arXiv:2303.16707v2 [math.OA] 5 Apr 2023

由广义对角连接映射产生的 AH 代数中的 C*-对角子代数：谱与唯一性

ALI I. RAAD

摘要。我们为由广义对角连接映射产生的 AH 代数关联一个 Bratteli型图。利用该图，我们明确描述了相应典范 C*-对角子代数的谱的连通分支。我们在这些连通分支上引入一种拓扑概念，即谱不完备，并将其用作工具，说明若干类 AI 代数（包括某些 Goodearl 代数以及动力系统的 AH 代数模型（$[0,1]$，σ））不具有唯一的归纳极限 Cartan 子代数。我们重点研究一类谱完备的 C*-代数，即 AF代数，并证明它们具有唯一的归纳极限 Cartan 子代数。为此，我们采用一种将 Elliott 对 AF代数分类的证明推广到 Cartan 对的方法。

1. 引言

近年来，人们对 C*-代数的 Cartan 子代数研究兴趣日益浓厚。在 [19, 20] 中，Li 借助 Cartan 子代数，对由动力系统产生的交叉积 C*-代数以及由群动力学产生的粗几何结构，获得了强刚性结果。因此，研究表明，Cartan 子代数在一方面的 C*-代数与另一方面的动力系统和几何群论之间建立了联系。

Li 还建立了 Cartan 子代数与 C*-代数分类纲领之间的联系。该纲领由众多学者共同推动（例如参见[15, 25, 11, 12, 6, 33, 7, 8, 9, 10]），旨在通过 K-理论数据和迹数据对 C*-代数进行分类，多年来已取得巨大进展。在 [21] 中，证明了每个可分类的 C*-代数都有一个 Cartan 子代数，

Cartan 子代数还与拓扑群胚密切相关。许多重要类别的 C*-代数都可以自然地描述为群胚 C*-代数，例如由群作用（交叉积）或拓扑空间上的半群作用（Cuntz-Krieger代数或图代数）所产生的 C*-代数，以及 AF代数。Kumjian [16] 和 Renault [29] 的研究表明

2020 数学主题分类。主要分类 46L05；次要分类 22A22。本项目获得鲁汶大学内部 BOF 项目 C14/19/088 以及由弗兰德斯研究基金会（FWO）资助的项目 G085020N 的支持。

可分 C*-代数具有 Cartan 子代数，当且仅当它们是某些（扭曲）群胚 C*-代数。随后，Kwaśniewski 和 Meyer [17],以及作者 [27]独立地将这一结果推广到了所有 C*-代数。

所有这些动机因素促使人们开始关注 Cartan 子代数的存在性与唯一性问题。Li 和 Renault 在 [23] 中开启了对 C*-代数中 Cartan 子代数的存在性与唯一性的系统研究。Barlak 和 Raum 对参数互质的维数下降代数的 Cartan 子代数进行了分类 [2]。White 和 Willett 研究了一致 Roe 代数中 Cartan 子代数的唯一性问题 [37]。Li 与本文作者在 [22], 中构造了 C*-对角线 [21], 通过在许多不可分类的 C*-代数中寻找 Cartan 子代数，拓展了相关工作。

在本文中，我们旨在开启对由广义对角连接映射产生的 AH 代数中 Cartan 子代数唯一性问题的研究；这一问题在 [22] 中尚未涉及。第 2 节将介绍由广义对角连接映射产生的 AH 代数的相关预备知识，以及如何获得相应的 C*-对角线，这与 [22] 中的做法一致。在第 3 节中，我们通过使用与连接映射相对应的特征值函数标记边，将一个特定的 Bratteli 图 $\mathcal{B}_A$ 与由广义对角连接映射产生的 AH 代数 A 联系起来。随后，我们将说明如何通过 $\mathcal{B}_A$ 完整描述相应 C*-对角线 C_A 的谱。更具体地说，我们得到：

定理 A （参见定理 3.3）。设 (A, C_A) 是一对由广义对角连接映射产生的 *AH* 代数 A 及其关联的 *C**-对角子代数 C_A，其关联的 *Bratteli* 图为 $\mathcal{B}_A$。那么， C_A 的谱的连通分支恰好是沿 $\mathcal{B}_A$的无限路径所取的逆极限。

接下来，我们在关联的 C*-对角子代数 C_A的谱的连通分支上定义一个拓扑概念。这个概念称为谱不完备，表示谱的连通分支并未穷尽（在同胚意义下）所有可能产生该 AH 代数的基空间逆极限。我们将这一概念与归纳极限 Cartan 子代数的唯一性联系起来。在第 4 节中，我们证明，若一个 AI 代数谱不完备，则它不具有唯一的归纳极限 Cartan 子代数：

定理 B （参见定理 4.1）。由区间代数构件产生的单且含幺的谱不完备 *AI* 代数不具有唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

我们随后利用这一结果证明，某些 Goodearl 代数和动力系统的 AH 代数模型并不存在唯一的归纳极限 Cartan 子代数：

定理 C（参见推论 4.2 和 4.3）。定义在单位区间基空间上的 *Goodearl* 代数不具有唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数，动力系统 $([0,1],\sigma)$ 的 *AH* 代数模型也同样如此。

在第 5 节中，我们考察 AF代数这一类，因为它们是谱完备的。我们改编 Elliott 最初通过 K_0-群[4] 对 AF代数进行分类的证明，以说明维数群是归纳极限 Cartan 子代数的完全不变量：

定理 D（参见定理 5.4）设 A 和 B 是含幺 *AF* 代数，其归纳极限 *Cartan* 子代数分别为 C 和 D。假设存在一个同构

$$\alpha : (K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0) \to (K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0).$$

那么存在一个 $*$-同构 ϕ： $A \to B$，使得 $K_0(\phi) = \alpha$ 且 $\phi(C) = D$。特别地，*AF*代数具有唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

致谢。 本研究的部分内容基于作者在 [28],期间取得的博士研究成果，因此作者谨此感谢 Xin Li 在此期间提出的宝贵意见。

2. 预备知识

2.1. 由广义对角连接映射构成的 AH 代数。我们将考察某种形式的 AH 代数 $A = \varinjlim(A_n, \phi_n)$，其中对每个 $n \in \mathbb{N}$，有

$$A_n = \bigoplus_{i=1}^{N_n} A_n^i, \quad A_n^i = p_n^i (C(Z_n^i) \otimes M_{r_n^i}) p_n^i,$$

其中每个 Z_n^i 都是连通紧豪斯多夫空间，有时称为基空间，而 $r_n^i \in \mathbb{N}$, $p_n^i \in C(Z_n^i) \otimes M_{r_n^i}$ 是一个投影，其中 $i \in \{1, 2, \ldots\ldots, N_n\}$。C*-代数 A_n 将称为归纳极限的构件。包含此类构件的类记作**AH**。归纳极限的 $*$-同态 ϕ_n 称为连接映射，并假定它们是含幺且单射的（注意，根据 [5, 定理 2.1]，我们总可以化归到单射情形），且具有广义对角形式：令 ϕ_n^{ji} 表示典范复合

$$A_n^i \hookrightarrow A_n \xrightarrow{\phi_n} A_{n+1} \twoheadrightarrow A_{n+1}^j,$$

我们要求，对于 $a \in A_n^i$,

$$\phi_n^{ji}(a) = \sum_{y \in \mathcal{Y}(n,(j,i))} (a \circ \lambda_y) \otimes q_y \tag{1}$$

其中 $\mathcal{Y}(n,(j,i))$ 是某个索引集，$\lambda_y: Z^j_{n+1} \to Z^i_n$ 是连续映射，且 q_y 要么为 0，要么为 $C(Z^j_{n+1}) \otimes M_{s^{ji}_n}$ 中的一个投影，其中 $\otimes M_{s^{ji}_n}$ 是线丛。这里我们施加条件 $r^j_{n+1} = \sum_{i=1}^{N^j_n} r^i_n s^{ji}_n$。

我们还假设 $p^i_n = \mathrm{rank}(p^i_n) \sum_{r=1} \oplus p^i_{n,r}$ 其中每个 $p^i_{n,r}$ 都是线丛。注意，我们这里的设定等同于 [22, 第 4], 节中的设定，只是这里的记号强调了构件的直和项彼此嵌入的方式。

与 [22, 第 4], 节一样，以下是自然符合我们设定的 C*-代数示例：

- AI 代数（参见 [31,第 3]节）
- 第一类 Villadsen 代数 [35]。
- Tom 的不可分类 C*-代数示例 [34]。
- Goodearl 代数 [13]（另见 [30, 例 3.1.7]）。
- 动力系统的 AH 代数模型，见 [24,例 2.5]
- 第二类 Villadsen 代数 [36]。

请注意，在上述某些例子中，连接映射是广义对角映射的酉共轭；不过，我们也可以假设不存在酉元，因为这样得到的归纳极限在同构意义下仍然相同。

2.2. **相关的 C*-对角子代数**。我们回顾 C*-代数中 Cartan 子代数的定义。请注意，我们省略了包含环境 C*-代数的一个近似单位这一条件（该条件出现在原始定义中），因为 Pitts 已证明它是冗余的（见 [26]）：

定义 2.1 ([16, 29])。*C**-代数 A 的一个子 *C**-代数 C 称为 *Cartan* 子代数，如果

- C 是极大交换的；
- C 是正则的，即 $N_A(C) := \{n \in A: nCn^* \subseteq C \text{ 和 } n^*Cn \subseteq C\}$ 生成 A 作为一个 C^*-代数；
- 存在一个忠实条件期望 $P: A \twoheadrightarrow C$。

一对 (A, C)，其中 C 是 C^*-代数 A 的 *Cartan* 子代数，称为 *Cartan* 对。

若 *Cartan* 子代数 C 满足 (A, C) 具有唯一延拓性质，则称其为 C^*-对角代数；也就是说，C 的每个纯状态都唯一延拓为 A 的一个（必然是纯的）状态。

在 [22, 第 4] 节中，我们为具有广义对角连接映射的 AH 代数构造了一个 C*-对角。下面简要回顾这一构造。根据 [21, 引理 6.1]

秩(p_n^i)，我们有 $C_n^i = \text{É}_{r=1} p_{n,r}^i (C(Z_n^i) \otimes M_{r_n^i}) p_{n,r}^i$ 是 $A_n^i = p_n^i (C(Z_n^i) \otimes M_{r_n^i}) p_n^i$ 的一个 Cartan 子代数。令 $\mathcal{G}_n^i = Z_n^i \times \mathcal{R}_n^i$ 为群胚，它是两个群胚 Z_n^i 和 $\mathcal{R}_n^i$ 的乘积，其中后者是定义在一个含有 rank(p_n^i) 个元素的集合上的全等价关系。于是， [21, 引理 6.2] 及其之前的构造说明了如何在 $\mathcal{G}_n^i$ 上构造 Weyl 扭曲 Σ_n^i，使其将 $C_r^*(\mathcal{G}_n^i, \Sigma_n^i)$ 与 A_n^i 对应，并将 $C((\mathcal{G}_n^i)^0)$ 与 C_n^i 对应。

按照 [22, 第 4] 节中的构造，我们由此得到同态 ϕ_n^{ji} 的群胚模型。具体而言，对于 $y \in \mathcal{Y}(n, (j, i))$，其中 q_y 为线丛，令 $p_y : (\mathcal{G}_y, \Sigma_y) \to (\mathcal{G}_n^i, \Sigma_n^i)$ 为 $a \to a \circ \lambda_y$ 的群胚模型。然后令

$$(H_n, T_n) = \bigsqcup_{i,j,n,y=y(i,j,n)} (G_y, \Sigma_y)$$

和 $(\mathcal{G}_n, \Sigma_n) \cong \tilde{\text{A}}_{i,n} (\mathcal{G}_n^i, \Sigma_n^i)$ 为 A_n 的群胚模型，由此得到群胚 $A_n \to A_{n+1}$ 的模型，具体为

$$(\mathcal{G}_n, \Sigma_n) \xleftarrow{\sqcup p_y} (H_n, T_n) \hookrightarrow (\mathcal{G}_{n+1}, \Sigma_{n+1}) \tag{2}$$

其中，第一个箭头是满射、适当且逐纤维双射的群胚同态，第二个箭头是像为开集的单射群胚同态（见 [1, 第 3] 节）。于是，根据 [22, 定理 4.3]，我们为 AH 代数 A 得到一个 C* 对角线，将其记作 C_A，并称为 A 的相关联的 C^* 对角线。此外，(A, C_A) 的群胚模型已得到完整刻画，因为它是构件群胚模型的极限（见 [1,定理 3.6]）。

一般而言，对于归纳极限 C*-代数 $A = \lim_{\longrightarrow}(A_n, \phi_n)$，其中 $A_n \in$ c where c 是 C*-代数的一个类别，形如 $C = \lim_{\longrightarrow}(C_n, \phi_n)$ 的 Cartan 子代数（其中 $\mathfrak{c} \ni C_n \subseteq A_n$ 是一个 Cartan 子代数）称为 $\mathfrak{c}$-归纳极限 *Cartan* 子代数；如果类别 $\mathfrak{c}$ 显而易见，也可称为 归纳极限 *Cartan* 子代数。

3. 关联 Bratteli 图与关联 C* 对角线的谱

对于如上构造的一对 (A, C_A)，我们将关联一个特定的 Bratteli 图 $\mathcal{B}_A$，作为可视化工具，帮助我们理解 C_A 的谱。对于 A_n 的一个直和项 A_n^i，再次考虑其通过 ϕ_n^{ji} 嵌入 A_{n+1}^j 的情形，如式（1）所示。在 $\mathcal{B}_A$ 的第 n^{th} 阶段设有 N_n 个节点，每个节点对应 A_n 的一个直和项；在 $\mathcal{B}_A$ 的第 $(n+1)^{\text{th}}$ 阶段设有 N_{n+1} 个节点，每个节点对应 A_{n+1} 的一个直和项。对于每个 $y \in \mathcal{Y}(n, (j, i))$，从表示 A_n^i 的节点向表示 A_{n+1}^j 的节点画出 rank(p_n^i) 条箭头，并将每条箭头标记为 λ_y。对所有 n、i 和 j 如此操作，即可得到我们称为 $\mathcal{B}_A$ 的 Bratteli 图。

对于 $y \in \mathcal{Y}(n, (j, i))$，我们可以明确描述映射 $p_y : (\mathcal{G}_y, \Sigma_y) \to (\mathcal{G}_n^i, \Sigma_n^i)$，因为它是 $a \to a \circ \lambda_y$ 的一个群胚模型。事实上，就我们的目的而言，只需对扭曲群胚的单位空间进行这样的描述。

引理 *3.1.* 设 $y \in \mathcal{Y}(n,(j,i))$. 设 $([1,x],(k,k)) \in \mathcal{G}_y^0$(参见 [21,第 6.1] 节中的记号)，其中 $x \in Z_{n+1}^j$ 和 k 对应于 $(p_{n,k}^i \circ \lambda_y)^{th}$ 角中ϕ_n^{ji}像的直和项。那么 $p_y((([1,x]),(k,k))) = ([1,\lambda_y(x)],(k,k))$.

证明。 对于元素 $c \in C_n^i$，令 $\tilde{c}$ 表示其在相应的约化扭曲群胚 C*-代数中的对应项。由于 p_y 是 $c \to \check{z}c \circ \lambda_y$的群胚模型，因此有 $c \circ \lambda_y(([1,x],(k,k))) = \mathrm{e}c(p_y(([1,x],(k,k))))$。由 [21, 引理 6.2] 可得结论。□

定义 *3.2.* 对于如上所述的 *Cartan* 对 (A, C_A) 及其对应的 *Bratteli* 图$\mathcal{B}_A$，若序列 $p = (\lambda_{y_1}, \lambda_{y_2}, \ldots)$ 中，对于 $y_k \in \mathcal{Y}(k,(j,i))$，存在某个 i和 j，使得标签为 λ_{y_k} 的边的源节点是标签为 $\lambda_{y_{k-1}}$的边的值域节点，则称该序列为一条无限路径（若上下文清楚，也简称路径）。映射λ_y在 $y \in \mathcal{Y}(n,(j,i))$ 上的定义域（其中 n、 i和 j为某些元素）记为 $D(y)$，陪域$C(y)$。对于路径 p，我们将用 $\lim\leftarrow^p$ 或 $\lim\leftarrow\{C(y_k), \lambda_{y_k}\}$ 表示逆极限$_k$

关于与映射 $\{\lambda_{y_k}\}$ 相关联的空间序列，并以路径 p 为参照。所有路径的集合记为 $P_{\mathcal{B}_A}$。柱路径 $Q \subseteq P_{\mathcal{B}_A}$ 是一个集合，其中包含所有具有相同初始 k 条边的路径，对某个 $k \in \mathbb{N}$ 而言。

定理 3.3. 对于上述 Cartan 对 (A, C_A) 及其相关联的 Bratteli 图 $\mathcal{B}_A$， C_A 的谱与 $\tilde{\mathrm{A}}_{p \in P_{\mathcal{B}_A}} \lim\leftarrow^p$ 同胚。 C_A 的谱的连通分支恰好是路径 p 对应的逆极限 $\lim\leftarrow^p$。证明。首先注意，对于固定的 k 和 $x \in Z_{n+1}^j$，映射 $([1,x],(k,k)) \to x$ 对某个 n 和 j 定义了到 Z_{n+1}^j 上的一个同胚。由于我们假设连接映射 ϕ_n 是含幺的单射广义对角映射，显然它们将满元映射为满元，因此根据 [21, Remark 5.6]， C_A 的谱由 $\lim\leftarrow\{\mathcal{G}_n^0, \tilde{\mathrm{A}}_{p_y}\}$ 给出，其中 $\tilde{\mathrm{A}}_{p_y}$ 将 $\mathcal{G}_{n+1}^0$ 映到 $\mathcal{G}_n^0$，如$_n$(2)所示。因此，根据引理 3.1，$\lim\leftarrow\{\mathcal{G}_n^0, \tilde{\mathrm{A}}_{p_y}\}$ 中的每个元素都可以识别为$_n$某条路径 p 在 $\mathcal{B}_A$ 中所对应的 $\lim\leftarrow^p$ 中的一个元素。对所有此类路径取并集，$\tilde{\mathrm{A}}_p \lim\leftarrow^p$，便得到 $\lim\leftarrow\{\mathcal{G}_n^0, \tilde{\mathrm{A}}_{p_y}\} = \mathrm{Spec}(C_A)$，其拓扑为$_n$逆极限拓扑所诱导的拓扑。在此拓扑下，基本开集具有 $\tilde{\mathrm{A}}_{p \in Q \subseteq P_{\mathcal{B}_A}} \lim\leftarrow^p$ 的形式。然而，这个基本开集是其他基本开集的并集

在初始共享边更长的柱路径上。由于对任意路径 p，$\lim\leftarrow^p$ 都是豪斯多夫连续统（见 [14, 定理 117]），这些必定就是连通分支。□

定义3.4。 对于一类 C^*-代数 $\mathfrak{c}$，若归纳极限 C^*-子代数 $C = \lim\longrightarrow(C_n, \phi_n)$ 包含在归纳极限 C^*-代数 $A = \lim\longrightarrow(A_n, \phi_n)$中，其中 $C_n, A_n \in \mathfrak{c}$，并且对于另一个归纳极限 C^*-代数$B = \lim\longrightarrow(B_n, \psi_n) \cong A$ 及归纳极限 *Cartan* 子代数 $D = \lim\longrightarrow(D_n, \psi_n)$，该子代数是 $\mathfrak{c}$-唯一的，

其中 $D_n, B_n \in \mathfrak{c}$，存在一个将这一对$(A, C)$映 $onto(B, D)$的 $*$-同构。

定义 3.5。 我们称由广义对角连接映射得到的 AH 代数 A 具有不完备谱，或称其谱不完备，如果存在一条路径$(\lambda_{y_1}, \lambda_{y_2}, \ldots) \in P_{\mathcal{B}_A}$以及一个豪斯多夫连续统 $Z = \lim\leftarrow(C(y_k), \gamma_{y_k})_k$
其中 $\gamma_{y_k} : C(y_{k+1}) \to C(y_k)$ 是连续函数，且 $\mathrm{Spec}(C_A)$ 的每个连通分支都不同胚于 Z。这样的空间 Z 称为一个未见谱分支。非谱不完备的 AH 代数称为谱完备，或称其具有完备谱。

命题 3.6。 设 A 是由含幺且单射的广义对角连接映射得到的 AH 代数，其关联的 C^*-对角为 C_A，*Bratteli* 图为 $\mathcal{B}_A$。假设 A谱不完备，且对某个未见谱分支 $Z = \lim\leftarrow(C(y_k), \gamma_{y_k})$，将路径$\{\lambda_{y_k}\}$替换为$\{\gamma_{y_k}\}$后得到的 AH 代数 B_k与 A同构。那么 A 不具有 AH 唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

证明。 由定理 3.3， C_B 的一个连通分支是 Z。因此 $\mathrm{Spec}(C_A) \ncong \mathrm{Spec}(C_B)$，从而 $C_A \ncong C_B$。 □
注3.7。 之所以陈述命题 3.6，而不陈述一个更一般的命题（仅假设相关 C*-对角的谱不互为同胚），是因为我们将利用其假设，在由广义对角连接映射产生的某些 AH 代数类中，得到归纳极限 Cartan 子代数的唯一性与非唯一性。

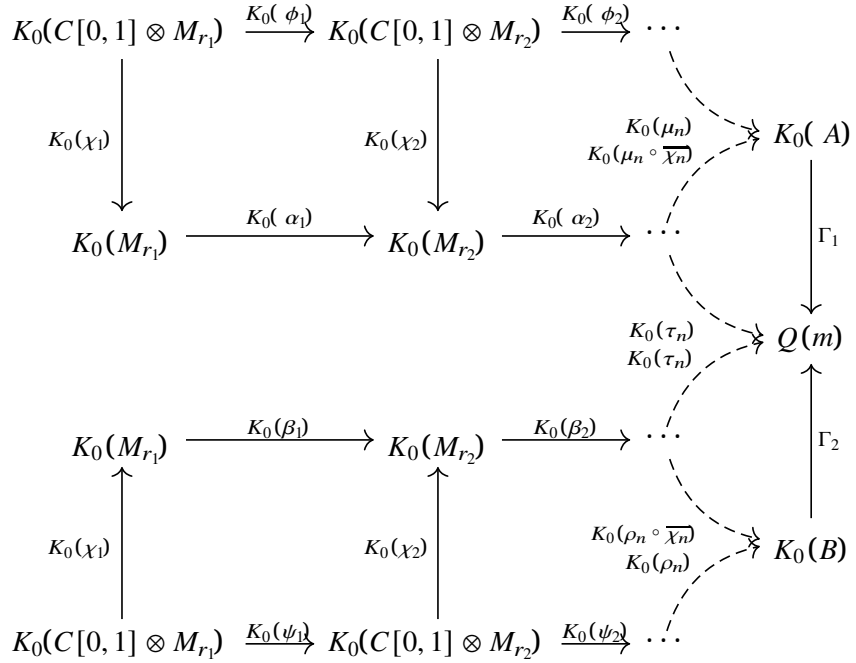
4. 示例：谱不完备 AI代数

现在我们来考察 AI 代数，它们是归纳极限 C*-代数 $A = \lim\longrightarrow_{N_n}(A_n, \phi_n)$，其中构件具有如下形式： $A_n = \bigoplus_{i=1}^{} A_n^i$，且直和项是区间代数：$A_n^i = C([0,1]) \otimes M_{r_n^i}$。区间代数类记为$\mathbf{I}$。这里假设连接映射是单射且含幺。由 [31, 定理 3.1] 可知，AI 代数由广义对角连接映射构造，其中特征值函数$\{\lambda_y\}$只是一些连续映射 $[0,1] \to [0,1]$，而投影$\{q_y\}$只是典范最小对角投影。

定理 4.1。 设 $A = \lim\longrightarrow(A_n, \phi_n)$，其中每个 A_n都具有 $C([0,1]) \otimes M_{r_n}$ 的形式，是一个单且含幺的 AI 代数（视为由广义单射幺正对角连接映射所产生）。假设 A 是谱不完备的。那么 A 不存在$\boldsymbol{I}$-唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

证明。 首先，我们证明 $\{r_n\}$ 含有一个递增子序列。反设该序列稳定。于是我们可以假设，对于某个固定的 $N \in \mathbb{N}$， $A = \lim\longrightarrow(C[0,1] \otimes M_N, \phi_n)$。
令 μ_n 表示单射 $C[0,1] \otimes_n$

$M_N \hookrightarrow A$。我们可以将 $\phi_n(a)$ 写成 $= a \circ \lambda_n$，其中 $\lambda_n\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ 是一个满射特征值函数（由连接映射的单射性可知该函数是满射）。令 $I_1 = \{ f \in C[0,1] \otimes M_N\colon f(0) = 0\}$，它是 $C[0,1] \otimes M_N$ 的一个真理想。存在 t_1，使得 $\lambda_1(t_1) = 0$。令 $I_2 = \{ f \in C[0,1] \otimes M_N\colon f(t_1) = 0\}$。重复这一过程，选取 t_2，使得 $\lambda_2(t_2) = t_1$，并令 $I_3 = \{ f \in C[0,1] \otimes M_N : f(t_2) = 0\}$，依此类推。所有 I_n 都是真理想，且 $\phi_n(I_n) \subseteq I_{n+1}$。定义$\infty I = \text{Đ}\, \mu_n(I_n)$。于是 I 是 A 的一个理想。它非零，因为每个 μ_n 都是单射；并且它不等于整个 A,_因为对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $\mu_1(\mathrm{h})$（其中 h 是每个元素值均为 1 2 的常值矩阵）都不接近 $\mu_n(I_n)$ 中的任何元素。因此 I 是一个真理想，这与单纯性矛盾。因此，不失一般性，我们可以假设 $A = \varinjlim(C[0,1] \otimes M_{r_n}, \phi_n)$，其中$nr_n > 2^n$ 且 $k_n := \frac{r_{n+1}}{r_n} > 2^n$。由于 A 谱不完备，存在一个未见谱分支 $Z = \varprojlim([0,1], \gamma_n)$。令与 ϕ_n 对应的特征值函数集合为 $\mathcal{F}_n = \{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_{k_n}^n\}$。将其中任意一个函数替换为$\gamma_n$。再将另外两个函数分别替换为函数 $g(t) = \frac{t}{2}$ 和 $\mathrm{h}(t) = \frac{t+1}{2}$，其余未被替换的函数保持不变。将这个新函数集记为 $\mathcal{G}_n = \{w_1^n, \ldots, w_{k_n}^n\}$。令 $B = \varinjlim(C[0,1] \otimes M_{r_n}, \psi_n)$，其中 ψ_n 是广义对角连接映射，其对应的特征值函数为 $\mathcal{G}_n$ 中的元素。特征值函数 g 和 h 的存在确保连接映射是单射（因为这些函数像的并集是 $[0,1]$）；而 [32] 中的引理 1.2 保证（利用函数 g 和 h）我们得到 B 的单纯性。我们有如下交换图:



在该图中， $\mu_n\colon C[0,1]\otimes M_{r_n}\to A$和 $\rho_n\colon C[0,1]\otimes M_{r_n}\to B$是将构件嵌入相应归纳极限的典范嵌入，$\chi_n$ 是由在 0 处求值得到的映射， $\chi_n\colon M_{r_n}\to C[0,1]\otimes M_{r_n}$是将 a 映射为取常值 a的连续函数的映射；除 K_0外，它们互为同构和逆映射。

事实上，对于 $s\in[0,1]$，由 $\phi_s(f)(t)=f(st)$给出的 $*$-同态 $\phi_s\colon C[0,1]\otimes M_{r_n}\to C[0,1]\otimes M_{r_n}$定义了$\chi_n\circ\chi_n$与 $\mathrm{id}_{C[0,1]\otimes M_{r_n}}$之间的同伦。显然，$\chi_n\circ\chi_n=\mathrm{id}_{M_{r_n}}$。

其中， α_n 和 β_n 是使该图交换的诱导映射，$Q(m)$ 是与超自然数 m 相关联的 $\mathbb{Q}$ 的子群；该超自然数对应于矩阵代数 M_{r_n} 的归纳极限，而 τ_{r_n} 是归一化矩阵迹。 同构 Γ_1 和 Γ_2 是规范诱导的。因此，我们得到一个同构

$$\phi_0:=\Gamma_2^{-1}\circ\Gamma_1:K_0(A)\to K_0(B).$$

该图表明

$$\phi_0(K_0(\mu_n)([p]_0-[q]_0))=[\rho_n(p)]_0-[\rho_n(q)]_0,$$

而这足以确定该同构。

现在我们确定一个仿射同构 $\phi_T\colon T_B\to T_A$，其中 T_A (T_B) 是 A (B) 上迹态的单纯形。注意， [32]中的引理 4.1 的条件均已满足。事实上，若 P_n 是该引理中出现的中心值迹，则$P_n\circ\phi_n-P_n\circ\psi_n$ 含有一个因子 $\frac{1}{r_{n+1}}<2^{-(n+1)}$（因为 P_n 是归一化的），并且∞因此，和 $\|P_n\circ\phi_n-P_n\circ\psi_n\|$ 是有限的。因此，由 [32] 中的引理 4.1 可知，存在一个仿射同构 $\phi_T\colon T_B\to T_A$，满足对所有 $i\in\mathbb{N}$、 $\tau\in T_B$，以及 9

$a \in C[0,1] \otimes M_{n_i}$,

$$\phi_T(\tau)(\mu_i(a)) = \text{norm} - \lim_{j\to\infty} \tau(\rho_j(\phi_{j,i}(a))).$$

现在注意，对于 $g = K_0(\mu_i)([p]_0 - [q]_0) \in K_0(A)$ 和 $\tau \in T_B$，我们有

$$\langle \phi_0(g), \tau \rangle = \tau(\rho_i(p)) - \tau(\rho_i(q))$$

（其中，h·，·i 的定义见 [18] 中的定义 1.1.10）。另一方面，我们有

(3)
$$\langle g, \phi_T(\tau) \rangle = \text{norm} - \lim_{j\to\infty} \tau(\rho_j(\phi_{j,i}(p))) - \text{norm} - \lim_{j\to\infty} \tau(\rho_j(\phi_{j,i}(q))).$$

现在注意，在 g 的定义中，我们可以选择 p 和 q，使其为对角线，且其元素为常值映射 0 或常值映射 1，因为投影的迹决定了 $K_0(A_i)^+$ 中的元素。因此，$\phi_{j,i}$ 和 $\psi_{j,i}$ 在此类投影上的取值相同，所以我们可以将 (3) 中的 $\phi_{j,i}$ 替换为 $\psi_{j,i}$。于是 (3) 简化为$\tau(\rho_i)(p) - \tau(\rho_i)(q)$，因此我们有

$$\langle \phi_0(g), \tau \rangle = \langle g, \phi_T(\tau) \rangle.$$

根据 [3], 中的定理 2，我们有

$$A \cong B.$$

根据定理 3，3 Z 是 Spec(C_B) 的一个连通分支，但却是 Spec(C_A) 的一个未见谱分支。由命题 3.6 可得结论。□

作为这一结果的一个应用，我们可以考虑具有单位区间基空间的 Goodearl 代数类。它们是由广义对角连接映射生成的一类特别良好的简单幺正 AH 代数，其中有些具有实秩零，有些则没有。定义见 [13] 或 [30, 例 3.1。7]

推论 4.2. 具有单位区间基空间的 *Goodearl* 代数不允许***I***-唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

证明。 Goodearl 代数中出现的特征值函数由恒等函数 $f(x) = x$ 和常值函数 $f(x) = x_0 \in [0,1]$组合而成。因此，给定相关 Bratteli 图上的一条路径，它要么包含无穷多条标记为常值映射的边，要么不包含。第一种情形对应于单点逆极限，而第二种情形对应于豪斯多夫连续统。因此，相关 C*-对角线的连通分支由豪斯多夫连续统或单点集构成。然而， $[0,1]$ 上有大量逆极限并非这种形式（见 [14, 第 1]章）。因此，这类 Goodearl 代数是谱不完备的。由定理 4.1 可得结论。□

作为另一种应用，我们考虑极小动力系统（$[0,1], \sigma$）。由此可以构造一个 AH 代数模型（参见 [24,例 2.5]）。

推论 4.3. 极小动力系统($[0,1], \sigma$)的 *AH* 代数模型不具有***I***-唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

证明. 该 AH 代数模型显然是含幺的，它由单射且含幺的广义对角连接映射生成；又因为该动力系统是极小的，所以它是单的。相应 Bratteli 图中各边上的特征值函数要么是恒等映射 $f(x) = x$，要么是同胚 σ。因此，每条路径上的逆极限都是豪斯多夫连续统。因此，该 AH 代数模型是谱不完备的，因为 $[0,1]$ 上存在大量非豪斯多夫连续统的逆极限（见 [14, 第 1] 章）。由定理 4.1 可得结论。□

5. AF 归纳极限 Cartan 子代数在 AF 代数中的唯一性

本节讨论 AF 代数的情形，它们是谱完备的。或许并不令人意外的是，它们具有 AF 唯一的归纳极限 Cartan 子代数，其中 AF 表示有限维 C* 代数这一类。

引理 5.1. *AF 代数是谱完备的。*

证明. 这些代数由基空间为单点集的广义对角连接映射生成。单点集上的任何逆极限都是单点集。□

引理 5.2. *设* $A = \bigoplus_{j=1}^{N} M_{n_j}$ *和* $B = \bigoplus_{i=1}^{M} M_{m_i}$ *是有限维* C^* *代数，其* *Cartan* *子代数分别为* C *和* D。*假设存在保序单位的正群同态* $\alpha: K_0(A) \to K_0(B)$。*那么存在一个含幺* $*$*-同态* $\phi: A \to B$，*使得* $K_0(\phi) = \alpha$，$\phi(C) \subseteq D$，*且* $\phi(N_A(C)) \subseteq N_B(D)$。

证明。由 [18] 中的引理 7.3.2 (i)，存在一个含幺 $*$-同态 $\phi: A \to \overline{B}$，满足 $K_0(\phi) = \overline{\alpha}$。设 $\{e_{pq}^j\}$ 和 $\{h_{uv}^i\}$ 分别是关于 Cartan 子代数 C 和 D 的 A 和 B 的矩阵单位系（通过将 Cartan 子代数的正交基扩充为矩阵代数的基得到）。令 $\{k_{ij}\}$ 表示经由 ϕ 的嵌入 $M_{n_j} \hookrightarrow M_{m_i}$ 的重数。将此嵌入记为 ϕ_{ij}，它是一个不一定含幺的 $*$-同态。由于 $\{\phi_{ij}(e_{pp}^j): 1 \le p \le n_j\}$ 是 M_{m_i} 中一组互相正交投影，其中每个 N 的迹为 k_{ij}，且 $\sum_{j=1} n_j k_{ij} = m_i$，我们可以将 $\{h_{uu}^i: 1 \le u \le m_i\}$ 分解为 $j=1$ 个互不相交的集合 H^{i1}、H^{i2}、……、H^{iN}，其中每个 H^{ij} 的大小为 $n_j k_{ij}$。随后，每个 H^{ij} 都可以分解为 n_j 个互不相交的集合 H_1^{ij}、……、$H_{n_j}^{ij}$，每个集合的大小均为 k_{ij}。令 $f_{pp}^{ij} \in D$ 为 H_p^{ij} 中元素之和，其迹为 k_{ij}。因此，$\phi_{ij}(e_{pp}^j)$ 的迹与 f_{pp}^{ij} 相同，于是 $[\overline{\phi}_{ij}(e_{pp}^j)]_0 = [f_{pp}^{ij}]_0$。

由于

$$f_{11}^{ij} \sim f_{22}^{ij} \sim \cdots \sim f_{n_j}^{ij},$$

我们可以在 [18] 中应用引理 7.1.2，得到一组矩阵单位

$$\{f_{pq}^{ij}: p, q \in \{1, \ldots, n_j\}\}$$

在 M_{m_i}中。这可以扩展为一组矩阵单位

$$\{f_{pq}^{ij} : j \in \{1, \ldots, N\}, p, q \in \{1, \ldots, n_j\}\}$$

在 M_{m_i} 中。事实上，我们可以说得更具体一些。如果

$$H_p^{ij} = \{h_{u_1 u_1}^i, \ldots, h_{u_{k_{ij}} u_{k_{ij}}}^i\}, \quad u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{k_{ij}}, \tag{4}$$

其元素之和为 f_{pp}^{ij}，并且

$$H_q^{ij} = \{h_{v_1 v_1}^i, \ldots, h_{v_{k_{ij}} v_{k_{ij}}}^i\}, \quad v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_{k_{ij}}, \tag{5}$$

其元素之和为 f_{qq}^{ij}，我们定义

$$f_{pq}^{ij} = \sum_{s=1}^{k_{ij}} h_{u_s v_s}^i. \tag{6}$$

由于我们已在 (4) 和 (5) 中固定了次序，因此确实得到一个定义良好的矩阵单位系 $\{f_{pq}^{ij}\}$，其中

$$f_{p_1 q_1}^{i j_1} f_{p_2 q_2}^{i j_2} = 0 \text{ unless } j_1 = j_2, q_1 = p_2 \text{ in which case we get } f_{p_1 q_2}^{i j_1}.$$

定义

$$\phi : A \to B \text{ by } \phi(e_{pq}^j) = \sum_{i=1}^{M} f_{pq}^{ij},$$

并将其线性扩张到 A。显然，ϕ 是一个含幺 $*$-同态，且 $\phi(C) \subseteq D$。相对于 $\{e_{pq}^j\}$，$N_A(C)$ 中的元素在每一行或每一列中至多有一个非零项；相对于 $\{h_{uv}^i\}$，$N_B(D)$ 中的元素在每一行或每一列中至多有一个非零项。因此，由 (6) 可得 $\phi(N_A(C)) \subseteq N_B(D)$。现在注意到

$$\begin{aligned} K_0(\phi)([e_{11}^j]_0) &= \sum_{i=1}^{M} [f_{11}^{ij}]_0 = \sum_{i=1}^{M} [\overline{\phi}_{ij}(e_{11}^j)]_0 = [\overline{\phi}(e_{11}^j)]_0 = K_0(\overline{\phi})([e_{11}^j]_0) \\ &= \alpha([e_{11}^j]_0) \end{aligned}$$

并且由于集合 $\{[e_{11}^j]_0 : 1 \leq j \leq N\}$ 生成 $K_0(A)$，因此可得 $K_0(\phi) = \alpha$，正如所需。□

引理 *5.3.* 设 A 和 B 是有限维 C^*-代数，分别带有 *Cartan* 子代数 C 和 D，如引理 *5.2* 所述。假设 $\phi, \psi : A \to B$ 是含幺 $*$-同态，它们将 C 映入 D，将 $N_A(C)$ 映入 $N_A(D)$，并且满足 $K_0(\phi) = K_0(\psi)$。那么存在 $U \in \mathcal{U}(B) \cap N_B(D)$，使得 $\psi = Ad(U) \circ \phi$。

证明。设 $\{e_{pq}^j\}$ 和 $\{h_{uv}^i\}$ 分别是关于 Cartan 子代数 C 和 D 的 A 与 B 的矩阵单位系。容易看出，假设 $K_0(\phi) = K_0(\psi)$ 意味着，对于 $i \in \{1, \ldots, M\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, N\}$，有 $K_0(\phi_{ij}) = K_0(\psi_{ij})$。因此，对于所有 $p \in \{1, \ldots, n_j\}$，$\phi_{ij}(e_{pp}^j)$ 和 $\psi_{ij}(e_{pp}^j)$ 的迹相同。设 v_1^{ij} 是一个见证 Murray-von Neumann

$\psi_{ij}(e^j_{11})$ 与 $\phi_{ij}(e^j_{11})$ 等价的偏等距。由于根据假设，这些初始投影和值域投影都属于 D，因此它们各自都是形如.....的元素之和

$$\psi_i(e^j_{11}) = \sum_{s=1}^{k_{ij}} h^i_{u_s u_s}, \quad \phi_i(e^j_{11}) = \sum_{s=1}^{k_{ij}} h^i_{v_s v_s}.$$

因此，我们可以通过如下规定来具体选择 v^{ij}_1

$$v^{ij}_1 = \sum_{s=1}^{k_{ij}} h^i_{v_s u_s}.$$

由此可知，v^{ij}_1 属于 $N_{B_i}(D_i)$（其中，B_i 和 D_i 分别表示 B 和 D 在 i^{th} 直和项上的限制）。接着，将 v^{ij}_p 构造为 $\psi_i(e^j_{p1})v^{ij}_1\phi_i(e^j_{1p})$，因此根据引理的假设，它也属于 $N_{B_i}(D_i)$。据此，U_i 构造为 $\text{Í}_{j,\ p}\ v^{ij}_p$，而 U 构造为 $\text{MÉ}_{i=1}\ U_i$。

要证明 U 是正规化子，取 $h^i_{uu} \in D$。注意，由于 ϕ 含幺且将 C 映入 D，必定存在某些 $j \in \{1, \ldots, N\}$ 和 $p \in \{1, \ldots, n_j\}$，使得 h^i_{uu} 是 $\phi(e^j_{pp})$ 的一个直和项。因此，$Uh^i_{uu}U^* = v^{ij}_p h^i_{uu}(v^{ij}_p)^*$，故属于 D_i。于是 $UDU^* \subseteq D$。将 ϕ 替换为 ψ，用类似论证可得 $U^*DU \subseteq D$。因此 $U \in N_B(D)$。根据构造，$U\phi(e^j_{pq})U^* = \psi(e^j_{pq})$，所以 $\psi = \mathrm{Ad}(U) \circ \phi$。□

定理 5.4. 设 A 和 B 为含幺 AF 代数，分别具有 AF 归纳极限 $Cartan$ 子代数 C 和 D。假设存在一个同构

$$\alpha : (K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0) \to (K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0).$$

那么存在一个 $*$-同构 ϕ： $A \to B$，使得 $K_0(\phi) = \alpha$ 且 $\phi(C) = D$。

证明。设 $B_0 = C_0 = D_0 = \mathbb{C}$, $\phi_0(\lambda) = \lambda 1_{A_1}$, $\psi_0(\lambda) = \lambda 1_{B_1}$, $\mu_0(\lambda) = \lambda 1_A$ 和 $\rho_0(\lambda) = \lambda 1_B$。我们分别假设 A, B, C 和 D 都可表示为如下归纳极限：

$$B_0 \xrightarrow{\phi_0} A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} \ldots \overset{\mu_n}{\curvearrowright} A,$$

$$B_0 \xrightarrow{\psi_0} B_1 \xrightarrow{\psi_1} B_2 \xrightarrow{\psi_2} \ldots \overset{\rho_n}{\curvearrowright} B,$$

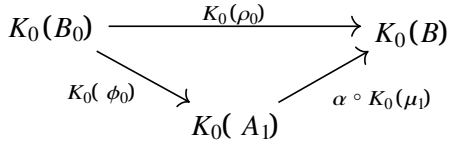
$$C_0 \xrightarrow{\phi_0} C_1 \xrightarrow{\phi_1} C_2 \xrightarrow{\phi_2} \ldots \overset{\mu_n}{\curvearrowright} C,$$

$$D_0 \xrightarrow{\psi_0} D_1 \xrightarrow{\psi_1} D_2 \xrightarrow{\psi_2} \ldots \overset{\rho_n}{\curvearrowright} D.$$

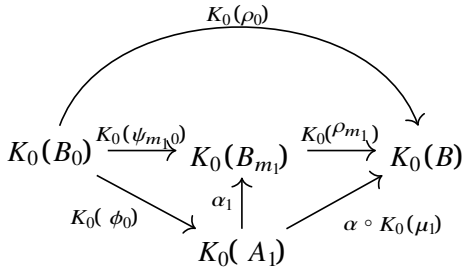
我们可以假设所有 ϕ_n、ψ_n、μ_n 和 ρ_n 都是单射且含幺的 $*$-同态，对于 $n = 1, 2, \ldots\ldots$，并且由分块对角嵌入给出，其中

矩阵单位是相对于 Cartan 子代数正交基的扩充选取的。因此，我们可以假设 $\phi_n(N_{A_n}(C_n)) \subseteq N_{A_{n+1}}(C_{n+1})$。连接映射 ψ_n 也满足同样的性质。

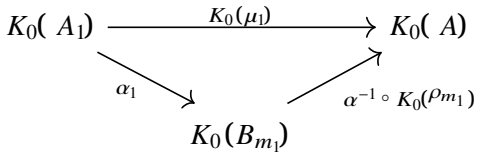
我们有如下交换图，其中的群同态保持正性和序单位：



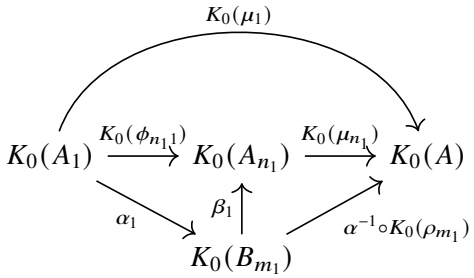
由 [18] 中的引理 7.3.3可知，存在 $m_1 \in \mathbb{N}$ 以及一个保序且保单位元的群同态 α_1，使得我们有如下交换图：



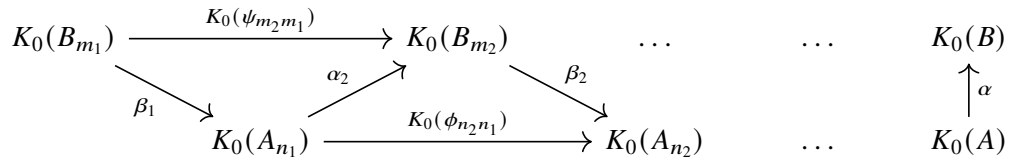
接下来，考虑下面这个由正的保序单位同态构成的交换图：



存在 $n_1 \in \mathbb{N}$，以及一个保持正序单位的群同态 β_1，使得下图交换：

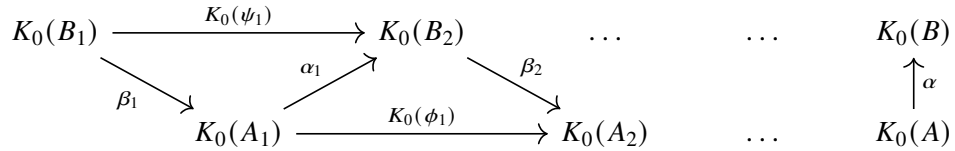


重复此过程，我们得到一个交换交织:



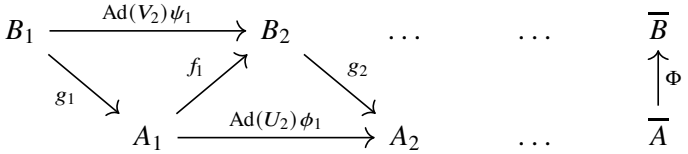
其中所有同态都是正的并且保持序单位。由于对原始构件取子序列不会改变归纳极限，我们可以重新标记，使得

(7)



应用引理 5.2 和引理 5.3，我们将 (7) 提升为一个交换交织

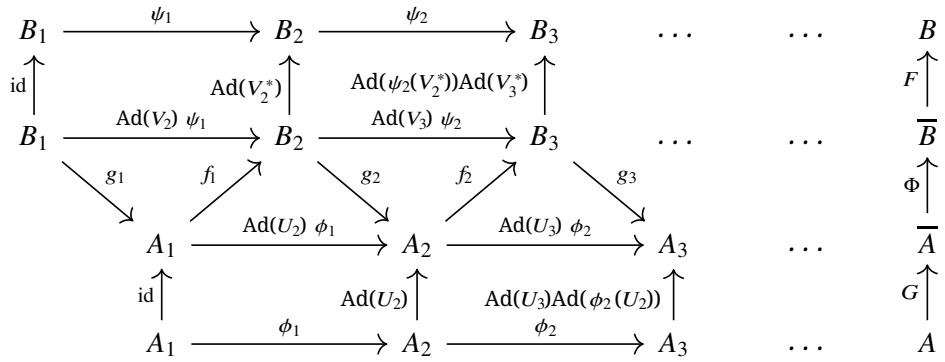
(8)



其中 (8) 中所有对角的 $*$-同态都是含幺的，将 Cartan 子代数映入 Cartan 子代数，将正规化子集映入正规化子集，并诱导出 (7) 中相应的 K_0 群同态；对于 $n = 2, 3, \ldots$，所有酉元 $\{U_n\}$ 和 $\{V_n\}$ 均满足 $U_n \in N_{A_n}(C_n)$ 和 $V_n \in N_{B_n}(D_n)$。我们还有一个在所诱导的归纳极限之间的诱导 $*$-同构 Φ（例如，参见 [18] 中的习题 6.8）。

我们将（8）扩展为一个交换图

(9)



其中我们诱导出 $*$-同构 F 和 G。定义

$$\phi = F \circ \Phi \circ G.$$

我们需要验证 $K_0(\phi) = \alpha$和 $\phi(C) = D$。注意，由于 (7) 和 (9) 交换， $K_0(\phi)$ 与 α在$K_0(\mu_n)$ $(K_0(A_n))$ 上一致。由于

$$K_0(A) = \bigcup_n K_0(\mu_n)(K_0(A_n))$$

我们得到 $K_0(\phi) = \alpha$。注意，由 (9) 的交换性可知，ϕ将 $\mu_n(C_n)$ 映入 $\rho_{n+1}(D_{n+1})$ $\subseteq D$。因此， ϕ将 C映入 D，但由于它是一个
$*$-同构，因此 $\phi(C) \subseteq D$ 是 B 中的一个 masa，故可得$\phi(C) = D$。□

推论 5.5。 含幺 AF 代数具有 $\boldsymbol{AF}$-唯一的归纳极限 *Cartan* 子代数。

证明. 如果 (A, C) 和 (B, D) 是具有 $A \cong B$ 的归纳极限 Cartan 对，那么 A 的有序 K_0 群与 B 的有序 K_0 群同构，因此根据定理 5.4，我们可以找到一个同构 $(A, C) \cong (B, D)$，由定义3.4可知，这给出了唯一性。□

注 5.6. 由定理 5.4 和推论 5.5 很容易得出：如果 C 和 D 是 AF 代数 A 的 AF-归纳极限 Cartan 子代数，那么存在 A 的一个内自同构，将 C 映到 D 上。因此，对于 AF 代数中的归纳极限 Cartan 子代数而言，“ 唯一性 ” 并不意味着严格意义上的唯一性，而是指酉等价意义下的唯一性。

参考文献

[1] S. Barlak 和 X. Li, 《Cartan 子代数与 UCT问题，II》, 《数学年刊》*378* （2020），第1-2期，255–287页。[2] S. Barlak 和 S. Raum, 《维数下降代数中的 Cartan 子代数》。《 Jussieu 数学研究所杂志》 20 （ 2021 ），第 3 期，725–755 页。[3] G.A. Elliott, 《某些单的 C^*-代数的分类》。量子与非交换分析（京都，1992），373–385页，《数学物理研究》16，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1993年。

[4] G.A. Elliott，《半单有限维代数序列归纳极限的分类》，《代数杂志》38（1976），第1期，29–44页。[5] G.A. Elliott、G. Gong 和 L. Li，《AH归纳极限系统中连接映射的单射性》，《加拿大数学通报》48（2005），第1期，50–68页。[6] G.A. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《具有有限分解秩的单可和 C^*-代数的分类，II》，预印本，arXiv:1507.03437。[7] G.A. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《具有广义迹秩一的单稳定无投影 C^*-代数》，《非交换几何杂志》14（2020），第1期，251–347页。[8] G.A. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《具有有限核维数的单可分 KK-可缩 C^*-代数的分类》，《几何与物理杂志》158（2020），103861，51页。[9] G. Gong 和 H. Lin，《非含幺可和单 C^*-代数的分类，II》，《几何与物理杂志》158（2020），103865，102页。[10] G. Gong 和 H. Lin，《非含幺可和单 C^*-代数的分类，III：值域与约化》，《K理论年刊》7（2022），第2期，279–384页。[11] G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《有限单可和 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数的分类，I：具有广义迹秩一的 C^*-代数》，《加拿大皇家学会数学科学院院刊》42（2020），第3期，63–450页。[12] G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，《有限单可和 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数的分类，II：具有有理广义迹秩一的 C^*-代数》，《加拿大皇家学会数学科学院院刊》42（2020），第4期，451–539页。[13] K.R. Goodearl，《一类具有实秩零的单 C^*-代数札记》，《数学出版物》36（1992），第2A期，637–654页（1993）。[14] W. T. Ingram 和 W. S. Mahavier，《逆极限：从连续统到混沌》。《数学进展》25。施普林格，纽约，2012年。xvi+217 页。[15] E. Kirchberg 和 N.C. Phillips，《将精确 C^*-代数嵌入 Cuntz代数 $\mathcal{O}_2$》，《纯粹与应用数学杂志》525（2000），17–53页。[16] A. Kumjian，《关于 C^*-对角线》，《加拿大数学杂志》38（1986），第4期，969–1008页。[17] B.K. Kwaśniewski 和 R. Meyer，《非交换 Cartan C^*-子代数》，《美国数学会汇刊》373（2020），第12期，8697–8724页。[18] F. Larsen、N. Laustsen 和 M. Rørdam，《K理论导论：面向 C^*-代数》。《伦敦数学会学生教材》49。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。xii+242 页。[19] X. Li，《连续轨道等价刚性》，《遍历论、动力系统》38（2018），1543–1563页。[20] X. Li，《拟等距的动力学刻画及其在上同调中的应用》，《代数与几何拓扑》18（2018），第6期，3477–3535页。[21] X. Li，《每个可分类简单 C*-代数都有一个 Cartan 子代数》，《数学创刊》219（2020），第2期，653–699页。[22] X. Li 和 A. I. Raad，《在 AH 代数中构造 C^*-对角线》，预印本，arXiv:2111.11765。[23] X. Li 和 J. Renault，《C*-代数中的 Cartan 子代数：存在性与唯一性》，《美国数学会汇刊》372（2019），第3期，1985–2010页。[24] Z. Niu，《具有对角映射的 AH 代数的平均维数》，《泛函分析杂志》266（2014），第8期，4938–4994页。[25] N.C. Phillips，《核的纯无限单 C^*-代数的一个分类定理》，《数学文献》5（2000），49–114页。[26]D.R. Pitts，《C*-代数包含的正规化子与近似单位》，预印本，arXiv:2109.00856。[27] A.I. Raad，《Cartan 子代数的 Renault定理推广》，《美国数学会会刊》150（2022），第11期，4801–4809页。[28] A.I. Raad，《归纳极限 C^*-代数中归纳极限 Cartan 子代数的存在性与唯一性》，博士论文，详见 https://theses.gla.ac.uk/82456/。[29] J. Renault，《C*-代数中的 Cartan 子代数》，《爱尔兰数学会通报》61（2008），29–63页。

[30] M. Rørdam, 《核、单 C^*-代数的分类》，核 C^*-代数的分类。《算子代数中的熵》，第1–145页，数学科学百科全书，第126卷，《算子代数与非交换几何》第7卷，施普林格，柏林，2002年。[31] K. Thomsen, 《圆代数有限直和之间的同态》，《线性与多重线性代数》32（1992年），第1期，33–50页。[32] K. Thomsen, 《区间代数的归纳极限：迹态空间。》《美国数学杂志》116（1994年），第3期，605–620页。[33] A. Tikuisis、S. White和W. Winter, 《核 C^*-代数的拟对角性》，《数学年刊》（第2辑）*185*（2017年），第1期，229–284页。[34] A.S. Toms, 《核 C^*-代数的分类问题》，《数学年刊》（第2辑）*167*（2008年），第3期，1029–1044页。[35] J. Villadsen, 《具有挠性的单 C^*-代数》，《泛函分析杂志》*154*（1998年），第1期，110–116页。[36] J. Villadsen, 《单 C^* *12* 1999 4, -代数的稳定秩》，《美国数学会杂志》（），第–期–页。[37] S. White和R. Willett, 《一致 Roe 代数中的 Cartan 子代数。》《群、几何与动力学》14（2020年），第3期，949–989页。
1091 1102

ALI I. RAAD，数学系，鲁汶大学，200B Celestijnenlaan，3001 鲁汶，比利时电子邮件地址：ali.imadraad@kuleuven.be