称性的 $u\mathcal{C}$-余代数。

注记 4.1。当 $\mathbb{Q} \subseteq R$ 时，范数映射总是可逆的；在这种情况下，我们的构造适用于所有幺正约化幺元 *Hopf* 上合作代数。

4.1.2 指数映射

指数映射定义如下。我们要定义一个映射，使其推广经典李代数的指数映射。具体来说，我们希望为每个次数为 0 的 $\frown$ 元素 $v \in V_0$，关联到 $u\mathcal{C}(V)$ 中唯一的“单参数子群”，其切向量为 v。这里的意思是，一个 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数映射 $\gamma_v\colon\ R[G] \to u\mathcal{C}(V)$，从 $R[G]$（实数直线的类似物）映射到 $u\mathcal{C}(V)$，满足 $\gamma(e) \overset{=}{\mathbb{I}}$ 且 $T(\gamma_v(g_{\mathbb{I}})) = v$；也就是说，乘法单位元 $g_{\mathbb{I}} \in G$ 处的切向量由 v 给出（见定义 2.3）。这并不一定能保证映射 γ_v 唯一，但如果进一步要求对于 $\lambda \in R$，$T(\gamma_v(\lambda g_{\mathbb{I}})) = \lambda T(\gamma_v(g_{\mathbb{I}}))$，那么映射便是唯一的。因此，特别是当指数映射的“速度”增大为原来的 λ 倍时，切向量也需要增大为原来的 λ 倍。

$\frown$**命题 4.1.** 设 $v \in V_0$，存在唯一的映射 $\gamma_v\colon\ R[G] \to u\mathcal{C}(V)$，它是 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数态射，并由以下性质确定：

$\frown$*1.* γ_v*：* $R[G] \to u\mathcal{C}(V)$ *在单位元处的切向量由* $T(\gamma_v(e))$ *给出，且* $\lambda \in R$*有* $T(\gamma_v(\lambda \cdot e)) = \lambda \cdot v$。$\frown$*2.* 映射 γ_v*：* $R[G] \to u\mathcal{C}(V)$ *是双代数态射，即有* $\gamma_v(\alpha \cdot \beta) = \gamma_v(\alpha) \star \gamma_v(\beta)$*，其中* $\alpha, \beta \in R[G]$。

$\frown$证明。由于 $u\mathcal{C}(V)$ 是完备余自由的，任意 $u\mathcal{C}$-余代数映射都由其在余生成元上的像确定。作为 $u\mathcal{C}$-余代数态射，映射 γ_v 因此由以下 R-线性映射唯一确定

$$\widetilde{\gamma_v} : R[G] \to V$$

其在基元素 $g_\lambda \in R[G]$（带有 $\lambda \in R$）上的定义为

$$\widetilde{\gamma_v}(g_\lambda) = \lambda \cdot v.$$

这唯一确定了作为 $u\mathcal{C}$-余代数映射的 γ_v；接下来需要检查的是，该映射是否同时也是一个双代数映射。因此，我们需要检查它是否与 $\frown R[G]$ 和 $u\mathcal{C}$（V）的结合乘积相容。

为了证明指数映射是一个双代数态射，我们需要检查

$$\gamma_v(g_\alpha \cdot g_\beta) = \gamma_v(g_\alpha) \star \gamma_v(g_\beta).$$

这等价于证明下面由 $u\mathcal{C}$-余代数映射组成的交换图是交换的 :

$$\begin{array}{ccc} R[G] \otimes R[G] & \xrightarrow{\gamma_v \otimes \gamma_v} & u\mathcal{C}(V) \otimes u\mathcal{C}(V) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{R[G]}} & & \downarrow{\scriptstyle \star} \\ R[G] & \xrightarrow{\quad\gamma_v\quad} & u\mathcal{C}(R[G]), \end{array}$$

其中 $\star$ 是广义洗牌乘积，$\mu_{R[G]}$ 是群环 $R[G]$的乘法。由于 $u\mathcal{C}(R[G])$在完备意义下是余自由的，因此每个映射都由其在余生成元上的像决定。所以，我们只需验证映射 $\gamma_v \circ \mu_{R_{[G]}}$ 和 $\star \circ (\gamma_v \otimes \gamma_v)$具有相同的切向量，而该切向量等于它在余生成元上的像。换言之，我们需要证明，对于 $\alpha \otimes \beta \in R[G] \otimes R[G]$

$$T\left(\gamma_v \circ \mu_{R_{[G]}}\right) = T\left(\star \circ (\gamma_v \otimes \gamma_v)\right). \tag{3}$$

进行这一显式计算后，我们发现方程 3 的左边等于

$$T(\gamma_v \circ \mu_{R_{[G]}}(\alpha \otimes \beta)) = \alpha + \beta.$$

方程 3 的右侧计算如下。首先，元素 $\gamma_v(\alpha)$（分别为 $\gamma_v(\beta)$）具有 $1 + \alpha +$ 高阶项（分别为 $1 + \beta +$ 高阶项）的形式，其中高阶项由元数为 2 及以上的余乘法给出。于是，广义洗牌乘积为 $\gamma_v(\alpha) \star \gamma_v(\beta) = 1 + \alpha + \beta +$ 高阶项，因此投影到余生成元上后为 $\alpha + \beta$。所以这些映射在余生成元上的投影相同，因而相等。因此，映射 γ_v 是双代数映射。

□

根据这些性质可知， γ_v 由 $g_{\mathbb{I}}$ 的像确定。

引理 4.1. 根据性质 *4.1* 的性质还可知， $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数映射 $\gamma_v\colon R[G] \to u\mathcal{C}(V)$ 等价于一个 $u\mathcal{C}$-余代数映射 $\gamma'_v\colon R \to u\mathcal{C}(V)$。

证明。 显然，一个 $u\mathcal{C}$-$\mathcal{ASS}$-双代数映射 $\gamma_v\colon R[G] \to u\mathcal{C}(V)$ 确定了一个 $u\mathcal{C}$-余代数映射 $\gamma'_v\colon R \to u\mathcal{C}(V)$。此映射由 $\gamma'_v(\lambda) := \gamma_v(\lambda g_{\mathbb{I}})$ 给出，其中 $\lambda \in R$。

反过来，我们假设有一个映射 $\gamma'_v\colon R \to$ 为映射 $\gamma_v\colon R[G] \to u\mathcal{C}(V)$。由于 $u\mathcal{C}(V)$ 是余自由的，我们只需定义它在余生成元上的投影，即生成元 $g_\lambda \mathbb{R}[G]$ 的像由以下公式给出

$$T(\gamma_v(g_\lambda)) := T(\gamma'_v(\lambda)).$$

由命题 4.1 的性质可知，这确实可以延拓为一个双代数映射。

□

现在我们已经定义了“单参数子群”的类似概念，可以完全按照经典李理论中的做法来定义指数映射。

定义 4.1。 指数映射定义为

$$\exp : V_0 \to \widehat{u\mathcal{C}(V)}$$

$$exp(v) := \gamma_v(g_{\mathbb{I}}).$$

与经典指数映射类似，我们的指数映射具有以下性质。

命题 4.2。 设 $v \in V_0$, $\kappa, \lambda \in R$ 和 $x \in u\mathcal{C}(V)$。指数映射具有以下性质：

1. $exp(\kappa v) \star exp(\lambda v) = exp((\kappa + \lambda)v)$。*2.* $exp(-v) \star exp(v) = \mathbb{I} = exp(v) \star exp(-v)$，或者等价地，$exp(-v)$ 是 $exp(v)$ 的乘法逆元。*3.* 映射 $exp(v) \star - : u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$ 是 $u\mathcal{C}$-余代数的态射。

证明。 第 1 部分和第 2 部分由命题 4.1 立即得出，因此省略其证明。我们如下证明第 3 部分。我们需要证明映射 $\exp(v) \star - : u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$ 与余乘法相容，因此若 $x \in u\mathcal{C}(V)$，则需要证明

$$\Delta_{\widehat{u\mathcal{C}(V)}}(\exp(v) \star x) = \Delta(\star)(\Delta_{\widehat{u\mathcal{C}(v)} \otimes \widehat{u\mathcal{C}(V)}}(\exp(v) \otimes x)), \tag{4}$$

其中 $x \in u\mathcal{C}(V)$ 和 $\Delta(\star)$ 是广义洗牌乘积 $\star$ 的余乘法。为了证明方程 4 成立，我们需要两个要点。第一是引理 3.1，第二是 $\exp(v)$ 满足类群状性质。由于元素 $g_{\mathbb{I}}$ 在 $R[G]$ 中是类群状的，其余乘法为 $\Delta(g_{\mathbb{I}}) = \sum_{r\geq 0} \eta_r \otimes g_{\mathbb{I}}^{\otimes r}$，其中 η_r 是 $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}(r)$ 在 $u\mathcal{C}(r)$ 中的像。由于 γ_v 是 $u\mathcal{C}$-双代数的态射， $\Delta(\exp(v))$ 的余乘法为 $= \Delta(\gamma_v(g_{\mathbb{I}})) = \sum_{r\geq 0} \eta_r \otimes \exp(v)^{\otimes r}$。若现在利用 η_r 单位元是乘积 μ_r 的单位元： $u\mathcal{C}(r) \otimes u\mathcal{C}(r) \to u\mathcal{C}(r)$，再结合引理 3.1，便可得出方程 4 成立。

□

下面的推论几乎可以直接由命题 4.2 得出。注意，在下面命题的第二部分中，我们没有使用余代数 $u\mathcal{C}(V)$ 的完备化。

推论 4.1. 元素 $\exp(v)$ 在 $u\mathcal{C}(V)$ 中关于广义洗牌乘积可逆，其逆为 $\exp(-v)$。映射

$$\exp(v) \star - : u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$$

因此是一个同构，其逆为 $\exp(-v) \star -$。

证明. $\exp(v) \star -$ 可逆这一事实可直接由命题 4.2 得出。映射 $\exp(v)$ 保持子空间 $u\mathcal{C}(V) \subset u\mathcal{C}(V)$ 这一事实，可由与 [6] 附录 A 中相同的论证得出。

□

4.2 扭曲过程与 Maurer-Cartan 方程

利用上一节中的指数映射，我们可以为 $\Omega\mathcal{C}$-代数定义扭曲过程。这类似于李群在其李代数上的伴随表示。

De定义 4.2。 设 $(u\mathcal{C}(V)\ Q)$ 是一个弯曲的 $\Omega\mathcal{C}$-代数，且 $v \in V_0$。则定义 $Q^v : u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$，将 $(u\mathcal{C}(V)\ Q)$ 的微分通过 v 扭曲为

$$Q^v : u\mathcal{C}(V) \to u\mathcal{C}(V)$$

$$Q^v(x) := \exp(-v) \star Q\left(\exp(v) \star x\right),$$

其中 $x \in u\mathcal{C}(V)$。

定理 4.1。 扭曲微分 Q^v 是一个余导子，并且平方为零。因此，弯曲的 $\Omega\mathcal{C}$-代数的扭曲仍然是一个弯曲的$\Omega\mathcal{C}$-代数。

证明。 我们需要证明扭曲微分 $\mathbb{Q}^v$ 仍然是一个余导子，并且平方为零。首先注意到，根据命题 4.2，乘以 $\exp(v)$ 是一个 $u\mathcal{C}$-余代数同构，其逆为 $\exp(-v)$。由于余导子在同构下的共轭仍然是余导子，映射 Q^v 仍然是一个余导子。

映射 Q^v 的平方为零，因为

$$\begin{aligned}(Q^v)^2(x) &= \exp(-v) \star Q(\exp(v) \star \exp(-v) \star Q(\exp(v) \star x)) \\ &= \exp(-v) \star Q(\mathbb{I} \star Q(\exp(v) \star x)) \\ &= \exp(-v) \star Q^2(\exp(v) \star x) \\ &= 0\end{aligned}$$

其中我们使用了乘以 $\mathbb{I}$ 是恒等映射这一事实。因此，扭曲微分的平方再次为零，从而证明了该定理。

□

利用扭曲的这一概念，我们可以将 Maurer-Cartan 元素定义为扭曲后产生平坦 ΩC-代数的元素。

定义4.3。 设$(u\mathcal{C}(V)\ Q)$ 是一个弯曲的ΩC-代数，且设 $v \in V_0$，则 ***Maurer-Cartan*** 方程定义为

$$\tilde{Q}(exp(v)) = 0.$$

满足 ***Maurer-Cartan*** 方程的元素称为 ***Maurer-Cartan*** 元素，***Maurer-Cartan*** 元素的集合记为 $\mathrm{MC}(V) \subseteq V$。

利用显式态射η： $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} \to u\mathcal{C}$，可以将 Maurer-Cartan 方程写得更加明确。若 η'_r 表示 $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M}(r)$ 和 $\eta_r = \varphi(\eta'_r)$ 的基元素，则 Maurer-Cartan 方程可改写为

$$\sum_{r\geq 0} \tilde{Q}_r \left(\eta_r \otimes v^{\otimes r}\right) = 0.$$

沿用 [6], 第4节中的相同论证，我们得到以下命题，它表明 Maurer-Cartan 方程确实是一个平坦性方程。

命题4.3。 设$(u\mathcal{C}(V)\ Q)$ 是一个弯曲的ΩC-代数，则$(u\mathcal{C}(V)\ Q^v)$，即用元素 $v \in V_0$ 扭曲 Q 所得的代数，当且仅当 v 是一个 ***Maurer-Cartan*** 元素时才是平坦的。

5 Maurer-Cartan 单纯集合

在 L_∞-代数和 A_∞-代数理论中，Maurer-Cartan 元素集可以扩展为一个单纯集，用以编码所有相关的规范变换。这些 Maurer-Cartan 单纯集合在变形理论、有理同伦理论及相关领域有许多应用。本节将说明，这些 Maurer-Cartan 单纯集合可以在更广泛的情形下构造。特别地，我们将证明，对于每个带有映射 $\mathcal{E}_\infty \to \mathcal{C}$ 的酉约化幺元 Hopf 余操作子 $u\mathcal{C}$ L_∞，都可以构造一个 Maurer-Cartan 单纯集合；其中 $\mathcal{E}_\infty$ 表示 Barratt-Eccles 算子的上链，而 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的非幺元部分。

约定 5.1. 从现在起，我们只考虑平坦的 ΩC-代数。

5.1 Maurer-Cartan 单纯集合

我们按如下方式构造 Maurer-Cartan 单纯集合。设 $u\mathcal{C}$ 是一个酉约化幺元 Hopf 余操作子，那么我们在第4节中已经看到，存在一个态射 $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} \to u\mathcal{C}$，并且有一个指数映射和一个 Maurer-Cartan 方程。我们还看到，若 V 是一个曲率 ΩC-代数，那么指数映射通过“单参数子群”γ_v： $R[G] \to u\mathcal{C}(V)$ 定义，而该子群又由一个 $u\mathcal{C}$-余代数的态射 $R \to u\mathcal{C}(V)$ 确定。

由于 R 可与 $N_*(\Delta^0; R)$ 识别，即与取 R 系数的 Δ^0 链相同，Maurer-Cartan 元素的集合等于 $N_*(\Delta^0; R)$ 的态射集合，其中通过态射 $u\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{M} \to u\mathcal{C}$ 将其视为 $u\mathcal{C}$-余代数。到 $u\mathcal{C}(V)$。

为了定义 Maurer-Cartan 单纯集合的高阶单形，我们使用高阶标准单形 Δ^n。众所周知，标准单形构成单纯集合范畴中的一个余单纯对象（例如参见 [15] ）。因此，如果我们对 R 应用 $N_*(-, R)$，即系数取 R 的归一化链函子，就会得到链复形范畴中的一个余单纯对象。为稍微简化记号，从现在起，我们将在归一化链的记号中省略系数，并始终默认系数环为 R。为了

定义 Maurer-Cartan 单纯集合，我们需要将其转化为 $\mathcal{C}$-余代数范畴中的一个余单纯对象。Maurer-Cartan 单纯集合在本质上定义为

$$\mathrm{MC}_n(V) := \hom_{\mathcal{C}-\mathrm{coalg}}(N_*(\Delta^n), \widehat{u\mathcal{C}(V)}). \tag{5}$$

为了给 $N_*(\Delta^n)$ 配备 $\mathcal{C}$-余代数结构，我们首先利用它是一个 $\mathcal{E}_\infty$-余代数这一事实。在归一化链上定义 $\mathcal{E}_\infty$-余代数结构有多种可能的选择。例如，有满射算子和 Barratt-Eccles 算子（见 [22] 和 [2]）。本文其余部分采用 [2] 中的 Barratt-Eccles 算子；我们不研究算子上的余代数，而是研究 Barratt-Eccles 算子的对偶，并将其记作 $\mathcal{E}_\infty$。由于 Barratt-Eccles 算子是有限型的，算子上的余代数与对偶余算子上的余代数等价。因此，要将 $N_*(\Delta^n)$ 转化为 $\mathcal{C}$-余代数，我们需要假设存在一个余算子态射 $\varphi\colon \mathcal{E}_\infty \to \mathcal{C}$。由于 Barratt-Eccles 余算子具有自由对称群作用，我们可以将不变量与余不变量等同，因此带分割对称性的余代数与普通余代数没有区别。

由于我们假设所有 $\Omega\mathcal{C}$-代数都是平坦的，因此可知，链复形 V 上的平坦 $\Omega\mathcal{C}$-代数结构等价于 $\mathcal{C}(V)$ 上的平方为零的余导子（即非含余单位的版本）。在这种情况下，方程 5 中 Maurer-Cartan 单纯集合的 n-单形集合由以下 $\mathcal{C}$-余代数映射集合给出

$$\mathrm{MC}_n(V) := \hom_{\mathcal{C}-\mathrm{coalg}}(N_*(\Delta^n), \widehat{\mathcal{C}(V)}). \tag{6}$$

这是因为我们可以将 $\mathcal{C}(V)$ 识别为 V 上的相对 bar 构造（见 [20], 第 11 章）。回想一下，由于 $(\mathcal{C}(V)\ Q)$ 是余自由的，任何映射到其中的映射都由其在余生成元上的像确定。然而，反过来并不成立，因为并非每个映射都与微分 Q 交换。不过，我们可以构造卷积代数同态 $_R(N_*(\Delta^n)\ V)$，它成为卷积运算子同态 $(\mathcal{C}, \Omega\mathcal{C})$ 上的代数（见 [3]）。正如 [20], 第 11 章中所解释的，这个卷积代数中存在一个 Maurer-Cartan 方程，其解对应于与微分 Q 交换的映射。为定义这个 Maurer-Cartan 方程，我们首先定义 $\star_\tau$-算子。

设 $\mathcal{C}$ 是一个余算子，$\mathcal{P}$ 是一个运算子，二者都带有自由对称群作用。设 (C, Δ_C) 是一个 $\mathcal{C}$-余代数，(V, γ_V) 是一个 $\mathcal{P}$-代数；由于对称群作用是自由的，除对称性与无除对称性之间没有区别。进一步假设我们有一个幺半群扭曲态射 $\tau\colon \mathcal{C} \to \mathcal{P}$。在我们的情形中，$\mathcal{P}$ 由 $\Omega\mathcal{C}$ 给出，而 τ 由典范扭曲态射 $\iota\colon \mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}$ 给出。$\star_\tau$-算子是次数为 -1 的（非线性）映射

$$\star_\tau : \hom_R(C, V) \to \hom_R(C, V)$$

定义为如下复合映射

$$\star_\tau(\psi) := C \xrightarrow{\Delta_C} \mathcal{C} \circ C \xrightarrow{\tau\circ\psi} \mathcal{P} \circ V \xrightarrow{\gamma_V} V.$$

进一步地，对于 $r \geq 2$，我们定义如下运算

$$\mu_r : \hom_R(C, V)^{\otimes r} \to \hom_R(C, V)$$

by

$$\mu_r(\psi_1, ..., \psi_r) := \gamma_V \circ (\psi_1 \otimes ... \otimes \psi_r) \circ \Delta_C^r,$$

其中 $\psi_1, ..., \psi_r \in \mathbf{hom}_R(C, V)$，且 $\Delta_C^r\colon C \to (\mathcal{C}(r) \otimes C^{\otimes r})\mathbf{s}_r$ 是 C 的余乘法的元数 r 部分。算子 $\star_\tau$ 可写为 $\star_\tau(\psi) = \sum_{r\geq 2} \mu_r(\psi, ..., \psi)$。

Maurer-Cartan 元素是一个 0 次态射 $\psi \in \hom_R(C,V)$，它满足 Maurer-Cartan 方程，该方程定义如下:

$$\partial(\psi) + \star_\tau(\psi) = 0, \tag{7}$$

其中 ∂ 是 $\hom_R(C,V)$ 的微分。Maurer-Cartan 方程的解集记作 $\mathrm{MC}(\hom_R(C,V))$。根据 [20] 第 11 章，我们得到以下命题。

命题 5.1 ([20], 命题 11.3.1). 在前述假设下，我们有如下双射

$$\mathrm{MC}\left(\hom_R(C,V)\right) \cong \hom_{\mathcal{C}-coalg}\left(C, (\mathcal{C}(V), Q)\right).$$

在我们的具体情形中，扭曲态射由典范扭曲态射ι : $\mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}$ 给出（见 [20], 第 6.5 节）。根据命题 5.1，我们看到，方程 6 中的 n-单形集合与 $\hom_R(N_*(\Delta^n)\ V)$ 中的 Maurer-Cartan 元之间存在等价关系。进一步注意，当 $n = 0$ 时， Δ^0 上的链与 R 同构。因此存在一个同构 $\hom_R(N_*(\Delta^0)\ V) \cong V$。容易看出，在此同构下，$\hom_R(N_*(\Delta^0)\ V)$ 中由 $\partial(\psi) + \star_\iota(\psi)$ 给出的 Maurer-Cartan 方程等价于定义 4.3 中的 Maurer-Cartan 方程。于是，Maurer-Cartan 单纯集合的一种等价表述为

$$\mathrm{MC}_n(V) := \mathrm{MC}\left(\hom_R\left(N_*(\Delta^n, V)\right)\right). \tag{8}$$

面映射和退化映射是由$\{\Delta^n\}_{n\geq 0}$的面映射和退化映射所诱导的映射。

引理 5.1。 在本节前面所作假设下，诱导的面映射 $d_i : \mathrm{MC}_n(V) \to \mathrm{MC}_{n-1}(V)$ 和 $s_j : \mathrm{MC}(V) \to \mathrm{MC}_{n+1}(V)$ 保持 *Maurer-Cartan* 元素。

这是因为 MC 关于余代数和代数是一个双函子。由于余单纯映射是余代数映射，它们保持 Maurer-Cartan 方程。因此，Maurer-Cartan 单纯集合确实成为定义良好的单纯集。

注记 5.1。 在特征 0 下，卷积代数自然成为一个 L_∞-代数，其 L_∞-结构由 *[27]* 定义。遗憾的是，对于不包含 $\mathbb{Q}$ 作为子环的环，这种情况并不成立。

注记 5.2。 在定义 *Maurer-Cartan* 单纯集合时，我们选择使用标准单形上的链。当然，这种构造也可以基于单形的其他模型进行。一个自然的问题是，其他模型是否会给出同伦等价的 *Maurer-Cartan* 单纯集合。*Milham* 和 *Rogers* 的方法（见 *[23]*）似乎很可能也适用于这一更一般的情形，但这超出了本文的范围。

5.2 Maurer-Cartan 单纯集合是一个 Kan 复形

在本节中，我们证明 Maurer-Cartan 单纯集合是一个 Kan 复形。

定理 5.1。 设 V 是一个完备的 $\Omega\mathcal{C}$-代数，则 *Maurer-Cartan* 单纯集合 $\mathrm{MC}_\bullet(V)$ 是一个 *Kan* 复形。

为证明该定理，我们沿用 Getzler 对以下事实的证明：与一个 L_∞-代数相关联的 Maurer-Cartan 单纯集合或 Deligne-Getzler-Hinich 群胚（见 [13], 第4节）。Getzler 证明背后的主要思想是， Δ^n 上的链都带有到 Δ^n各个顶点的收缩。给定 V中的一个 Λ^n_k 角，我们可以利用这一收缩归纳地构造一个角填充子。在 [6], 中，我们通过使用单形上的上链，将 Getzler 的证明推广到了 A_∞-代数的情形。对于一般的 $\Omega\mathcal{C}$-代数，我们需要用链替代上链，并用映射空间替代张量积。最大的区别在于，在 A_∞-和 L_∞-情形中，与上链（分别为多项式 de Rham 形式）作张量积后仍然是一个 A_∞ （分别为 L_∞-代数）。在我们的情形中，张量积被卷积代数所替代，而后者并非自然的 $\Omega\mathcal{C}$-代数。因此，我们需要使用公式 7 中更一般的 Maurer-Cartan 方程；其结果是，我们的公式与 [13]中的 Getzler 证明略有不同。

在证明定理 5.1 之前，我们首先需要对单纯形 Δ^n 的链构造一个收缩。由于所有论证都与 [6], 中的论证完全类似，我们将证明留给读者。以下采用如下记号。Δ^n 中以顶点 $i_0, ..., i_k$ 为顶点的 k 维子单纯形记为 $e_{i_0,...,i_k}$，其中 $0 \leq i_0 < ... < i_k \leq n$。作为链复形的 $N_k(\Delta^n)$ 的一组生成元为 $\{e_I\}$，其中 $I \subseteq \{0, ..., n\}$ 遍历所有阶为 $k+1$ 的子集。微分定义为

$$d(e_{i_0,...,i_k}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j e_{i_0,...,\widehat{i_j},...,i_k},$$

$\widehat{\ }$其中 i_j 表示省略第 i_j 个指标。

$N_*(\Delta^n)$ 的余单位是由单纯集合的映射 $\Delta^n \to \Delta^0$ 诱导的映射。具体而言，余单位 $\epsilon\colon N_*(\Delta^n) \to R$ 在生成元上的定义为 $\epsilon(e_k) = \mathbb{I}$，其他情况则为零。第 k 个顶点的包含映射记为 $p^k_n\colon \Delta^0 \to \Delta^n$，其定义为 $p^k_n(e_0) = e_{k\circ}$

复合映射 $p^k_n \circ \epsilon\colon N_*(\Delta^n) \to N_*(\Delta^n)$ 通过由下式给出的链同伦 $h^k_n\colon N_*(\Delta^n) \to N_{*+1}(\Delta^n)$ 与恒等映射 $\mathrm{id}\colon N_*(\Delta^n) \to N_*(\Delta^n)$ 同伦。

$$h^k_n(e_I) := (-1)^s e_{I\cup k},$$

其中 $e_I \in N_*(\Delta^n)$，并且当 k 已经是 I 的一个元素时， $I \cup k$ 定义为 0。符号 s 由 I 中小于 k 的元素个数给出。

映射 h^k_n 是 p^k_n 与恒等映射之间的一个链同伦，即它满足下列等式

$$dh^k_n + h^k_n d = \mathrm{id}_{N_*(\Delta^n)} - p^k_n. \tag{9}$$

映射 p^k_n 诱导一个映射

$$\tilde{P^k_n} : \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d \to \hom_R(N_*(\Delta^0), V)_d \cong V$$

其定义为

$$\tilde{P^k_n}(\varphi) := \varphi \circ p^k_n$$

其中 $\varphi \in$ 同态$_R(N_*(\Delta^n)\ V)_d$。类似地，余单位 $\epsilon\colon N_*(\Delta^n) \to R$ 诱导一个映射

$$E : V \cong \hom_R(N_*(\Delta^0), V)_d \to \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d$$

给出为

$$E(\phi) := \phi \circ \epsilon$$

其中 $\phi \in$ 同态$_R(N_*(\Delta^0)\ V)_d$。该映射

$$P_n^k : \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d \to \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d$$

定义为

$$P_n^k := E \circ \tilde{P}_n^k.$$

同伦 h_n^k 在卷积代数层面诱导出类似的同伦

$$H_n^k : \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d \to \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_{d+1}.$$

由下式给出

$$H_n^k(\varphi) := \varphi \circ h_n^k$$

其中 $\varphi \in$ 同态$_R(N_*(\Delta^n)\ V)_d$。映射 ∂、 E、 P_n^k和 H_n^k满足以下恒等映射

$$\partial H_n^k + H_n^k \partial = \mathrm{id}_{\hom_R(N_*(\Delta^n), V)} - P_n^k. \tag{10}$$

我们进一步定义映射

$$R_n^k : \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d \to \hom_R(N_*(\Delta^n), V)_d$$

as

$$R_n^k := \partial \circ H_n^k.$$

利用这些映射，我们现在可以证明定理 5.1。

定理 *5.1* 的证明。 如前所述，我们采用 Getzler 证明的一种变体：从 $\hom_R(N_*(\Delta^n)\ V)$ 中的某个特定元素开始，并将其扩展为一个 Maurer-Cartan 元素。

假设我们有 $\mathrm{MC}_\bullet(V)$ 中的一个 k-角，即一个映射 $\varphi\colon N_*(\Lambda_k^n) \to V$，那么我们需要构造一个角填充子，即一个映射 $\psi\colon N_*(\Delta^n) \to V$ 来填充 φ。我们归纳地定义 ψ，并从 ψ_1 开始，其中我们将其定义为 $\psi_1 = \xi + \rho$，其中

$$\xi(e_k) := \varphi(e_k)$$

否则为零，并且

$$\rho(e_I) := \begin{cases} \varphi(e_I) & \text{if } e_I \neq e_k, e_{0\dots\hat{k}\dots n} \text{ or } e_{01\dots n}, \\ \sum_{i\neq k} \varphi(e_{0\dots\hat{i}\dots n}) & \text{if } e_I = e_{0\dots\hat{k}\dots n}, \\ 0 & \text{if } e_I = e_k \text{ or } e_{01\dots n}. \end{cases}$$

由于 φ 是一个 Maurer-Cartan 元素，元素 ξ 也同样是一个 Maurer-Cartan 元素。进一步直接可见，$\partial\rho = 0$，因此它是一个循环元。

在大多数情况下，元素 ψ_1 并不是一个 Maurer-Cartan 元素。然而，由于 ξ 是一个 Maurer-Cartan 元素，而 ρ 是一个循环元，它确实满足 Maurer-Cartan 方程于

$$F_1 \hom(N_*(\Delta^n), V)/F_2 \hom(N_*(\Delta^n), V),$$

也就是说，它模掉滤过次数为 2 的元素后满足 Maurer-Cartan 方程。接下来，我们添加一个“修正”项 γ_1，定义一个元素 ψ_2，使其满足 Maurer-Cartan 方程，误差项的滤过次数为 3。首先，我们定义

$$\gamma_1 := H_n^k(\partial\psi_1 + \star_\iota(\psi_1)).$$

元素 γ_1 的滤过次数大于或等于 2，因为 $\star_\iota(\psi_1)$ 和 $\partial\psi_1$ 的滤过次数均为 ≥ 2。我们将 ψ_2 定义为

$$\psi_2 := \psi_1 - \gamma_1.$$

接下来我们证明，元素 ψ_2 满足 Maurer-Cartan 方程，直到滤过次数 3。我们有

$$\partial(\psi_2) + \star_\iota(\psi_2) = \partial\psi_1 - \partial\gamma_1 + \star_\iota(\psi_1 - \gamma_1). \tag{11}$$

由于 γ_1 的滤过次数为 ≥ 2，元素 $\star_\iota(\psi_1 - \gamma_1)$ 可以改写为

$$\star_\iota(\psi_1 - \gamma_1) = \star_\iota(\psi_1) + \text{terms of filtration degree} \geq 3.$$

因此，模去滤过次数为 ≥ 3 的元素后，方程 11 化为

$$\partial\psi_1 - \partial\gamma_1 + \star_\iota(\psi_1). \tag{12}$$

如果将方程 10 应用于 $\partial\gamma_1$，我们得到

$$\begin{aligned}\partial\gamma_1 &= \partial H_n^k(\partial\psi_1 + \star_\iota\psi_1) &(13)\\ &= \partial\psi_1 + \star_\iota(\psi_1) - P_n^k(\partial(\psi_1)) - P_n^k(\star_\iota(\psi_1)) - H_n^k(\partial^2\psi_1) - H_n^k(\partial(\star_\iota(\psi_1))). &(14)\end{aligned}$$

因此，将其与方程 12 结合，我们得到

$$- P_n^k(\partial(\psi_1)) - P_n^k(\star_\iota(\psi_1)) - H_n^k(\partial^2\psi_1) - H_n^k(\partial(\star_\iota(\psi_1))). \tag{15}$$

由于 ξ 满足 Maurer-Cartan 方程，项 $-P_n^k(\partial(\psi_1)) - P_n^k(\star_\iota(\psi_1))$ 为零。项 $-H_n^k(\partial^2\psi_1)$ 也为零，因为它涉及 ∂^2。因此只剩下项 $-H_n^k(\partial(\star_\iota(\psi_1)))$，我们需要证明该项的滤过次数为 ≥ 3。如果对模上的代数使用莱布尼茨法则，我们得到

$$-H_n^k(\partial(\star_\iota(\psi_1))) = \sum_{r\geq 2}\partial(\mu_r)(\psi_1^{\otimes r}) + \sum_{r\geq 2, 0\leq l\leq r}\mu_r(\psi_1^{\otimes l}\otimes\partial(\psi_1)\otimes\psi_1^{\otimes r-l-1}).$$

由于 $\partial\psi_1$ 的滤过次数为 ≥ 2，所有形如 $\mu_r(\psi_1^{\otimes l}\otimes\partial(\psi_1)\otimes\psi_1^{\otimes r-l-1})$ 的项的滤过次数都是 ≥ 3。此外，对于 $r\geq 3$，项 $\partial(\mu_r)(\psi_1^{\otimes r})$ 的滤过次数均为 ≥ 3。项 $\partial(\mu_2)(\psi_1\otimes\psi_1) = 0$，因为 μ_2 是幺半群扭曲态射的二元数分量。因此，元素 ψ_2 是 Maurer-Cartan 元，差至滤过次数为 3 的项。

我们继续用归纳法，将下一个“修正”项定义为

$$\gamma_i := H_n^k\left(\partial\psi_i + \star_\iota(\psi_i)\right)$$

and

$$\psi_{i+1} = \psi_i - \gamma_i.$$

完全相同的论证表明，ψ_i 是 Maurer-Cartan 元，差至滤过次数为 $\geq i+1$ 的项。于是，元素 ψ 定义为

$$\psi := \lim\psi_i$$

由完备性可知，此极限确实收敛，并且是一个 Maurer-Cartan 元素。还可以证明，它满足作为 φ 的角填充子的性质，因此证明了 $\mathrm{MC}_\bullet(V)$ 是一个 Kan 复形。

□

6 与其他方法的比较及示例

最近， [8] 通过使用规范群描述了扭曲过程的另一种方法。目前尚不清楚他们的扭曲过程与我们的方法究竟有何比较。两种方法中，幺元运算都发挥着关键作用，但含幺霍普夫（余）拟运算条件与他们的含幺可延拓条件之间的关系尚不明确。不过，与 [8] 相比，本文的方法有多项优势。首先，我们的构造适用于任意环，而不仅限于特征零域或包含 $\mathbb{Q}$ 的环。其次，本文的构造也适用于微分分次拟运算，而不仅限于由二次数据定义的运算子。

我们在本文最后证明，每个 $\mathcal{P}$ 单纯集合中的幺元算子的 Koszul 对偶都允许定义扭曲过程。这里所说的单纯集合中的幺元性是指 $\mathcal{P}(0) = *$。此外，我们还证明，可以为 Barratt-Eccles 算子及其$\mathcal{E}_n$-子运算子构造 Maurer-Cartan 单纯集。

定理 6.1. 设 $\mathcal{P}$ 是单纯集合中每个元数都只有有限多个非退化单形的幺元算子，则 $N^*(\mathcal{P})$ 满足定理 *4.1* 的条件，因此允许定义扭曲过程。

证明. 我们需要证明 $N^*(\mathcal{P})$ 是一个含幺 Hopf 余合作代数，并且存在一个余合作代数映射 $u\mathcal{COCOM} \to N^*(\mathcal{P})$。由于 $\mathcal{P}$ 是有限型运算子， $\mathcal{P}$ 上的上链自然构成一个余合作代数。Hopf 结构来自链级杯积；由上链函子的性质可知，杯积是含幺的，并且与余代数结构相容。由于 $u\mathcal{COM}$ 是单纯集合范畴中的终拟运算，每个运算子 $\mathcal{P}$都自带唯一的映射 $\mathcal{P} \to u\mathcal{COM}$。它在上链上诱导出的映射正是我们所需的映射$u\mathcal{COCOCOM} \to N^*(\mathcal{P})$。

□

一类能够具有 Maurer-Cartan 单纯集合的余合作代数的主要例子，是对偶 Barratt–Eccles 拟运算的 $\mathcal{E}_n$-余合作代数。Barratt-Eccles 算子 $\mathcal{BE}_\infty$ 是单纯集合中的一个运算子，它自然作用于单纯集的链和上链（更多详情见 [2]）。它带有一列子运算子

$$\mathcal{BE}_1 \hookrightarrow \mathcal{BE}_2 \hookrightarrow \mathcal{BE}_3 \hookrightarrow ...\mathcal{BE}_\infty, \tag{16}$$

其中每个 $\mathcal{BE}_n$ 都模拟小 n-圆盘运算子的链。我们将 $\mathcal{BE}_n$ 上的归一化上链记为 $\mathcal{E}_n := N^*(\mathcal{BE}_n)$。由于上链是逆变的，方程 16 中的映射序列会诱导出一列余运算子的映射

$$\mathcal{E}_\infty \to ...\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1.$$

因此，每个 $\mathcal{E}_n$-余运算子都有一个映射 $\mathcal{E}_\infty \to \mathcal{E}_n$ ，从而满足第 5 节中的条件。 $\mathcal{E}_n$ 的 Koszul 对偶由 $\Omega\mathcal{E}_n$ 给出，而 Fresse 在 [11] 中证明了 $\Omega\mathcal{E}_n$ 与 $\Lambda^{-n}\mathcal{E}_n^\vee$弱等价，其中 Λ^{-n} 表示 $\mathcal{E}_n$ 的拟运算降悬（注意，我们将 [11]中的 $\mathcal{E}_n$ 和$\mathcal{E}_n^\vee$ 交换了）。根据 Lurie 在 [21], 中的结果，这些 Maurer-Cartan 单纯集合能够控制 $\mathcal{E}_n$ 变形问题。

参考文献

[1] Joan Bellier-Millès 和 Gabriel C. Drummond-Cole。弯曲运算子与弯曲代数的同伦论。*arXiv:2007.03004v3*。

[2] Clemens Berger 和 Benoit Fresse。上链上的组合运算子作用。《剑桥哲学学会数学论文集》，137(1):135–174，2004年。[3] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk。运算子的公理化同伦论。《赫尔维数学评论》，78(4):805–831，2003年。[4] Lukas Brantner、Ricardo Campos 和 Joost Nuiten。Pd 运算子与显式分拆李代数。arXiv:2104.03870。[5]Lukas Brantner 和 Akhil Mathew。变形理论与分拆李代数。arXiv:1904.07352。[6] Niek de Kleijn 和 Felix Wierstra。关于完备弯曲A_∞代数的 Maurer-Cartan 单纯集合。《同伦与相关结构期刊》，16(4):605–633，2021年。[7] Vasiliy A. Dolgushev。任意光滑流形上的 Tsygan 形式性猜想的一个证明。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2005年。博士论文——麻省理工学院。[8] Vladimir Dotsenko、Sergey Shadrin 和 Bruno Vallette。变形理论中的 Maurer-Cartan 方法：扭曲过程。arXiv:2212.11323。[9] Benoit Fresse。关于运算子上的单纯代数的同伦。《美国数学会会刊》，352(9):4113–4141，2000年。[10] Benoit Fresse。运算子的 Koszul 对偶与分拆偏序集的同调。载于《同伦理论：与代数几何、群上同调及代数 K理论的关系》，《当代数学》第346卷，第115–215页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2004年。[11] Benoit Fresse。 E_n运算子的 Koszul 对偶。《数学精选》（新系列），17(2):363–434，2011年。[12] Benoit Fresse。运算子的同伦与 Grothendieck-Teichmüller 群。第一部分，《数学调查与专著》第217卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2017年。代数理论及其拓扑背景。[13] Ezra Getzler。幂零 L_∞代数的李理论。《数学年刊》（第二辑），170(1):271–301，2009年。[14] Ezra Getzler 和 John D. S. Jones。双环空间的运算子、同伦代数与迭代积分。arXiv:hep-th/9403055v1。[15] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine。单纯同伦论，《数学进展》第174卷。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1999年。[16] Ai Guan 和 Andrey Lazarev。第二类紧生成导出范畴的 Koszul 对偶。《非交换几何期刊》，15(4):1355–1371，2021年。[17] Alexander Kirillov, Jr.。《李群与李代数导论》，《剑桥高等数学研究》第113卷。剑桥大学出版社，剑桥，2008年。[18] Maxim Kontsevich。泊松流形的变形量子化。《数学物理通讯》，66(3):157–216，2003年。[19] Jean-Louis Loday。广义双代数与运算子三元组。《星丛》，(320):x+116，2008年。

[20]Jean-Louis Loday 和 Bruno Vallette。《代数歌剧》，数学科学基础丛书第 346 卷； /《数学科学基本原理》/。Springer，海德堡，2012年。[21] Jacob Lurie。环谱的模空间问题。载于《国际数学家大会论文集。第二卷》，第 1099–1125 页。Hindustan Book Agency，新德里，2010年。[22] James E. McClure 和 Jeffrey H. Smith。多变量上链运算与小 n-立方体。《J. Amer. Math. Soc.》，16(3):681–704，2003年。[23] Alex Milham 和 Christopher L. Rogers。关于任意特征下 a_∞-代数的 Goldman–Millson 定理。《arXiv:2205.13099v2》。[24] I. Moerdijk。关于 Connes–Kreimer 的 Hopf 代数构造。载于《代数拓扑中的同伦方法（科罗拉多州博尔德，1999年）》，《当代数学》第 271 卷，第 311–321 页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2001年。[25]Leonid Positselski。两类导出范畴、Koszul 对偶与余模—反模对应。《Mem. Amer. Math. Soc.》，212(996):vi$+133$，2011年。[26] J. P. Pridham。统一导出变形理论。《Adv. Math.》，224(3):772–826，2010年。[27] Felix Wierstra。代数 Hopf 不变量与映射空间的有理模型。《同伦与相关结构期刊》，14(3):719–747，2019年。