全范围近似：使用拉马努金级数近似Theis井函数，以及指数积分的界限

Manotosh Kumbhakar[1,*] 和 Vijay P. Singh[1]

[1]德克萨斯农工大学生物与农业工程系，美国德克萨斯州大学城，邮编 77843。

通讯作者信息：

姓名 – Manotosh Kumbhakar，博士。

电子邮件 – manotosh.kumbhakar@gmail.com

[*]通讯地址:国立台湾大学土木工程系，台湾台北。

摘要：对于水平承压含水层中地下水非稳定流动时描述降深的控制方程，其解可用指数积分表示，该函数也广为人知地称为井函数。为了在实际应用中计算该函数，开发一种不仅准确，而且简单、所需计算项数尽可能少的近似方法至关重要。为此，本研究引入拉马努金级数表达式，提出一种指数积分的全范围近似：对于小自变量（$u \leq 1$），采用拉马努金级数；对于其他范围（$u \in (1,100]$），则采用基于积分界限的近似。对所提出近似的评估结果表明，与现有研究相比，该公式最为准确，最大百分比误差为 0.05%。此外，所提出的公式应用起来简单得多，因为它仅包含指数函数与对数函数的乘积。为进一步检验所提出近似的效率，我们通过一个实际示例评估离散抽水核，结果显示该近似优于其他方法。最后，作者希望这一高效近似能够应用于地下水和水文地质领域。

关键词：井函数；指数积分；拉马努金级数；渐近级数展开；承压含水层。

1 引言

地下水流中的抽水试验分析用于确定承压含水层或越流含水层的储水系数和导水系数。可以考虑一个厚度恒定、水平无限延伸且均质各向同性的水平承压含水层。此外，假定存在一口流量恒定且直径可忽略不计的单一抽水井。于是，连续性方程与达西通量定律的耦合产生了表示降深的控制偏微分方程。（Walton，1970年）。Theis（1935年）首次构建了该控制方程的解析解，该解基于与固体中热传导的类比，表示如下：

$$h_0 - h(r,t) = \frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u}\,du = \frac{Q}{4\pi T}W(u) \qquad (1)$$

其中，$u = \frac{r^2 S}{}, r$ 为径向坐标，t 为时间变量，T 和S 分别为导水系数$_{4Tt}$和储水率；h和h$_0$ 分别为水头和初始水头；Q 为抽水速率。式（1）给出的解被广泛称为Theis解，而$W(u)$称为井函数。不过，在数学文献中，$W(u)$称为指数积分。

井函数的计算是分析承压含水层或越流含水层抽水试验数据的重要环节。对 $W(u)$ 进行直接积分在解析上难以处理。早期研究通常依赖表列值或级数表达式中的少数几项（Jacob，1940年）。然而，这些近似仅在自变量较小时有效。对于较大的自变量，有一种渐近（发散）级数，但它仅在自变量的特定范围内能给出准确的近似（Bleistein and Handeisman，1975年；Coulson and Duncanson，1942年；Harris，1957年）。许多研究采用多项式近似、有理近似或级数展开来求取近似解，这些方法仅在有限的定义域内有效（Allen，1954年；Cody and Thacher，1968年；Abramowitz and Stegun，1970年；Srivastava，1995年；Srivastava and Guzman-Guzman，1998年；Tseng 和 Lee，1998年）。Swamee 和 Ojha（1990年）将若干适用于特定自变量范围的近似方法结合起来，以近似井函数。Barry 等人（2000年）通过在大、小自变量渐近线之间进行插值，构造了一种近似方法。在一项近期研究中，Vatankhah（2014年）提出了一种

简单且非常准确的井函数近似方法，将适用于小、大自变量的近似方法结合起来。然而，开发的近似方法不仅要准确，还要计算高效，这就要求所提出的表达式尽可能少地包含项数。在本研究中，我们引入 S. Ramanjuan 的指数积分级数，并结合该级数与一个界，提出井函数的简单、准确闭式公式。

2 预备知识与主要结果

这里，我们介绍井函数（指数积分），并讨论其级数表达式。

定义1 对于 $u \in \mathrm{R}^{+}$，指数积分 $E_1(u)$（或 $Ei(u)$）定义为

$$E_1(u) = -Ei(-u) = \int_u^{\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du \qquad (2)$$

指数积分 $E_1(u)$ 具有一些有趣的性质，例如，$E_1(-\infty) = -\infty$，$E_1(0) = +\infty$，$E_1(+\infty) = 0$，$E_1(u) = \Gamma(0, u)$，其中 $\Gamma(\blacksquare, v)$ 是上不完全伽马函数（Abramowitz and Stegun, 1970年）。为计算该integral，下面给出其一种级数表达式。

引理1（见 Abramowitz and Stegun，1970年）。令 γ 表示欧拉–马歇罗尼常数。则

$$E_1(u) = -\gamma - ln\, u - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k}{k\, k!} \qquad (3)$$

其中 γ=0.5772（精确到小数点后四位）。

级数表达式公式（3）可通过指数函数的幂级数展开并逐项积分得到。对于任意有限值的 u，该级数均收敛。不过，在实际应用中，它的收敛速度存在一些缺点。具体而言，要在 $u \in (0,20]$ 范围内达到两位有效数字的精度，需要计算至多 75 项级数（Coulson and Duncanson，1942年）。由于溢出和消去误差，该级数仅用于自变量较小的范围内（Harris，1957年；Cody and Thacher,

1968年；Stegun and Zucker，1974年；Cooper and Jacob，1946年）。对于较大的 u，则使用以下渐近（发散）级数。

引理2（见 Bleistein 和 Handeisman，1975年）。对于 u 的正值，有

$$E_1(u) = \frac{exp(-u)}{u}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{(-u)^k} + \mathcal{O}(|u|^{-n})\right) \qquad (4)$$

其中 $\mathcal{O}$ 表示“大-O”记号。

级数公式（4）可以通过对 $E_1(u)$ 的积分进行分部积分展开得到。这一近似仅能在一定范围内用于实际应用，例如 $u > 15$ 或 $u > 50$ （Coulson and Duncanson，1942年；Harris，1957年）。公式（3）和（4）广泛用于抽水试验分析中的井函数近似。在此，我们介绍 S. Ramanujan（Berndt，1994年）提出的收敛速度更快的级数。

引理3（见 Berndt，1994年）。对于 u 的非零实值，有

$$Ei(u) = \gamma + \ln|u| + \exp(u/2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}u^k}{k!\,2^{k-1}}\sum_{n=0}^{\lfloor(k-1)/2\rfloor}\frac{1}{2n+1} \qquad (5)$$

其中 $\lfloor\blacksquare\rfloor$ 表示向下取整函数。

级数公式（5）比公式（3）具有更快的收敛速度，并且由于项 $\exp(u/2)$ 的存在，对更大的 u 也有效（Berndt，1994年）。对于我们所提出的近似，我们还借助了以下关于指数积分的不等式。

引理4（参见 Gaustchi，1959年）。定义如下

$$I_q(u) = exp(u^q)\int_u^{\infty} exp(-t^q)dt \qquad (6)$$

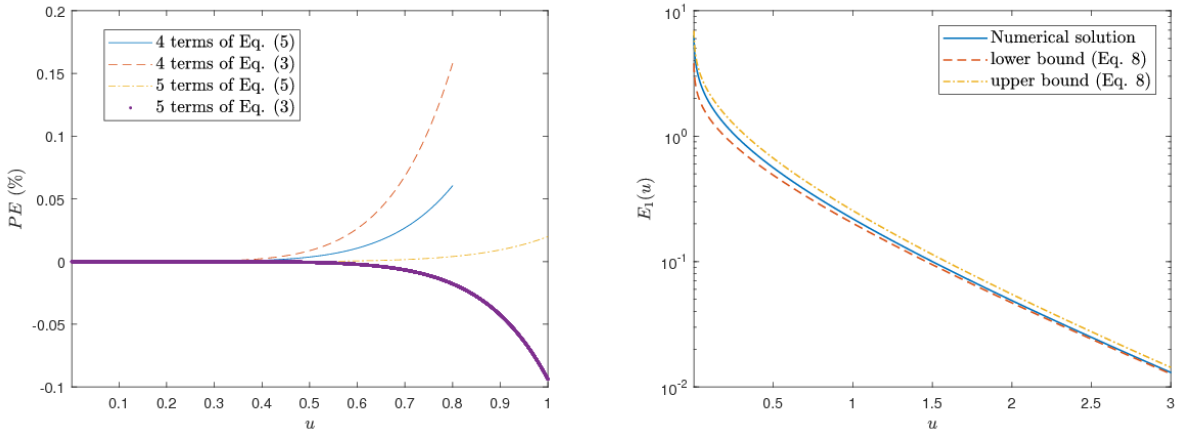
于是，对于 $q > 1$ 和 $u \geq 0$，我们有

$$\frac{1}{2}\left[(u^q+2)^{1/q}-u\right] < I_q(u) \le c_q\left[\left(u^q+\frac{1}{c_q}\right)^{1/q}-u\right] \qquad (7)$$

其中 $c_q = \left[\Gamma(1+\frac{1}{q})\right]^{q/(q-1)}$。事实上，当 $q \to \infty$ 时，式 (6) 变为

$$\frac{1}{2}ln\left(1+\frac{2}{u}\right) \le exp(u)E_1(u) \le ln\left(1+\frac{1}{u}\right), \qquad u \in (0,\infty) \qquad (8)$$

不等式公式（7）的证明基于以下事实： $E_1(u) = \Gamma(0,u)$ and $\int \exp(-t^q)dt_u^\infty = (1/q)\Gamma(1/q, u^q)$。现在，为了检验近似的准确性，我们采用百分误差（百分比误差），其定义为 $PE\ (\%) = 100 \times \left[(W_{num}(u) - W_{approx}(u))/W_{num}(u)\right]$,, 其中 $W_{num}(u)$ 和 $W_{approx}(u)$ 分别表示数值近似和所提出的近似。数值计算部分使用 MATLAB 的脚本 'integral'，该脚本采用全局自适应求积法则（Shampine，2008）。图1a展示了拉马努金级数公式（5）比级数公式（3）收敛更快。图1b绘出了数值解以及公式（8）给出的界限，可以看出，当自变量取较大值时，$E_1(u)$表现为负指数函数；当自变量取较小值时，则表现为对数曲线。



(a) (b)

图 1：(a) 式 (4) 和式 (5) 的图，以及 (b) 式 (8) 的图。

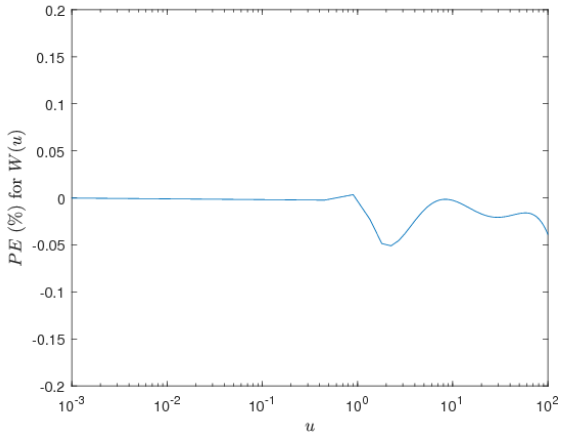
参照图1，对于较小的 u，我们仅取级数公式（5）的前五项，即 $u \leq 1$，并针对其他 u 的取值，即 $u > 1$，提出以下闭式近似：

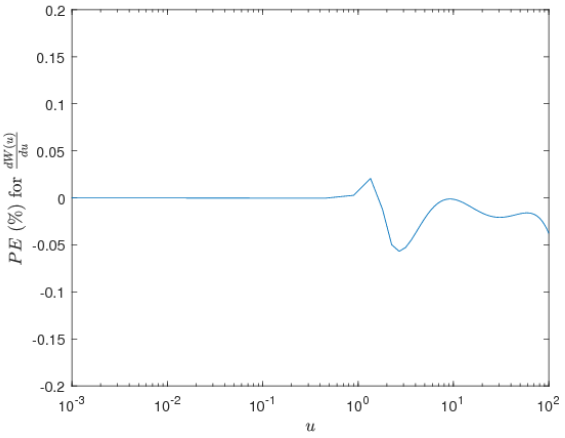
$$\ln E_1(u) = a_1 \ln\left[a_2 exp(-a_3 u) \ln\left(1 + \frac{a_4}{u^{a_5}}\right)\right] \qquad (9)$$

值得注意的是，我们在式 (9) 中使用对数来处理 $E_1(u)$ 的小值。现在，使用 $E_1(u)$ 的数值解，并利用 MATLAB 曲线拟合工具 cftool 和信赖域算法（Coleman 和 Li，1996年）来确定系数 a_i。得到的系数为 $a_1 = 1.21$、 $a_2 = 0.7484$、 $a_3 = 0.8264$、 $a_4 = 1.39$ 和 $a_5 = 0.8346$。因此，$E_1(u)$ 的近似如下：

$$E_1(u) = 0.7042 exp(-0.99994u)\left[\ln\left(1 + \frac{1.39}{u^{0.8346}}\right)\right]^{1.21} \quad for\ u > 1 \qquad (10)$$

正如 Srivastava（1995年）所述，降深曲线的导数是斜率匹配方法中的关键量。因此，所提出的 $E_1(u)$近似应能够准确再现其导数。我们分别在图2a和图2b中绘制了整个实际范围$0 < u \leq 100$内$W(u)$及其导数的百分误差。为便于比较，我们在表1中列出了所有现有的闭式公式及其误差（Vatankhah，2014年）。结果表明，所提出的近似及其导数的最大绝对百分误差（%）分别为0.05%和0.06%，远小于表1中给出的其他公式。此外，与现有公式相比，式（10）仅包含两个较简单项的乘积，因此更适合实际应用。





(a) (b)

图2：所提出的近似（对于 $u \in [0.001,1]$，采用含五项的公式5；对于 $u \in (1,100]$，采用公式10）在（a）$W(u)$和（b）$dW(u)/du$中的百分比误差。

表1：整个范围 $u \in (0,100]$ 内承压含水层井函数的现有近似及百分比误差（%）。

来源	所提出的 $W(u)$	最大百分比误差 (%)	
		$W(u)$	$W'(u)$
Swamee 和 Ojha（1990年）	$\left[\left(\ln\left[(1+u)\left(0.\frac{56146}{u}+0.65\right)\right]\right)^{-7.7}+u^4 exp(7.7u)(2+u)^{3.7}\right]^{-0.13}$	1.28	2.10
巴里 等人（2000年）	$\frac{exp(-u)\ln\left[1+\frac{0.5615}{u}-0.4385\left(1.0421u+\frac{1}{1+u^{1.5}}+\frac{1\,0801..}{35u^{-1.0919}}\right)^{-2}\right]}{0.5616+0.4385exp(-2.2803u)}$	0.07	0.20
Vatankhah（2014年）	$\left[\left(\frac{1-0}{\left[\frac{0\,565}{u}+4\right]}\right)^{-2}\cdot\frac{2}{2}\right]+u^2 exp(2u)\left(\frac{u+1\,384}{u+0\,444}..\right)^{-0.5}$ $19u^{0.7})\ln(.)$	0.20	0.22
本研究	$-\gamma-\ln\lvert u\rvert+\exp(-u/2)\left[u+\frac{u^2}{4}+\frac{u^3}{18}+\frac{u^4}{144}+\frac{23u^5}{28800}\right]$ 当 $0.001\le u\le 1$ $0.7042exp(-0.99994u)\left[\ln\left(1+\frac{1}{u^{0.8346}}\cdot\frac{39}{}\right)\right]^{1.21}$ 当 $u>1$	0.05	0.06

3 离散核生成器的实际应用

为检验所提出的近似在实际应用中的准确性，我们对离散抽水核进行了评估，该抽水核由 Morel-Seytoux 和 Daly（1975年）定义：

$$U=\frac{1}{4\pi T}\left(W\left[\frac{r^2S}{4tT}\right]-W\left[\frac{r^2S}{4(t-\tau)T}\right]\right) \qquad (11)$$

其中，$t=0$ 表示井开启的时间，$t=\tau$ 表示井关闭的时间，τ 为单位时间段，r 为距井的距离。此外，对于$t>\tau$（井关闭之后），式（11）也适用。由于式（11）涉及减法，可能会比单次近似产生更大的误差，因此评估式（11）对于检验所提出的近似十分重要。这里，我们考虑之前研究者考察的测试

案例（Tseng 和 Lee，1998年；Barry 等人，2000年；Vatankhah，2014年）。对于 $T = 10000$ 米/周、 $S = 0.2$、 $\tau = 1$ 周、 r =1050、2100、3150、4200 米的情况评估式（11），且t 在2至18周之间变化。此案例对应的u 范围为$0.30 < u < 89$。从图3可以看出，Barry 等人（2000年）、Vatankhah（2014年）和本研究给出的闭式近似，在井函数的整个实际范围内都适用于这一实际应用。事实上，无论准确性还是简洁性，本研究提出的近似都远优于其他方法（最大百分比误差约为0.1%）。

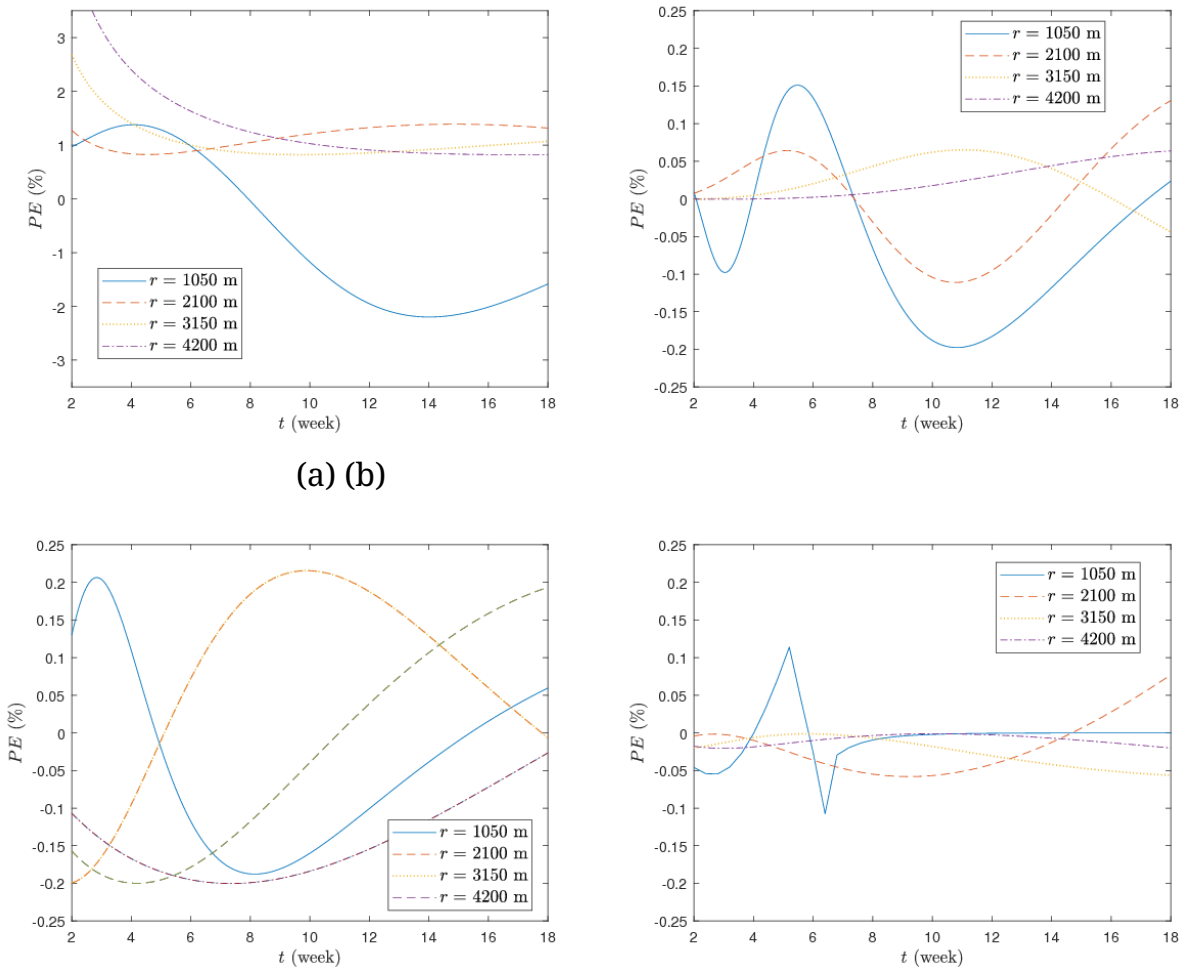


图 3：对于从抽水井 r (m) 中选取的若干项，U (week/m^2) 的百分误差（PE）随时间 t (week) 的变化：(a) Swamee 和 Ojha（1990年），(b) Barry 等人（2000年），(c) Vatankhah

（2014年），以及（d）本研究。

4 结论

本研究提出了一种利用拉马努金级数近似和指数积分的界所构造的井函数（指数积分）闭式公式。对于小自变量，采用仅含五项的级数近似；对于自变量的其余范围，基于该界的近似则具有良好的精度。所提出的近似不仅比现有公式更准确，而且形式更简单，因为只需计算两项。此外，本研究还考察了一项与离散核生成器求值相关的实际应用，以进一步检验所提出近似的效率。结果表明，本研究推导的近似具有极高的精度。

致谢 作者谨以此项工作献给数学天才斯里尼瓦瑟·拉马努金。

参考文献：

Abramowitz, M. 和 Stegun, I. A.（编）。（1970年）。《数学函数手册》，公式、图表和数学表（第55卷）。美国政府印刷局。

Allen，E. E.（1954年）。解析近似。计算数学，8（48），240-241。Barry，D. A.、帕兰奇，J. Y. 和李，L.（2000年）。指数积分（泰斯井函数）的近似。《水文学杂志》，227（1-4），287-291。

Berndt, 纽约：施普林《拉马努金笔记》第四部分，以及 H andelsman, R. A.（1975年）。积分的渐近展开。Ardent Media。

Cody, W. J., 和 Thacher, H. C.（1968年）。指数积分 $E1\ (x)$。《计算数学》，22(103)，641-649。

Coleman, T. F., 和 李, Y.（1996年）。用于非线性极小化的内部信赖域方法受界限约束。《SIAM优化杂志》，6(2)，418-445。

Cooper Jr, H. H., 和 Jacob, C. E.（1946年）。用于评估地层

常数并总结井群历史的广义图解法。《Eos，美国地球物理联合会汇刊》，27(4), 526-534。Coulson, C. A., 和 Duncanson, W. E.（1942年）。LXXX. 指数积分的一些新值。伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学杂志，33(225), 754-761。Gautschi, W.（1959年）。关于伽马函数和不完全伽马函数的一些初等不等式。J. Math. Phys, 38(1), 77-81。Harris, F. E.（1957年）。指数积分 Ei (x) 表。计算数学，11(57), 9-16。Jacob, C. E.（1940年）。论弹性自流含水层中的水流。《Eos，美国地球物理联合会汇刊》，21(2), 574-586。Morel-Seytoux, H. J., 和 Daly, C. J.（1975年）。用于河流—含水层研究的离散核生成器。《水资源研究》，11(2), 253-260。Shampine, L. F.（2008年）。MATLAB中的向量化自适应求积。《计算与应用数学杂志》，211(2), 131-140。Srivastava, R.（1995年）。使用井函数近似表达式的影响。《灌溉与排水工程杂志》，

[illegible]

Stegun, I. A., 和 Zucker, R.（1974年）。特殊函数的[illegible]

[illegible]承压含水层的抽水试验分析。《灌溉与排水工程杂志》，116(1), 99-106。Theis, C. V.（1935年）。利用地下水储存时测压水面降深[illegible]《Eos，美国地球物理联合会汇刊》，16(2), 519-524。Tseng, P. H., 和 Lee, T. C.（1998年）。指数积分的数值计算：Theis井函数近[illegible]

[illegible]《水文工程杂志》，19(3), 649-655。Walton, W. C.（1970年）。地下水资源[illegible]