arXiv:2303.16768v1 [math.AC] 29 Mar 2023

Perazzo 阿廷代数的希尔伯特函数与 Jordan 型

Nancy Abdallah、Nasrin Altafi、Pietro De Poi、Luca Fiorindo、Anthony Iarrobino、Pedro Macias Marques、Emilia Mezzetti、Rosa M. Miró-Roig 和 Lisa Nicklasson

摘要。我们研究与射影空间中的 Perazzo 超曲面相关的 Artin Gorenstein 代数的希尔伯特函数、Lefschetz 性质和 Jordan 型。重点研究 Perazzo 三维簇，并证明其希尔伯特函数始终是单峰的。进一步地，我们证明希尔伯特函数能够确定该代数是否具有弱 Lefschetz 性质，并刻画满足弱 Lefschetz 性质的希尔伯特函数。通过实例，我们验证了 Perazzo 四维簇的希尔伯特函数并不总是单峰的。在具有最小可能希尔伯特函数的 Perazzo 三维簇这一特殊情形下，我们描述了任意线性形式乘法所可能产生的 Jordan 型。

1. 引言

考虑一个次数为 d 的形式 $F \in K[X_0, \ldots, X_N]$，以及它的 Hessian 矩阵 hess_F，即由 F 的二阶偏导数构成的方阵的行列式。Hesse [Hes51], [Hes59] 认为，形式 hess_F 消失当且仅当簇 $V(F) \subset \mathbb{P}^N$ 是一个锥，事实上，当 $d = 2$ 时确实如此。然而，Gordan 和 Noether [GN76]证明，Hesse 猜想在 $N \leq 3$ 时成立，但对于$N > 3$ 以及任意 $d \geq 3$均不成立。关于这项经典工作的综述，请参阅 [Rus16] 。GN [和 Perazzo [Per00], 都讨论过一类形式 F，它们的 Hessian 矩阵为零，而 $V(F)$ 不是锥；这类形式称为*Perazzo* 形式

$$F = X_0 p_0 + X_1 p_1 + \cdots + X_n p_n + G \in K[X_0, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_m]$$

2020年 数学主题分类。13E10（主要分类），13D40，14M05，13H10。关键词和短语。Perazzo 超曲面、Lefschetz 性质、阿廷-戈伦斯坦代数、希尔伯特函数、Jordan 型。Altafi 获得了 VR2021-00472 资助项目的支持，De Poi、Fiorindo 和 Mezzetti 是 INdAM - GNSAGA 的成员，Macias Marques 获得了 FCT 项目 UIDB/04674/2020 的部分支持，Miró-Roig 获得了 PID2019-104844GB-I00 资助项目的部分支持，Nicklasson 获得了 KAW-2019.0512 资助项目的支持。

其中 n、$m \geq 2$、p_0、.....、p_n、$G \in K[U_1, \ldots, U_m]$，以及 p_0、.....、p_n 线性无关但代数相关。特别地，对于$N = m + n = 4$，所有 Hessian 矩阵为零且不是锥的形式，都是 $K[U_1, U_2][\Delta]$ 的元素，其中 Δ 是形如 $X_0p_0 + X_1p_1 + X_2p_2$ 的 Perazzo 多项式；这一点由 Gordan 和 Nöther 在 [GN76] 中证明（另见 [WdB20，定理 7.3]）。

近年来，对 Hessian 矩阵的研究重新受到关注，这是由于它与分次 Artin-Gorenstein 代数的 Lefschetz 性质有关。回顾一下，标准分次 Artinian 代数 A 若满足以下条件，则具有 弱 *Lefschetz* 性质（*WLP*）：用一个一般线性形式 ℓ 进行乘法，在每个次数上都具有极大秩。类似地，若对于每个正整数 s，用 ℓ^s 进行乘法在每个次数上都具有极大秩，则 A具有 强 *Lefschetz* 性质（*SLP*）。尽管这些性质看似容易检验，但总体情况远未得到充分理解。在 Gorenstein 情形下，人们已经找到了一种通过 Hessian 行列式的消失来刻画这些性质的非平凡方法。事实上，具有 Macaulay 对偶生成元 F的阿廷-戈伦斯坦代数 A_F在 $\text{hess}_F = 0$时不具有 SLP。更确切地说，A_F不具有 SLP，当且仅当 F的某个非平凡高阶 Hessian 消失，见 [Wat00] 和 [MW09]。利用所谓的 混合 *Hessian*，这一结果已推广到 WLP，见 [GZ19]。

回到 Perazzo 形式，hess_F 的消失意味着A_F 不满足强 Lefschetz 性质（SLP），并且当 $d = 3$时也不满足弱 Lefschetz 性质（WLP）。从现在起，我们固定 $N = 4$，它是存在 Perazzo 形式的最小 N，并着手准确确定对于哪些 Perazzo 多项式 F，代数 A_F 具有弱 Lefschetz 性质。如果 $d = 4$，则对于任意 F（不一定是 Perazzo），A_F的弱 Lefschetz 性质都成立，见 [Gon17，第 3.5]定理。$d \geq 5$ 的情形在 [FMMR] 中进行了研究，其中描述了 A_F可能的（按分量计）最小和最大希尔伯特函数。文中得出结论：具有最小希尔伯特函数的 Perazzo 代数 A_F 始终满足弱 Lefschetz 性质，而具有最大希尔伯特函数的代数则从不具有弱 Lefschetz 性质。对于希尔伯特函数的中间取值，这两种情况都可以实现。

本文继续研究带有 $d \geq 5$ 的 Perazzo 三维簇。我们首先在定理 3.6 中证明，A_F 的希尔伯特函数始终是单峰的；随后证明，该函数总能确定弱 Lefschetz 性质的存在或失效。如例 3.7 所示，单峰性结果无法推广到更高余维。我们在定理 3.11 中根据希尔伯特函数，对具有弱 Lefschetz 性质的 Perazzo 三维簇进行了完整分类。此外，我们还对由具有最小希尔伯特函数的 Perazzo 三维簇给出的代数中，线性形式乘法（包括 Lefschetz 型和非 Lefschetz 型）的 Jordan 分解进行了更深入的研究，

在线性形式乘法下的情形，包括 Lefschetz 与非 Lefschetz 情形，适用于由具有极小 Hilbert 函数的 Perazzo 三维簇给出的代数。

本文的组织结构如下。第 2 节回顾希尔伯特函数、Lefschetz 性质、Jordan 型和 Perazzo 代数的定义与基本结果。第 3.1 节中，我们将范围限定在五个变量的情形，并发现两类能保证阿廷-戈伦斯坦代数具有弱 Lefschetz 性质的希尔伯特函数。这两项结果是第 3.2 节的重要工具，该节专门研究 Perazzo 代数的希尔伯特函数与 WLP。第 4 节讨论具有最小希尔伯特函数的 Perazzo 代数中，线性形式乘法可能产生的 Jordan 型。

致谢。大部分工作是在 INdAM 于科尔托纳举办的“强与弱勒夫谢茨性质”会议期间完成的，会议时间为2022年9月11日至16日。作者感谢 INdAM 机构和组织者的邀请与经费支持。作者感谢 Rodrigo Gondim 和 Sara Faridi 提出的建议与意见。

2. 预备知识

本节将固定记号，并回顾后续各节所需的希尔伯特函数、Lefschetz 性质、Jordan 型以及 Perazzo 超曲面的基本事实。

2.1. 希尔伯特函数。 在本文中，K 将表示一个零特征的代数闭域。设 K是一个标准分次 Artinian $A = R/I$-代数，其中 $R = K[x_0, x_1, \dots, x_N]$，且 I是 R的齐次理想，记 $\mathrm{HF}_A\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$，其中 $\mathrm{HF}_A(j) = \dim_K A_j = \dim_K [R/I]_j$ 为其希尔伯特函数。由于 A 是 Artinian 的，其希尔伯特函数由其 h-向量 $h = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ 表示，其中 $h_i = \mathrm{HF}_A(i) > 0$，且 d 是满足此性质的最大指标。整数d 称为的底 *socle* 次数。

给定整数 $n, r \geq 1$，我们将 r 阶二项式展开定义为 n

$$n = \binom{m_r}{r} + \binom{m_{r-1}}{r-1} + \cdots + \binom{m_e}{e}$$

其中 $m_r > m_{r-1} > \cdots > m_e \geq e \geq 1$ 是唯一确定的整数（见 [BH93，引理 4.2.6]）。我们记

$$n^{<r>} = \binom{m_r + 1}{r+1} + \binom{m_{r-1} + 1}{r} + \cdots + \binom{m_e + 1}{e+1}, \text{ and}$$

$$n_{<r>} = \binom{m_r - 1}{r} + \binom{m_{r-1} - 1}{r-1} + \cdots + \binom{m_e - 1}{e}.$$

作为分次标准 K-代数的希尔伯特函数的数值函数 H：$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$，由 Macaulay 在[Mac27] 中刻画（另见 [BH93]）。事实上，给定一个数值函数 H :$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$，以下条件等价:

(i) 存在一个标准分次的 K-代数 A，其希尔伯特函数为 H；
(ii) H 满足所谓的 **Macaulay 不等式**，即

$$H(0) = 1, \text{ and } H(t+1) \leq H(t)^{<t>} \ \forall t \geq 1. \tag{1}$$

请注意，条件 (ii) 对标准分次 K-代数的希尔伯特函数施加了严格限制，尤其是限制了其增长。以下 **Green 定理** 则带来了另一项限制，为求完整起见，我们在此回顾该定理。

定理2.1。 设 $A = R/I$ 是一个 *Artin* 分次代数，$\ell \in A_1$ 是一个一般线性形式。设 h_t 是 A 的 *h*-向量中次数为 t 的项。那么，$R/(I, \ell)$ 的 *h*-向量中次数为 t 的项 h'_t 满足不等式

$$h'_t \leq (h_t)_{<t>} \textit{ for all } t \geq 1.$$

证明。 参见 [Gre89，定理 1]。 □

我们回顾一下 Artin-Gorenstein 代数 A_F 的构造，其 Macaulay 对偶生成元是给定的形式 $F \in S = K[X_0, \ldots, X_N]$；我们用 $R = K[x_0, \ldots, x_N]$ 表示作用于多项式环 S 上的微分算子环，即 $x_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$。因此，$R$ 通过微分作用于 S。给定多项式 $p \in R$ 和 $G \in S$，我们用 $p \circ G$ 表示将微分算子 p 作用于 G。定义

$$\operatorname{Ann}_R F := \{p \in R \mid p \circ F = 0\} \subset R,$$

以及 $A_F = R/\operatorname{Ann}_R F$：它是一个标准分次 Artinian Gorenstein$K$-代数，F 称为其 Macaulay 对偶生成元。我们指出，每个标准分次 Artinian Gorenstein K-代数都具有 A_F 的形式，其中 F 是某个形式。若环 R 已明确，我们可以简写为 Ann F。

作为确定 $\mathbb{P}^4$中与 Perazzo 三维簇相关联的 Artin Gorenstein 代数的希尔伯特函数的重要关键工具，我们陈述如下:

命题2.2。 设 $A = A_F$ 是一个阿廷-戈伦斯坦 K代数，并令 $I = \operatorname{Ann} F$。那么对每个线性形式 $\ell \in A_1$，序列

$$0 \longrightarrow \frac{R}{(I:\ell)}(-1) \longrightarrow \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{(I,\ell)} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

是正合的。此外，$\frac{R}{(I:\ell)}$ 是一个阿廷-戈伦斯坦代数，其对偶生成元为 $\ell \circ F$。

证明。 我们通过将正合列

$$0 \longrightarrow \frac{(I:\ell)}{I}(-1) \longrightarrow \frac{R}{I}(-1) \xrightarrow{\times \ell} \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{(I,\ell)} \longrightarrow 0$$

拆分为两个短正合序列，得到该结果。第二个结论可通过直接计算得出。□

2.2. **Lefschetz 性质**。

定义 2.3。 设 $A = R/I = \bigoplus_{i=0}^{d} A_i$ 是一个分次阿廷 K代数。若存在一个线性形式 $\ell \in A_1$，使得对所有整数 $i \geq 0$，乘法映射

$$\times \ell : A_i \longrightarrow A_{i+1}$$

具有极大秩，即它是单射或满射。在这种情况下，线性形式 ℓ 称为 A的弱 ***Lefschetz*** 元素。如果对于一般形式 $\ell \in A_1$，映射 $\times \ell : A_{j-1} \longrightarrow A_j$ 不具有极大秩，我们就称 A在次数 j 不满足 WLP。

如果存在一个线性形式 $\ell \in A_1$，使得对所有整数 $i \geq 0$ 和$k \geq 1$，乘法映射满足以下条件，我们就称 A 具有强 ***Lefschetz*** 性质（简称 SLP）：

$$\times \ell^k : A_i \longrightarrow A_{i+k}$$

具有极大秩。这样的元素 ℓ 称为 A的强 ***Lefschetz*** 元素。

定义 2.4（高阶 Hessian）。 设 $F \in S = K[X_0, \ldots, X_N]$是一个次数为 d 的形式，且 $A = R/\operatorname{Ann} F$是与 F相关联的 Artinian Gorenstein K-代数，其 h-向量为 $h = (h_0, \ldots, h_d)$。给定 $k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$以及 A_k的一个 K-基，我们将关于 $\mathcal{B}$ 的 k阶 ***Hessian*** 矩阵定义为一个 $h_k \times h_k$ 方阵，其系数属于 S_{d-2k}

$$\operatorname{Hess}_F^k(X_0, \ldots, X_N) := \left(\alpha_i \alpha_j F(X_0, \ldots, X_N)\right)_{i,j}.$$

此外，我们定义了关于 $\mathcal{B}$ 的 k 阶 ***Hessian***

$$\operatorname{hess}_F^k(X_0, \ldots, X_N) := \det(\operatorname{Hess}_F^k(X_0, \ldots, X_N)) \in S_{(d-2k)h_k}.$$

k 阶 Hessian 和 k 阶 Hessian 矩阵的定义取决于 A_k 的基的选择，但 k 阶 Hessian 的消失与该选择无关。因此， k 阶 Hessian 消失这一条件是定义良好的。零阶 Hessian 就是多项式 F；在 $\dim A_1 = N+1$ 的情况下，相对于标准基的第一阶 Hessian 就是经典 Hessian。高阶 Hessian 是完整刻画强 Lefschetz 元素的有用工具；一般而言，它们还有助于判断一个阿廷-戈伦斯坦代数是否具有强 Lefschetz 性质。

定理 2.5. 设 $F \in S$ 是一个次数为 d 的齐次多项式，且 $A = R/\operatorname{Ann} F$ 是其对应的阿廷-戈伦斯坦代数。当且仅当满足以下条件时，线性形式 $\ell = a_0x_0 + \cdots + a_Nx_N \in A$ 是一个强 *Lefschetz* 元：

$$\operatorname{hess}_F^k(a_0, \ldots, a_N) \neq 0, \quad \textit{for each } k = 0, \ldots, \left\lfloor \tfrac{d}{2} \right\rfloor.$$

更准确地说，固定 A_k的一个 K-基 $\mathcal{B}$。由于 A 是 *Gorenstein*，我们可以在 A_{d-k}中典范地定义一个基。于是，除一个乘法常数外，第 k个 *Hessian* 矩阵 $\operatorname{Hess}_F^k(a_0, \ldots, a_N)$ 就是乘法映射 $\times \ell^{d-2k} \colon A_k \to A_{d-k}$ 的对偶映射的矩阵。

证明。 参见 [Wat00，定理 4] 以及 [MW09，定理 3.1]。 □

2.3. **Jordan 型**。

定义 2.6. 分次阿廷代数A 与 A_1 的线性形式 ℓ 的*Jordan* 型 $P_\ell = P_{\ell,A}$ 是一个分拆，其总和为 $\dim_K A$，并确定乘法映射 $\times \ell \colon A \to A$的 Jordan 块分解。

Artin 代数 A 中线性形式 ℓ 的 Jordan 型决定了 ℓ 是否为 A 的弱 Lefschetz 元或强 Lefschetz 元。为了解释其中的联系，我们需要以下定义；关于 Artin 代数和 Jordan 型的更多详细信息，读者可参阅 [IMMM22]。

定义 2.7 （支配序）。 给定两个分拆

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_s), \quad p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_s$$

and

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_t), \quad q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_t$$

对于整数 n，支配偏序定义为

$$Q \leq P \text{ if } \quad \sum_{j=1}^{i} q_j \leq \sum_{j=1}^{i} p_j, \text{ for all } \ i \leq \min\{s, t\}.$$

存在一个稠密开集 $U \subseteq A_1$，使得若 ℓ 是 U 中的线性形式，则对于任意 $\ell_0 \in A_1$，有 $P_{\ell,\ A} \geq P_{\ell_0,\ A}$。我们将该开集中的元素的 Jordan 型称为 A 的一般线性 ***Jordan*** 型，并记为 P_A（参见 [IMMM22，引理 2.54，定义 2.55]；在那里，为了将其与来自极大理想中一般元素的一般 Jordan 型区分开来，一般线性 Jordan 型的记号为 $P_{1,\ A}$）。

命题 2.8. 设 A 是希尔伯特函数为 HF_A 的分次 ***Artin*** 代数，则

> ***(i)*** 线性形式 ℓ 是 A 的弱 ***Lefschetz*** 元素，当且仅当 $P_{\ell,A}$ 中部分的个数等于 A 的 ***Sperner*** 数；也就是说，等于 HF_A 的最大值；***(ii)*** 线性形式 ℓ 是 A 的强 ***Lefschetz*** 元，当且仅当 $P_{\ell,A}$ 是 $\mathrm{HF}_A^\vee$ 的共轭分拆；***(iii)*** 对每个线性形式 ℓ，我们都有 $P_{\ell,A} \leq P_A$（关于支配序）。

证明。参见 [HMM+13，命题 3.64] 或 [IMMM22，命题 2.10]。□

若 $P_{\ell,A} = (p_1, \ldots, p_s)$ 是 ℓ 的 Jordan 型，则存在元素 $z_1, \ldots, z_s \in A$ 以及链 $(z_i, \ell z_i, \ldots, \ell^{p_i-1} z_i)$，$i = 1, \ldots, s$，为 A 提供一个 K-基。这个基称为 A 中关于乘法 ℓ 的预 ***Jordan*** 基。此外，若对每个 i 都有 $\ell^{p_i} z_i = 0$，则称其为 ***Jordan*** 基。

2.4. **Perazzo 超曲面**。已知最简单的 Hesse 猜想反例，即 Hessian 矩阵为零却不定义锥的形式，是 $XU^2 + YUV + ZV^2$。Perazzo 在[Per00]中将这一例子推广为适用于所有维数的一类三次反例。

定义 2.9。***Perazzo*** 超曲面 $X = V(F) \subset \mathbb{P}^N$ 是由一个 ***Perazzo*** 形式定义的超曲面

$$F = X_0 p_0 + X_1 p_1 + \cdots + X_n p_n + G \in K[X_0, \ldots, X_n, U_1 \ldots, U_m]_d$$

其中 n、$m \geq 2$、$N = n + m$、$p_i \in K[U_1, \ldots, U_m]_{d-1}$ 代数相关但线性无关，并且 $G \in K[U_1, \ldots, U_m]_d$。

p_i 代数相关这一事实意味着 $\mathrm{hess}_F = 0$，而线性无关性则保证 $V(F)$ 不是一个锥。我们主要关注 $\mathbb{P}^4$ 中的 Perazzo 超曲面。在这种情况下，我们使用记号 $S = K[X, Y, Z, U, V]$ 和 $R = K[x, y, z, u, v]$。我们有

$$F = Xp_0 + Yp_1 + Zp_2 + G \quad \text{where } p_0, p_1, p_2, G \in K[U, V] \tag{3}$$

而 p_0、p_1、p_2 的任意选择都会代数相关。下面的引理在第 3 节主要结果证明中所使用的归纳步骤里发挥关键作用。

引理2.10。设 $F = Xp_0 + Yp_1 + Zp_2 + G$ 是一个次数为$d \geq 4$ 的 *Perazzo* 形式，且 A_F 是其关联的阿廷-戈伦斯坦代数。那么，对于一般线性形式 $\ell \in A_F$，多项式 $\ell \circ F$ 定义了一个次数为 $d-1$ 的 *Perazzo* 形式。

证明。由于 $V(F)$ 不是一个锥，我们可以将 $\ell = a_0x + a_1y + a_2z + b_0u + b_1v$ 写成某些系数为 a_i、$b_j \in K$（不全为零）的形式。于是，我们可以展示 ℓ 在 F 上的作用，即

$$\ell \circ F = X\tilde{p_0} + Y\tilde{p_1} + Z\tilde{p_2} + \left(a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + b_0\frac{\partial G}{\partial U} + b_1\frac{\partial G}{\partial V}\right)$$

with

$$\tilde{p_0} = b_0\frac{\partial p_0}{\partial U} + b_1\frac{\partial p_0}{\partial V}, \quad \tilde{p_1} = b_0\frac{\partial p_1}{\partial U} + b_1\frac{\partial p_1}{\partial V},$$
$$\text{and} \quad \tilde{p_2} = b_0\frac{\partial p_2}{\partial U} + b_1\frac{\partial p_2}{\partial V}.$$

形式 $\ell \circ F$ 的次数为 $d-1 \geq 3$。现在只需证明多项式 $\tilde{p_0}$、$\tilde{p_1}$、$\tilde{p_2}$ 是线性无关的。由于 $\ell \circ F$ 对应于 $V(F)$ 的一个伴随曲面，而该曲面不是锥，因此，对于一般线性形式，$\ell \circ F$ 不定义锥 [1]。□

3. Perazzo 代数中出现的希尔伯特函数及弱 Lefschetz 性质

本节旨在证明我们的第一个主要结果——定理 3.11。我们首先证明一些关于阿廷-戈伦斯坦代数的弱 Lefschetz 性质的一般结果。

3.1. 一些阿廷-戈伦斯坦代数的弱 Lefschetz 性质。设 $A = R/I$ 是一个分次阿廷-戈伦斯坦代数。下面两个命题将证明，关于 A 的希尔伯特函数的特定条件能够保证其具有弱 Lefschetz 性质。

命题 3.1。设 $A = R/I$ 是一个底 *socle* 次数为偶数 $d = 2s$ 的阿廷-戈伦斯坦代数，其希尔伯特函数为

$$H = (1, h_1, h_2, \ldots, h_{s-1}, h_s, h_{s-1}, \ldots, h_2, h_1, 1)$$

其中 $h_1, \ldots, h_s$ 是连续递增的整数，且对于某个 $\frac{d}{2}+1 \leq k \leq d-1$，有 $h_k \leq k$。那么 A 具有弱 *Lefschetz* 性质。

[1]某些特定的线性形式（例如 $\ell = x + y + z$）可能不满足这一点。

证明。考虑命题2.2中的正合列 (2)，其中 ℓ~是一般线性形式。记 $h'_k = \dim[R/(I,\ell)]_k$ 和 $h_k = \tilde{}\dim[R/(I:\ell)]_k$。那么，对所有 $k>0$，都有 $h_k - h_{k-1} = h'_k$，且 $h_0 = h'_0 = 1$。令 k_0 为满足 $h_k \le k$的最小 k。根据定理2.1 $h'_k = 0$，对所有~$k \ge k_0$，都有，因此，对所有 $k \ge k_0$，都有 $h_k = h_k$。由于 R/I 和 $R/(I:\ell)$~都是 Gorenstein 的，由对称性可得，对所有 $k \le d - k_0 + 1$，都有 $h'_k = h_k - h_{k-1} = h_k - (h_k - 1) = 1$。于是，Macaulay 不等式 (1) 迫使$h'_{s+1} \le 1$。如果 $(h'_{s-1}, h'_s, h'_{s+1}) = (1,1,1)$，那么 $\left(\tilde{h}_{s-2}, \tilde{h}_{s-1}, \tilde{h}_s\right) = (1,2,1)$，这再次与Macaulay定理以及 $R/(I:\ell)$ 的 Gorenstein 性质矛盾。因此，$h'_{s+1} = 0$，且 R/I 具有弱 Lefschetz 性质。□

例3.2。 每个具有 h-向量的阿廷-戈伦斯坦代数

$$(1,5,6,7,\dots,s-1,s,s-1,\dots,7,6,5,1)$$

且底 socle 次数至少为 5，都具有弱 Lefschetz 性质。

希尔伯特函数迫使其具有弱 Lefschetz 性质的另一个例子是：

命题 3.3。 每个具有 h-向量的阿廷-戈伦斯坦代数

$$h_0 < h_1 < \cdots < h_{t-1} < h_t = \cdots = h_s > h_{s+1} > \cdots > h_{d-1} > h_d$$

其中 $s \ge t+2$ 和 $h_s \le s$ 具有弱 *Lefschetz* 性质。

证明。 只需验证，对于一般的 $\ell \in R_1$，当 d 为偶数时，乘法映射 $\times\ell$：$A_{d/2} \to A_{d/2+1}$ 是满射；当 d 为奇数时，$\times\ell$：$A_{(d-1)/2} \to A_{(d+1)/2}$ 是满射。因此，只需证明 $[R/(I,\ell)]_t = 0$ 对于$t \ge (d+1)/2$成立。

由于 $h_s \le s$，应用Green定理可得 $[R/(I,\ell)]_s = 0$，即乘法映射 $\times\ell$：$A_{s-1} \to A_s$ 是同构。由对偶性，乘法映射 $\times\ell$：$A_t \to A_{t+1}$ 也是同构。这意味着 $[R/(I,\ell)]_{t+1} = 0$。因此，对于 $i \ge t+1$，$[R/(I,\ell)]_i = 0$，证毕。□

注3.4 对于一个余维为 n 、具有满足 $h_t = h_{t+1} \le t$的 h向量的分次 ArtinianGorenstein 代数 A，在某个 t下，Gotzmann 的一个结果表明，A 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中一个次数为 h_t的零维概形的坐标环的商，更多详情参见 [Got88] 或 [IK99，命题 C.32]因此，这样的代数 A 具有弱 Lefschetz 性质。

命题 3.3 在 $h_{s-1} = h_s \le s-1$ 时的特殊情形可由 Gotzmann 的结果推出。

例 3.5。 每个具有 h-向量的阿廷-戈伦斯坦代数

$$(1,4,6,7^k,6,4,1), \quad \text{for } k \ge 5$$

都具有弱 Lefschetz 性质。Gotzmann 的结果证明了这一点对每个 $k \geq 6$ 均成立，而情形 $k = 5$ 则由命题 3.3推出。

3.2. **与 Perazzo 超曲面相关代数的希尔伯特函数与弱 Lefschetz 性质。** 现在继续讨论 A_F 为与次数为 $d \geq 5$ 、定义在 $\mathbb{P}^4$ 上的 Perazzo 超曲面相关的阿廷-戈伦斯坦代数的情形。回顾一下，根据 [FMMR 定理 4.3] ，若 A_F 的希尔伯特函数是逐项最小的，即 (1, 5, 6, . . . , 6, 5, 1)，则代数 A_F 具有弱 Lefschetz 性质。我们还知道，根据 [FMMR 定理 4.1]，若 A_F 的希尔伯特函数在给定底 socle 次数下逐项最大，则它不具有弱 Lefschetz 性质。现在我们将推广这两个结果，并给出具有弱 Lefschetz 性质的此类代数 A_F 的完整分类。情形 $d = 5$ 已由 [FMMR], 的结果完全涵盖，因为可能的希尔伯特函数只有最小值 (1, 5, 6, 6, 5, 1) 和最大值 (1, 5, 7, 7, 5, 1)。此外，我们有以下一般结果。

定理 3.6。 与次数为 $d \geq 5$ 的 $\mathbb{P}^4$ 中的 *Perazzo* 超曲面相关联的阿廷-戈伦斯坦代数的希尔伯特函数是单峰的。

证明。 根据 [FMMR，第 3.5] 号命题，我们有 $h_i < (i+3)(2d-3i)/2$，其中 $i \leq (d/2) - 1$。事实上，对于 $1 \leq i \leq (d/2) - 1$，我们有

$$h_i \leq 4i + 1 < \tfrac{1}{2}(i+3)(8i-2-3i) \leq \tfrac{1}{2}(i+3)(2d-3i);$$

对于 $i \leq \frac{d+1}{4} h_i \leq d + 2 < \frac{1}{2}(i+3)(4i+4-3i) \leq \frac{1}{2}(i+3)(2d-3i)$，对于 $i > \frac{d+1}{4}$.应用 [MNZ09，第 2.6] 号命题，我们得到 $h_{i+1} \geq h_i$，因此有 A_F 的希尔伯特函数的单峰性。 □

定理 3.6 不适用于 $\mathbb{P}^N$ 与 $N > 4$。

例 3.7。 设 $F = Xp_0 + Yp_1 + Zp_2$，其中 p_0、p_1、p_2 是变量 U、V、W 的九次一般形式。那么代数 A_F 的希尔伯特函数为

$$(1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 43,\ 42,\ 43,\ 28,\ 15,\ 6,\ 1)$$

它不是单峰的。

在命题 3.9 的证明中，我们需要排除某些向量作为 Perazzo 代数的可能 h-向量。Mats Boij 指出，任何阿廷-戈伦斯坦代数都不可能具有希尔伯特函数 (1, 5, 6, 8, 6, 5, 1)；利用字典序理想的贝蒂表和消去论证即可证明这一点。下面陈述该结果。

引理 3.8。 不存在希尔伯特函数为$(1,\ 5,\ 6,\ 8,\ 6,\ 5,\ 1)$的阿廷-戈伦斯坦代数。

证明。 设 $A = R/I$ 是一个希尔伯特函数为 (1,5,6,8,6,5,1) 的阿廷-戈伦斯坦代数。 [Mac27], Macaulay 证明存在一个与其具有相同希尔伯特函数的字典序理想 I_{lex} 。根据[Pee04，第 1.1], 定理，Betti 数 $\beta_{ij}(S/I)$ 必须通过连续消去由 $\beta_{ij}(S/I_{\text{lex}})$ 得到。S/I_{lex} 的最小贝蒂表为

```
+---------------------+
|        0  1  2  3  4  5|总
计:  1 22 67 84 49 11|     0:
1.....|     1: .
  9 20 20 10  2|     2: .2
5 4 1 .|     3: .
  4 15 21 13  3|     4: .
  2  7  9  5  1|     5: .
  4 16 24 16  4|     6: .
1  4  6  4  1|+
                      +
 ----------------------
```

这里采用如下约定：第 i 行、第 j 列的条目是 Betti 数 $\beta_{j,\ i+j}$。为了得到一个阿廷-戈伦斯坦代数 A，应将 Betti 数 $\beta_{56}(S/I_{\text{lex}}) = 2$ 消去为零。只有当 $\beta_{46}(S/I_{\text{lex}})$ 或 $\beta_{66}(S/I_{\text{lex}})$ 至少为 2 时，这才可能发生，但这与事实矛盾。□

以下命题是证明一般性定理 3.11 中归纳法的基础。

命题 3.9。 设 A_F 是一个与 *Perazzo* 超曲面 $V(F) \subset \mathbb{P}^4$ 相关联的底 *socle* 次数为 *6* 的阿廷-戈伦斯坦代数。当且仅当希尔伯特函数为最大希尔伯特函数，即 $(1,\ 5,\ 8,\ 8,\ 8,\ 5,\ 1)$ 时，代数 A_F 不具有弱 *Lefschetz* 性质。

证明。 根据定理 3.6 和引理 3.8

$$(1,5,6,6,6,5,1),\quad (1,5,6,7,6,5,1),\quad (1,5,7,7,7,5,1),$$
$$(1,5,7,8,7,5,1),\quad \text{and}\quad (1,5,8,8,8,5,1).$$

对于 A_F，可能的 h-向量为上述各项。我们知道，如果 A_F 的希尔伯特函数为最小值 (1,5,6,6,6,5,1)，则 A_F 具有弱 Lefschetz 性质。情形 (1,5,6,7,6,5,1) 已由例3.2 涵盖。我们还知道，如果 A_F 具有最大希尔伯特函数 (1,5,8,8,8,5,1)，则 A_F 不具有弱 Lefschetz 性质。现在我们来说明，可以排除 h- 向量 (1,5,7,7,7,5,1)。

假设 $A_F = R/I$ 的希尔伯特函数为 (1, 5, 7, 7, 7, 5, 1)。取 ℓ 为一般线性形式，并将 $R/(I, \ell)$ 的希尔伯特函数记为 h'。与前一种情况一样， $R/(I : \ell)$ 的希尔伯特函数为 $(1, 5, a, a, 5, 1)$，其中 $a = 6$ 或 7。我们再考虑另一个一般线性

形式 $\ell' \in A_1$ 和交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & [R/(I:\ell)]_2 & \to & A_3 = [R/I]_3 & \to & [R/(I,\ell)]_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & [R/(I:\ell)]_3 & \to & A_4 = [R/I]_4 & \to & [R/(I,\ell)]_4 & \to & 0 \end{array}$$

其中，垂直态射由乘以 ℓ' 给出。若 $a = 6$, $R/(I:\ell)$ 具有最小希尔伯特函数 (1, 5, 6, 6, 5, 1)，那么 $R/(I:\ell)$ 具有弱 Lefschetz 性质，且第一个垂直映射是同构。$R/(I,\ell)$ 的希尔伯特函数为 (1, 4, 2, 1, 1)，因此最后一个垂直映射是满射，而中间的映射不是满射，因为 A_F 在次数4不满足弱 Lefschetz 性质。若 $a = 7$, $R/(I:\ell)$ 具有最大希尔伯特函数 (1, 5, 7, 7, 5, 1)，那么 $R/(I:\ell)$ 不满足弱 Lefschetz 性质，而 A_F 满足。因此，中间的映射是同构，这与第一个垂直映射不是单射这一事实相矛盾。

现在只需证明在 A_F 具有希尔伯特函数 (1, 5, 7, 8, 7, 5, 1) 的情况下满足弱 Lefschetz 性质。在这种情况下，令 ℓ 为一般线性形式，并注意到 A_F 满足弱 Lefschetz 性质，当且仅当 $\times\ell : [A_F]_3 \to [A_F]_4$ 是满射。

记 $A_F = R/I$，并考虑代数 $R/(I:\ell)$。根据引理2.10，这是一个与次数五的 Perazzo 形式相关联的 Gorenstein代数。回顾一下，如命题2.2所述，$R/(I,\ell)$ 的希尔伯特函数由 R/I 和 $R/(I:\ell)$ 的希尔伯特函数决定。如果 $R/(I:\ell)$ 的希尔伯特函数为 (1, 5, 7, 7, 5, 1)，那么 $R/(I,\ell)$ 的希尔伯特函数为 (1, 4, 2, 1)。特别地，$[R/(I,\ell)]_4 = 0$，因此结论成立。$R/(I:\ell)$ 的希尔伯特函数唯一的另一种可能是最小值 (1, 5, 6, 6, 5, 1)，在这种情况下，$R/(I,\ell)$ 的希尔伯特函数将为 (1, 4, 2, 2, 1)。我们再取一个一般线性形式 $\ell' \in A_1$，并考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & [R/(I:\ell)]_2 & \to & A_3 = [R/I]_3 & \to & [R/(I,\ell)]_3 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & [R/(I:\ell)]_3 & \to & A_4 = [R/I]_4 & \to & [R/(I,\ell)]_4 & \to & 0 \end{array}$$

其中，垂直态射由乘以 ℓ' 给出。代数 $R/(I:\ell)$ 具有弱 Lefschetz 性质，因此

$$\times\ell' : [R/(I:\ell)]_2 \longrightarrow [R/(I:\ell)]_3$$

是一个同构。此外，很容易看出

$$\times\ell' : [R/(I,\ell)]_3 \longrightarrow [R/(I,\ell)]_4$$

是满射，因为 $[R/(I,\ell)]_4$ 是一维空间。根据蛇引理

$$\times\ell' : [R/I]_3 \longrightarrow [R/I]_4$$

是满射，这意味着具有弱 Lefschetz 性质。 □

注 3.10。 注意，希尔伯特函数 (1, 5, 7, 7, 7, 5, 1) 不可能对应于 Perazzo 超曲面，但仍可能对应于某个阿廷-戈伦斯坦代数。事实上，它是由 Macaulay 对偶生成元 $F = X_0^6 + X_0X_1^5 + X_0X_2^5 + X_1^6 + X_2^6 + U^6 + V^6$. 定义的代数的希尔伯特函数

现在我们可以给出与具有弱 Lefschetz 性质的次数为 $d \geq 5$ 、位于 $\mathbb{P}^4$ 中的 Perazzo 超曲面相关联的阿廷-戈伦斯坦代数的分类。回忆一下，这类代数的 Sperner 数至多为 $d + 2$。

定理 3.11。 设 A_F 是与 *Perazzo* 超曲面 $V(F) \subset \mathbb{P}^4$ 相关联的次数为 $d \geq 5$ 的阿廷-戈伦斯坦代数。设 $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$ 是其 ***Hilbert*** 向量。代数 A_F 具有 ***WLP*** 当且仅当 $\#\{i \mid h_i = d + 2\} \leq 1$。

证明。 首先假设当 d 为奇数（分别为偶数）时，$\#\{i \mid h_i = d + 2\} \geq 2$（分别为 ≥ 3）。考虑 F 的 $(d-1)$ 阶 Hessian 矩阵（分别为 $(d-2)/2$）。为计算该矩阵，我们固定 A_F 的次数为 $(d-1)/2$（分别为 $(d-2)/2$）的齐次分量的一组单项式基 $\mathcal{B}$，该基由 $d+2$ 个单项式构成。由于仅涉及 u、v（分别为 $d/2$）的单项式至多有 $(d + 1)/2$ 个，因此含有变量 x、y、z 中至少一个的单项式至少有 $(d + 3)/2$ 个（分别为 $(d + 4)/2$）。这意味着 Hessian 矩阵中存在一个阶数至少为 $(d + 3)/2$（分别为 $(d + 4)/2$）的零块，从而迫使行列式为零。因此，由一般线性形式诱导的乘法映射在次数 $(d + 1)/2$（分别在次数 $d/2$）不具有极大秩，且 A_F 不满足弱 Lefschetz 性质。

现在假设 $\#\{i \mid h_i = d + 2\} \leq 1$，并证明 A_F 具有弱 Lefschetz 性质。我们已经看到，该结论对 $d = 5$、6 成立。我们按 d 归纳法进行证明，并分别讨论 d 为偶数和 d 为奇数的情形。

情形 d 为偶数。设 $d = 2s$。假设 $\#\{i \mid h_i = d + 2\} \leq 1$结合定理 3.6 可推出 $h_{s+1} \leq d+1$。令 $I = \text{Ann } F$，使得 $A_F = R/I$。取一般线性形式 $\ell \in A_F$，并考虑短正合序列 (2)。由引理2.10可知，$R/(I : \ell)$ 是与次数为 $d - 1 = 2s - 1$ 的 Perazzo 形式 $\ell \circ \widetilde{F}$ 相关联的阿廷 - 戈伦斯坦代数。记 h'_i 和 h_i 分别为 $\rightsquigarrow R/(I, \ell)$ 和 $R/(I : \ell)$ 的希尔伯特函数，并回忆 $h_i = h_{i+1} - h'_{i+1}$。利用 Green定理（见定理2.1）和不等式 $h_{s+1} < d + 2$，可得 $h'_{s+1} \leq 1$。若$h'_{s+1} = 0$ 映射

$$\times \ell : [R/I]_s \longrightarrow [R/I]_{s+1}$$

是满射，且 A_F 具有弱 Lefschetz 性质。反之，假设 $h'_{s+1} = 1$。那么， $h_{s+1} \leq d+1$，由 $\sim$ 可得 $h_s < d+1$。因此，我们可以对 $R/(I:\ell)$ 应用归纳假设，并得出 $R/(I:\ell)$ 满足弱 Lefschetz 性质。现在考虑另一个一般线性形式 $\ell' \in R/I$ 以及交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & [R/(I:\ell)]_{i-1} & \to & [R/I]_i & \to & [R/(I,\ell)]_i & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & [R/(I:\ell)]_i & \to & [R/I]_{i+1} & \to & [R/(I,\ell)]_{i+1} & \to & 0
\end{array} \tag{4}
$$

对于 $i = s$，其中垂直态射由乘以 ℓ' 给出。由于 $R/(I:\ell)$ 满足弱 Lefschetz 性质，最左边的垂直映射是同构。另一方面，容易验证，如 $h'_{s+1} = 1$所示，最右边的垂直映射是满态射。由蛇引理可知，中间的垂直映射是满态射，进而得到 A_F 的弱 Lefschetz 性质。

情形 d **奇**。记 $d = 2s+1$。由定理 3.6 可知， h 是对称且单峰的。由于我们假设 $\#\{i \mid h_i = d+2\} \leq 1$，此时有$h_s = h_{s+1} \leq d+1$。应用定理 2.1，得到 $h'_{s+1} \leq 1$。若 $h'_{s+1} = 0$，则问题已解决，因此假设 $h'_{s+1} = 1$。由 Macaulay 不等式可得，对所有 $i > s$，都有 $h'_i \leq 1$ 。考察交换图 (4)，可见当$i > s$时，最右边的垂直映射是满射。由于 $R/(I:\ell)$ 是一个底 socle 次数为 $2s$ 的 Perazzo 代数，它具有弱 Lefschetz 性质，因此 (4) 中最左边的垂直映射在 $i > s$ 时是满射。由此可得，当 $i > s$ 时，中间映射 $\times\ell' \colon [R/I]_i \to [R/I]_{i+1}$ 是满射；根据对偶性，当 $i < s$ 时它也是单射。这给出了 $i \leq s$ 时的等式 $h'_i = h_i - h_{i-1}$。

接下来，我们断言，对于某个 $i \leq s$，有 $h'_i = 1$ ，或者等价地，有 $h_i = h_{i-1}+1$。为证明这一断言，考虑对每个 $i = 2$，....., s 都有 $h_i \geq h_{i-1}+2$ 的可能性。于是我们将有 $h_s \geq h_1 + 2(s-1)$ $=5+2(s-1) = d+2$，这将与假设 $h_s \leq d+1$ 矛盾。

现在，Macaulay 不等式结合对于某个 $i \leq s$ 有 $h'_i = 1$ 这一事实，推出 $h'_s = 1$。最后，我们考虑满足 $i = s$ 的图（4）。在这种情况下，最左侧的垂直映射是单射，而最右侧的是双射，因为 $h'_s = h'_{s+1} = 1$。因此我们得出中间的映射是单射，从而 R/I 具有弱 Lefschetz 性质。□

定理 3.12. 设 A_F 是与次数为 $d \geq 5$的 *Perazzo* 超曲面 $V(F) \subset \mathbb{P}^4$ 相关联的阿廷-戈伦斯坦代数。假设 A_F 具有弱 *Lefschetz* 性质，且 ℓ 是一个弱 *Lefschetz* 元素。那么，$A_F/(\ell)$ 的希尔伯特函数是单峰的。

证明。分别用 h 和 h'表示 A_F和 $A_F/(\ell)$的 h-向量。由于 ℓ 是一个弱 Lefschetz 元素，因此有 $h' = \Delta h$，也就是说 h'_i =max($h_i - h_{i-1}$, 0)。利用 FMMR 的命题 3.4] ，可得对于每个 i，都有 $h' \leq 4$。对每个 $i \geq 2$，将 Macaulay 不等式 (1) 应用于 h'，可知 (h')$_{i+1} \leq h'_i$ ，除非 $i = 2, h'_2 = 3$ ；在这种情况下， $h'_3 \leq 4$。这意味着 h'是单峰的，除非 $h' =$(1, 4, 3, 4, . . .)。我们将证明，不存在与 Perazzo 超曲面 $V(f) \subset \mathbb{P}^4$相关联、且满足 $\Delta h =$(1, 4, 3, 4, . . .) 的阿廷-戈伦斯坦代数 A_F。如果这样的代数存在，其 Sperner 数至少为 12，这意味着 $d \geq 10$。然而，对于 $d = 10$ ，向量 h 不满足定理 3.11 给出的弱 Lefschetz 性质的必要条件。设 $d \geq$11。那么 $h =$ (1, 5, 8, 12, $h_4, h_5, \ldots, h_5, h_4$, 12, 8, 5, 1)。我们将证明，通过证明 $h_3 = 12$蕴含 $h_2 = 9$，可知 h 不可能是 A_F 的希尔伯特函数。

我们将多项式 F 记为

$$F = Xp_0(U,V) + Yp_1(U,V) + Zp_2(U,V) + G(U,V),$$

其中

$$p_0(U,V) = \sum_{i=0}^{d-1} \tbinom{d-1}{i} a_i U^{d-1-i} V^i, \quad p_1(U,V) = \sum_{i=0}^{d-1} \tbinom{d-1}{i} b_i U^{d-1-i} V^i,$$
$$p_2(U,V) = \sum_{i=0}^{d-1} \tbinom{d-1}{i} c_i U^{d-1-i} V^i, \quad \text{and} \quad G(U,V) = \sum_{i=0}^{d} \tbinom{d}{i} g_i U^{d-i} V^i.$$

由 [FMMR，命题 3.4] ，我们得到

$$\operatorname{rank} M_2 + \operatorname{rank} N_2 \leq h_2 \leq \operatorname{rank} M_2 + \operatorname{rank} N'_2, \text{ and} \tag{5}$$
$$\operatorname{rank} M_3 + \operatorname{rank} N_3 \leq h_3 \leq \operatorname{rank} M_3 + \operatorname{rank} N'_3, \tag{6}$$

其中， M_2、 M_3、 N_2、 N_3、 N'_2和 N'_3是矩阵

$$M_2 = (A_2|B_2|C_2)\,, \quad M_3 = (A_3|B_3|C_3)\,,$$
$$N_2 = \left(\begin{array}{c} A_3 \\ \hline B_3 \\ \hline C_3 \end{array}\right), \quad N_3 = \left(\begin{array}{c} A_4 \\ \hline B_4 \\ \hline C_4 \end{array}\right), \quad N'_2 = \left(\begin{array}{c} A_3 \\ \hline B_3 \\ \hline C_3 \\ \hline G_2 \end{array}\right), \quad \text{and} \quad N'_3 = \left(\begin{array}{c} A_4 \\ \hline B_4 \\ \hline C_4 \\ \hline G_3 \end{array}\right)$$

带有构建块

$$A_k = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{d-k} & a_{d-k+1} & \dots & a_{d-1} \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{d-k} & b_{d-k+1} & \dots & b_{d-1} \end{pmatrix},$$

$$C_k = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{d-k} & c_{d-k+1} & \dots & c_{d-1} \end{pmatrix}, \quad G_k = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_k \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{d-k} & g_{d-k+1} & \dots & g_d \end{pmatrix}.$$

我们断言，rank $M_3 \geq 8$ 意味着rank $M_2 = 6$。为证明这一断言，请注意，从 M_2 中删去第一行（或最后一行）后得到的矩阵是 M_3的一个子矩阵。假设rank $M_2 < 6$，并假定 M_2 的最后一列是其他列的线性组合。这意味着 M_3 的最后两列属于前7列的张成空间。因此rank $M_3 \leq 7$，这就证明了该断言。

注意到秩 $N_3' \leq 4$，因此 $h_3 = 12$ 根据不等式（6）可推出 $M_3 \geq 8$。在此情况下，该断言表明 M_2 必须具有极大秩，即秩为 $M_2 = 6$。另一方面，秩为 $M_3 \geq 8$ 意味着三个块 A_3、B_3或 C_3 中至少有一个具有极大秩，因此 N_2'和 N_2 都具有极大秩，即均为三。因此，秩 $M_2 +$秩 $N_2 =$秩 $M_2 +$秩 $N_2' = 6 + 3 = 9$，由不等式（5）可得 $h_2 = 9$，证明完成。□

定理 3.11 和定理 3.12 排除了 Perazzo 代数的 h-向量在由 [FMMR、命题 3.5 和 3.6] 给出的最大和最小 h-向量之间的一些中间可能性。一般而言，确定一个 h-向量是否是某个阿廷-戈伦斯坦代数的希尔伯特函数是一个困难的问题，更不用说确定它是否来自某个 Perazzo 超曲面。

例 3.13。 </style}不存在与 $\mathbb{P}^4$ 中具有如下希尔伯特函数的 Perazzo 超曲面相关联的阿廷-戈伦斯坦代数

$$H = (1, 5, 6, 7, 9, 9, 9, 7, 6, 5, 1).$$

如果存在一个具有此希尔伯特函数的代数，那么定理 3.11 将表明它具有弱 Lefschetz 性质；根据定理 3.12 ΔH，它应当是单峰的，这与此矛盾。

4. Perazzo 代数的 Jordan 型

本节中，我们研究与具有最小希尔伯特向量的 Perazzo 三维簇相对应的阿廷-戈伦斯坦代数的 Jordan 型，即类型为 (1, 5, 6, . . . , 6, 5, 1) 的代数。

4.1. 具有最小希尔伯特函数的 Perazzo 代数。 FMMR 定理 5.4] 给出了定义具有最小希尔伯特函数的 Perazzo 三维簇、次数为 $d \geq 5$ 的对偶生成元 F 的明确分类。我们陈述该结果的一个略作改写的版本。

引理 4.1。 设 $F \in K[X,Y,Z,U,V]$ 是一个 *Perazzo* 形式，且代数 A_F 具有最小希尔伯特函数 $(1,\ 5,\ 6,\ 6,\ \ldots\ldots,\ 6,\ 5,\ 1)$。那么，对偶生成元 F 可表示为

(i) $XU^{d-1}+YU^{d-2}V+ZU^{d-3}V^2$, *(ii)* $XU^{d-1}+YU^{d-2}V+ZV^{d-1}$, 或 *(iii)* $XU^{d-1}+Y(U+\lambda V)^{d-1}+ZV^{d-1}$, 其中 $\lambda \in K^*$ 经过线性变量变换后。

证明。 根据 [FMMR 定理 5，4], 在相差一个线性变量变换的意义下, 形式分为三类。第一种情形下， F 可写为

$$\begin{aligned} F &= XU^{d-1}+YU^{d-2}V+ZU^{d-3}V^2+aU^d+bU^{d-1}V+cU^{d-2}V \\ &= (X+aU)U^{d-1}+(Y+bU)U^{d-2}V+(Z+cU)U^{d-3}V^2 \end{aligned}$$

其中 a、b、$c \in K$。再作一次线性变量变换，即得到情形 (i)。其余情形的处理方式相同。□

根据 [FMMR 定理 4，3] 我们知道，引理 4.1 中的三种情形下，A_F 都具有弱 Lefschetz 性质。按照 [Fio22 定理 3，25] 的证明，我们得到弱 Lefschetz 元素的精确描述。

命题 4.2。 对于具有最小希尔伯特函数的 *Perazzo* 三维簇，*Lefschetz* 元素是满足以下条件的线性形式 $a_0x+a_1y+a_2z+b_0u+b_1v$；这里考虑的是引理 *4.1* 中列出的三种类型 F :

(i) $b_0 \neq 0$, (*ii*) $b_0b_1 \neq 0$, (*iii*) $b_0b_1(b_0+\lambda b_1) \neq 0$.

在我们的情形中，代数 A_F 的 Jordan 型是 $6d-6$ 的一个分拆。我们先来看一般线性 Jordan 型 $P_{A_F}=(p_1,\ldots,p_t)$。我们知道，一般线性形式 $\ell \in A_F$ 满足 $\ell^d \neq 0$，因此 $p_1 = d+1$。由上面的命题 4.2 可知，一般线性形式 $\ell \in A_F$ 是一个弱 Lefschetz 元素。因此，由于 Sperner 数为 6,

这必定是 P_{A_F} 中部件的个数（见命题 2.8）。由于 A_F 不具有强 Lefschetz 性质， P_{A_F} 被希尔伯特函数的共轭严格支配： $H(A_F)^\vee = \big(d+1,(d-1)^4,d-3\big)$。唯一的可能性是

$$P_{A_F} = \big(d+1,(d-1)^3,(d-2)^2\big), \tag{7}$$

与 $H(A_F)^\vee$ 支配序中严格小于 $6d-6$（其有 $p_1 = d+1$）的其他任一分拆一样，它有超过 6 个部分。

注 4.3。 如果我们考虑 A_F 的极大理想中的一般元素 ℓ'（不一定是齐次的），就可以问它的 Jordan 型是什么（这是 A_F 的一般 Jordan 型，参见 [IMMM22，定义 2.1 和 2.55]）。我们知道，这个 Jordan 型被 $H(A_F)^\vee$ 支配；又由于 A_F 的极大理想中的一般元素可特化为 $(A_F)_1$，中的一般线性形式，其 Jordan 型支配一般线性 Jordan 型（参见 [IMMM22] 中引理 2.54 之前的讨论）。但是，如果将分拆 $H(A_F)^\vee$ 与我们刚得到的一般线性 Jordan 型比较，就会发现支配序中两者之间不存在其他分拆，因此一般 Jordan 型必定等于这两个分拆之一。由于 Jordan 型 $H(A_F)^\vee$ 意味着向量空间 $(\ell')^{d-1}(A_F)_1$ 的维数为 5，而只有当 $(\ell'_1)^{d-1}(A_F)_1$，也满足这一点时才能达到此维数，其中 ℓ'_1 是 ℓ' 的线性项，因此我们看到 A_F 的一般 Jordan 型如（7）所示，为 P_{A_F}。

现在来考虑在 A_F 中任意线性形式的乘法所对应的可能 Jordan 型。

定理 4.4。 设 A_F 是一个具有最小希尔伯特函数的 *Perazzo* 三折叠的阿廷-戈伦斯坦代数。这两种 *Jordan* 型

$$\big(d+1,(d-1)^3,(d-2)^2\big) \quad \textit{and} \quad \big(d^2,(d-1)^2,(d-2)^2\big)$$

可由弱 *Lefschetz* 元素的乘法得到。对于非 *Lefschetz* 轨迹中的元素，针对引理 *4.1* 中给出的 F 的三种类型，其 *Jordan* 基满足以下性质。

(i) 所有字符串的长度至多为 4；*(ii)* 字符串长度为 $\geq d-1$ 或 ≤ 3；*(iii)* 字符串长度为 $\geq d-1$ 或 ≤ 2。

证明。 我们已经看到，一般线性形式的 Jordan 型为 $\big(d+1,(d-1)^3,(d-2)^2\big)$，而这也是弱 Lefschetz 元素 ℓ 在满足 $\ell^d \neq 0$ 时唯一可能的 Jordan 型。我们来考虑一个满足 $\ell^d = 0$ 的弱 Lefschetz 元素 ℓ。例如，取 $\ell = b_0u + b_1v$，其中 b_0, b_1 满足命题 4.2 中给出的条件。

在这种情况下，Jordan 串的长度至多为 d。我们断言，这种 Jordan 型的最大部分等于 d。根据命题 2.8，每个 Jordan 型分拆关于支配序都必须小于一般 Jordan 型 $\big(d+1,(d-1)^3,(d-2)^2\big)$。因此，不存在一个 $6d-6$ 的分拆，它恰有 6 个部分、每个部分的长度至多为 $d-1$，且被一般 Jordan 型支配。因此，最大部分的长度等于 d，并且由对称性可知，根据 CG19，引理 4.6]，我们至少需要 2 个长度为 d 的部分。因此，这种情况下的 Jordan 型具有如下形式：(d^2,p_3,p_4,p_5,p_6)，其中 $p_3+p_4+p_5+p_6=4d-6$。由于它必须被一般 Jordan 型支配，我们必有 $p_i\le d-1$。这种情况下唯一可能的分拆是$\big(d^2,(d-1)^2,(d-2)^2\big)$。

现在考虑不是弱 Lefschetz 元素的线性形式 $\ell=a_0x+a_1y+a_2z+b_0u+b_1v$。注意，我们总有 $(x,y,z)^2\subseteq \operatorname{Ann} F$。在引理 4.1(i) 的情形下，根据命题 4.2，线性形式 ℓ 不是弱 Lefschetz 元素意味着 $b_0=0$。由于 x,y,z,v 中的每个四次单项式都属于 Ann F，因此我们有 $\ell^4=0$ 属于 A_F。所以不可能存在长度超过四的 Jordan 串。

接下来考虑引理 4.1(ii) 的情形。根据命题 4.2，我们有 $b_0=0$ 或 $b_1=0$。如果 $b_0=b_1=0$，则我们有 $\ell^2=0$ 属于 A_F，因此所有串的长度至多为二。设 $b_0=0$ 且 $b_1\neq 0$。我们不妨设 $b_1=1$。由于 $xv,yv^2\in \operatorname{Ann} F$，我们有

$$\ell^s=sa_2zv^{s-1}+v^s,\quad \text{and}\quad \ell^{s-1}z=zv^{s-1},$$

对于任意 $s\ge 3$。这给出了两个长度分别为 $d+1$ 和 $d-1$ 的字符串，并且它们仅使用变量 z 和 v 张成了 A_F 中的所有多项式。再利用 $uv^2\in \operatorname{Ann} F$ 这一事实，我们得到 $\ell x=\ell^2y=\ell^3u=0$ in A_F，因此所有其余字符串的长度至多为三。反之，假设 $b_0=1$ 和 $b_1=0$。由于 $zu\in \operatorname{Ann} F$，我们有

$$\ell^s=sa_0xu^{s-1}+sa_1yu^{s-1}+u^s$$

对于 $s\ge 2$ 和

$$\ell^{d-1}=(d-1)a_0xu^{d-2}+u^{d-1}\neq 0.$$

此外

$$\ell^{d-2}x=xu^{d-2},\quad \ell^{d-2}y=yu^{d-2},\quad \ell^{d-2}v=(d-2)a_1yu^{d-3}v+u^{d-2}v.$$

容易验证，ℓ^{d-1}、$\ell^{d-2}x$、$\ell^{d-2}y$和 $\ell^{d-2}v$ 作用于 F 后得到四个线性无关元素，因此我们得到四条长度至少为 $d-1$的 Jordan 串。我们还可以看到，一维空间 $[A_F]_d$ 也被覆盖，因为 $\ell^{d-1}x=xu^{d-1}\neq 0$。还有一条从次数一开始的串，并且由于 $\ell z=0$，这

条串的长度为一。在次数 $1 < s < d$，单项式 v^s 和zv^{s-1} 张成 $[A_F]_s$ 的一个二维子空间。这两个单项式都属于乘以 ℓ^2的乘法核，因此它们不可能属于 ℓ^s、 $\ell^{s-1}x$、 $\ell^{s-1}y$、 $\ell^{s-1}v$的张成空间，除非 $s = d-2$。无论如何，这表明其余各串的长度至多为二。

最后，我们考虑引理 4.1(iii) 的最后一种情形。此时，若 $b_0 = 0$、$b_1 = 0$ 或 $b_0 + \lambda b_1 = 0$，则 ℓ 不是 Lefschetz。我们先假设$b_0 = 0$ 和 $b_1 = 1$。在这种情形下

$$\ell^s = sa_1yv^{s-1} + sa_2zv^{s-1} + v^s \quad \text{when } s \geq 2.$$

幂 ℓ^{d-1} 与

$$\ell^{d-2}y = v^{d-2}y, \quad \ell^{d-2}z = v^{d-2}z, \quad \ell^{d-2}u = (d-2)a_1yuv^{d-3} + uv^{d-2}$$

线性无关，并给出四条长度至少为$d-1$的链。由于 $\ell x = 0$，从次数一开始的剩余链长度为一。在次数 $1 < s < d$ 时，元素 $u^{s-1}(\lambda u - v)$ 和 xu^{s-1}线性无关，且都属于乘以ℓ^2的乘法核。因此，所有剩余链的长度至多为二。

$b_0 = 1$ 和 $b_1 = 0$ 的情形可类似处理。设 $b_0 + \lambda b_1 = 0$。不妨假设 $b_0 = \lambda$ 和 $b_1 = -1$。注意，在这种情形下，$y(\lambda u - v) \in \operatorname{Ann} F$。我们有

$$\ell^s = s\lambda a_0xu^{s-1} - sa_2zv^{s-1} + (\lambda u - v)^s \quad \text{for } s \geq 2.$$

不难验证，ℓ^{d-1} 与

$$\ell^{d-2}x = x(\lambda u - v)^{d-2}, \quad \ell^{d-2}z = z(\lambda u - v)^{d-2},$$
$$\text{and} \quad \ell^{d-2}u = (d-2)\lambda a_0xu^{d-2} + (\lambda u - v)^{d-2}u$$

构成一个 4 维空间。因此，Jordan 基中有四条长度至少为 $d-1$ 的链。由于 $\ell y = 0$ 在 A_F 中，我们得到一条从次数一开始、长度为一的链。在更高次数中，元素 $y(u + \lambda v)^s$ 和 u^sv 构成一个二维空间，且包含在乘以 ℓ^2 的核中。由此可知，所有其余链的长度至多为二。
□

4.2. **非 Lefschetz 元素的 Jordan 型**。我们对引理 4.1(i) 中可能出现的 Jordan 型进行了更深入的研究。由于上文已详细讨论 Lefschetz 元素可能具有的 Jordan 型，现在令 $\ell = a_0x+a_1y+a_2z+b_0u+b_1v$ 为一个非 Lefschetz 元素。我们列出每种情况下的 Jordan 型，以及预 Jordan 基中的字符串。

条件	P_{ℓ,A_F}	预 Jordan 基
$a_0 \in K$, $a_1 \in K$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$	$(4^{d-2}, 2^d, 1_2)$	$u^i \mapsto \ell u^i \mapsto \ell^2 u^i \mapsto \ell^3 u^i$, $0 \leq i \leq d-3$ $u^i v \mapsto \ell u^i v$, $0 \leq i \leq d-3$ $y \mapsto \ell y$, $u^{d-2} \mapsto \ell u^{d-2}$ x, u^{d-1}
$a_0 \in K$, $a_1 \in K$, $a_2 = 0$, $b_1 \neq 0$	$(3^{2d-4}, 2_2, 1_2)$	$u^i \mapsto \ell u^i \mapsto \ell^2 u^i$, $0 \leq i \leq d-3$ $zu^i \mapsto \ell z u^i \mapsto \ell^2 z u^i$, $0 \leq i \leq d-3$ $y \mapsto \ell y$, $u^{d-2} \mapsto \ell u^{d-2}$ x, u^{d-1}
$a_0 \in K$, $a_1 \in K$, $a_2 \neq 0$, $b_1 = 0$	$(2^{3d-6}, 1_6)$	$u^i \mapsto \ell u^i$, $0 \leq i \leq d-3$ $u^i v \mapsto \ell u^i v$, $0 \leq i \leq d-3$ $u^i v^2 \mapsto \ell u^i v^2$, $\quad 0 \leq i \leq d-3$ $x, \quad y, \quad xu, \quad u^{d-2}, \quad u^{d-2}v, \quad u^{d-1}$
$a_0 \in K$, $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$	$(2^{2d-2}, \quad 1^{2d-2})$	$u^i \mapsto \ell u^i, \quad 0 \leq i \leq d-2$ $u^i v \mapsto \ell u^i v, \quad 0 \leq i \leq d-2$ $zu^i, \quad u^i v^2, \quad 0 \leq i \leq d-3$ x, u^{d-1}
$a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$	$(2^d, \quad 1^{4d-6})$	$u^i \mapsto \ell u^i, \quad 0 \leq i \leq d-1$ $u^i v^2, zu^i$, $0 \leq i \leq d-3$ $u^i v, yu^i$, $0 \leq i \leq d-2$

我们注意到，计算结果与定理 4.4 一致。还要指出，这些 Jordan 型按照支配序构成一条链：

$$(4^{d-2}, 2^d, 1^2) > (3^{2d-4}, 2^2, 1^2) > (2^{3d-6}, 1^6) > (2^{2d-2}, 1^{2d-2}) > (2^d, 1^{4d-6}).$$

参考文献

[BH93] W. Bruns 和 J. Herzog，《Cohen-Macaulay 环》，Cambridge 高等数学研究丛书，第 39 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[CG19] B. Costa 和 R. Gondim，《分次 Artin-Gorenstein 代数的 Jordan 型》，《应用数学进展》111（2019年），101941，共 27 页。[Fio22] L. Fiorindo，《Hessian 消失的多项式与 Lefschetz 性质》，arXiv:math.AG/ 2212.11801，2022年，硕士论文。的里雅斯特大学。[FMMR] L. Fiorindo、E. Mezzetti 和 R. M. Miró-Roig，《Perazzo 三维簇与弱 Lefschetz 性质》，《代数杂志》（即将出版），arXiv:math.AG/2206.02723，doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.03.008。[GN 76] P. Gordan 和 M. Nöther，《论 Hessian 行列式恒等于零的代数形式》，《数学年刊》10（1876年），第 4 期，547–568。[Gon17] R. Gondim，《关于高阶 Hessian 与 Lefschetz 性质》，《代数杂志》489（2017年），241–263。

[Got88] G. Gotzmann, 《射影平面上点的希尔伯特概形的分层》, 《数学杂志》199（1988年）, 第 4 期, 539–547。[Gre89] M. Green, 《线性级数在超平面上的限制, 以及 Macaulay 和 Gotzmann 的若干结果》, 《代数曲线与射影几何》, 《数学讲义》第 1389 号, Springer, 1989年, 第 76–86 页。[GZ19] R. Gondim 和 G. Zappalà, 《关于混合 Hessian 与 Lefschetz 性质》, 《纯粹与应用代数杂志》223（2019年）, 4268–4282。[Hes51] O. Hesse, 《关于齐次整函数可通过线性代换化为少一个变量的齐次函数的条件》, 《纯粹与应用数学杂志》42（1851年）, 117–124。[Hes59] ———, 《整齐次函数理论》, 《纯粹与应用数学杂志》56（1859年）, 263–269。[HMM+13] T. Harima、T. Maeno、H. Morita、Y. Numata、A. Wachi 和 J. Watanabe, 《Lefschetz 性质》, 《数学讲义》第 2080 号, Springer, 2013年。[IK99] A. Iarrobino 和 V. Kanev, 《幂和、Gorenstein 代数与行列式轨迹》, 附录 C 由 A. Iarrobino 和 Steven L. Kleiman 撰写: 《Gotzmann 定理与希尔伯特概形》, 《数学讲义》第 1721 号, Springer 出版社, 柏林, 1999年。[IMMM22] A. Iarrobino、P. Macias Marques 和 C. McDaniel, 《阿廷代数与 Jordan 型》, 《交换代数杂志》14（2022年）, 第 3 期, 365–414。[Mac27] F. S. Macaulay, 《模系统理论中的计数若干性质》, 《伦敦数学会会刊》26（1927年）, 第 2 期, 531–555。[MNZ09] J. Migliore、U. Nagel 和 F. Zanello, 《Gorenstein 希尔伯特函数的界与渐近最小增长》, 《代数杂志》321（2009年）, 第 5 期, 1510–1521。[MW09] T. Maeno 和 J. Watanabe, 《阿廷-戈伦斯坦代数的 Lefschetz 元素与齐次多项式的 Hessian 矩阵》, 《伊利诺伊数学杂志》53（2009年）, 593–603。[Pee04] I. Peeva, 《Betti 数中的连续消去》, 《美国数学会会刊》132（2004年）, 第 12 期, 3503–3507。[Per00] U. Perazzo, 《关于 Hessian 恒等消失的三次簇》, 《Battaglini 数学杂志》38（1900年）, 337–354。[Rus16] F. Russo, 《关于若干特殊射影簇的几何》, 《意大利数学联盟讲义》第 18 卷, Springer, Cham; 意大利数学联盟, 博洛尼亚, 2016年。[Wat00] J. Watanabe, 《关于齐次多项式 Hessian 的一则注记》, 《 Queen's 曲线研讨会》第 XIII 卷, 《 Queen's 纯粹与应用数学论文集》第 119 号, 第 171–178 页, 2000年。[WdB20] J. Watanabe 和 M. de Bondt, 《关于 Gordan-Noether 齐次零 Hessian 形式理论（改进版）》, 《多项式环与仿射代数几何》, Springer 数学与统计学论文集第 319 号, Springer, Cham, 2020年, 第 73–107 页。

瑞典布罗斯大学工程系电子邮箱：
nancy.abdallah@hb.se

加拿大安大略省金斯顿女王大学数学与统计系，以及瑞典皇家理工学院数学系

电子邮箱：nasrinar@kth.se

意大利乌迪内科学街206号，邮编33100，乌迪内大学数学、计算机与物理科学系

电子邮箱：pietro.depoi@uniud.it

数学系，热那亚大学，多德卡尼斯大街35号，16146 热那亚，意大利

电子邮件地址：luca.fiorindo@dima.unige.it

数学系，东北大学，美国马萨诸塞州波士顿02115电子邮件地址：
a.iarrobino@northeastern.edu

数学系，科学与技术学院，数学与应用研究中心，高级研究与培训学院，埃武拉大学，罗芒·拉马略街59号，P–7000–671埃武拉，葡萄牙

电子邮件地址：pmm@uevora.pt

数学与地球科学系，的里雅斯特大学，瓦莱里奥街12/1号，34127 的里雅斯特，意大利
电子邮箱地址：mezzette@units.it

巴塞罗那大学数学与信息学学院，加泰罗尼亚大道585号，08007 巴塞罗那，西班牙电子邮箱地址：miro@ub.edu

热那亚大学数学系，多德卡尼斯大街35号，16146 热那亚，意大利

电子邮箱地址：nicklasson@dima.unige.it