arXiv:2303.17053v2 [math.DS] 9 May 2024

´¨Phragmén–Lindelöf原理与拟正则映射的Julia极限方向

ALASTAIR N. FLETCHER 和 JULIE M. STERA

Abstract. 我们证明，超越型 K-拟正则映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的 Julia 极限方向集合必定包含一个具有一定大小的连通分支，其大小取决于维数 n、最大膨胀 K 以及 f的增长阶。特别地，我们证明，如果增长阶足够小，那么每个方向都是 Julia 极限方向。我们还证明，如果 Julia 极限方向集合的每个连通分支都是一个点，那么f 的阶为无穷。证明这些结果的主要工具，是针对扇形域中次 F-极值函数的一种新型 Phragm´en-Lindel¨of 原理；在该原理中，我们允许边界增长为 $O(\log|x|)$ 的形式，而不是此前考虑的 $O(1)$ 界。

1. Introduction

1.1. Julia极限方向。 空间中的超越型拟正则映射迭代理论日益成熟。Bergweiler 和 Nicks 首先为这一理论奠定了坚实的基础 [4]，他们证明，存在一种 Julia 集的定义，能够恰当地推广复动力学中通常的 Julia 集概念。在拟正则情形下，一个显著区别是：即使在 Julia 集之外，也不再能保证迭代族局部正规。因此，超越型拟正则映射 $J(f$的 Julia 集补集 f称为拟 Fatou 集 $QF(f$，而不再简称 Fatou 集。

本文主要研究超越型拟正则映射 f 的 Julia极限方向 $L(f)$。这有时也称为 $J(f)$ 的径向分布。我们简要回顾 $L(f)$ 的历史发展。Qiao [18] 最早研究了平面上的超越整函数的 Julia极限方向。在这一情形下 $L(f) \subset S^1$。本文的主要结果之一 [18, 定理 1] 表明，若 f 的下阶 λ_f 有限，则存在一个闭区间 $I \subset S^1$，使得 $I \subset L(f)$，并且该区间的测度有一个下界，即 $m(I) \geq \pi_{\max(1/2,\lambda_f)}$。特别地，若 $\lambda_f \leq 1/2$，则 $L(f) = S^1$。已有多篇论文研究了亚纯函数的 $L(f)$，其中包括 [19, 23, 24, 27], ；也有论文研究微分方程解的相关问题，例如 [22]。

在高维中，如果 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个拟正则映射，对于 $n \geq 2$，那么$L(f)$ 是 S^{n-1} 在 $\mathbb{R}^n$中的一个（$n-1$）维单位球面子集。

定义 1.1. 设 $n \geq 2$ 和 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个超越型拟正则映射。若存在序列 $(x_m)_{m=1}^{\infty}$，其中各项属于 $J(f)$，且 $\lim_{m\to\infty} |x_m| = \infty$ 和 $\lim_{m\to\infty} x_m/|x_m| = \zeta$，则称 $\zeta \in S^{n-1}$ 为 f 的 Julia极限方向。

由于 $J(f)$ 对超越型拟正则映射而言是无界的，因此将 $L(f)$ 视为 $J(f)$ 的径向分布是有意义的。在这一背景下， $L(f)$ 最早由第一作者研究，见 [8]。在 [8, 定理 2.2], 中，给出了关于 f 的最小模与最大模可比性的一个强条件，由此推出 $L(f) = S^{n-1}$。本文的主要结果是对 Qiao 的结果作出更直接的类比，该结果将超越型拟正则映射的增长与 $L(f)$ 的大小联系起来。

我们用 μ_f 表示 f 的增长阶，用 $m(E)$ 表示子集 $E \subset S^{n-1}$ 的 $(n-1)$ 维面积。我们还用 $T(U)$ 表示 $U \subset \mathbb{R}^n$ 的拓扑包，即 U 与其所有有界补连通分支的并集。

定理 1.2. 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个阶为 $\mu_f < \infty$ 的超越型 K-拟正则映射，且对于任意拟 Fatou 分支 U，有 $T(U) \neq \mathbb{R}^n$。则存在一个连通分支 $E \subset L(f)$，使得

$$m(E) \geq \min(c_n K^{(2-2n)/n} \mu_f^{1-n}, \omega_{n-1}) \tag{1.1}$$

其中， $c_n > 0$ 是一个仅取决于 n 和 $\omega_{n-1} = m(S^{n-1})$ 的常数。

对于超越整函数而言， $T(U) \neq \mathbb{R}^n$ 对于任意拟 Fatou 分支 U 总是成立于平面上。为说明这一点，假设对于某个超越整函数 $U \subset F(f)$，存在一个连通分支 f 使得 $T(U) = \mathbb{C}$。由于超越整函数的 Julia 集无界， U 必然是 $F(f)$ 的一个多连通无界连通分支，而根据 [1, 定理 1]，这是不可能发生的。对于超越型拟正则映射，同样的结论是否总是成立仍是一个开放问题，但为了应用拟 Fatou 集中所含扇形域上的增长率结果，我们需要作出这一假设（见下述定理2.15 ）。

我们立即由（1.1）得到以下推论。

推论 1.3。 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个超越型 K-拟正则映射，并且对于任意拟 Fatou 分支 $T(U) \neq \mathbb{R}^n$ 均成立 U。沿用定理 *1.2*中的记号，若 f 的阶满足

$$\mu_f \leq K^{-2/n} \left(\frac{c_n}{\omega_{n-1}} \right)^{1/(n-1)}$$

则 $L(f) = S^{n-1}$。

关于 f 的阶的这一条件迫使 $L(f)$ 中存在一个连通分支 U，使得 $m(U) \geq \omega_{n-1}$。由于 $L(f)$ 是闭集， U 的闭包也包含于 $L(f)$ 中，并且 $m(\overline{U}) \geq \omega_{n-1}$。由于 S^{n-1} 中不存在测度为 0 的开集，我们有 $L(f) = S^{n-1}$。

采用与定理 1.2类似的证明策略，我们得到以下推论。

推论 1.4。设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个超越型 K-拟正则映射，并且对于任意拟 Fatou 分支 U， $T(U) \neq \mathbb{R}^n$。若 $L(f)$ 的每个连通分支都是一个点，则 $\mu_f = \infty$。

推论1.4 的意义在于，如果我们能够构造一个拟正则映射，使其只有一个 Julia极限方向，并且在一个半束之外是恒等映射，那么就能彻底解决逆问题：给定一个闭集 $E \subset S^{n-1}$，我们希望找到一个 f 的超越型拟正则映射，使得 $L(f) = E$。由于

记号， $H(x_0, \theta, w) \subset \mathbb{R}^n$ 是一个宽度为 $2w > 0$ 、沿中心射线 $R = \{x \in \mathbb{R}^n$ 延伸的半束： $\frac{x-x_0}{|x-x_0|} = \theta\}$ 从 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 开始，沿 $\theta \in S^{n-1}$ 方向延伸。

定理 1.5. 设 $E \subset S^{n-1}$ 是闭集。假设存在一个拟正则映射 f_0 ，满足

(1) $L(f_0) = \{e_1\}$(2) $f_0(x) = x$ 对于 $x \in \mathbb{R}^n \backslash H(0, e_1, 1)$。

那么，存在一个拟正则映射 f ，使得 $L(f) = E$。

1.2. Phragm´en-Lindel¨of 原理。我们证明定理 1.2 和推论 1.4 的策略，其主要创新在于提出了 Phragm´en-Lindel¨of 原理的新版本，该版本适用于扇形域中的拟正则映射，并允许边界增长具有如下形式： $O(|x|^p)$，其中 $p > 0$。为说明其重要性，我们先回顾经典的 Phragm´en-Lindel¨of 原理：若 S 是扇形域 $\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \theta/2\}$ ，其中 $0 < \theta \leq 2\pi$ ，且 $f : S \to \mathbb{C}$ 是满足 $\limsup |f(z)| \leq 1$（对所有 $w \in \partial S$）的全纯函数，那么，要么对所有 $z \in S$，都有 $|f(z)| \leq 1$；要么 $\liminf_{r\to\infty} \log M(r, f) r^{-\pi/\theta} > 0$，其中 $M(r, f)$ 是最大模函数 $\sup_{|z|\leq r} |f(z)|$。

当 f 在扇形的边界上满足 $|f(z)| = O(|z|^p)$ 时，只需考虑全纯函数 $f(z)/z^p$，即可直接将这一结果推广到该情形。对于全纯函数，这一结果是通过将相应的 Phragm´en-Lindel¨of 原理应用于次调和函数 $\log |f|$，并利用次调和函数的 Phragm´en-Lindel¨of 原理得到证明的。

许多 Phragm´en-Lindel¨of 结果已经针对不同类别的函数以及更一般的无界域得到了证明。例如，类似的结果也已针对次 F-极值映射 [11], 多重次调和函数 [16], 亚纯函数 [14], 切片正则函数 [9], 和拟正则映射 [5, 15,20, 21]。此外，还研究了其他无界域中的 $\mathbb{R}^n$ 域，例如条带[7], 圆柱 [25], 和圆锥 [26]。

据作者所知，文献中所有这些对 Phragm´en-Lindel¨of 原理的推广，都要求在所研究域的边界上满足 $O(1)$ 界。就本文而言，我们需要考虑这样一种情形：从 $\mathbb{R}^n$ 中的一个扇形出发的拟正则映射（其中 $n \geq 2$ ）在扇形边界上的界为 $|f(x)| = O(|x|^p)$。由于不存在可用于拟正则映射的、形如 $f(x)/x^p$ 的初等代数考量，因此这种推广并非简单直接。我们预计这些方法也适用于其他情形。

类似于利用次调和函数证明全纯函数的 Phragm´en-Lindel¨of 原理，我们证明了一个关于次-F-极值函数的 Phragm´en-Lindel¨of 结果，并将其应用于拟正则映射，得到相应的结果。在拟正则情形下，$\log |f|$ 是次-F-极值函数的一个例子。我们将推迟到下一节再回顾这个定义；这里只需指出，$\log |f|$ 满足某个非线性偏微分方程，并遵循某种比较原理，这与次调和函数类似。

接下来，我们将定义本文语境中的扇形，并回顾一个关于次F极值函数的 Phragm´en-Lindel¨of 结果，本文将对其进行推广。

定义 1.6。设 $E \subset S^{n-1}$ 为一个域，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。定义相对于 E、顶点位于 x_0 的扇形为

$$S_{x_0,E} = \{c(x - x_0) + x_0 : c > 0, x \in E\}.$$

下面的结果是 [11, 定理 3。16]在扇形域的特殊情形下。请注意，这里使用的定义将在下一节中作更精确的说明。

定理 1.7. ([11], 定理 3.16) 设 $E \subsetneq S^{n-1}$ 是一个域，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 $S = S_{x_0, E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个扇形，并且 F 是 S 中类型为 n 的变分核，其结构常数为 α 和 β。设 $u\colon S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是 S 中的一个子-F-极值函数，满足对于 $y \in \partial S$，$\limsup u(x) \leq 0$。那么，要么 $u(x) \leq 0$ 在 $S^{x \to y}$ 中，要么

$$\liminf_{r \to \infty} M_S(r, u) r^{-q} > 0$$

其中 $M_S(r, u) = \sup u(x)$，$q = d_n m(E)^{-1/(n-1)} (\alpha/\beta)^{1/n}$，并且 $d_n > 0$ 是一个仅依赖于 n 的$_{|x| \leq r,\ x \in S}$常数。

当 f为拟正则时，将此结果应用于 $\log |f|$，可得如下推论。

推论 1.8。设 $E \subsetneq S^{n-1}$ 为一个域，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 $S = S_{x_0, E}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个扇形。设 $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ 为一个 K-拟正则映射，且当 $y \in \partial S$时 $\limsup |f(x)| \leq 1$。则要么 $|f(x)| \leq 1$在 S中成立，要么$^{x \to y}$

$$\liminf_{r \to \infty} \log M_S(r, f) r^{-q} > 0$$

其中 $M_S(r, f) = \sup |f(x)|$, $q = d_n m(E)^{-1/(n-1)} K^{-2/n}$，且 $d_n > 0$是一个仅依赖于 n的$_{|x| \leq r,\ x \in S}$常数。

这些结果的推广如下。回顾 $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$

定理 1.9。设 $E \subsetneq S^{n-1}$ 为一个域，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 $S = S_{x_0, E}$是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个扇形，且 $F\colon S \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是在 S中类型为 n、结构常数为 α和 β的一个变分核。设 $u\colon S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是在 S 中的一个次 -F- 极值函数，且对某个常数 $C > 0$，在每个 $y \in \partial S$处 $\limsup u(x) \leq C \log^+ |y|$。则$^{x \to y}$
给定 $\varepsilon > 0$，要么对于所有充分大的 $|x| \in S$，我们有

$$u(x) \leq C(1 + \varepsilon) \log |x|$$

or

$$\limsup_{r \to \infty} M_S(r, u) r^{-q'} > 0$$

其中 $q' = d_n m(E)^{-1/(n-1)} (\alpha/\beta)^{1/n} \varepsilon/(1 + \varepsilon)$，且 $d_n > 0$ 仅依赖于 n。

该定理放宽了[11, Granlund、Lindqvist 和 Martio 的定理 316] 中的假设条件，这些假设条件来自 $u(x) = O(1)$ 到 $u(x) = O(\log |x|)$ 关于 ∂S，不过，他们在另一种情形下得到的结论是 lim inf，而非 lim sup。定理1.9 当然有可能得到改进，但对于我们的动力学应用而言，这已经足够。利用这样一个事实：若 f是拟正则映射，则 $\log |f|$ 是次F-极值函数，我们得到以下推论。

推论 1.10. 设 $E \subsetneq S^{n-1}$ 是一个域，且 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。假设 $S = S_{x_0,E}$是 $\mathbb{R}^n$中的一个扇形。令 $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ 为 S 中的一个 K-拟正则映射，使得

$$\limsup_{x\to y} \log|f(x)| \le p \log^+|y| + C$$

在每个 $y \in \partial S$ 处，存在某些常数 C 和 $p > 0$。那么给定 $\varepsilon > 0$，对于 S 中的所有充分大的 $|x|$，要么有

$$\log|f(x)| \le p(1+\varepsilon)\log|x| + C$$

or

$$\limsup_{r\to\infty} \log M_S(r,f) r^{-q'} > 0$$

其中 $q' = d_n m(E)^{-1/(n-1)} K^{-2/n}\varepsilon/(1+\varepsilon)$，且 $d_n > 0$ 仅依赖于 n。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾拟正则动力学和非线性势理论的背景知识。第 3 节证明定理 1.9。第 4 节证明定理1.2的证明中所需的一个拓扑学结果。最后，第 5 节证明我们的主要结果，即定理 1.2、推论1.4和定理 1.5。

我们感谢审稿人仔细阅读本文并提出许多有益的意见。

2. Preliminaries

记号如下：令 $B(x_0,r)$ 表示以 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 为中心、半径为r 的开球，并令 $S(x_0,r)$ 表示 $B(x_0,r)$ 的边界。$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面记作 S^{n-1}。

2.1. 拟正则动力学。我们首先回顾一些关于拟正则映射及其动力学的定义。关于拟正则映射的更多信息，参见 Rickman 的专著 [20]。

设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个域，且 $X = \mathbb{R}^n$ 或 $X = \mathbb{R}$。用 $C(G,X)$ 表示连续函数 $G \to X$的集合。用 $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(G,X)$ 表示 G 上的 $\mathbb{R}^n$值或实值函数的Sobolev空间，这些函数局部属于 $L^n(G)$，且其弱一阶偏导数也局部属于 $L^n(G)$。

定义 2.1. 设 $f \in C(G,\mathbb{R}^n) \cap W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(G,\mathbb{R}^n)$，其中 $G \subset \mathbb{R}^n$。如果存在一个常数 $K \ge 1$，使得对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都有 $|f'(x)|^n \le K J_f(x)$，则称 f为拟正则映射，其中 $|f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)(h)|$ 是算子范数，并且 $J_f(x)$ 是 f 在 x处的雅可比行列式。这样的最小 K 称为 f 的外膨胀，记作 $K_O(f)$。

如果 f 是拟正则的，则还存在一个常数 $K' \ge 1$，使得 $J_f(x) \le K' \min_{|h|=1} |f'(x)(h)|^n$ 几乎处处成立。这里的最小常数 K' 称为 f 的内膨胀，记作 $K_I(f)$。最大膨胀为 $K(f) = \max\{K_O(f), K_I(f)\}$。$K$-拟正则映射是指满足 $K \ge K(f)$ 的映射，因此，例如，如果 f 是 2-拟正则的，那么它也是 3-拟正则的。

如果 f 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，我们称 f 为整拟正则映射；若非恒定的整拟正则映射 f 在 ∞处有本性奇点，则称 f 为超越型。否则，我们称 f 为多项式型。

给定 $\mathbb{R}^n$ 的一个无界子域 U 以及一个函数 $f\colon U\to\mathbb{R}^n$，我们定义

$$M_U(r,f)=\sup_{|x|\le r,x\in U}|f(x)|,$$

只要 $B(0,r)$ 与 U 相交。在 $U=\mathbb{R}^n$ 和 f 为拟正则映射的情况下，由于 f 是开映射，我们可以简化这一记号，直接写成

$$M(r,f)=\sup_{|x|=r}|f(x)|.$$

超越型拟正则映射可以根据其增长作如下分类。

引理 2.2。 *([2],* 引理 3.4）设 $f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个拟正则映射。则f 是超越型的，当且仅当

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log r}=+\infty.$$

与上述表达式相关的一个概念是增长阶。

定义 2.3。整拟正则映射 f 的阶：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\mu_f=\limsup_{r\to\infty}(n-1)\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

接下来，考虑拟正则映射的迭代。若 f 是一个整 K_1-拟正则映射，且 g 是一个整 K_2-拟正则映射，那么复合映射 $f\circ g$ 也拟正则，但最大膨胀通常会增大。一般而言，我们有 $K(f\circ g)\le K_1K_2$。这意味着，拟正则映射的迭代映射 f^m（$m\in\mathbb{N}$）可能有定义，但迭代映射的最大膨胀未必存在一致上界。这给拟正则动力学理论的发展带来了障碍，使其难以与复动力学理论完全类比，因为复动力学中起关键作用的正规族理论可能无法应用。

尽管如此，Bergweiler和Nicks [4] 通过膨胀性质定义了超越型拟正则映射的 Julia 集，而该集合具有许多预期的 Julia 集性质。作为记号，令 cap(A,C) 表示电容器的共形容量，其定义见 [20, 第 53] 页，其中 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，且C 是 A中的非空紧子集。已知，若对于某个包含 C的有界开集 A，有 cap$(A,C)=0$，则对于任意包含 C的有界开集A'，都有 cap$(A',C)=0$。此时，我们记 cap$(C)=0$。

定义 2.4. 设 $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个超越型拟正则映射。 f 的 Julia 集定义为

$$J(f)=\{x\in\mathbb{R}^n:\operatorname{cap}\left(\mathbb{R}^n\setminus\cup_{k=1}^{\infty}f^k(U)\right)=0\text{ for every neighborhood }U\text{ of }x\}.$$

拟 Fatou 集为 $QF(f)=\mathbb{R}^n\setminus J(f)$。

注意，对于多项式型映射，这一定义也有相应版本（例如参见 [3]），但其中存在一些与本文无关的额外复杂情况，因此这里不再赘述。

对于超越型拟正则映射， $J(f)$是无界的（例如参见 [8, 命题2.1]），因此我们可以研究 $J(f)$的径向分布，记作 $L(f)$。同样，由 [8, 命题2.1], 可知， $L(f)$是 S^{n-1} 的一个闭非空子集。

2.2. 非线性势理论。 接下来，我们回顾非线性势理论中的一些定义和性质。关于这一理论的更多详情，请参阅 Rickman 的专著 [20] 以及 Heinonen、Kilpel¨ äinen 和 Martio 的著作 [13]。照例，设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是一个域。

定义 2.5. 若函数 $F\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为 G 中类型为 n 的变分核。

- 对于每个开集 $U \subset\subset G$ 及任意 $\epsilon > 0$，都存在紧集 $V \subset U$，使得 $m(U\setminus V) < \epsilon$，且 $F|_{V\times\mathbb{R}^n}$ 连续。
- 对于几乎处处的 $x \in G$，函数 $h \mapsto F(x,h)$ 严格凸且连续可微。
- 存在正常数 α 和 β，使得对于几乎处处的 $x \in G$，

$$\alpha|h|^n \le F(x,h) \le \beta|h|^n \tag{2.1}$$

  对于所有 $h \in \mathbb{R}^n$。
- 对于几乎处处的 $x \in G$，有

$$F(x,\lambda h) = |\lambda|^n F(x,h),$$

  $\lambda \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^n$。

将 $\alpha(F)$ 表示为最大的此类常数 α，并将 $\beta(F)$ 表示为最小的此类常数 β，使得 (2.1) 成立。它们称为 F 的结构常数。我们注意到，类型为 $p \neq n$ 的变分核已有相关研究，但本文仅关注 $p = n$ 情形。因此，以下所有变分核均为 n 类型。

接下来，我们回顾 F-极值函数、次-F-极值函数和超-F-极值函数在 G 中的定义，并列出它们的一些性质。它们是调和函数、次调和函数和超调和函数在这一框架下的推广。

定义 2.6. 若实值函数 $u \in W^1_{n,\text{局部}}(G,\mathbb{R})$ 满足 u 是欧拉方程 $\nabla\cdot\nabla_h F(x,\nabla u) = 0$ 的弱意义下的解，则称其为 F-极值函数，即

$$\int_G \nabla_h F(\cdot,\nabla u)\cdot\nabla\phi\, dm = 0$$

对所有实值函数 $\phi \in C_0^\infty(G,\mathbb{R})$.

定义 2.7. 上半连续函数 $u\colon G \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 称为次-F-极值函数，若 u 满足以下条件：若域 U 在 G 中相对紧，且 $h \in C(\overline{U},\mathbb{R})$ 是 U 中的一个 F-极值函数，其中 $h \ge u$ 属于 ∂U，则 $h \ge u$ 属于 U。函数 $v\colon G \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 称为超-F-极值函数，若 $-v$ 是次-F-极值函数。

给定 $\mathbb{R}^n$ 的无界子域 U，使得 $B(0,r)\cap U \neq \emptyset$，以及次-$F$-极值函数 u: $U \to \mathbb{R}$，定义

$$M_U(r,u) = \sup_{|x|\le r, x\in U} u(x).$$

引理 2.8. 设 h 是一个 F-极值函数，u 是次-F-极值函数，v 是超-F-极值函数，且 $\lambda \in \mathbb{R}$。则有以下性质：

- h 是次-F-极值函数，也是超-F-极值函数，
- λh 和 $h+\lambda$ 是 F-极值函数，
- $|\lambda|u$ 和 $u+\lambda$ 是次-F-极值函数，并且
- $|\lambda|v$ 和 $v+\lambda$ 是超-F-极值函数。

引理 2.8 中列出的第一个性质是 [10, 定理 418]的推论。以下 F-比较原理是证明 Phragm´en-Lindel¨of 型结果的关键。

定理 2.9。（*[12],* 引理 2.3）设 G 为有界域， u 为 G 中的次-F-极值函数， v 为 G 中的超-F-极值函数。如果

$$\limsup_{x\to y} u(x) \leq \liminf_{x\to y} v(x)$$

对所有 $y \in \partial G$ 均成立，且不等式的左端和右端不同时为 ∞ 或 $-\infty$ ，则 $u \leq v$ 在 G 中。

变分核与拟正则映射之间的联系通过以下定义得以揭示。

定义 2.10。设 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ 为拟正则映射。假设 $G' \subset \mathbb{R}^n$ 为一个域，使得 $f(G) \subset G'$。设 $F\colon G' \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 G' 中的变分核。定义 $f^\sharp F\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$f^\sharp F(x,h) = \begin{cases} F(f(x), J_f(x)^{1/n} f'(x)^{-1*} h), & J_f(x) \neq 0 \\ |h|^n, & J_f(x) = 0 \text{ or } J_f(x) \text{ does not exist.} \end{cases}$$

其中 A^* 是线性映射 $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. 的伴随算子

根据 [20, 命题 VI.2.6], , 我们知道 $f^\sharp F$ 是 G 中的变分核，但其常数 α 和 β 可能不同。事实上，我们可以取 $\alpha = \alpha(F)K_O(f)^{-1}$ 以及 $\beta = \beta(F)K_I(f)$。然而，我们可能有 $\alpha(f^\sharp F) \geq \alpha(F)K_O(f)^{-1}$，以及 $\beta(f^\sharp F) \leq \beta(F)K_I(f)$。在特殊情形下，当 $F_I(x,h) := |h|^n$ 时， $\alpha(f^\sharp F_I) = K_O(f)^{-1}$ 以及 $\beta(f^\sharp F_I) = K_I(f)$。特别地，如果 $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ 是拟正则的，那么 [20, 推论 VI.2.8] 表明 $\log |f|$ 在 $G \setminus f^{-1}(0)$ 中是极值函数，这意味着 f 是 G 中的次-$f^\sharp F_I$-极值函数。

接下来，我们回顾集合 $C \subset \partial G$ 的 F-调和测度 $\omega(C, G; F)$ 的定义。

定义 2.11. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界域， F 是一个变分核，且 $f\colon \partial G \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ 是任意函数。与 f 相关联的上 Perron 类定义为 $\mathscr{U}_f = \{u\colon G \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \liminf_{x\to y} u(x) \geq f(y)\ y \in \partial G, u$ 是一个超-F-极值函数，且在 $G\}$. 中有下界。定义函数 $\overline{H_f}$ 为 $\overline{H_f} = \inf\{u : u \in \mathscr{U}_f\}$。

注意，若 f 有界，则 $\overline{H_f}$ 是 G 中的一个 F-极值函数，见 [11, 第 106] 页。

定义 2.12. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为有界域，且 $C \subset \partial G$。设 $f\colon \partial G \to \{0,1\}$ 为 ∂G 中 C 的特征函数。 G 中的 F-极值函数 $\overline{H_f}$ 称为相对于 G 的 C 的 F-调和测度，记作 $\omega(C, G; F)$。

根据定义，我们看到 $0 \leq \omega(C, G; F) \leq 1$。

2.3. 扇形域。 对于我们的应用，我们需要在以下情形下对 $\omega(C, G; F)$ 给出估计：当 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中某个扇形的子集时；此外，还需要估计拟 Fatou 集中扇形域内拟正则映射的增长。回顾 Definition $S_{x_0,E}$ 中的定义 1.6。将点从扇形域投影到 S^{n-1} 也会很有用。

定义 2.13. 给定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，定义投影 $\nu_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \to S^{n-1}$，其定义如下

$$\nu_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}.$$

如果上下文明确，我们通常省略下标，写作 $S = S_{x_0,\ E}$和 $\nu = \nu_{x_0}$。

扇形的重要特征是其角度测度为常数。更确切地说，若$S_{x_0,E}$是顶点为 x_0 的扇形，则对所有 $r > 0$， $\nu(S_{x_0,E} \cap S(x_0, r)) = m(E)$的$(n-1)$维测度均为常数。

首先，我们给出扇形中 F-调和测度的以下估计。为此，固定一个顶点为 x_0的扇形$S = S_{x_0,E}$。对于 $r > 0$，令 $S_r = S \cap B(x_0, r)$。记 $x \in S_r$处的 F-调和测度 $\omega(S(x_0, r)\cap\partial S_r, S_r;\ F)$的值为 $\omega(x; r)$。使用上述记号，我们得到 $\omega(x; r)$的以下估计。

引理 2.14。设$S_{x_0,E} \subset \mathbb{R}^n$ 为扇形，且 F 是$S_{x_0,E}$中的一个变分核，其结构常数为 α 和 β。那么，

$$\omega(x; r) \le \frac{4|x - x_0|^q}{r^q}$$

其中 $q = d_n m(E)^{-1/(n-1)}(\alpha/\beta)^{1/n}$，且 $d_n > 0$ 是一个仅依赖于 n的常数。

证明。当顶点 $x_0 = 0$ 时，结论只是 [11,引理 3.18] 的一个特例。令 f 为平移 $f(x) = x + x_0$，并考虑变分核 $f^\sharp F$。根据定义 2.10，显然有

$$f^\sharp F(x, h) = F(f(x), h)$$

并且 $\alpha(f^\sharp F) = \alpha(F)$ $\beta(f^\sharp F) = \beta(F)$。由此可得

$$\omega(S(x_0, r) \cap \partial S_r, S_r; F) = \omega(f^{-1}(S) \cap S(0, r), f^{-1}(S) \cap B(0, r); f^\sharp F)$$

由此我们再次根据 [11, 引理 3.18] 得到该引理。 □

接下来，如果一个扇形包含在拟 Fatou 集中，我们将需要关于 f 的以下增长条件。为表述该条件，以下记号将有所帮助。用 d 表示 S^{n-1}上的球面距离。对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$、$\zeta \in S^{n-1}$ 和 $0 < \eta \le \pi$，令 $\Omega(x_0, \zeta, \eta)$ 表示扇形 $S_{x_0,\ E}$其中 $E = \{y \in S^{n-1}\colon\ d(y, \zeta) < \eta\}$。

定理 2.15。（*[8]*, 定理 4.2）设 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个超越型 K-拟正则映射。假设对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$、$\theta \in S^{n-1}$和 $\eta > 0$，扇形 $\Omega(x_0, \theta, \eta)$ 包含于拟 Fatou 集 f 的一个连通分支 U 中，且 U 的拓扑包是 $\mathbb{R}^n$ 的真子集。那么，如果 $0 < \eta' < \eta$，存在一个依赖于 n、$\eta - \eta'$ 和 K 的常数 p，使得对于 $x \in \Omega(x_0, \theta, \eta')$，$|f(x)| = O(|x|^p)$。

3. Phragmén-Lindelöf Principles

本节将证明关于扇形中子-F-极值函数的 Phragm´én-Lindel¨of 结果，其中 u 的上界为对某个常数 $C > 0$ 而言的 $C\log^+|x|$，随后将其应用于拟正则映射，以获得相应的结果。

定理 1.9 的证明。回想一下，我们假设对所有 $y \in \partial S$，$\limsup_{x\to y} u(x) \le C\log^+|y|$。假设定理 1.9 的结论中的第一种情况不成立。也就是说，假设对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个序列 $(x_m)_{m=1}^\infty$，属于 S，且满足 $|x_m| \to \infty$ 和 $u(x_m) > (1+\varepsilon)C\log|x_m|$。由于 $|x_m| \to \infty$，我们可以重新编号，并假设

$$\frac{u(x_m)}{\log|x_m|} > C(1+\varepsilon) \tag{3.1}$$

对所有 m 均成立。给定 $\delta > 0$，定义

$$C_m = \frac{u(x_m)}{(1+\varepsilon)\log|x_m|} \text{ and } R_m = |x_m|^{1+\varepsilon} e^{-\delta/C_m} - |x_0|.$$

显然，对所有 m，我们都有 $C_m > C$。此外，如有必要，重新标记 m，则有

$$\begin{aligned}\log(R_m + |x_0|) &= (1+\varepsilon)\log|x_m| - \frac{\delta}{C_m} \\ &= (1+\varepsilon)\log|x_m| - \frac{(1+\varepsilon)\log|x_m|\delta}{u(x_m)} \\ &= (1+\varepsilon)\log|x_m|\left(1 - \frac{\delta}{u(x_m)}\right) > 0\end{aligned}$$

对所有 m 由于 $|x_m| \to \infty$ 且（3.1）意味着 $\log|x_m| > 0$ 以及 $u(x_m) \to \infty$。

沿用前文的记号，令 $S_{R_m} = S \cap B(x_0, R_m)$。最后，定义

$$v_m(x) = u(x) - C_m \log(|x_0| + R_m).$$

目标是证明，经过适当缩放的 v_m 在 ∂S_{R_m} 上有界于 F-调和测度之上。为此，对 $y \in \partial S_{R_m} \cap \partial S$，我们有 3.2
( )

$$\limsup_{x\to y} v_m(x) = \limsup_{x\to y}\left[u(x) - C_m\log(|x_0| + R_m)\right] \le \limsup_{x\to y}\left[u(x) - C\log^+|x|\right] \le 0.$$

此外，对 $y \in \partial S_{R_m} \backslash \partial S$，我们有

$$v_m(y) = u(y) - C_m\log(|x_0| + R_m) \le u(y), \tag{3.3}$$

注意到 u，因此 v_m 也定义在 $\partial S_{R_m} \backslash \partial S$ 上。

考虑 v_m~~(x) $M_S(|x_0|+R_m, u)$~~，其中按照通常记号，$M_S(r,u) = \sup_{x\in S,\ |x|\le r} u(x)$。由 (3.1) 可知 $u(x_m) > 0$，因此有 $M_S(|x_0| + R_m, u) > 0$。对于 $y \in \partial S_{R_m} \cap \partial S$，由 (3.2) 可得

$$\limsup_{x\to y} \frac{v_m(x)}{M_S(|x_0| + R_m, u)} \le 0.$$

对于 $y \in \partial S_{R_m} \backslash \partial S$，由（3.3）可得

$$\frac{v_m(y)}{M_S(|x_0| + R_m, u)} \le \frac{u(y)}{M_S(|x_0| + R_m, u)} \le 1.$$

由 [13, 定理 11。6],可得

$$\lim_{x\to y} \omega(x; R_m) = \begin{cases} 0, & y \in \partial S_{R_m} \backslash S(x_0, r) \\ 1, & y \in \partial S_{R_m} \backslash \partial S \end{cases}.$$

由于对所有 $x \in \partial S_{R_m}$ 都有 $0 \le \omega(x, R_m) \le 1$，因此有

$$\limsup_{x\to y} \frac{v_m(x)}{M_S(|x_0| + R_m, u)} \le \liminf_{x\to y} \omega(x; R_m)$$

对于 $y \in \partial S_{R_m}$.

由于 $\omega(x;\ R_m)$ 是一个 F-极值函数，在 S_{R_m}中，我们还可得 $\omega(x;\ R_m)$ 是F的超- S_{R_m}-极值函数，由引理2.8可知。由于 $u(x)$ 是一个次-F-极值函数，再由引理2.8可知，$v_m(x)$ 和 $v_{m(x)}\ M_S(|x_0|+R_m,\ u)$ 都是~~S_{R_m} 中的~~次-F-极值函数。

根据 F-比较原理，定理2.9，可得

$$\frac{v_m(x)}{M_S(|x_0|+R_m,u)} \le \omega(x;R_m)$$

对于 $x \in S_{R_m}$。特别地，我们有

$$v_m(x_m) \le M_S(|x_0|+R_m,u)\omega(x_m;R_m).$$

接下来，根据 C_m 和 R_m的定义，对于所有 m ，我们有

$$\begin{aligned} v_m(x_m) &= u(x_m) - C_m \log(|x_0|+R_m) \\ &= u(x_m) - C_m \log(|x_0|+|x_m|^{1+\varepsilon}\, e^{-\delta/C_m} - |x_0|) \\ &= u(x_m) - C_m \left[\log(|x_m|^{1+\varepsilon}) + \log(e^{-\delta/C_m})\right] \\ &= u(x_m) - (1+\varepsilon)C_m \log|x_m| + \delta \\ &= u(x_m) - \frac{(1+\varepsilon)u(x_m)}{(1+\varepsilon)\log|x_m|}\log|x_m| + \delta \\ &= \delta > 0. \end{aligned}$$

我们得出，对于所有 m，有

$$0 < \delta \le M_S(|x_0|+R_m,u)\omega(x_m;R_m).$$

利用引理 F2.14中关于扇形域内 m-调和测度的估计，对于所有 m，我们得到

$$\delta \le \frac{4M_S(|x_0|+R_m,u)|x_m-x_0|^q}{R_m^q}, \tag{3.4}$$

其中 $q = d_n m(E)^{-1/(n-1)}(\alpha/\beta)^{1/n}$ ，对于某个常数 $d_n > 0$ ，该常数仅依赖于 n。这里， α 和 β 是 F 的结构常数，而 $m(E)$ 是 S 的角度测度。

令 $r_m = |x_0| + R_m$。因此，当 $m \to \infty$ 时， $R_m = r_m(1+o(1))$。此外，根据 R_m 的定义，我们有

$$\begin{aligned} |x_m| &= \left[(R_m+|x_0|)e^{\delta/C_m}\right]^{1/(1+\varepsilon)} \\ &= O(r_m^{1/(1+\varepsilon)}) \end{aligned}$$

如 $m \to \infty$。因此

$$|x_m - x_0|^q = O(r_m^{q/(1+\varepsilon)})$$

如 $m \to \infty$。

将这些结果与（3.4）结合，可得存在一个常数 $\lambda > 0$ 使得

$$\frac{M_S(r_m,u)r_m^{q/(1+\varepsilon)}}{r_m^q} = M_S(r_m,u)r_m^{-q\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge \lambda$$

对所有 m均成立。因此，

$$\limsup_{r\to\infty} M_S(r,u)r^{-q'} > 0$$

其中 $q' = d_n m(E)^{-1/(n-1)}(\alpha/\beta)^{1/n}\varepsilon/(1+\varepsilon)$。

□

现在，我们将定理 1.9 应用于对数函数这一特殊情形 $|f|$ 其中 f 在 S上是拟正则的。

推论 1.10 的证明。设 $F_I(x,h) = |h|^n$ 为变分核。那么， $u(x)$ =log $|f(x)|$是 S中的一个次-$f^\sharp F_I$-极值函数，且 $\alpha(f^\sharp F_I) = K_O(f)^{-1}$并且 $\beta(f^\sharp F_I)$ =$K_I(f)$。根据假设条件，对每个 $y \in \partial S$，我们有

$$\limsup_{x\to y} u(x) = \limsup_{x\to y} \log|f(x)| \leq p\log^+|y| + C.$$

因此，

$$\limsup_{x\to y} [u(x) - C] \leq p\log^+|y|.$$

由于根据引理 2.8， $u(x) - C$是一个子-$f^\sharp F_I$-极值函数，因此由定理 1.9 可知，$\varepsilon > 0$我们得到：要么当 $u(x) - C \leq (1+\varepsilon)p\log|x|$ in $S$for $|x|$充分大时成立，要么存在一个常数 $q = d_n m(E)^{-1/(n-1)}(\alpha/\beta)^{1/n}\varepsilon/(1+\varepsilon) > 0$ 使得 lim sup $_{r\to\infty}$ $M_S(r,u)r^{-q} > 0$。注意到 $\alpha/\beta > K^{-2}$，因此

$$\limsup_{r\to\infty} M_S(r,u)r^{-q'} > \limsup_{r\to\infty} M_S(r,u)r^{-q} > 0$$

其中 $q' = d_n m(E)^{-1/(n-1)}K^{-2/n}\varepsilon/(1+\varepsilon)$。

在第一种情形下，当 $u(x) \leq C + (1+\varepsilon)p\log|x|$ in $S$for $|x|$充分大时成立。在第二种情形下，若 lim sup $M_S(r,u)r^{-q'} > 0$，那么由于$r\to\infty$

$$M_S(r,u) = M_S(r,\log|f|) = \log M_S(r,f)$$

我们得出

$$\limsup_{r\to\infty} [\log M_S(r,f)]r^{-q'} > 0.$$

□

4. Neighborhoods of Components of Closed Sets

在定理 1.2 的证明中，我们需要证明每个连通分支 E （L）f都有一个开邻域 U，该邻域不会比 E 大太多，并且满足 U 的边界包含于 L（f）的补集之中。我们将在引理 4.7中完成这一点。为铺垫该引理的证明，我们将在此介绍一些本文其他部分不需要用到的拓扑概念。有关更多细节和证明，请参阅 Bredon 的专著 [6]。

定义 4.1. 设 X 是一个拓扑空间。如果 X 不能表示为分别包含 x、y的开集 U、V的不交并，则定义 $x \sim y$ 。于是， ∼是一个等价关系，而等价类就是 X的拟连通分支。

定理 4.2. 包含 $x \in X$ 的拟连通分支，是包含 x的 X 的闭开子集的交集。

定理4.3。在紧豪斯多夫空间中，连通分支与拟连通分支重合。

定义4.4。空间 X 是 T_4，如果对于 X 中任意两个不交闭集 F、G，都存在 X 中两个不交开集 U、V，使得 $F \subset U$ 和 $G \subset V$。

定理4.5。集合 A 可测，当且仅当对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个开集 G 和一个闭集 H，使得 $H \subset A \subset G$ 和 m（$G\backslash H$）$< \epsilon$。

引理4.6. 设 X 是一个紧豪斯多夫空间。设 E 是X的准连通分支，且 V 是 E 在 X 中的一个开邻域。则存在一个 X 中的闭开集 C，使得 $E \subset C \subset V$。

证明. 由于 V 在 X中是开集，因此 $X\backslash V$ 在 X中是闭集。由于 $X\backslash V$ 在一个闭豪斯多夫空间中是闭集，因此 $X\backslash V$ 是紧的。

设 $x \in E$，且 Y_γ 是 X 中包含 x的闭开集。于是，由定理 4.2，$\cap_\gamma Y_\gamma = E$。由于 Y_γ 在 X中是闭集，因此 $X\backslash Y_\gamma$ 在 X中是开集。所以，$\cup_\gamma(X\backslash Y_\gamma)$ 是开集。设 $y \in X\backslash V$。则 $y \notin E$，因此对某个 γ，有 $y \notin Y_\gamma$。于是 $y \in \cup_\gamma(X\backslash Y_\gamma)$，所以 $X\backslash V \subset \cup_\gamma(X\backslash Y_\gamma)$。由于 $\{X\backslash Y_\gamma\}_\gamma$ 是 $X\backslash V$的开覆盖，存在有限子覆盖 $\{X\backslash Y_i\}_{i=1}^m$，使得 $X\backslash V \subset \cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i)$。

由于对所有 i，Y_i 都是闭开集，因此 $\cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i)$ 是 X中的闭开集，所以

$$X\backslash(\cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i))$$

在 X中是闭开集。设 $x \in E$。于是，对所有 γ，都有 $x \in Y_\gamma$。特别地，对所有 i，都有 $x \notin X\backslash Y_i$，所以 $x \notin \cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i)$。因此 $E \subset X\backslash(\cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i))$。最后，由于 $\cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i)$ 是 $X\backslash V$的开覆盖，因此 $X\backslash(\cup_{i=1}^m(X\backslash Y_i)) \subset V$。□

引理 4.7. 设 $X \subset S^{n-1}$ 为闭集，且 E 是 X 的一个连通分支，并且 $m(E) < \lambda < \omega_{n-1}$。给定 $\epsilon > 0$，存在 U 的一个邻域，使得 E 满足 $m(U) < \lambda + \epsilon < \omega_{n-1}$ 及 $\partial U \subset S^{n-1}\backslash X$。

证明。由于 E 是 S^{n-1} 中的闭集，E 是一个可测集。根据定理4.5，存在一个开集 $V_1 \subset S^{n-1}$ 和一个闭集 $V_2 \subset S^{n-1}$，使得 $V_2 \subset E \subset V_1$ 且 $m(V_1\backslash V_2) < \epsilon$。注意，这意味着 $m(V_1) = m(V_2 \cup (V_1\backslash V_2)) = m(V_2) + m(V_1\backslash V_2) \leq m(E) + m(V_1\backslash V_2) < \lambda + \epsilon$。若 $X \cap \partial V_1 = \emptyset$，则结论成立。

假设 $X \cap \partial V_1 \neq \emptyset$。注意到 V_1 在 S^{n-1} 中是开集，因此 $X \cap V_1$ 在 X 中是开集，并且 $E \subset X \cap V_1$。由引理4.6，存在 X 中的一个闭开集 C_1，使得 $E \subset C_1 \subset X \cap V_1$。由于 C_1 在 X 中是闭集，且 X 在 S^{n-1} 中是闭集，因此 C_1 在 S^{n-1} 中是闭集。由于 C_1 在 X 中也是开集，$X\backslash C_1$ 在 X 中是闭集，进而在 S^{n-1} 中也是闭集。此外，由于 V_1 在 S^{n-1} 中是开集，因此 $S^{n-1}\backslash V_1$ 在 S^{n-1} 中是闭集。因此，$C_2 = (S^{n-1}\backslash V_1) \cup (X\backslash C_1)$ 在 S^{n-1} 中是闭集。

注意到 $C_1 \cap C_2 = \emptyset$。为此，假设 $x \in C_2$。那么，要么 $x \in S^{n-1}\backslash V_1$，要么 $x \in X\backslash C_1$。在第一种情况下，由于 $C_1 \subset V_1$，x 不可能属于 C_1。在第二种情况下，x 不可能属于 C_1。因此，$C_1 \cap C_2 = \emptyset$。由于 S^{n-1} 是 T_4，存在 S^{n-1} 中的不交开集 U_1、U_2，使得 $C_1 \subset U_1$ 且 $C_2 \subset U_2$。

注意到 $U_1 \subset V_1$。为此，令 $x \in U_1$。于是，$x \notin U_2$，因此 $x \notin C_2$。所以，$x \notin X\backslash C_1$ 且 $x \notin S^{n-1}\backslash V_1$。由此，$x \in V_1$。因此，$m(U_1) \leq m(V_1) < \lambda + \epsilon$。

最后，注意到 $\partial U_1 \cap X = \emptyset$。为此，令 $x \in X = C_1 \cup (X\backslash C_1)$。若 $x \in C_1$，则 $x \subset U_1$ 且 $x \notin \partial U_1$。若 $x \in X\backslash C_1$，则 $x \in U_2$。由于 U_2 是开集，存在一个包含于 U_2中的 x 的邻域。若 $x \in \partial U_1$，则 x的任意邻域都包含 U_1中的一点。然而 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$，所以这种情况不可能发生。因此，$\partial U_1 \cap X = \emptyset$。□

5. Proof of Main Results

本节将回到拟正则映射的 Julia极限方向集合，并证明定理 1.2、推论 1.4和定理 1.5。我们的目标是利用 Qiao [18, 定理 1]，结合我们的 Phragm´en-Lindel¨of 结果，克服高维中的技术困难。我们首先需要以下引理。回顾一下，$\Omega(x_0, \zeta, \eta)$ 是扇形 $S_{x_0,\ E}$ 其中 E 是球$\{y \in S^{n-1} :\ d(y, \zeta) < \eta)\}$。

引理 5.1. 设 f： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个超越型拟正则映射。令 $\zeta \in S^{n-1} \setminus L(f)$。则存在 $k > 0$ 和 $\eta > 0$，使得扇形 $\Omega(k\zeta, \zeta, \eta) \subset QF(f)$。

证明。假设结论不成立。那么对于所有 $k > 0$ 和所有 $\eta > 0$，有

$$\Omega(k\zeta, \zeta, \eta) \cap J(f) \neq \emptyset.$$

注意，$\nu_0(\Omega(k\zeta, \zeta, \eta)) \subset S^{n-1} \cap B(\zeta, \eta)$。令 $\eta_m = 1/m$，并选取序列 $k_m \to \infty$ 和 $z_m \in \Omega(k_m\zeta, \zeta, \eta_m) \cap J(f)$。我们必然有 $|z_m| \to \infty$，因为 $m \to \infty$。

对于所有 $\epsilon > 0$，存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得当 $m \geq M$ 时 $\eta_m < \epsilon$。于是

$$\nu_0(z_m) \in \nu_0\left[\Omega(k_m\zeta, \zeta, \eta_m)\right] \subset B(\zeta, \epsilon).$$

由于这对所有 $\epsilon > 0$ 都成立，我们必有 $\nu_0(z_m) \to \zeta$，因为 $m \to \infty$。这意味着 $\zeta \in L(f)$，矛盾。□

定理的证明 *1.2*。设 f 是一个 K-拟正则映射，属于超越型，阶为 μ_f，并设

$$M = \min(c_n K^{(2-2n)/n} \mu_f^{1-n}, \omega_{n-1}) = \min\left(\left[(n-1)d_n K^{-2/n}\mu_f^{-1}/2\right]^{n-1}, \omega_{n-1}\right)$$

其中 d_n 是依赖于 n 的常数，见推论 1.10 以及 $c_n = [(n-1)d_n/2]^{n-1}$。反设 $L(f$中测度最大的连通分支的测度小于 M。

设 $\mathcal{F} = \{U\colon U$是 S^{n-1}中的一个域，使得 $\partial U \subset S^{n-1}\setminus L(f)$ 且 $m(U) < M\}$.由于 $L(f$中测度最大的连通分支的测度小于M，根据引理 4.7，$\mathcal{F}$ 是 S^{n-1}的一个开覆盖。由于 S^{n-1} 是紧的，因此存在 $\bigcup_{i=1}^{s} U_i$的一个有限子覆盖 S^{n-1}，其中 $U_1, \ldots, U_s \in \mathcal{F}$。

现在，固定 $i \in \{1, 2, ..., s\}$并考虑 U_i。令 S_i为扇形 S_{0,U_i}。给定$y \in \partial U_i$，根据引理 5.1，存在 $k_y > 0$和 $\eta_y > 0$，使得 $\Omega(k_y y, y, \eta_y) \subset QF(f)$。根据定理 2.15，存在常数 $\eta_y' \in (0, \eta_y)$ 和 $p_y > 0$，使得$|f(x)| = O(|x|^{p_y})$ 对于 $x \in \Omega(k_y y, y, \eta_y')$成立。

定义 $V_y = \nu_0[\Omega(k_y y, y, \eta_y')] \subset S^{n-1}$，并考虑 $\bigcup_{y\in\partial U_i} V_y$。这是 ∂U_i 的一个开覆盖。根据紧致性，存在一个有限子覆盖 $\bigcup_{j=1}^{t} V_{y_j}$，它覆盖$\partial U_i$。令 $p_i = \max_{j=1,\ldots,t} p_{y_j}$。

接下来，对于 $x \in \partial S_i$，当 $|x| > R$足够大时，存在某个 y_j，使得 $x \in \Omega(k_{y_j} y_j, y_j, \eta_{y_j}')$，且 $\nu_0(x) \in V_{y_j}$。因此，

$$x \in \bigcup_{j=1}^{t} S_{k_{y_j} y_j, V_{y_j}}$$

其中 $S_{k_{y_j} y_j, V_{y_j}}$是以 $k_{y_j} y_j$为顶点、相对于 V_{y_j}的扇形。因此，当$|x| \to \infty$属于 ∂S_i 时，我们有 $|f(x)| = O(|x|^{p_i})$。此外，由于 $(0, R)$ 是紧集，且 f 在此集合上连续，$|f|$ 在此处有界。因此，我们可以对 S_i 上的 f 应用推论 1.10，其中 $\varepsilon = 1$，从而得出：要么存在$p_i' > 0$，使得当 $|x| \to \infty$属于 S_i时，$|f(x)| = O(|x|^{p_i'})$；要么

$$\limsup_{r\to\infty} \log M_{S_i}(r, f) r^{-q_i} > 0,$$

其中 $q_i = d_n m(U_i)^{-1/(n-1)} K^{-2/n}/2$，对 $d_n > 0$ 成立，且仅取决于 n。

假设后一种情况成立。那么，特别地，存在一个常数 $\lambda > 0$ 和一个序列 $(r_m)_{m=1}^{\infty}$，满足 $r_m \to \infty$，使得

$$\log M_{S_i}(r_m, f) > \lambda r_m^{q_i}.$$

那么 f 的阶满足

$$\begin{aligned}
\mu_f &= \limsup_{r\to\infty} (n-1)\frac{\log\log M(r,f)}{\log r} \\
&\geq \limsup_{m\to\infty} (n-1)\frac{\log\log M(r_m,f)}{\log r_m} \\
&\geq \limsup_{m\to\infty} (n-1)\frac{\log\log M_{S_i}(r_m,f)}{\log r_m} \\
&\geq \limsup_{m\to\infty} (n-1)\frac{\log(\lambda r_m^{q_i})}{\log r_m} \\
&= \limsup_{m\to\infty} (n-1)\frac{\log\lambda + q_i\log r_m}{\log r_m} \\
&= (n-1)q_i \\
&= (n-1)d_n m(U_i)^{-1/(n-1)} K^{-2/n}/2. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

注意，

$$M = \begin{cases} \omega_{n-1}, & \text{if } \mu_f \leq K^{-2/n}\left(\frac{c_n}{\omega_{n-1}}\right)^{1/(n-1)} \\ \left((n-1)d_n K^{-2/n}\mu_f^{-1}/2\right)^{n-1}, & \text{if } \mu_f > K^{-2/n}\left(\frac{c_n}{\omega_{n-1}}\right)^{1/(n-1)} \end{cases}.$$

不等式（5.1）表明

$$m(U_i) \geq \left((n-1)d_n K^{-2/n}\mu_f^{-1}/2\right)^{n-1} \geq M,$$

这与 $m(U_i) < M$ 矛盾，并排除了 Phragm´en-Lindel¨of 结果中的第二种可能。

我们得出 $|f(x)| = O(|x|^{p_i'})$，如 $|x| \to \infty$ 中的 S_i 所示。由于这对所有 $i = 1$、.....、s 都成立，且 $\bigcup_{i=1}^{s} U_i$ 是 S^{n-1} 的覆盖，因此对于某个 $p > 0$，我们有 $|f(x)| = O(|x|^p)$，如 $|x| \to \infty$ 中的 $\mathbb{R}^n$ 所示，这与引理 2.2 矛盾。因此， $L(f)$ 必有一个连通分支，记为 E，满足 $m(E) \geq \min(c_n K^{(2-2n)/n}\mu_f^{1-n}, \omega_{n-1})$。□

推论 1.4 的证明。假设 $L(f)$ 的每个连通分支都是一个点。设 $V_\gamma = \{x_\gamma\}$ 是 $L(f)$ 的一个连通分支，且 $\epsilon > 0$。根据引理 4.7，对于每个连通分支 V_γ，存在 V_γ 的一个邻域 $U_\gamma \subset S^{n-1}$，使得 $m(U_\gamma) = \epsilon$ 且 $\partial U_\gamma \cap L(f) = \emptyset$。由 $\mathbb{R}^n \backslash (\cup_\gamma S_{0,U_\gamma})$ 中的定理 2.15，我们得到对于某个常数 $p > 0$，有 $|f(x)| = O(|x|^p)$。特别地，沿着 $\partial S_{0,\ U_\gamma}$， $|f(x)| = O(|x|^p)$。根据推论 1.10，在 $S_{0,\ U_\gamma}$ 中，我们要么有对于某个常数 $p' > 0$， $|f(x)| = O(|x|^{p'})$，要么

$$\mu_f \geq (n-1)d_n \epsilon^{\frac{-1}{n-1}} K^{-2/n}/2 \qquad (5.2)$$

其中 $d_n > 0$ 仅取决于 n。在第一种情况下， f 由引理 2.2可知必为多项式型，因此其阶必须满足（5.2）。令 $\epsilon \to 0$，则有$\mu_f = \infty$。□

转而讨论拟正则映射的逆问题，第一位署名作者在 $\mathbb{R}^3$ [8, 定理 2 中对逆问题给出了部分解答。4]在 [8], 他

研究了 E 由 S^2 中有限多个域的闭包之并构成的情形，并证明存在一个有限下阶的拟正则映射，使得 $E = L(f)$。这一结果依赖于 Nicks 和 Sixsmith [17]的一个构造，该构造给出了一个在半空间中等于恒等映射的超越型拟正则映射。通过考察该映射的拟共形共轭，第一位署名作者对满足某些条件的 E 给出了逆问题的解答。

为了彻底解决这个逆问题，我们首先希望构造一个超越型拟正则映射，它只有一个 Julia极限方向，并且在半射束之外等于恒等映射。为构造这个映射，我们将采用与 Nicks 和 Sixsmith 类似的策略。如果能够构造出这样的映射，我们就能彻底解决这个逆问题。

定理 *1.5*的证明。 给定一个闭集 $E \subset S^{n-1}$，我们按如下方式归纳地定义一个拟正则映 f 射。

设 $(\zeta_{1,k})_k$ 是 E 中的一个点序列，满足 $d(\zeta_{1,i},\zeta_{1,j}) > 1/2$，其中 $i \neq j$。取一个点序列 $(x_{1,k})_k$，使得半射束 $H(x_{1,k},\zeta_{1,k}, 1)$ 两两不交。设 $A_{1,k}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是由平移 $x_{1,k}$ 和一个将 e_1 映至 $\zeta_{1,k}$的旋转复合而成。注意，$A_{1,k}(H(0, e_1, 1)) = H(x_{1,k},\zeta_{1,k}, 1)$。定义

$$f_1(x) = \begin{cases} A_{1,k} \circ f_0 \circ A_{1,k}^{-1}(x), & x \in \cup_k H(x_{1,k}, \zeta_{1,k}, 1) \\ x, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，此映射是拟正则的，并且 $L(f_1) = \{(\zeta_{1,\ k})_k\}$。

接下来，对于 $m \geq 2$，考虑 E 中的一个点序列 $(\zeta_{m,\ k})_k$，使得 $L(f_{m-1}) \subset \{(\zeta_{m,\ k})_k\}$，且 $d(\zeta_{m,\ i},\zeta_{m,\ j}) > 1/2^m$。对于每个 $\zeta_{m,\ k} \notin L(f_{m-1})$，选取一点 $x_{m,\ k}$，使得 $H(x_{m,\ k},\zeta_{m,\ k}, 1)$ 与先前定义的半射束不相交

$$\bigcup_{h<m} \bigcup_k H(x_{h,k}, \zeta_{h,k}, 1)$$

并且 $H(x_{m,\ i},\zeta_{m,\ i}, 1) \cap H(x_{m,\ j},\zeta_{m,\ j}, 1) = \emptyset$ 当 $i \neq j$ 时。令 $A_{m,\ k}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为平移 $x_{m,\ k}$ 与一个将 e_1 映到 $\zeta_{m,\ k}$ 的旋转的复合。注意，$A_{m,\ k}(H(0, e_1, 1)) = H(x_{m,\ k},\zeta_{m,\ k}, 1)$。定义

$$f_m(x) = \begin{cases} A_{m,k} \circ f_0 \circ A_{m,k}^{-1}(x), & x \in \cup_k H(x_{m,k}, \zeta_{m,k}, 1) \\ f_{m-1}(x), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，f_m 是一个拟正则映射，且 $L(f_m) = \{(\zeta_{m,k})_k\}$。

由于 E 是闭的，正如 $m \to \infty$ 所示，$\{(\zeta_{m,k})\}$ 的聚点集等于 E。注意，对于 $m \geq 1$，$K(f_m) = K(f_0)$，因为平移和旋转都是 1-拟正则的。此外，$(f_m)_m$ 局部一致地收敛到映射 f。根据 [20, 定理 VI.8.6]，f 是一个拟正则映射。因此，我们有一个拟正则映射 f，且 $L(f) = E$。

□

References

[1] Baker, I. N.（1975）。整函数的正规性域。《芬兰科学院年鉴·A辑·数学》，1：277–283。[2] Bergweiler, W.（2006）。复合整函数与拟正则映射的不动点。《芬兰科学院年鉴·数学》，31：523–540。

[3] Bergweiler, W.（2013）。非一致拟正则映射的 Fatou–Julia理论。《遍历理论与动力系统》，33：1–23。[4] Bergweiler, W. 和 Nicks, D. A.（2014）。整拟正则映射迭代理论的基础。《以色列数学杂志》，201(1)：147–184。[5] Botvinnik, V. 和 Miklyukov, V. M.（1980）。关于具有有界畸变的 n维映射的 Phragm´en–Lindel¨of 型定理。《西伯利亚数学杂志》，21(2)：232–235，240。[6] Bredon, G. E.（1997）。拓扑学与几何学。施普林格出版社。[7] Ess´en, M.（1990）。关于共轭函数的 M. Riesz定理以及 Zygmund $L\log L$定理向 $\mathbb{R}^d$、$d \geq 2$ 的推广。《芬兰科学院年鉴·A辑·数学》，15(1)：83–105。[8] Fletcher, A. N.（2021）。关于高维中的 Julia极限方向。《计算方法与函数理论》，21：587–603。[9] Gentili, G.、Stoppato, C. 和 Struppa, D. C.（2011）。切片正则函数的 Phragm´en-Lindel¨of 原理。《比利时数学学会公报·Simon Stevin》，18(4)：749–759。[10] Granlund, S.、Lindqvist, P. 和 Martio, O.（1983）。共形不变变分积分。《美国数学学会会刊》，277：43–73。[11] Granlund, S.、Lindqvist, P. 和 Martio, O.（1985）。Phragm´en-Lindel¨of 定理与 Lindel¨of 定理。《Arkiv 数学》，23(1)：103–128。[12] Granlund, S.、Lindqvist, P. 和 Martio, O.（1986）。非线性情形下关于 PWB方法的注记。《太平洋数学杂志》，125：381–395。[13] Heinonen, J.、Kipel¨ainen, T. 和 Martio, O.（1993）。退化椭圆方程的非线性势理论。牛津大学出版社。[14] Kuroda, T.（1951）。关于具有零容量本性奇点集的一致亚纯函数。《东北数学杂志》（第2辑），3：257–269。[15] Martio, O.、Miklyukov, V. 和 Vuorinen, M.（2001）。黎曼流形上拟正则映射的能量积分估计与等周问题。《捷克斯洛伐克数学杂志》，51(126)(3)：585–608。[16] Momm, S.（1992）。关于 $\mathbb{C}^n$中的圆锥上多重次调和函数的 Phragm´en–Lindel¨of 定理。《印第安纳大学数学杂志》，41(3)：861–867。[17] Nicks, D. A. 和 Sixsmith, D. J.（2018）。拟正则映射的周期域。《遍历理论与动力系统》，38(6)：2321–2344。[18] Qiao, J.（2001）。关于 Julia 集的极限方向。《芬兰科学院年鉴·数学》，26(2)：391–399。[19] Qiu, L. 和 Wu, S.（2006）。亚纯函数 Julia 集的径向分布。《澳大利亚数学学会杂志》，81(3)：363–368。[20] Rickman, S.（1993）。拟正则映射，第26卷。施普林格出版社。[21] Rickman, S. 和 Vuorinen, M.（1982）。关于拟正则映射的阶。《芬兰科学院年鉴·A辑·数学》，7：221–231。[22]Wang, J. 和 Chen, Z.（2017）。复微分方程整解的 Julia 集极限方向。《数学科学学报·B辑（英文版）》，37(1)：97–107。[23] Wang, J. 和 Yao, X.（2020）。关于亚纯函数的 Julia极限方向。《以色列数学杂志》，238：405–430。[24] Wang, S.（2007）。亚纯函数 Julia 集的径向分布。《台湾数学杂志》，11：1301–1313。

[25] Yoshida, H.（1986）。关于由某些函数控制的次调和函数。《以色列数学杂志》，54：366–380。[26] Yoshida, H.（1991）。圆锥或圆柱上次调和函数的调和主化。《太平洋数学杂志》，148(2)：369–395。[27] Zheng, J.-H.、Wang, S. 和 Huang, Z.-G.（2002）。超越亚纯函数的 Fatou 集与 Julia 集的一些性质。《澳大利亚数学会通报》，66(1)：1–8。

Department of Mathematical Sciences、 Northern Illinois University、 DeKalb、 IL 60115-2888. USA*Email address*: afletcher@niu.edu

Department of Mathematical Sciences Northern Illinois University DeKalb IL , 60115-2888. USA

, , *Email address*: jsteranka1@niu.edu