arXiv:2303.17028v1 [cs.CG] 29 Mar 2023

图积中嵌入的复杂性*

Therese Biedl† David Eppstein‡ Torsten Ueckerdt§

摘要

图嵌入，尤其是作为网格子图的嵌入，是超大规模集成电路设计和图绘制中的一个古老课题。本文研究相关问题，探讨将图 G 嵌入宿主图中的复杂性；该宿主图是路径 P 与满足某些性质（如树宽、路径宽度或树深度较小）的图 H 的强积。我们证明，即使对 G 和 H施加了诸多限制，这一问题仍是 NP-困难。特别是，即使对于路径宽度较小的树，计算行路径宽度和行树深度也是 NP- 困难；而对于串并联图，计算行树宽同样是 NP- 困难。

1 引言

分层树宽、分层路径宽和行树宽是图的结构参数，在图乘积结构理论近期的发展中发挥了核心作用。（最初的图乘积结构定理由 Dujmovíc 等人证明 [7]；关于改进和相关结果，另见 [6, 9, 19] 。）判定一个图是否具有分层路径宽 $\leq$ 1是 NP 完全问题 [2]。本文探讨图 G的行树宽 的计算复杂性方面的类似问题：其定义为满足以下条件的图 H 的最小可能树宽，其中 G 是强积 $H\boxtimes P_\infty$ 的子图，且 P_∞ 是一条单向无限路径：

- 计算行树宽是 NP-困难的吗?
- 判断平面图的行树宽是否为 1（其最小的非平凡取值）是 NP-困难的吗?
- 对于这些问题， G 必须有多复杂才会使问题变难? 对于平面图，这些问题是否更容易?

行树宽可以自然地推广到 H 的其他乘积形式。例如，图 G 的 行路径宽度是满足 G 为图 $H\boxtimes P_\infty$, 的子图的图 H 的最小可能路径宽度；类似地，也可以定义行树深度 或行简单树宽 或行简单路径宽度。上述问题都可以针对这些参数中的任意一个提出。

这些问题具有几何特征，源于它们所涉及的网格状图乘积。它们是子图同构问题的特例，而即使对 G 和宿主图 [17] 都施加严格限制，该问题仍然很难。我们的结论是，这些问题确实很难，即使图非常简单也是如此。判断有界路径宽度的树是否具有行路径宽度 1 是 NP-困难的；行简单路径宽度和行树深度也同样如此。对于树，行树宽是平凡的；但判断有界度且有界路径宽度的串并联图是否具有行树宽 1，则是 NP-困难的。在小集合扩展猜想（这是计算复杂性理论中唯一博弈猜想的加强形式）成立的前提下，行树宽、行路径宽度、分层树宽和分层路径宽度都难以在常数近似比下近似。我们也给出了一些正面结果：对于毛毛虫图，判断其是否可嵌入 $P\boxtimes P$（带对角线的网格）可在多项式时间内完成；对于有界树宽且面大小有界的平面图，判断其是否可嵌入 $P\square P$（网格）也可在多项式时间内完成。

1.1 定义

图 G 的树分解是一棵树 T，其顶点被标记为图 G的顶点子集，这些子集称为袋。每个顶点都必须属于构成 T 的连通子树的袋中，并且 G 的每条边的两个端点都必须同时包含在至少一个袋中。如果 T是一条路径，则它构成路径分解。该分解的宽度是最大袋的大小减一。G 的树宽是 G的树分解的最小宽度，而路径宽度是路径分解的最小宽度。如果每个 w 顶点集合至多属于两个袋，则树分解是 w-简单的。 [简单树宽] 的简单路径宽度是使 G 具有宽度为 $\leq w$的 w-简单路径[树] 分解的最小 w 。图 G 的树深度是定义在 G 顶点上的有根树 T 的最小高度，使得 G 的每条边都连接 T中的一个祖先—后代对。

对于至少有一条边的连通图，这些宽度参数的最小值为一。树宽为一的图是树。树宽为二的图是串并联图及其子图。路径宽度为一的图不只是路径，还有

*这项工作始于班夫国际研究站于2021年11月21日至26日举办的图乘积结构理论研讨会（BIRS21w5235）。

†滑铁卢大学戴维·R·切里顿计算机科学学院。研究经费由加拿大自然科学与工程研究理事会资助。

‡加州大学欧文分校计算机科学系。研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号 CCF-2212129。§卡尔斯鲁厄理工学院理论信息学研究所

毛毛虫树：非叶顶点构成一条称为脊柱的路径的树。（毛毛虫图的叶节点称为腿。）简单路径宽度为一的图是路径。树深度为一的图是星图，顶点数为整数 ℓ 的图 $K_{1,\ \ell}$。为避免指定具体的顶点数，方便起见，用 $P_\infty = \langle p_0,\ p_1,\ \ldots \rangle$ 表示一条射线，即一条单向无限路径；用 C_∞ 表示脊柱长度无限且每个脊柱顶点上都有无限多条腿的毛毛虫图；用 S_∞ 表示具有无限多个度为1的顶点的星形图。

两个图的强积 $G \boxtimes H$ 中，每一对顶点各对应一个顶点（$u_i,\ v_j$），其中一个顶点 u_i 属于 G，另一个顶点 v_j 属于 H；当 u_i 与 $u_{i'}$ 在 G 中相邻或相同，且 v_i 与 $v_{i'}$ 在 H 中相邻或相同时，顶点对（$u_i,\ v_j$）和（$u_{i'},\ v_{j'}$）之间有一条边。例如，两个路径的强积是王图，即国际象棋王在棋盘上移动所对应的图，棋盘的行和列分别由这两个路径的顶点索引（另见图 1）。

图 G 的分层是将顶点划分为集合 $L_0,\ L_1,\ \ldots\ldots$，使得任意一条边的两个端点都位于同一集合或相邻集合中。它可以理解为将图 G 表示为路径 P 与完全图 K的强积$P \boxtimes K$ 的一个子图；分层中的各层是该积中来自路径同一顶点的顶点子集。图的分层树分解和分层路径分解由图的树分解或路径分解以及一个分层共同组成。其宽度为袋与层的交集中最大的大小减一。图 G 的分层树宽 [8, 18] 或分层路径宽 [2]是此类分解的最小宽度。相比之下，G 的行树宽或行路径宽，是满足G为 $P \boxtimes H$ 的子图（其中 P为某个路径）的图 H 的树宽或路径宽的最小值。直观而言，行树宽和行路径宽通过要求每一层使用相同的分解，对分层树宽和分层路径宽的概念作了限制。这些概念并不等价：任意图 G 的分层树宽至多为其行树宽加一，但存在分层树宽为一而行树宽任意大的图。分层路径宽与行路径宽之间也存在类似的分离 [5]。类似地，我们可以定义分层简单树宽、简单路径宽度和树深度，以及行简单树宽、简单路径宽度和树深度；据我们所知，此前尚未研究过这些参数。

我们证明以下问题是 NP-困难的：

- 行简单路径宽度：给定一个图 G 和一个整数 k，G 的行简单路径宽度是否至多为 k？我们将证明，即使对于$k = 1$，该问题也是 NP-困难的；此时问题变为判断 G 是否为 $P_\infty \boxtimes P_\infty$, 的子图，即王图，这也是我们将该问题称为王图嵌入问题的原因。详见第2节和附录A。
- 行路径宽度：给定一个图 G和一个整数k，G 的行路径宽度是否至多为 k？我们将证明，即使对于 $k = 1$，该问题也是 NP-困难的；此时问题变为判断 G 是否为$C_\infty \boxtimes P_\infty$的子图。详见第3节。
- 行树宽：给定一个图 G 和一个整数k，G 的行树宽是否至多为 k？我们将证明，即使对于 $k = 1$，该问题仍然是 NP-困难的；此时问题转化为判断对于某棵树 T，G是否是 $T \boxtimes P_\infty$ 的子图。参见第4节和附录B。
- 行树深度：给定一个图 G 和一个整数k，G 的行树深度是否至多为 k？我们将证明，即使对于 $k = 1$，该问题仍然是 NP-困难的；此时问题转化为判断 G 是否是$S_\infty \boxtimes P_\infty$的子图。参见附录C。

为强积 $H \boxtimes P_\infty$引入一些记号很有帮助。回顾一下，P_∞ 是一条射线$\langle p_0,\ p_1,\ \ldots\ldots \rangle$. 对于任意顶点 $v \in H$，P-扩展 是顶点集合$\langle v \times p_0,\ v \times p_1,\ \ldots\ldots \rangle$。对于任意顶点 $v \times p_i \in H \times P_\infty$，$H$-投影 是顶点 v，而 P- 投影 是顶点 p_i。这些概念自然也可推广到边和路径。受情形 $H = P_\infty$（其中 $H \boxtimes P_\infty$ 是王图）的启发，我们定义如下边定向：若图 $H \boxtimes P_\infty$ 中的边 vw 的两个端点 $v,\ w$ 具有相同的 H-投影，则该边为水平边；若它们具有相同的 P-投影，则该边为垂直 边；否则，该边为对角 边。每个顶点仅与两条水平边关联。

我们偶尔也会研究两个图的笛卡尔积$H \square P_\infty$，它与强积相同，只是省略了对角线。特别地，$P_\infty \square P_\infty$ 是矩形网格。

2 网格嵌入

本节研究 KingGraphEmbedding。这个问题与网格嵌入密切相关，即判断给定的图 G 是否为 $P_\infty \square P_\infty$的子图。网格嵌入是一个由来已久且经过充分研究的问题，至少从 20 世纪 80 年代起，人们就因其与超大规模集成电路设计的联系而对其进行了研究。Bhatt 和 Cosmadakis 在 1987 [3] 中证明，即使对于路径宽度为 3 的树，网格嵌入也是 NP-困难的（作者并未明确研究路径宽度，但可以从构造中验证）。Gregori [13]将他们的证明推广到了二叉树。这两个证明都采用了一种后来被 Eades 和 Whitesides [10]称为“逻辑引擎”的技术。最近，Gupta 等人 [15] 将这一结果推广到了路径宽度为 2 的树。

定理 1 (Gupta 等人 [15])。 网格嵌入 即使对于路径宽度为 *2* 的树，也是 *NP*- 困难的。

[3, 15] 中的归约可以修改为适用于 KingGraphEmbedding。更简单的方法是使用以下通用变换。

定义 T_1 和 T_2 为图 2 所示的树，它们分别由细分 $K_{1,\ 1}$ 和 $K_{1,\ 4}$ 的一条边而形

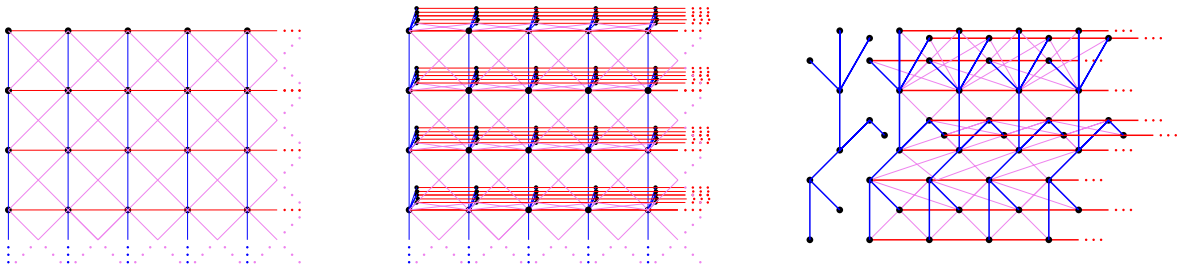

图1：树 T的图 $P_\infty \boxtimes P_\infty$, $C_\infty \boxtimes P_\infty$,和 $T \boxtimes P_\infty$。

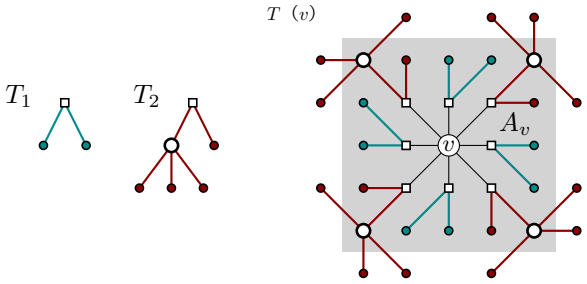

图2：观察2中的树 T_1、 T_2和 $T\ (v)$ 。

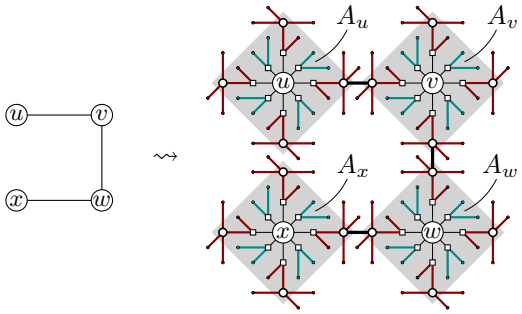

图3：如果 $G \subset P_\infty \square P_\infty$，那么 $G' \subset P_\infty \boxtimes P_\infty$。（我们展示了 $P_\infty \boxtimes P_\infty$的一个旋转 $45°$ 。）

成。对于给定的顶点 v，定义 $T(v)$ 为一棵以 v 为根、具有八个子节点的树： T_1 和 T_2各四个副本，并在它们的度为 2 的顶点处与 v 相连。以下结论不难验证（见附录A）：

观察2。 设 G 是一个简单图。通过将 G 中的每个顶点 v 替换为一棵新的树 $T(v)$，并对 G中的每条边 uv，连接 $T(u)$ 中的一个度为4 的顶点与 $T(v)$ 中的一个度为4的顶点，从而构造 G'。那么，当且仅当 $G' \subset P_\infty \boxtimes P_\infty$时， $G \subset P_\infty \square P_\infty$。

该变换显然保持树的结构。将每个顶点 v 替换为半径为 3 的树 $T(v)$，路径宽度至多增加 3，因此对 Gupta 等人 [15]的树应用该变换，可得如下结果。

推论 3. KingGraphEmbedding 是 *NP*-困难的，即使对于路径宽度至多为 5 的树也是如此。

事实上，可以很容易地改造 Gupta 等人等人。 [15] 从而证明，即使对于路径宽度为 2 的树，KingGraphEmbedding 仍是 NP 困难的；示意图见附录中的图 5。

2.1 毛毛虫树

另一方面，对于路径宽度为 1 的情形（即毛毛虫图），我们可以在线性时间内求解 KingGraphEmbedding。

定理 4. 对于任意毛毛虫图 G，以下条件等价。

(1) $G \subset P_\infty \boxtimes P_\infty$*(2)* G 可以嵌入到 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 中，使得所有脊边都是对角边 *(3)* 对于 G 的脊柱上的每条子路径 Q ，都有$\sum_{v \in V(Q)} \deg(v) \leq 6|V(Q)| + 2$。

证明。 (1)$\Longrightarrow$ (3)：假设 G 是 $H = P_\infty \boxtimes P_\infty$的一个毛毛虫图子图。令 Q 为 G的脊柱的任意固定子路径。显然，对于任意顶点 $v \in P_\infty \boxtimes P_\infty$ ，有 $|N_H(v)| \leq 8$ ；对于任意边 $uv \in P_\infty \boxtimes P_\infty$ ，有 $|N_H(u) \cap N_H(v)| \geq 2$。由于毛毛虫图 G 不含三角形，对于 x 中任意两个相邻顶点 x, y，我们有 $N_G(x) \cap N_G(y) = \emptyset$。因此

$$\sum_{v \in V(Q)} \deg(v) \leq 8|V(Q)| - 2|E(Q)| = 6|V(Q)| + 2.$$

(3) $\Longrightarrow$ (2)：假设 $G = (V, E)$ 是一个毛毛虫图，其脊柱为 hv_1, ..., v_ki。 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 的顶点自然对应于 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 其中 (p_i, p'_j) 映射到 (i, j)。我们沿主对角线嵌入 G 的脊柱，即对于 $i = 1$, ..., k，将 v_i 放置在 (i, i)。然后，我们沿脊柱从 v_1 向 v_k 推进，始终将下一个位于 v_i 的腿放置在与 (i, i) 相邻的位置 (x, y)，并使 $x+y$ 尽可能小。如果 v_i 的两个叶节点分别成功嵌入到 $(i-1, i)$ 和 $(i, i-1)$，则称 v_i 是空闲的。特别地，第一个度至少为 4 的顶点总是空闲的。（我们假设存在这样的顶点，否则 G 显然可以被嵌入。）

假设此嵌入过程未能为 v_j 处的叶节点找到合适位置（对于某个 $j \in [k]$） 。设$i \leq j$ 为满足 v_i 空闲的最大指标，并设 $Q = \langle v_i, \ldots\ldots, v_j \rangle$ 为 G 的脊柱上从 v_i到 v_j 的子路径。注意，$\deg_G(v_i)$，$\deg_G(v_j) \geq 4$ ，并且对于

$A = \{(i,\ i),\ \ldots\ldots,\ (j,\ j)\}$，在 $P_\infty \boxtimes P_\infty$中的每个 5($j-i$)+9 点上，$V(Q) \cup N_G(Q)$中都有一个顶点。结合 $|V(Q) \cup N_G(Q)| = \sum_{v \in V(Q)} \deg(v) - (j-i) + 1$，可得

$$
\begin{aligned}
& |V(Q) \cup N_G(Q)| > |A \cup N(A)| \\
\Leftrightarrow & \sum_{v \in V(Q)} \deg(v) - (j-i) + 1 > 5(j-i) + 9 \\
\Leftrightarrow & \sum_{v \in V(Q)} \deg(v) > 6(j-i) + 8 = 6(j-i+1) + 2 \\
& = 6|V(Q)| + 2,
\end{aligned}
$$

这意味着 G 不满足 (3)。

(2) $\Longrightarrow$ (1): This is immediate. □

推论 5. KingGraphEmbedding 对于 n 个顶点的毛毛虫图可以在线性时间内求解。

证明。设 G 是一棵脊柱为 $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ 的毛毛虫树，$k \le n$。根据定理 4 中的 (3)，当且仅当序列 $(\deg(v_i) - 6)_{i \in [k]}$ 存在一个和至少为 3 的连续子序列时，G 才无法嵌入 $P_\infty \boxtimes P_\infty$。寻找这样的子序列是最大子数组问题，可在 $O(k)$ [14] 时间内解决。 □

3 行路径宽度

现在我们考虑行路径宽度，并证明判定行路径宽度是否为 1 是 NP-困难的。这等价于询问给定的图 G 是否为 $C_\infty \boxtimes P_\infty$ 的子图。我们还考虑与之相关的嵌入到 $C_\infty \square P_\infty$ 中的问题。利用关于图变换如何影响可嵌入性的另一条观察，可以很容易地证明这两个问题都是 NP-困难的。

观察 6. 设 G 为一个简单图，对于 $k \in \{4,6\}$，令 G'_k 为在 G的任意原始顶点 v 上添加$\max\{0, k - \deg(v)\}$个与 v相邻的叶节点后得到的图。那么

- $G \subset P_\infty \square P_\infty$ 当且仅当 $G'_4 \subset C_\infty \square P_\infty$。
- $G \subset P_\infty \boxtimes P_\infty$ 当且仅当 $G'_6 \subset C_\infty \boxtimes P_\infty$。

证明。正向显然：若 G 是这样的子图，则取 G 在网格中的嵌入，并利用C_∞ 每个脊柱顶点处 k 条腿的 P 延伸，将添加的叶节点放置在每个顶点 v上。

另一方面，注意到 C_∞ 的腿的 P-延伸上的所有顶点在 $C_\infty \square P_\infty$ 中的度至多为 3，在 $C_\infty \boxtimes P_\infty$ 中的度至多为 5。我们构造了 G'_k（对于 $k \in \{4,6\}$），使得 G 的顶点度为 k，因此它们必须放置在脊柱顶点的 P- 延伸上。因此，若令 π 为 C_∞ 的脊柱，则 G 可按要求嵌入 $\pi \square P_\infty$（分别为 $\pi \boxtimes P_\infty$）中。 □

定理 7. 判定一棵树是否为 $C_\infty \boxtimes P_\infty$ 的子图是 *NP*-困难的。判定一棵树是否为 $C_\infty \square P_\infty$ 的子图同样是 *NP*-困难的。即使对于最大度为常数且路径宽度为 *3* 的树，这两个结论仍然成立。

证明。根据推论 3 后的讨论，判定 $G \subset P_\infty \boxtimes P_\infty$ 是 NP-困难的，即使对于路径宽度为 2 的树也是如此。利用观察 6 和 $k = 6$将 G 转换为 G'。这仍然得到一棵树，路径宽度最多增加 1，且最大度为 8。此外，$G \subset P_\infty \boxtimes P_\infty$ 当且仅当 $G' \subset C_\infty \boxtimes P_\infty,$，这证明了第一个结论。第二个结论的证明类似，使用定理 1 和观察 6，并取 $k = 4$。 □

推论 8. 行路径宽度(G) 是 *NP*-困难的，即使限定为有界度且路径宽度有界的树也是如此；即使我们只想判断行路径宽度是否为 *1*，也仍然是 *NP*-困难的。

4 行树宽

我们现在简要说明，计算行树宽是 NP-困难的，即使只是判断其是否为 1 也如此；也就是说，判断给定的图能否嵌入到某个树 T 的 $T \boxtimes P_\infty$ 中。（完整证明见附录。）

定理 9. 判断图 G 是否为某个树 T 的 $T \boxtimes P_\infty$ 的子图是 *NP*-困难的，即使该图是串并联图 G 也是如此。

我们从 NAE-3SAT 出发的归约使用了 Eades 和 Whitesides 的逻辑引擎 [10]。固定一个 NAE-3SAT 的实例 I；我们假设其中有一个子句是 $x_n \vee \overline{x_n}$，因为添加这一条件不会影响解的存在性。我们首先构造一个图 G_0，并将其中一些边指定为水平边或垂直边。（附录中的图 6 展示了 G_0，而图 4 展示了由此得到的图。）首先构造框架（橙色），它由三条连接两个顶点 t, b 的路径组成；中间路径 有 $H := m + 2n + 1$ 条垂直边，而两条外部路径 各有 $2n$ 条水平边、H 条垂直边，随后再接 $2n$ 条水平边。接下来，为每个变量 x_i 添加其骨架 x_i（浅青色/深青色）；每个骨架由两条路径组成，它们连接到中间路径上距 t 和 b 各 i 的顶点处。这些路径分别对应文字 x_i 和 $\overline{x_i}$，两端各由 $2n + 1 - 2i$ 条水平边构成，中间夹着 $H - 2i$ 条垂直边。图中的中间 m 行称为子句行，每行对应一个子句。最后，我们添加旗标（绿色）。具体来说，在文字 ℓ_i 的骨架与 c_j 所在行相交的顶点处，当且仅当 ℓ_i 不在 c_j 中出现时，我们添加一个叶节点（通过一条水平边连接）。至此，图 G_0 的构造完成。

接下来，我们添加更多顶点和边，迫使边的方向与我们为 G_0 指定的一致。首先，“将宽度扩大三倍”：在我们绘制的 G_0 中每一列的前后各插入一列，将每条水平边细分，并对每个具有

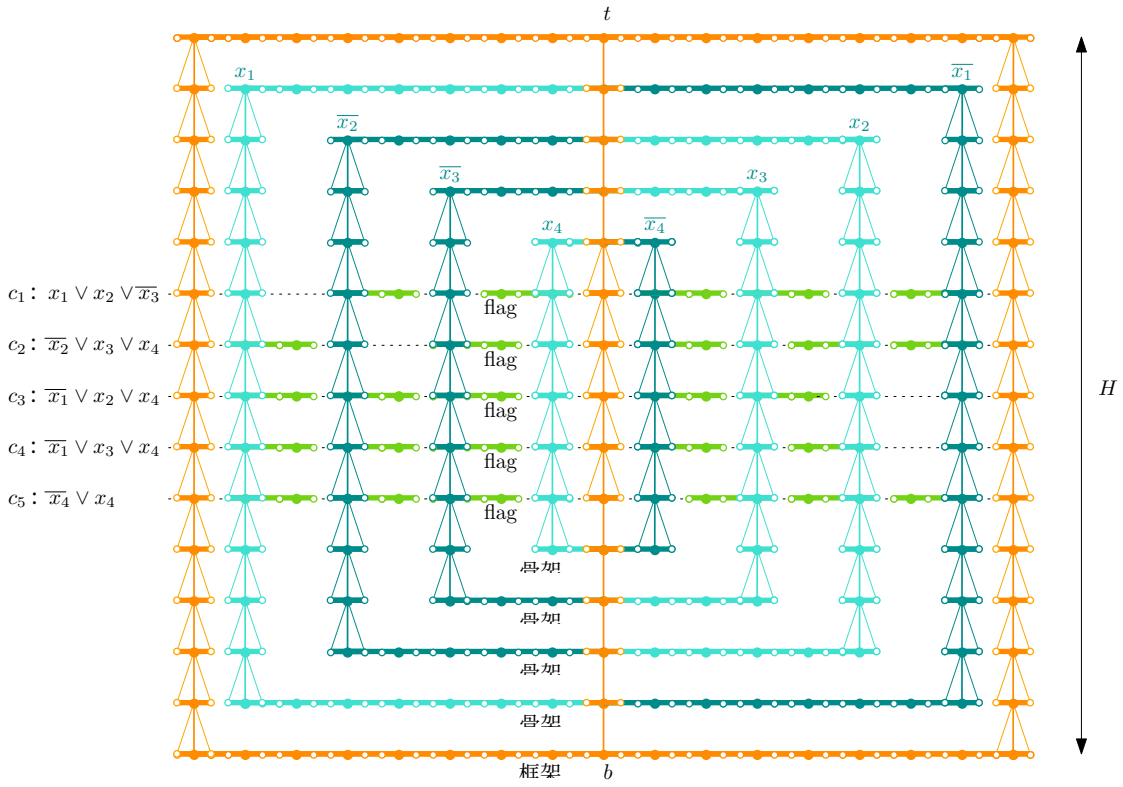

图 4：行树宽的约简 。粗边表示附加了一个 $K_{2,5}$。 G_0 的顶点为实心。

k 条相邻水平边的顶点，添加 $2-k$ 个通过水平边连接的新叶节点。（图4中的新顶点以空心表示。）接下来，在某些垂直边上添加一个箭头 vw。假设 v 位于 w 下方，这意味着添加边 $(v_\ell,\ w)$ 和 $(v_r,\ w)$，其中 v_ℓ, v_r 是与 v 通过水平边相邻的两个邻点。对于任何下端点 v 不 属于骨架的垂直边，我们都添加箭头。将所得结果记为 G'。最后，我们通过在每条水平边 uv 上添加一个 $K_{2,\ 5}$，将 G' 转换为 G；也就是说，添加五个同时与 u 和 v 相邻的新顶点。（为避免图示过于杂乱，图4中没有画出 $K_{2,\ 5}$，而是用粗边表示。）将所得图记为 G，并验证它确实是一个串并联图。

可以论证（见附录），如果 G 嵌入到某棵树 T 中，则所有附有$K_{2,\ 5}$ 的边都必须是水平的。这反过来迫使 G' 实际上嵌入在 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 内部（这是最困难的部分）。箭头迫使与其相连的边为垂直的，因此通过计数论证， G' 的嵌入意味着 G_0 嵌入到 $P_\infty \square P_\infty P_\infty \square P_\infty$ 中，并且遵循指定的方向。这一点（结合标准的逻辑引擎论证）很容易看出等价于该 NAE-3SAT 实例具有一个解。

我们构造中的图的最大度为 16，路径宽度为 $O(1)$，因此计算 RowTreewidth 即使我们限制最大度或路径宽度，仍然是 NP-困难的。

推论 10。 RowTreewidth是 *NP*-困难的，即使对于具有有界度和路径宽度的串并联图也是如此；即使我们只想判断 *rowtreewidth* 是否为 *1*。

类似的构造表明，判定是否$G \subset T \square P_\infty$ 对于某棵树 T 也同样是 NP-困难的。具体而言，使用相同的构造（G_0 到 G' 到 G），但省略对角边，并将‘$K_{2,5}$’替换为‘三条长度为 2 的路径’。这会迫使 G 在 $T \square P_\infty$中的任何嵌入都使所有“水平”边具有所需的方向。如上所述，进而可知，对于一条路径 π， G 位于 $\pi \square P_\infty$ 内。因此，任何“垂直”边 uv 都必须具有这一方向，因为 u, v 各有两条相邻的水平边。由此可得到一个嵌入到网格中的 G_0，且该嵌入遵循给定的方向，因此也就得到 NAE-3SAT 的一个解。

5 不可近似性

目前尚不清楚是否能够在多项式时间内将图的树宽或路径宽度近似到常数因子以内，但已知根据计算复杂性理论中的一个标准假设，即小集合扩展

猜想 [20], , 针对树宽的多项式时间近似算法已知的最佳近似比为 $O(\sqrt{\log w})$，其中 w 是树宽 [11]。

如我们现在所示，相同的困难性结果也适用于行树宽和行路径宽度的近似：

定理 11. 如果存在一种近似算法，能够以近似比 ρ近似行树宽、行路径宽度、分层树宽或分层路径宽，那么就存在一种近似算法，能够以至多 3ρ的近似比近似树宽或路径宽度（分别对应）。因此，小集合扩展猜想意味着 ρ 不能是 $O(1)$。

证明。 设 G 是一个图，我们希望近似其树宽或路径宽度；设 w 是它的树宽或路径宽度，并通过向 G添加一个全局顶点，构造图 G^+ ，使其树宽或路径宽度为 $w+1$。这个全局顶点迫使 G^+ 的每种分层至多包含三层。 G^+ 有一个平凡的分层，仅含一层，且其行树宽或行路径宽度为 $w+1$。任何其他分层的行树宽、行路径宽度、分层树宽或分层路径宽都至少为 $w+1/3$, 因为它能为 G^+ 给出一个树分解，其中的袋是三层中各袋的并集。因此，对 G^+ 的行树宽、行路径宽度、分层树宽或分层路径宽作任何近似，都能得到对 G^+的树宽或路径宽度的近似，从而也能近似 G的树宽或路径宽度，且近似比至多增加三倍。

□

请注意，构造出的图 G^+ 不一定是平面图。事实上，对于平面图，存在树宽 [16]的 $O(1)$-近似算法。

6 展望

本文证明，即使对输入图施加严格限制，计算行路径宽度和行树宽等图参数仍是 NP-困难的。事实上，这些限制中的大多数都使固定参数可处理性（或者至少在特殊情况下找到多项式时间算法）难以实现。我们确实指出了几种可能的情形，在这些情形下找到嵌入可能可以在多项式时间内完成，但这方面的大部分问题仍有待未来研究：

- 给定一个有界半径的图，能否在多项式时间内求解 RowTreewidth 或 RowPathwidth？在我们所有的困难性构造中，图的半径为 $\Theta(n)$。有界半径迫使任何分层都只能使用有界数量的行，因此，如果行树宽或行路径宽度也有界，那么原图的树宽或路径宽度也必然有界；但如何在算法中利用这一点并不明显。

  注意，对于有界半径的图，网格嵌入是多项式时间的，因为图只有在最大度有界时才能嵌入网格；而最大度与半径同时有界意味着图的规模有界，因此存在一个常数时间算法。

- 对于网格嵌入的结果（[3] 以及命题 13 中的构造），我们非常需要能够改变图的嵌入，以便翻转骨架和标志。如果嵌入固定，情况如何？特别是，当树的嵌入固定时，测试一棵树能否嵌入网格是否为 NP-困难，结果是否可能与 [1]中的结果类似？

我们还可以研究固定嵌入且面度较小的平面图，例如三角剖分平面图。在我们所有的构造中，有些面的度为 $\Theta(n)$。对于三角剖分平面图，我们能否解决其中任何问题（尤其是 KingGraphEmbedding）？这仍是一个开放问题，但如果树宽也较小，我们可以取得一些进展。

定理 12。 设 G 是一个树宽为 t的平面图，并带有一个平面绘图 Γ，其中所有面的度至多为 Δ。那么，我们可以在时间 $O^*(n^{3(t+1)\Delta})$内测试 G 能否嵌入网格（且嵌入方式与固定嵌入 Γ一致）；也就是说，当 $t\cdot\Delta\in O(1)$时，该问题可在多项式时间内解决。

证明。 2013 年，第一作者与 Vatshelle [4]研究了 PointSetEmbedding 问题：给定一个点集 S 和一个平面图 G，判断 G 是否存在一种平面直线绘图，使所有顶点都放置在 S中的点上。他们证明了，如果 G的树宽至多为 t 且面度至多为 Δ，那么 PointSetEmbedding 可以在 $O^*(|S|^{1.5(t+1)\Delta})$时间内求解。他们的方法是对偶图的所谓 carving 分解，该分解将 G 进行层次分解，得到越来越小的子图 H （最终到达一个面），并且这些子图的边界 （H 中可能与 H外部顶点相邻的顶点）规模较小。求解 PointSetEmbedding 的核心思想是随后在该 carving 分解上进行动态规划，而动态规划的参数是 H 的边界在给定点集 S中的所有可能嵌入。

为了使该算法适用于我们的情况，需要进行两项修改。首先，我们将点集 S 固定为 $n\times n$-网格中的点。（显然，不可能需要更大的网格。）特别地，我们有 $|S|=n^2$。其次，在考虑 H 边界的可能嵌入时，我们仅 考虑边界沿带对角线的网格的边绘制的嵌入。在这一限制下，同一个动态规划将在所需时间内检验是否存在网格嵌入。

□

遗憾的是，这种方法只有在宿主图是平面图时才有效。否则，子图的边界无法将其绘图与其余部分分隔开。

参考文献

[1]Hugo A. Akitaya、Maarten Löffler 和 Irene Parada。《如何将一棵树装进盒子》。图与组合学，38(5):155，2022。 doi:10.1007/s00373-022-02558-z。

[2] Michael J. Bannister、William E. Devanny、Vida Dujmović、David Eppstein 和 David R. Wood。轨道布局、分层路径分解与层级平面性。算法学，81(4)：1561–1583，2019年。 doi:10.1007/s00453-018-0487-5。

[3] Sandeep Bhatt 和 Stavros Cosmadakis。最小化超大规模集成电路布局中导线长度的复杂性。信息处理快报，25(4)：263–267，1987年。doi:10.1016/0020-0190(87)90173-6。

[4] Therese Biedl 和 Martin Vatshelle。平面图的点集可嵌入性问题。*Int.J. Comput.Geom. Appl.*，23(4-5)：357–396，2013年。doi:10.1142/S0218195913600091。

[5]Prosenjit Bose、Vida Dujmović、Mehrnoosh Javarsineh、Pat Morin 和 David R. Wood。分层树宽与行树宽的分隔。离散数学与理论计算机科学，24(1):P18:1–P18:10，2022。 doi:10.46298/dmtcs.7458。[6] Prosenjit Bose、Pat Morin 和 Saeed Odak。平面图乘积结构的最优算法。载于 Artur Czumaj 和 Qin Xin 编，第*18*届斯堪的纳维亚算法理论研讨会及研讨会，*SWAT 2022*，*2022*年*6*月*27*日至*29*日，法罗群岛托尔斯港，LIPIcs 第227卷，第19:1–19:14页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2022。 doi:10.4230/LIPIcs.SWAT.2022.19。[7] Vida Dujmovic、Gwenaël Joret、Piotr Micek、Pat Morin、Torsten Ueckerdt 和 David R. Wood。平面图具有有界队列数。《*ACM*杂志》，67(4):22:1–22:38，2020。 doi:10.1145/3385731。[8] Vida Dujmović、Pat Morin 和 David R. Wood。小图封闭图类中的分层分隔集及其应用。《组合理论杂志》*B*辑，127:111–147，2017。 doi:10.1016/j.jctb.2017.05.006。[9] Zdeněk Dvořák、Tony Huynh、Gwenael Joret、Chun-Hung Liu 和 David R. Wood。关于图乘积结构理论的札记。载于 Jan de Gier、Cheryl E. Praeger 和 Terence Tao 编，*2019-20 MA-TRIX* 年刊，第513–533页。Springer International Publishing，查姆，2021。doi:10.1007/978-3-030-62497-2_32。

[10]Peter Eades 和 Sue Whitesides。最近邻图的逻辑引擎与实现问题。理论计算机科学，169(1):23–37，1996。 doi:10.1016/S0304-3975(97)84223-5。

[11]Uriel Feige、Mohammadtaghi Hajiaghayi 和 James R. Lee。最小权顶点分隔集的改进近似算法。*SIAMJ.Comput.*，38(2)：629–657，2008。 doi:10.1137/05064299X。

[12]M. R. Garey 和 D. S. Johnson。《计算机与不可判定性：*NP*-完备性理论指南》。Freeman，1979。

[13]Angelo Gregori。在正方形网格上对二叉树进行单位长度嵌入。*Information Processing Letters*，31(4)：167–173，1989。 doi:10.1016/0020-0190(89)90118-X。

[14] David Gries。关于构造循环不变式和循环的一种标准策略的注记。计算机程序科学，2(3)：207–214，1982。 doi:10.1016/0167-6423(83)90015-1。

[15] Siddharth Gupta、Guy Sa'ar 和 Meirav Zehavi。网格识别：经典与参数化计算视角。载于 Hee-Kap Ahn 和 Kunihiko Sadakane（编），第*32*届国际算法与计算研讨会，*ISAAC 2021*，*2021*年*12*月*6*日至*8*日，日本福冈，*LIPIcs*第212卷，第37:1–37:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021。 doi:10.4230/LIPIcs.ISAAC.2021.37Frank Kammer 和 Torsten Tholey。平面图的线性时间近似树分解。理论计算机科学，645:60–90，2016。 doi:10.1016/j.tcs.2016.06.040[17] Jirí Matousek 和 Robin Thomas。关于寻找部分 k 树的同构及其他形态的复杂性。离散数学，108(1-3):343–364，1992。doi:10.1016/0012-365X(92)90687-B [18] Farhad Shahrokhi。平面图的新表示结果。载于第*29*届欧洲计算几何研讨会（*EuroCG '13*）论文集，第177–180页，2013年。 arXiv:1502.06175[19] Torsten Ueckerdt、David R. Wood 和 Wendy Yi。改进的平面图乘积结构定理。电子组合学杂志，29(2)，2022年。doi:10.37236/10614[20] Yu Wu、Per Austrin、Toniann Pitassi 和 David Liu。树宽、一次性铺砖及相关布局问题的不可近似性。人工智能研究杂志

，*49:569–600，2014*年。 doi:10.1613/jair.4030。

第2节中缺失的细节

我们首先给出观察2的证明：任意图 G 都可以修改为图 G'，使得 G 嵌入 $P_\infty \square P_\infty$ 当且仅当 G' 嵌入 $P_\infty \boxtimes P_\infty$。

证明。正向蕴含显然：如果 $G \subset P_\infty \square P_\infty$，则取该嵌入，将其旋转 $45°$并拉伸，使相邻网格顶点之间相距$5\sqrt{2}$ 个单位。将其放入 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 中，并验证每个 $T(v)$ 都可以放置；对于 G 的每条边，两个相应的度为4可以按照图3中的方式连接。

对于另一个方向，假设 G' 嵌入 $P_\infty \boxtimes P_\infty$。注意，对于 G中的任意顶点 v，集合 $S_v = \{w \in V(G') : \text{dist}(v, w) \leq 2\}$的大小为 $|S_v| = 1 + 8 + 16 = 25$，因此 S_v 占据了 $P_\infty \boxtimes P_\infty$中的 5×5 方形区域 A_v。对于 G中的任意边 $e = uv$，相应的5-路径 u-s_1-s_2-s_3-s_4-v 必须沿着 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 的五条斜率相同的对角线嵌入。这是因为 s_2 在 S_u 外有四个邻居（s_3 以及 $T(u) \setminus S_u$ 中的三个顶点），因此必须位于 A_u的一个角上；对称地，s_3 位于A_v的一个角上。最后，(s_2, s_3)必须是对角线（并且具有相同的斜率），否则 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 中位于 $S_u \cup S_v$ 之外但与 s_2或 s_3相邻的六个顶点将无法存在。□

接下来，我们概述（见图 5）如何从 [15], 的 NP-困难性构造中取出特定的树，并直接构造出一棵路径宽度为 2 的树 T'，使其在 $P_\infty \boxtimes P_\infty$ 中存在嵌入，当且仅当 T 在 $P_\infty \square P_\infty$ 中存在嵌入。因此，即使对于路径宽度为 2 的树，KingGraphEmbedding 仍然是 NP-困难的。

B 行树宽

我们在此证明定理 9：判定图 G 是否是某棵树 T 的子图（即使对于串并联图 G）是 NP-困难的。我们已经在第4节中概述了该构造；为了便于阅读，现于此处重复完整的构造。

该归约来自 NAE-3SAT，并使用了 Eades 和 Whitesides [10] 提出的 逻辑引擎。我们首先证明一个密切相关问题的 NP 困难性。假设给定一个图 G，同时还在其部分边上标记了“hor”和“ver”。如果将 G 嵌入 $T \boxtimes P_\infty$ 时，标记为“hor/ver”的边分别为水平和垂直，则称该嵌入是 方向约束的。（回顾一下，水平/垂直意味着该边的两个端点具有相同的 T-投影/P-投影。）

命题 13。考虑以下问题：“给定一个图 G，其中一些边带有 *hor/ver* 标签，它是否存在某棵树 T，使得该图能以方向约束方式嵌入 $T \boxtimes P_\infty$？”这是 *NP*-困难问题，即使图 G 是串并联二分图也是如此。

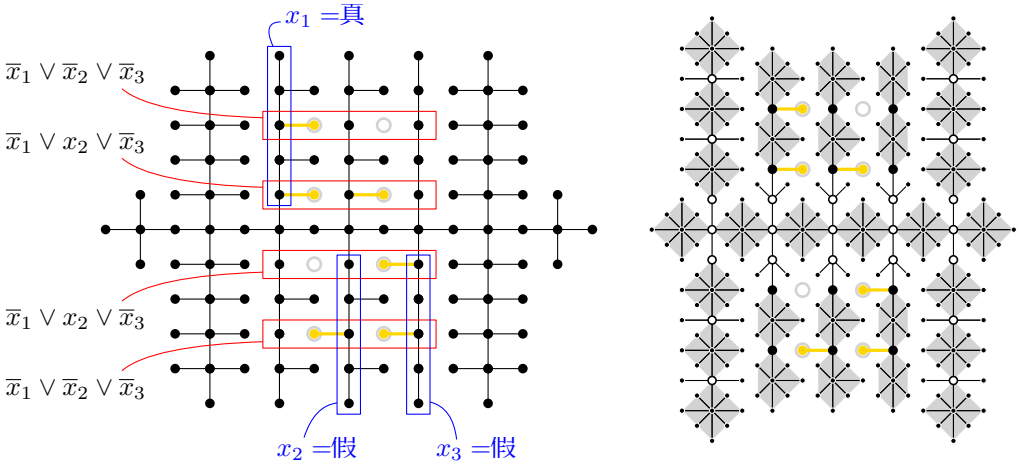

图5：左：Gupta 等人的路径宽度为 2 的树 [15]，对应非全相等可满足性实例 $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$在其针对解 $\{x_1 = \text{真}\ x_2 = \text{假}\ x_3 = \text{假}\}$的网格嵌入中的表示。右：其对应王图嵌入中相应的路径宽度为 2 的树。

证明。 设 I 是一个 NAE-3SAT 实例，其中有 n 个变量和 m 个子句。我们构造 G，并同时讨论 G 在网格中的可能方向约束嵌入（即嵌入 $P_\infty \boxtimes P_\infty$），另见图 6。（由于我们将所有 边限制为水平或垂直边，因此网格是否包含对角线并不重要。）首先构造框架 （图中为橙色），它由连接两个顶点 t、b 的三条路径组成；中间路径 有 H 条 $= m + 2n + 1$ 垂直边，而两条外部路径 各有 $2n$ 条水平边、H 条垂直边，随后再接 $2n$ 条水平边。框架在网格中的方向约束嵌入在对称意义下唯一。该嵌入的中间 m 行称为子句行，并分别标记一个子句。

接下来，我们为每个变量 x_i 添加骨架 x_i （浅/深青色）。骨架由两条路径组成，它们分别连接到中间路径上距离 i 、 t 和 b 处的顶点。每条路径两端各由 $2n + 1 - 2i$ 条水平边组成，中间夹有 $H - 2i$ 条垂直边。这些路径分别对应文字 x_i 和 $\overline{x_i}$ 网格中框架与骨架的方向受限嵌入在对称变换以及分别将每个骨架水平翻转的意义下是唯一的；特别是，每个顶点所在的行在所有此类嵌入中都保持不变。

最后，我们在骨架与子句行的交点处添加旗标（绿色）。也就是说，在文字 ℓ_i 的骨架与 c_j的行相交的顶点处，当且仅当 ℓ_i不 出现在 c_j中时，我们添加一个叶节点（通过一条水平边连接）。对于每个旗标，只要其附着顶点的左侧或右侧位置尚未被其他旗标占用，我们就可以选择将它放在任一侧。显然，图 G 是串并联图，因为我们可以通过删除叶节点和重边，并收缩度为 2 的顶点，将它化简为一条边。

（提醒读者注意串并联图的以下等价定义：（a）不含 K_4-小图的连通图；（b）树宽为 2 的连通图；（c）通过添加叶节点以及复制或细分边，从一条边构造得到的图；（d）所有 3-连通分量都至多包含三个顶点的连通图。）

如果 I 有解，那么翻转骨架，使左侧路径与该解中的文字相对应。对于每个子句 c_j，至少存在一个真文字，因此在 c_j这一行中，位于中间路径左侧的旗标至多有 $n - 1$ 个；我们可以将它们排布在间隙内。还至少存在一个假文字，因此在 c_j 这一行中，位于中间路径右侧的旗标至多有 $n - 1$ 个。因此，我们可以在网格中找到 G 的一个受方向约束的嵌入。反过来，如果存在这样的嵌入，那么取中间路径左侧的文字，就能得到 I 的一个解，因为对于每个子句 c_j，中间路径的每一侧都至多有 $n - 1$ 个旗标，所以至少有一个真文字和一个假文字。

因此， I 有解，当且仅当 G 在网格中有一个受方向约束的嵌入。为完成 NP 困难性证明，我们必须说明，对于某棵树T， G 在 $T \boxtimes P_\infty$ 中的任何受方向约束的嵌入实际上都必须位于网格内。为此，令 π 为 T 中对应于框架的一条外部路径的 T 投影的路径。由于外部路径上的边定向是固定的， π 的长度为 H，并连接 T的投影 t'， b'（分别对应 t和 b），因此 t'， b' 在 T 中的距离为H 。我们声称， G 的嵌入实际上位于 $\pi \boxtimes P_\infty$, 内；也就是说，对于 G 的任意顶点 v， v 的T投影 v' 都在 π上。为证明这一点，请注意，我们可以通过穿过框架，然后（可能）经过一个骨架，再（可能）沿着一个标志行走，找到一条从 t 到 v 的路径，并且始终只向下行进。

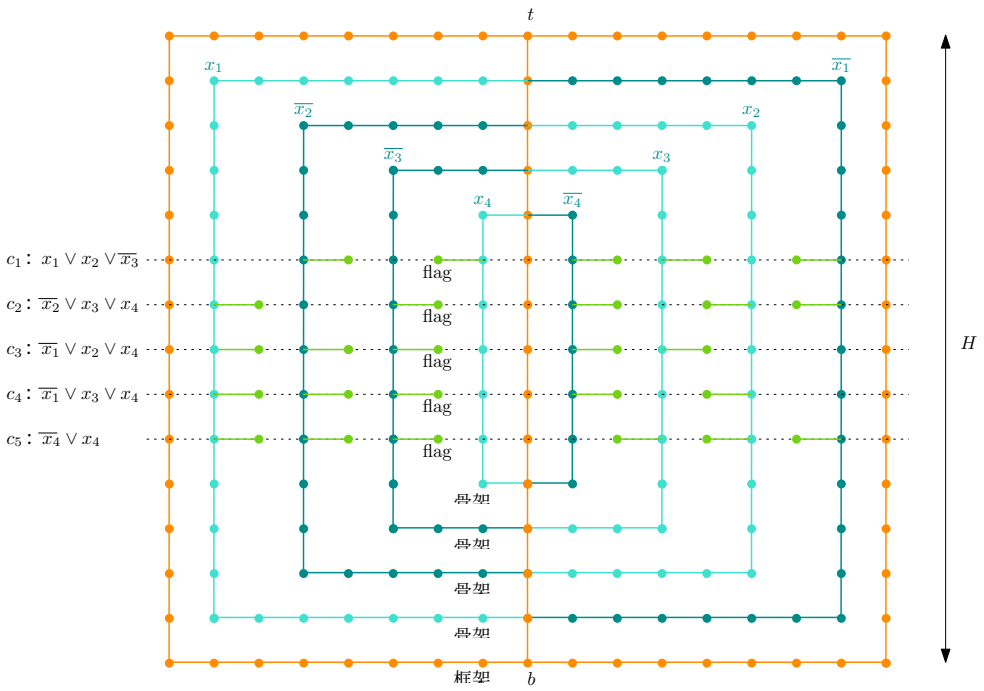

图 6：如果我们可以固定边的方向，则行树宽的归约。

沿着一个标志行进，并且始终只向下行进。类似地，找到一条从 v 到 b 且只向下行进的路径。组合游走 σ_v 从 t 出发，经由 v 到达 b，恰好使用 H 条非水平边。σ_v 的 T 投影 σ'_v 连接 t' 和 b'，长度为 H；根据树中路径的唯一性，这意味着 $\sigma'_v = \pi$ 包含 v'。 □

为证明定理 9，我们采用命题 13 的构造，但添加更多顶点和边，以获得一个图 G，使得在 $T \boxtimes P_\infty$ 中对 G 的任何嵌入中，边定向都是被强制确定的。

因此，假设我们给定了一个 I NAE-3SAT 的实例。我们可以假设 I 的某个子句是 $x_n \vee x_n$，因为如果不存在这样的子句，那么我们可以添加该子句，而不会影响 I 的可解性。现在，令 G_0 为按照命题 13 的证明中所述、针对实例 I 构造的图。和之前一样，G_0 在网格中具有唯一的方向约束嵌入（骨架和旗标可以水平翻转的情况除外），因此顶点的 y 坐标是固定的。我们将 G_0 的顶点和边称为原始。

下一步，我们将“宽度增加三倍”。粗略地说，我们在 G_0 的图示中已有的每一列之前和之后各插入一列。形式化地说（以下基于图而非图示进行说明），将每条水平边细分两次，并在任意与 k 条水平边相接的顶点v处连接 $2-k$ 个叶节点。所有新边同样都必须是水平的。参见图4，暂时忽略粗线和对角边。所得图 G_1 同样具有网格中的方向约束嵌入，当且仅当 NAE-3SAT 实例有解时成立。显然，它也是串并联图因为它是通过细分边并连接叶节点得到的。

接下来，我们通过在某些垂直边 vw 处添加一个箭头来得到 G_2。假设 v 位于 w 下方，这意味着添加边 $(v_\ell,\ w)$ 和 $(v_r,\ w)$，其中 v_ℓ，v_r 是通过水平边与 v 相邻的两个邻点。对于 G_1 的任意垂直边，只要其下端点 v 不属于骨架，我们就在该边处添加箭头。该图仍然是串并联图，因为每个箭头$\{v_\ell,\ v,\ v_r,\ w\}$ 都包含一个将其与图的其余部分分隔开的割对，因此，添加箭头的边不会影响是否存在非平凡的 3-连通分量。

对于最后的修改，我们需要一个简单但至关重要的观察结论；通过检查 $T \boxtimes P_\infty$ 中两个相邻顶点的邻域，可以证明该结论适用于它们之间边的所有可能方向。

观察14。 设 G 嵌入到某棵树 T中。如果 uv 是 G 的一条边，且 u、v至少有五个公共邻点，那么 uv 必定是水平的。

因此，我们通过在 G_2的每条水平边 uv 处添加一个 $K_{2,\ 5}$，将 G_2 变为 G；也就是说，添加五个同时与 u 和 v相邻的新顶点。这样可以保持图的串并联性质，并迫使 uv 在 G 嵌入 $T \boxtimes P_\infty$的任意嵌入中都呈水平。为避免杂乱，我们在图4中不显示$K_{2,\ 5}$，而是用粗边表示它。

我们的构造描述到此结束。显然，NAE-3SAT 实例 I 的一个解意味着 G 可以嵌入

$C_\infty \boxtimes P_\infty$ 中。具体而言，我们可以将 G_0 嵌入 $\pi \boxtimes P_\infty$，其中 π 是 C_∞ 的脊柱；将 P_∞ 的每条边细分两次以嵌入 G_1；沿对角线实现箭头；最后在 π 的每个顶点处使用 5 条腿，以嵌入所附的 K_2，并将 5 延伸到它们的 P 延伸部分上。反之，假设 G 嵌入某棵树 T 中的 $T \boxtimes P_\infty$。我们知道所有粗边都必须是水平的。我们还断言，如果 G_1 的一条接收了箭头的 vw 是垂直边，那么嵌入中 vw 的方向就是垂直的。为此，假设箭头是 $\{v_\ell, v, v_r, w\}$，其中 v_ℓ、v_r 通过水平边与 v 相连。于是，vw 属于两个三角形 $\{v_\ell, v, w\}$ 和 $\{v_r, v, w\}$，而这两个三角形的两条水平边 (v_ℓ, v) 和 (v_r, v) 共享端点 v。对角边处不存在这样的两个三角形，并且 vw 不可能是水平的，因为 v 处的两条水平边是 vv_ℓ 和 vv_r。因此，vw 是垂直的。

我们声称，G_2 在 $T \boxtimes P_\infty$ 中的嵌入实际上位于 $\pi \boxtimes P_\infty$ 内，其中 π是某条路径，也就是说，位于一个网格中。论证方式与命题 13 几乎完全相同。令 π 为 G_0的一条外部路径在 T上的投影；由于外部路径上的边的方向固定，π 的长度为 H。对于 G_2的任意顶点 v，我们都能找到一条从 t 到b、经过 v 的游走 σ_v，且恰好使用 H 条非水平边（它们现在可能是对角边）。如前所述，这意味着 v 在T 上的投影也位于 π中，因此 G_2 的嵌入位于 $\pi \boxtimes P_\infty$, 内，也就是王图中。如前所述，我们因此可以将 G_2 的顶点与 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$中的点关联起来，并讨论该嵌入中的行和列。

由于外部路径上的边的方向固定，因此外部路径的绘图除对称外也是固定的，并占据 $12n+3$ 列（包括箭头所占的空间）。其余的 G_2 必须位于外部路径内部，因此，子句$x_n \vee x_n$所在的行（我们称之为间隔行）有 $12\overline{n}+3$ 个可放置顶点的位置。但这一行中有框架的三条路径、 $2n$ 条骨架路径和 $2(n-1)$ 个旗标，这意味着 $4n+1$ 个原始顶点占用了间隔行。由于我们将宽度扩大了三倍，间隔行中的所有 $12n+3$ 个可能位置都已用于嵌入G_2。此外，间隔行中的顶点成三元组出现，并由水平边连接，其中间顶点是原始顶点。因此，经过平移后，空间行中所有原始顶点的 x坐标都能被 3 整除。这也迫使任何原始脊柱顶点 w 的 x坐标都能被 3 整除，因为我们可以仅沿着必定为垂直的边（由于箭头）或水平边（由于一个$K_{2,\ 5}$），从 w 到达空间行中的一个原始顶点 v，且水平部分的长度能被 3 整除。因此，框架中间路径上的所有边都必须是垂直的，包括那些没有箭头的边。[1] 据此，G 的嵌入蕴含着 G_1的嵌入在 $\pi \boxtimes P_\infty$ 中，该嵌入受到方向约束，因此我们可以据此提取出 NAE-3SAT 实例的一个解，如命题 13 所述。至此，定理 9] 的证明完成

[1]如果我们在所有地方都添加箭头，这个论证会更简单，但这样一来，该图就不再是串并联图。

C 行树深度

回想一下，S_∞（无限星形图）是由一个中心 和与其相邻的所有其他顶点（叶节点）组成的树，对叶节点的数量没有限制。

定理 15. 判定一棵树是否为 $S_\infty \boxtimes P_\infty$，的子图是 *NP*-困难的，即使该树的路径宽度为 *2*。

证明. 我们从*3*-划分进行归约。其输入是一个多重集合 $A = \{a_1, \ldots, a_{3n}\}$，我们要将其划分为 n 组，使每组的和都等于同一个整数$B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3n} a_i$。这是强 NP-困难的 [12], ，也就是说，即使将 A 以一元编码表示，问题仍然是 NP-困难的。我们可以假设所有输入数都是 8 的倍数（否则将它们全部乘以 8；这不会影响 NP 困难性）。我们描述树 T 的构造，同时论证 Γ 在 $S \boxtimes P$ 中对 T 的任意嵌入必须呈现何种形式。在 $S_\infty \boxtimes P_\infty$, 中，我们将中心 c 的 P-扩展称为中心行；与观察 6 一样，我们使用度数论证，迫使 T 的许多顶点位于中心行中，而为它们找到足够的空间正是我们归约的关键思路。

树 T 由一个框架以及针对每个 a_i、$i = 1$、.....、$3n$的一个桨组成。框架是一条非常长的路径，路径上的大多数顶点都附有 6 个叶节点。（这些叶节点未在图中显示。）附有叶节点的顶点称为 c-顶点，并且由于 $S \boxtimes P$的所有其他顶点的度均为 5，它们被迫位于中央行上。框架中的所有其他顶点称为ℓ-顶点，因为它们可能位于叶行上（即 S_∞的叶节点的 P-扩展）。路径上的具体间距如下：

- 从 $n(B+8)$ c-顶点开始（即左阻挡结构）。由于 c-顶点必须位于中央行上，并且中央行上的两个顶点只有在连续时才相邻，因此该路径（以及下文使用的任何 c-顶点路径）占据中央行上连续的一组顶点。
- 接着是 B ℓ-顶点，然后是 8 c-顶点。 ℓ-顶点可能位于叶行上，因此中央行最多保留 B 个顶点未使用。我们称之为组间隙。
- 我们创建 n 个连续的组间隙（见图 7，n =2）。
- 最后一个组间隙的最后一个顶点 Z 称为锚点；桨（定义如下）将连接在Z处。
- 从 Z开始，我们交替放置三个 c顶点和一个 ℓ顶点，它们共同构成一个折叠间隙（允许省略一个中心行顶点）。共有 $\frac{1}{8}n$（$B+8$）个折叠间隙。

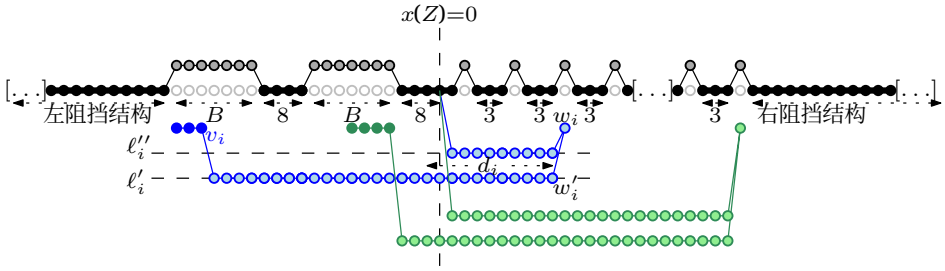

图 7: $S\boxtimes P$, 图中的嵌入具有 NP 困难性，且图示未按比例绘制。实心点表示 c 顶点（因此附有 6 个叶节点）。我们仅展示两个桨，一个绿色，一个蓝色。

- 最后，我们以 n（B+8）个 c顶点（右阻挡结构）结束。

请注意，左阻挡结构和右阻挡结构都足够长，因此没有任何由 ℓ 顶点组成的子路径能够延伸到它们之外；特别是，这迫使所有不在阻挡结构中的 c 顶点都位于中央行中两者之间。

现在，对于每个 $a_i \in A$，我们定义 a_i-桨。它从锚点 Z 开始，接着是一条路径（即柄部），其中包含 $n(B+8)-1$ ℓ 个顶点，最后到达桨叶，该桨叶由 a_i c 个顶点组成。柄部不够长，无法延伸到阻挡结构之外，因此桨叶的 c 个顶点必须位于阻挡结构之间的 $a_i \geq 2$ 个连续中央行顶点上。由于每个折叠间隙至多留下一个中央行顶点空闲，因此桨叶必然占据由组间隙留下的中央行顶点。 Γ 中至多有 nB 个这样的中央行顶点，并且它们被分成若干块，每块至多包含 B 个连续的中央行顶点。根据 $\sum_{i=1}^{3n} a_i = nB$，可知在任何实现中， Γ 组间隙恰好留下 n 块、每块恰好包含 B 个中央行顶点，而桨叶恰好填满这些间隙，从而得到对 A 的所需划分。

我们仍需说明，如果 3-划分存在解，那么就可以将 T 嵌入 $S\boxtimes P$, 。为此，需要为星形图 S 安排折叠间隙和 Θ（n）个叶节点。首先按照图示嵌入框架，使所有间隙都为中央行顶点留出尽可能多的位置。（我们还使用了图中未显示的 6 行叶行，以嵌入连接到 c 顶点的叶节点。）我们把中心行视作 x 轴，并令 Z 位于原点；由此为所有已嵌入且满足 x（Z） $= 0$ 的顶点定义 x 坐标 $x(\cdot)$。根据 3-划分的解，将 a_1、.....、a_{3n} 的桨叶嵌入组间隙。对于 $i = 1$、.....、$3n$，令 v_i 为 a_i 的桨叶中最右侧的中央行顶点。为了放置柄部，我们再使用两行叶行，分别记为 ℓ_i' 和 ℓ_i''。从 v_i 沿对角线向右到达 ℓ_i'，然后向右走 $|x(v_i)|-1$ 条边，到达 x 坐标 -1。此时我们本可以沿对角线前往锚点，但柄部比这段路径更长。因此，我们沿 ℓ_i' 再向右走$d_i := \frac{1}{2}(n(B+8) - |x(v_i)|)$ 条边。回想一下，每个 a_i （因此 B 也一样）都能被 8 整除。由于每个组间隙处都有 8 c 个顶点，且所有组间隙都被桨完全填满，因此 x 坐标 $x(v_i)$ 也能被 8 整除。于是 d_i 能被 4 整除，而我们到达的顶点 w_i' 位于某个折叠间隙的中央行顶点 w_i 左侧一格。从 w_i' 沿对角线到达 w_i，再从那里沿对角线返回另一行叶行 ℓ_i'' 上的 x（w_i'）。然后沿叶行 ℓ_i'' 向左走到 x 坐标 1，再沿对角线到达 Z。总共使用了 $|x(v_i)|-1+2d_i = n(B+8)-1$ 个顶点，恰好等于柄部的长度。注意，其他桨（例如 a_j 桨）不可能使用顶点 w_i ，因为 $v_j \neq v_i$ 是彼此不同的中央行顶点，而且它们的 x 坐标决定了应使用哪个折叠间隙。

因此，3-划分的一个解给出了将G 嵌入 $S\boxtimes P$ 的方法，反之亦然，因此该问题是 NP-困难的。显然，我们构造了一棵树 T；如果移除定义框架的路径 π ，那么$T \setminus \pi$ 的所有连通分量要么是单顶点（位于框架的 c-顶点处），要么是毛毛虫图（位于桨处）。因此， T 的路径宽度为 2。

□

同样的结果也适用于嵌入 $S\square P$。我们使用的树 T 几乎完全相同，只是在框架的每个间隙处， ℓ-顶点路径都多出两个顶点，而柄部顶点则多出四个顶点。细节留给读者。

我们构造的树的路径宽度为 2。对于路径宽度为 1 的树 T，问题“ $T \subset S_\infty\boxtimes P_\infty$是否成立？”的答案显而易见，因为答案总是“是”：这样的树是 C_∞的子图，而且可以通过将脊柱放在中心行上，把 C_∞ 嵌入 $S_\infty\boxtimes P_\infty$。