arXiv:2303.17054v1 [math.OA] 29 Mar 2023

算子空间、内射包络与 G-空间中的实结构

DAVID P. BLECHER、ARIANNA CECCO 和 MEHRDAD KALANTAR

Abstract. 我们为算子空间和代数中实结构的理论奠定了更多基础，尤其涉及单射理论的实情形，以及内射、三元和 C^*-包络。我们考察这些主题与复化之间的相互作用。我们还将其中许多结果推广到由群作用于算子空间和系统的情形。

1. Introduction

Ruan 在 [40, 41]，开始研究实算子空间，随后 [42] 和 [9] 继续了这项研究。近年来，人们对这一主题及其与量子物理的联系愈发感兴趣（例如参见 [15, 16] 及其中的参考文献）。事实上，实结构自然出现在数学的许多领域中，例如 [9] 和 [42]，的开篇段落以及 [39] 中也提到了这一点。本文考察算子空间中实结构与复结构的若干方面，建立了单射理论若干重要内容的实情形，以及内射、三元和 C^*-包络的实情形，并在 Sharma 于 [42] 的工作基础上进一步推进。我们还讨论这些主题与复化之间的相互作用，并建立实范畴与复范畴中单射性之间的一些自然关系。事实上，我们在更一般的框架下开展了这项研究：给定的算子空间 X 配备了离散群 G 的完全等距作用。于是，通常算子空间框架中的结果可由群 G 为平凡群的情形推出。近年来，等变单射包络理论在有关群 C^*-代数结构理论的各种问题中有了许多引人注目的应用（例如参见 [27, 28, 11, 29, 32, 31] 及其中的参考文献）。鉴于此，并考虑到上文提及的近期人们对实 C^*-代数的兴趣，研究实情形下的 G-空间便顺理成章。

下面介绍本文的结构。第2节回顾算子空间复化的基本理论，其中包括对 Ruan 唯一性的合理复化的简短证明。第3节在最一般的情形下给出交换实 W^*-代数的刻画。（我们在 [9], 中陈述了这一结果，并将在 [2] 中利用它证明关于实算子空间与代数的几个有趣事实。）

Date：2023年3月29日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：46L07、47L05、47L25、47L30；次要分类：37A55、46L55、46M10、47L75。*Key words and phrases.* 算子空间、算子代数、实算子空间、群作用、内射包络、复化。MK 和 AC 获得美国国家科学基金会 DMS-2155162 项目资助。DB 获得西蒙斯基金会合作项目资助。

第4节开篇先温和地考察复化与内射包络及 C^*-包络之间的关系。正如 [10] 中所指出的，对实算子空间或代数的研究，在许多方面等价于对复空间或代数中的实结构的研究，尤其是复算子空间或代数上的共轭线性完全等距二阶自同构的性质。

我们继续第4节，考察带有离散群 G 作用的实与复算子空间和算子系统 G，并将此前理论的大部分内容（从某种意义上说，其中 $G = \mathbb{Z}_2$ 的情形）推广到这一框架。特别是，我们研究 G-C^*-包络和 G-内射包络，并沿用 Hamana 在复情形 [21, 22] 中的工作。第二作者在 [13, 14], 对各种范畴中的内射包络进行了非常系统的研究，本节建立了其中一部分结果（以及若干所需的预备结果）。例如，我们证明，复G-算子空间的实与复 G-内射包络相同；并且，实 G-算子空间 X 的复化的 G-内射包络，可典范地认作 X 的 G-内射包络的复化。我们还证明了关于 G-C^* 和 G-三元包络的类似结论。

我们指出，Hamana 的研究采用了非常一般的框架，例如 [22] ，涵盖了所有局部紧群，乃至更一般的 Hopf冯诺依曼代数。我们在第4节中的大多数结果，似乎都可以通过适当调整相同的基本证明思路，并运用 [22] 中相应的（实情形）结论，推广到 Hamana 极为一般的框架中的实情形。不过，为了简便起见，我们将限于离散群，因为在一般情形下，证明思路本质上不会改变。有限群相关的结果是上述说明的一个例外。这些结果似乎很容易推广到紧群的作用，但在我们看来，要进一步推广则颇为困难（见定理 4.15 下方的注记）。在第5节中，我们将讨论如何把代数上的实结构扩展到包含它的冯诺依曼代数上。

读者需要熟悉算子空间和冯诺依曼代数的基础知识，这些内容可参见 [6, 18, 36, 38], 的前几章以及例如 [37]。具备这些基础知识后，读者将能够顺利理解第2、3和5节。第4节将要求读者更加熟悉（通常的复）算子空间理论。关于复情形下的内射包络、 C^*-包络和三元包络，可参见 [6, 第4.2–4.4], [18, 第6节. 2], [36,第 15], 章，或其中引用的 Hamana 和 Ruan 的论文。然后， [20, 33, 1]是关于实 C^*-代数和实 W^*-代数理论的著作。我们回顾一下，实 C^*-代数是实希尔伯特空间H上的 $B(H)$ 的一个闭实 $*$-子代数。从抽象角度看，它是一个实 Banach $*$-代数，其 $*$-代数复化具有一个使其成为复 C^*-代数的 C^*-范数。等价地，它是一个满足 C^*-恒等式的实 Banach $*$-代数，其自伴元素具有实谱（或者等价地，对于 $a \in A$， a^*a 具有正谱，或 $1 + a^*a$ 可逆）。参见 [33, 第 5]章。如果 $E \subset F$ 是范畴中的子对象，那么范畴中的空间 Z 将被称为内射的，只要任意态射（例如实算子空间范畴中的实线性完全压缩映射） $T\colon\ E \to Z$ 都有一个将其延拓的态射 $T\colon\ F \to Z$。例如，如果 H 是实希尔伯特空间 [40]，则 $B(H)$ 在实算子空间范畴中是内射的。关于实情形下内射空间、内射包络 $I(X)$和 C^*-包络 $C^*_{\mathrm{e}}(X)$的初步研究，可参见 [42]。实际上，我们将使用其中选取的结果和记号，来自

现有的实算子空间理论 [40, 41, 42, 9]。第4节还将使用 Hamana 理论中关于来自 [21]的 G-空间的 G-内射包络的基本思想。

字母 H、K 专用于实希尔伯特空间。我们有时将复数 i 写作 ι，以避免与矩阵下标混淆。对我们而言，$*$-代数中的投影总是正交投影（因此 $p = p^2 = p^*$）。赋范代数 A 若具有范数为 1 的单位元 1，则称其为含幺的；映射 T 若满足 $T(1) = 1$，则称其为含幺的。若 A 具有压缩近似单位（cai），则称其为近似含幺。我们用 X_+ 表示那些恰好属于 X 的正算子（通常意义下）。若 X 是（实或复） C^*- 代数 B 的子空间，则我们用 $C^*(X)$ 或 $C^*_B(X)$ 表示由 X 生成的 C^*-子代数 B。

若 $T\colon X \to Y$，我们用 $T^{(n)}$ 表示规范的“逐项”放大，将 $M_n(X)$ 映射到 $M_n(Y)$。完全有界范数为 $\|T\|_{\mathrm{cb}} = \sup_n \|T^{(n)}\|$，并且当 $\|T\|_{\mathrm{cb}} \le 1$ 时，T 是完全压缩的。如果映射 T 将正元素映射为正元素，则称其为正的；如果对所有 $n \in \mathbb{N}$，$T^{(n)}$ 都是正的，则称其为完全正的。UCP 映射是含幺且完全正的。

实算子空间既可以看作实希尔伯特空间 H 上 $B(H)$ 的实子空间，也可以抽象地看作一个向量空间，并在每个 $n \in \mathbb{N}$ 上赋予范数 $\|\cdot\|_n$，其中 $M_n(X)$ 满足 Ruan 刻画的条件 [40]。有时，范数序列 $(\|\cdot\|_n)$ 被称为算子空间结构。本文中的所有空间至少都是这样的算子空间，但通常还具有更多结构。于是 $X_c = X + iX$，这就是将在第 2 节中详细讨论的复化。如果 $T\colon X \to Y$，则我们将复化映射记为 $T_c\ x + iy \mapsto T(x) + iT(y)$，其中 x，$y \in X$。

含幺算子空间（分别地，实算子系统）是实希尔伯特空间 H 上 $B(H)$ 的实子空间（分别地，自伴子空间），且包含 I_H。实算子系统理论的基础与复情形中的基本相同（见 [41, 40, 42, 9, 2], ，大多数结果都可以用与复情形相同的方式证明，或者直接通过复化从复情形推出。不过，有几个问题需要谨慎处理。涉及态或正元素、自伴元素的论证在实情形中往往并不成立，例如 [9] 所指出的那样。事实上，自伴元素可能不够，也可能过多。然而，[9, Lemma 2.3] 表明，实算子系统上的完全正映射是自伴的（即 $T(x)^* = T(x^*)$），并且 T_c 是完全正的。此外，实算子系统之间的含单位元的映射是完全正的，当且仅当它是完全压缩的。其中一个方向由上述引理得出。反之，如果 T 是含单位元的且完全压缩的，那么 T_c 也是如此，因此根据复理论，T_c（从而 T）是 UCP。实含幺算子空间之间的含幺完全压缩映射当然可以延拓为任意包含它的算子系统上的完全完全压缩映射，因而也是 UCP 映射。实 C^*-代数之间的同态是压缩的，当且仅当它是一个 $*$-同态；在这种情况下，它是完全正且完全压缩的 [9, Theorem 2.6]。我们指出，[2] 对 [6] 第 1—4 章和第 8 章中结果的实变体进行了系统讨论（这些结果不在本文之内），并检验了理论中许多标准构造的复化的行为，等等。

任意一个范畴中 X 的内射包络 $I(X)$ 是一对 (E, j)，由一个在该范畴中内射的空间 E 和完全等距态射 $j\colon X \to E$ 组成，并且它具有刚性：也就是说，I_E 是唯一的完全压缩态射

$u: E \to E$，且在 $j(X)$ 上扩张恒等映射。我们不会用到这一点，但内射包络也可以通过“本质”或“包络”性质来刻画，例如见 [6, 引理 4.2.4]。有时我们将 $I(X)$ 写作 $I_{\mathbb{F}}(X)$，其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，以便在需要区分实情形与复情形时加以区分。不过，我们通常不这样做，而是留待读者根据上下文判断所指。

内射包络可以赋予三元系统的结构，简称 TRO。我们提及 TRO 的定义，以及若干基本结果的实版本；这些结果见例如 [6]，并将在第4节中用到。其中许多内容已见于实 JB-三重系统文献，或例如 [42]。实 TRO 是一个闭线性子空间 $Z \subset B(K,H)$，其中 K 和 H 是实希尔伯特空间，并满足 $ZZ^*Z \subset Z$。TRO 之间的三元态射是满足 $T(xy^*z) = T(x)T(y)^*T(z)$ 的线性映射。若 $Z \subset B_{\mathbb{R}}(K,H)$ 是实 TRO，则 Z^*Z 和 ZZ^*（取其闭包）分别是 $B(K)$ 和 $B(H)$ 中的实 C^*-子代数。如 [41, 第 1052] 页所述，我们有如下同一化

$$Z_c = Z + iZ \subset B(K,H) + iB(K,H) = B(K,H)_c = B_{\mathbb{C}}(K_c, H_c).$$

于是 $Z_c Z_c^* Z_c \subset Z_c$，因此 Z_c 是一个复 TRO。[6, 引理 8.3 的实情形仍然成立：实 TRO 之间的三元态射是完全压缩的；若它还是单射，则完全等距。事实上，若 $T: Z \to W$ 是一个实三元态射，则 T_c 是一个复三元态射。因此，根据复理论（例如参见 [6, 引理 8.3），T_c，从而 T 是完全压缩的。若 T 还是单射，则 T_c 也是单射，因而完全等距。因此 T 完全等距。比如，[42] 证明了反过来，实 TRO 之间的完全等距满射是一个三元态射（或者，也可以通过复化，由复情形推出这一点）。

2. Complexifications of real operator spaces

实算子空间研究的基石之一是阮氏唯一复化定理。我们将实算子空间 X 的算子空间复化定义为一对 (X_c, κ)，其中 X_c 是复算子空间，$\kappa: X \to X_c$ 是实线性完全等距映射，并且作为向量空间有 $X_c = \kappa(X) \oplus i\,\kappa(X)$。为简便起见，我们通常将 X 与 $\kappa(X)$ 等同，并记作 $X_c = X + i\,X$。

注释。1) 根据闭图定理，从 P 到 $i(X)$ 的投影有界，因此 X_c 在实线性同构意义下等同于 X 与其自身的巴拿赫空间直和。有些作者还可能假设投影 P 到 $i(X)$ 是压缩映射（在我们的情形中，这里需要完全压缩），但对于“合理的”复化（见下文），这一点会自动成立。注意，对于所有 $x \in X_c$，$x = P(x) - iP(ix)$。

2) 并非每个复算子空间都是某个实算子空间的复化。事实上，在复算子空间 X 中不一定存在任何满足 $X = Y \oplus iY$ 的闭子空间 Y。这方面的戏剧性例子可见于例如 [19]，其中包含一些无限维复巴拿赫空间，而这些空间不是任意两个无限维实子空间的直和（事实上，其中的例子更加令人震惊）。一个更简单的例子是取任意一个与其复共轭 X 不复同构的复巴拿赫空间 X（一个初等例子见例如 [30]）。若 $X = Y + i\,Y$ 如上所述，则映射 $\theta(y_1 + iy_2) = y_1 - iy_2$ 是到 X 上的双连续同构。事实上，若 $z = y_1 - iy_2$

对于 y_1、$y_2 \in Y$，则 $\|z\|_{\bar{X}} \leq \|y_1\| + \|y_2\| = \|P(z)\| + \|P(iz)\|$ 被某个常数乘以 $\|z\|_X$ 所控制。因此，根据开映射定理，该映射是双连续的。这就产生了矛盾（可以为X赋予任意相容的算子空间结构，例如 Min(X)）。

以上还表明，实线性完全等距的复算子空间之间，实际上未必存在任何复线性完全等距满射。举一个 C^*-代数的例子，若 A 是一个与其对偶 C*-代数 A° 不 $*$ 同构的含幺 C*-代数（例如参见 [17]），考虑映射 $\theta(a) = (a^*)^\circ$。这是一个满射实线性含幺完全等距映射 $A \to A^\circ$（甚至是正的，因为若 $a = x^2$，则 $x = x^*$ 有 $a^\circ = (x^\circ)^2$）。然而，根据 Kadison-Banach-Stone 定理的算子空间版本，若存在满射复线性完全等距映射 $A \to A^\circ$，则 A 与 A° $*$同构（例如参见[41, 定理 4.4]）。

我们称算子空间 X 的算子空间复化 $X_c = X + iX$ 是（完全）合理的，如果映射 $\theta_X : x+iy \mapsto x-iy$ 是完全等距的，其中 x、$y \in X$。巴拿赫空间的任何合理复化都具有一个典范的共轭线性等距二阶自同构。反过来，给定任意带有共轭线性等距二阶自同构θ的复巴拿赫空间 X，众所周知（或可作为练习证明），X 是 θ 的不动点集的合理复化。算子空间也有类似结果。完全合理的算子空间复化 X_c 具有一个典范的共轭线性完全等距二阶自同构，即上文的映射 θ_X。这给出了群 $\mathbb{Z}_2$ 在 X_c上的一个完全等距作用，其作用由恒等映射和 θ_X给出。本文中我们将多次使用这一记法。

今后我们将把“完全合理”简称为“合理”或“合理算子空间复化”，因为此后我们希望所有复化都是完全合理的。

命题 2.1. 设 X 是一个实算子空间，并具有完全等距映射 $\kappa : X \to Y$ 到一个复算子空间中。那么 (Y, κ) 是 X 的合理算子空间复化，当且仅当 Y 具有一个周期为 2 的共轭线性完全等距自同构，其不动点为 $\kappa(X)$。

证明. 一个方向很容易证明，且上文已经提及。反之，给定这样的自同构 θ，$Y = \kappa(X) \oplus i\kappa(X)$ 与巴拿赫空间情形完全相同。事实上，任意 $z \in Y$ 都可以写成 $z = x + iy \in \kappa(X) + i\,\kappa(X)$，其中 $x = \frac{z+\theta(z)}{2}$ 和 $y = \frac{z-\theta(z)}{2i}$ 属于 $\kappa(X)$。由于 θ 是~~共轭线~~性的，我~~们有 θ~~$(x+iy) = x - iy$；又由于θ 是完全等距映射，因此 (Y, κ) 是一个合理复化。□

Ruan 证明，实算子空间 X 具有一种合理的算子空间复化，并且在完全等距意义下唯一。这种复化的“存在性”可由命题 2.1 迅速推出。事实上，设$X \subset B(H)$，其中 H为实希尔伯特空间，并令 H_c 为 H的典范希尔伯特空间复化。令 $\kappa : B(H) \to B_{\mathbb{C}}(H_c)$ 为 $\kappa(T) = T_c$。容易验证，κ 是一个忠实的 $*$-同态，而 $\theta(T) = \theta_H \circ T \circ \theta_H$ 是 C^*-代数 $B(H_c)$上的一个周期为 2 的共轭线性 $*$-自同构，其不动点为$\kappa(B(H))$。因此，κ 和 θ 完全等距。由命题 2.1，故 $(B_{\mathbb{C}}(H_c)\ \kappa)$ 是 $B(H)$ 的一种合理的算子空间复化。因此，$\kappa(X) + i\kappa(X)$ 是 X 的一种合理的算子空间复化。

在实完全等距意义下，这种复化可与 $M_2(X)$ 的算子子空间 V_X 等同，该子空间由如下形式的矩阵组成

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

对于 x、$y \in X$。注意到 $H_c \cong H^{(2)}$ 作为实希尔伯特空间，并且我们有

$$B_{\mathbb{C}}(H_c) \subset B_{\mathbb{R}}(H_c) \cong B(H^{(2)}) \cong M_2(B(H)).$$

容易验证，这些识别都是实完全等距的。上面的典范嵌入 $\kappa\colon\ B(H) \to B_{\mathbb{C}}(H_c)$ 以及相应的嵌入 $B(H) + iB(H) \to \kappa(B(H)) + i\kappa(B(H)) = B_{\mathbb{C}}(H_c)$，根据上述识别将其视为映入 $M_2(B(H))$ 的映射时，对应于映射

$$x + iy \mapsto \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \in V_{B(H)} \subset M_2(B(H)), \qquad x, y \in B(H).$$

因此，$B_{\mathbb{C}}(H_c)$ 与 $V_{B(H)}$ 实完全等距。$B_{\mathbb{C}}(H_c)$ 中的算子 iI 对应于矩阵

$$u = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是，对于 x、$y \in B(H)$，$\theta_{B(H)}(x + iy) = x - iy$ 对应于 $V_{B(H)}$ 上的完全等距运算 $z \mapsto u^* z u = -uzu$。限制在 X 上，我们看到 θ_X 是完全等距的，而 X_c 与 V_X 实完全等距。

定理 2.2.（阮氏唯一复化定理）设 X 是一个实算子空间。那么 X 存在一个合理的算子空间复化，且在完全等距映射意义下唯一。也就是说，若 Y_1、Y_2 是复算子空间，使得对于 $k = 1, 2$ 若 $u_k\colon\ X \to Y_k$ 是一个实线性完全等距映射，满足$u_k(X) + iu_k(X) = Y_k$，并且 $u_k(x) + iu_k(y) \mapsto u_k(x) - iu_k(y)$ 是一个完全等距映射，那么存在唯一的满射复线性完全等距映射$\rho\colon\ Y_1 \to Y_2$，满足 $\rho \circ u_1 = u_2$。

证明. 上文已经给出了“简单方向”，即“存在性”的证明。对于唯一性，设 $\kappa = u_k$。只需证明，将 $\kappa(x) + i\kappa(y)$ 映射到 (2.1) 中的矩阵的映射，是到 $M_2(X)$ 中的完全等距映射。设 $x = [x_{ij}]$、$y = [y_{ij}]$。那么

$$\|[\kappa(x_{ij}) + \iota\,\kappa(y_{ij})]\| = \left\| \begin{bmatrix} \kappa(x_{ij}) & -\kappa(y_{ij}) \\ \kappa(y_{ij}) & \kappa(x_{ij}) \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \right\|$$

根据 [7] 中的简单事实 (2.2)。证明至此完成。 □

定理 2.3。如果 X 和 Y 是实算子空间，那么 $(CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c)\ \kappa)$ 是 $CB_{\mathbb{R}}(X, Y)$ 的一个合理的算子空间复化，其中 $\kappa(T) = T_c$。

证明。显然，$T \mapsto T_c$ 是从 $CB_{\mathbb{R}}(X, Y)$ 到 $CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c)$ 的完全等距映射。反之，在 $CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c)$ 上存在一个由 $T \mapsto \theta_Y \circ T \circ \theta_X$ 定义的共轭线性、周期为 2 的完全等距自同构。其不动点恰好是 $S \in CB_{\mathbb{R}}(X, Y)$ 的 S_c。事实上，设 $T \circ \theta_X = \theta_Y \circ T$。则 T 将 θ_X 的不动点映射到 θ_Y 的不动点。由于这些不动点空间分别是 X 和 Y 的（副本），这给出了一个映射 $S\colon\ X \to Y$。于是，T 和 S_c 在 X 上一致，因而在 $X_c = X + iX$ 上也一致。因此，$CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c) = CB_{\mathbb{R}}(X, Y)_c$，是一个合理复化。□

推论 2.4。如果 X 和 Y 是实算子空间，那么 $T \in CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c)$ 等于 S_c 对于 $S \in CB_{\mathbb{R}}(X, Y)$ 当且仅当 $T(X) \subset Y$，并且当且仅当 $T = \theta_Y \circ T \circ \theta_X$。如果 $X = Y$，最后一个条件变为 $T \circ \theta_X = \theta_X \circ T$，这等价于 T 具有 $\mathbb{Z}_2$-作用下的 $\mathbb{Z}_2$-等变性，该作用已在命题 2.1 上文中提及。

证明。若 $T(X) \subset Y$，则 $T = (T_{|X})_c$，因为这两个复线性映射在 X 上一致。其余部分见上一个证明。□

推论 2.5。（Ruan）若 X 是实算子空间，则算子空间对偶 $(X_c)^*$ 是 X^* 的一个合理的算子空间复化，其嵌入为 $\kappa(\varphi) = \varphi_c$。

实含幺算子空间或算子系统的复化可
显然可以取为复含幺算子空间或算子系统。 y

3. The characterization of commutative real W^*-algebras

本节中的刻画将用于 [2] 证明关于实算子空间与代数的若干更深刻的结论。我们将改进 [33] 中对交换实 W^*-代数的刻画（参见其中第 6.3 节以及例如 [25]）。事实上，交换实 W^*-代数源自视为实代数的交换复 W^*-代数。证明中的一些思路可以解释为与“可测动力系统”中的某些事实相对应，正如我们将在定理之后指出的那样。

以下我们允许将 (0) 视为一个 W^*-代数。

定理 3.1. 任意交换实 W^*-代数 M 均（实）$*$-同构于一个交换复 W^*-代数与一个交换复 W^*-代数中自伴元素集合的直和。也就是说，$M \cong L^\infty(X, \mu, \mathbb{C}) \oplus L^\infty(Y, \nu, \mathbb{R})$。这里 (X, μ) 和 (Y, μ) 是可局部化（或半有限）测度空间（并且允许其中一个为空集；在这种情况下，将 L^∞-空间解释为 (0)）。

证明。设 M 是一个交换实 W^*-代数。那么 M_c 是一个交换 W^* 代数，具有一个周期为 2 的共轭线性 $*$-同构 π，满足 $M = \{x \in M_c : \pi(x) = x\}$。考虑满足以下条件的投影 $p \in M_c$：对于所有投影 $q \leq p$，均有 $\pi(q) = q$。我们断言存在一个最大的此类投影。若 (p_i) 是此类投影的递增链，令 $p =$ 为 p_i 的上确界。则 $\pi(p) = p$。对于满足 $q \leq p$ 的投影 $q \in M_c$，对每个 i 都有 $p_i q \leq p_i$。对于 $p_i q$ 的任意谱投影 r，我们有 $r \leq p_i$，且 $\pi(r) = r$。因此 $\pi(p_i q) = p_i q = p_i \pi(q)$。取极限可得 $\pi(q) = q$。故链具有上界，由佐恩引理，存在一个极大的此类投影 p。若 r 是另一个此类投影，则我们断言 $e = p \vee r = p + r - pr$ 也是另一个此类投影。事实上，对于投影 $q \leq p \vee r$，由于 $q \wedge p \leq p$，我们有 $\pi(qp) = qp$。类似地，$\pi(qr) = qr$ 且 $\pi(qpr) = qpr$，因此 $\pi(q) = q$。由极大性，$p = e$ 且 $r \leq p$。

令 $N_0 = p^\perp M_c$。假设 $p \neq 1$。注意，$\pi(p^\perp) = p^\perp$ 且 $\pi(N_0) = N_0$。若 r 是 N_0 中的任意非零投影，则必存在一个投影 $q \leq r$，使得 $\pi(q) \neq q$。我们声称，这意味着存在 N_0 中的某个非零投影 q，使得 $\pi(q) = 1 - q \neq 0$。这里，1 表示 N_0 的单位元，即 $p^\perp$。我们考虑由 N_0 中满足 $\pi(r) \perp r$ 的非零投影 r 组成的类 $\mathcal{C}$。给定 N_0 中的任意投影 q，若满足 $q \neq \pi(q)$，我们声称 q 在 $\mathcal{C}$ 中有一个非零子投影 r。事实上

令 $r = q - q\pi(q)$。注意，$r \neq 0$，否则 $q \leq \pi(q)$，并且（应用 π）$\pi(q) = q$。这与 $q \neq \pi(q)$ 矛盾。因此 $\pi(r) \neq 0$。此外

$$r\pi(r) = q\pi(q) - q\pi(q) - q\pi(q) + q\pi(q) = 0.$$

因此 $r \in \mathcal{C}$。

设 q 是 $\mathcal{C}$ 中的极大投影。再次应用佐恩引理即可证明其存在：若 (p_i) 是 $\mathcal{C}$ 中投影的递增链，令 $r = \sup p_i$。由于 $p_i \pi(p_i) = 0$，我们得到 $r\pi(r) = 0$。现在我们证明 $\pi(q) = 1 - q$。若此结论不成立，则由于 $q\pi(q) = 0$，我们有 $r = 1 - q - \pi(q)$ 是 N_0 中的非零投影。因此存在投影 $e \leq r$，使得 $\pi(e) \neq e$。令 $q' = e - e\pi(e)$。注意到 $q' \leq e \leq r \leq 1 - q$。根据上述结果，$0 \neq q' \in \mathcal{C}$。于是 $q + q'$ 是一个支配q的投影，并且 $\pi(q + q')(q + q') = \pi(q)q' + \pi(q')q$。现在 $\pi(q)q' = 0$，因为 $q' \leq r \leq 1 - \pi(q)$。应用 π，我们看到 $\pi(q')q = 0$。所以 $\pi(q + q')(q + q') = 0$，从而 $q + q' \in \mathcal{C}$。这与 q 的极大性矛盾。

接下来注意到 $x \mapsto x + \pi(x)$ 是从 qM_c 到 $\{a \in N_0$ 的实 $*$-同构：$\pi(a) = a\}$。事实上，该映射为 $qx \mapsto qx \oplus (1-q)\pi(qx)$；由于 q 是中心的，因此它是一个同态。并且，若 $a \in N_0$ 满足 $\pi(a) = a$，则 $qa \in qM_c = qN_0$ 满足 $qa + \pi(qa) = qa + (1 - q)\pi(a) = a$。

断言：$\pi(x) = x^*$ 在 pM_c 上成立，因此对任意 $x \in pM_c$，当且仅当 $x = x^*$ 时，我们有 $\pi(x) = x$。于是 $\{x \in pM_c : \pi(x) = x\} = (pM_c)_{\text{sa}}$。注意，$x \mapsto \pi(x)^*$ 是复 W^*-代数 pM_c 上的弱*连续复线性等距映射，并且在 pM_c 中的投影上是单位映射。因此，根据谱定理以及这一结论对 pM_c 中任意投影都成立这一事实，$\pi(x) = x^*$ 在 pM_c 上成立。

最后，我们断言 M 与实 $*$同构于实 W^*-代数 $(pM_c)_{\text{sa}} \oplus qM_c$。若 $x \in M_c$ 满足 $\pi(x) = x$，则 $x = xp + xp^\perp$，其中 $xp = \pi(xp)$ 且$xp^\perp = \pi(xp^\perp) \in N_0$。因此

$$M = \{x \in pM_c : \pi(x) = x\} \oplus \{x \in N_0 : \pi(x) = x\} \cong (pM_c)_{\text{sa}} \oplus qM_c.$$

由于 pM_c 和 qM_c 都是交换复 von Neumann 代数，结论得证（关于其与可局部化/半有限测度空间的联系，参见例如 [3]）。□

备注。1）最后一个结果的可分情形见 [33]（例如参见其中的定理 6.3.6）以及 Ayupov 和其合作者的工作（例如参见 [1] 及其中的参考文献），但我们在这些来源中未能找到上述一般情形下结论的完整证明。在非交换情形下，该结果不成立：首先，M_{sa} 甚至未必是代数。一个明确的低维例子是，四元数 $\mathbb{H}$ 不能表示为复冯诺依曼代数 M 和 N 的形式 $M_{\text{sa}} \oplus N$。事实上，$\mathbb{H}$ 的中心是 $\mathbb{R}1$，因此不存在这样的非平凡分解，并且$\mathbb{H}$ 既不是复冯诺依曼代数，也不是某个复冯诺依曼代数的自伴部分。

2) 请注意，在证明投影 q with$\pi(q) = 1 - q$ 存在这一断言时，我们只用到了 π 是复冯·诺伊曼代数 M_c 的实 $*$-自同构这一事实。

设对于测度空间（X, μ），有 $M_c = L^\infty(X, \mu)$，且 τ：$L^\infty(X, \mu) \to L^\infty(X, \mu)$ 是一个具有 $\tau^2 = I$ 的复 $*$-自同构。若（X, μ）例如是一个标准测度空间，那么根据 von Neumann 提升定理，存在一个 2-周期可测自同构 φ，作用于（X, μ）（这意味着 μ 在 φ 下的推前测度与 μ 属于同一类），它在如下意义下给出 τ：对于每个 $f \in L^\infty(X, \mu)$，$\tau(f) = f \circ \varphi$。在此情形下，上述证明中的投影 p 和 q 具有如下解释。投影 p 是集合的特征函数

$X_0 := \{x \in X : \varphi(x) = x\}$ 的 φ 的不动点集。补集 $X - X_0$ 随后被分解为不交并 $X_1 \sqcup \varphi(X_1)$，其中 X_1 是 X 的一个可测子空间，其特征函数就是上述证明中的投影 q。

一般而言，一个简单的事实是，当 n 是素数时，$\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{Z}_n$ 的作用本质上是自由的，当且仅当其核是平凡的（即它是忠实的）。因此，测度空间 (X, μ) 上的任何此类作用都会导出一个分解 $X = E \sqcup F$：该作用在 E 上的限制是平凡的，而在 F 上的限制则本质上是自由的。类似于上述证明中的论证，可以证明，对于由测度自同构 $\varphi : X \to X$ 给出的任意作用$\mathbb{Z}_n \curvearrowright (X, \mu)$，若 $n \in \mathbb{N}$ 是素数，则存在如下形式的“周期分解”

$$X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup \varphi(X_1) \sqcup \varphi^2(X_1) \sqcup \cdots \varphi^{n-1}(X_1),$$

其中，φ 在 X_0 上的限制是恒等映射。这些动力学事实想必广为人知（尽管我们快速检索后，未能在标准文献中找到确切的表述）。还应注意，定理 3.1 的证明中，自同构 π 并非 $\mathbb{C}$-线性的，因此它并非直接来自底层集合上的映射；此外，若不对测度空间施加标准性等限制，底层集合上也没有显而易见的合适映射。或许可以利用 [33], 中的 6.3.3 得到这样的映射，从而为该定理提供一条替代性的“动力学路径”。

4. Complexifications, envelopes, and G-spaces

我们先从算子空间情形中的一些基本概念入手，轻松地开始本节，然后再引入 G-空间的理论；对于非专业读者而言，可能需要一些时间才能理解。

Ruan 表明，[41, 42] 实算子空间 X 是内射的，当且仅当 X_c 是复内射的。事实上，内射的实算子空间是$B(H)$中的实补空间，因此 X_c 是 $B(H_c)$中的补空间。反方向可由下一个结果以及 X 在 X_c中是实补空间这一事实推出。

引理 4.1. 复算子空间是实内射的，当且仅当它是复内射的。

证明。复内射算子空间 X （在复意义下，因而也在实意义下）完全等距嵌入并补于 $B_{\mathbb{C}}(H)$中，其中H是复希尔伯特空间。定义投影 P: $B_{\mathbb{R}}(H) \to B_{\mathbb{C}}(H)$，使其满足 $P(T)(x) = \frac{1}{2}(T(x) - iT(ix)$。验证该定义良定且完全压缩，留作练习。由此可知，$X$ 实完全等距嵌入并补于实内射空间 $B_{\mathbb{R}}(H)$中，因此是实内射的。注意，$B_{\mathbb{R}}(H)$是实内射的，因为我们可以将 H 视为实希尔伯特空间 $\ell^2_{\mathbb{C}}(I) \cong \ell^2_{\mathbb{R}}(I \times \{1, 2\})$。

对于复希尔伯特空间 H，实内射复算子子空间 $X \subset B_{\mathbb{C}}(H)$ 通过投影 P: $B_{\mathbb{C}}(H) \to X$，在 $B_{\mathbb{C}}(H)$ 中是实线性完全压缩补空间。定义 $Q(x) = \frac{1}{2}(P(x) - iP(ix))$，它是完全压缩的，且映射到 X 中。我们有 $Q(ix) = iQ(x)$，因此 Q 是复线性的。注意，对于 $x \in X$，$Qx = \frac{1}{2}(x - i(ix)) = x$，因此 Q 是一个投影。由此可知，X 完全等距嵌入复内射空间 $B_{\mathbb{C}}(H)$，并且是其补空间，因此它是复内射的。□

无需陈述上述结果的实算子系统版本，因为算子系统 $\mathcal{S}$ 在算子系统范畴和

（必然是自伴的——见 [9, 引理 2.3]）UCP 映射范畴中内射，当且仅当它在算子空间与完全压缩映射范畴中内射。事实上，若 $\mathcal{S}$是 $B(H)$ 中的算子系统，且它作为算子系统（分别地，算子空间）是内射的，那么它在 $B(H)$ 中的可补性就确保了它作为算子空间（分别地，算子系统）是内射的。我们使用了引言中提到的事实：在含幺实或复 C^*-代数上，映射是 UCP 映射，当且仅当它是完全压缩且含幺的。事实上，内射算子系统具有 C^*-代数结构（例如参见实情形下的 [40, 命题 4.4], 和 [42, 定理 4.9] ），因此可表示为 $B(H)$ 的 C^*-子代数。

对于实算子空间 X ，下面的结果与许多涉及内射包络的结果一样，也可以通过以下方式证明：首先证明 X 是算子系统时的情形；其次，将第一种情形应用于 Paulsen 算子系统 $\mathcal{S}(X)$。例如，参见 [8], ，或 [6] 的 4.4.2 节，或 [36], 的第 16 章，以及这些文献中的相关应用。我们还指出，这一结果及下一个结果的某些部分随后推广到了 G-空间；不过，我们先处理“基本情形”，因为它十分重要且清晰，也能提供一个范例，使后续证明更易理解。

定理 4.2. 设 $\mathcal{S}$ 是一个实算子空间，其内射包络为 $(I(\mathcal{S}), j)$。

(1) $I(\mathcal{S})_c = I(\mathcal{S}_c)$（即，$(I_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})_c, j_c)$ 是 $\mathcal{S}_c$ 的复内射包络）。(2) 若 $\mathcal{S}$ 是实算子系统或含单位实算子空间，则可将 $I(\mathcal{S})$ 取为实 C^*-代数；事实上，它是其 C^*-代数复化的一个实 C^*-子代数，而该复化是 $\mathcal{S}_c$ 的内射包络。此外， j 可取为含幺。(3) 若 $\mathcal{S}$ 是近似含单位实算子代数（或近似含单位实 Jordan 算子代数），则 (2) 中第一句的结论成立，而且还可将 j 取为同态。

证明。(1) 设 $Z = I(\mathcal{S})$。根据引理 4.1 上方的论述，要证明 $(I(\mathcal{S})_c, j_c)$ 是 $\mathcal{S}_c$ 的内射包络，我们有 $I(\mathcal{S})_c$ 是 $\mathcal{S}_c$ 的内射扩张。要证明它具有刚性，假设 $u\colon Z_c \to Z_c$ 是一个延拓 $I_{\mathcal{S}_c}$ 的（复线性）完全压缩映射。那么 $R = \frac{1}{2}(u + (\theta_Z \circ u \circ \theta_Z))$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-等变（如推论 2.4 所述）的复线性完全压缩映射 v ，它延拓了 $I_{\mathcal{S}_c}$。因此，由刚才引用的推论 2.4，对于延拓 $I_{\mathcal{S}}$ 的 $I(\mathcal{S})$ 上的实线性完全压缩映射，有 $R = v_c$ 。由刚性可得 $v = I$ ，因此 $R = I$。众所周知，任意含幺（实或复）巴拿赫代数的单位元都是单位球的极端点（例如参见 [12, 推论 2.1。42], 尽管也有一个众所周知的简洁直接的克莱因–米尔曼论证）。因此 $u = I$。所以 $I(\mathcal{S})_c$ 是 $\mathcal{S}_c$ 的内射刚性扩张，故而是 $\mathcal{S}_c$ 的内射包络。

(2) 若 $\mathcal{S}$ 是实算子系统或含单位实算子空间，则与复情形一样， $I(\mathcal{S})$可取为含单位实 C^*-代数 A ，且 $j(1) = 1$ （见[42, 定理 4.9] 及 [6, 推论 4.2.8 (1)]的证明）。 C^*-代数 (A_c, j_c) 是 A 的复化，且具有相同的单位元，而 $I(\mathcal{S})$是一个实 C^*-子代数。若 $\mathcal{S}$ 是含单位实算子代数，则与复情形一样，根据 [6, 推论 4.2.8 (1)], 我们还可以进一步令 j 为同态。

(3) 设 A 是一个近似含幺的实（Jordan）算子代数，并将其完全等距地表示为 $B(H)$ 的 Jordan 子代数。根据 [9,引理 4.10], 其单位化 $A^1 = A + \mathbb{R}\, I_H$ （作为算子空间和（Jordan）代数）独立于 H。利用 [9, 命题 4.3] 并取一个压缩，我们可以假设 A 的部分 cai（e_t）的 SOT 极限为 1。于是 $I(A)$ 可以识别为

$B(H)$ 上固定 A 的完全压缩投影 Φ 的值域。令 $\varphi = \langle \Phi(\cdot)\zeta, \zeta\rangle$，其中 $\|\zeta\| = 1$。如 [6, 推论 4.2.8] 的证明中所述，这是 $A + \mathbb{R}I$ 上的一个压缩泛函，而 $\varphi(e_t) \to 1$ 这一事实意味着 $\|\varphi\| = \|\varphi_{|A}\|$。由此根据 [9, 引理 4.11] 可得 $\varphi(I) = \langle \Phi(I)\zeta, \zeta\rangle = 1$. 根据柯西-施瓦茨不等式的逆命题，$\Phi(I)\zeta = \zeta$。因此 $\Phi(I) = I$。如 [6, 推论 4.2.8] 中那样，这意味着（$I(A^1)$ j）是 C^*-代数及 A 的内射包络，并且 j 是一个同态。根据上述含幺情形，$I(A)$ 是 $I(A_c^1)$ 的一个含幺实 C^*-子代数，并且我们有 $I(A)_c = I(A^1)_c = I(A_c^1)$ $= I(A_c)$ 作为实 C^*-代数。□

推论 4.3. 设 A 为实算子系统、含幺算子空间或近似含幺实算子代数（或 Jordan 算子代数），其中 $I(A)$按照定理 4.2 取为一个 C^*-代数。

(1) 若 $C_e^*(A)$是由 A 生成的 $I(A)$的 C^*-子代数，则 $C_e^*(A)_c$ $=C_e^*(A_c)$。(2) $C_e^*(A)$具有 C^*-包络所应具有的泛性质：给定任意含幺完全等距映射 j ： $A \to D$ 到一个实 C^*-代数 D 中，使得$j(A)$作为实 C^*-代数生成 D，则存在一个（必然唯一且满射的） $*$-满态射 π： $D \to C_e^*(A)$，使得 $\pi \circ j$ 是 A 到 $C_e^*(A)$中的典范嵌入。

证明。(1) 这里关于实算子系统和含幺算子空间的结论可由定理 4.2 (1) 和 (2) 轻易得到。类似地，也可由对合理论推出，例如 [10, 定理 2.4 或定理 2.8] 或 [4, 命题 1.16]。推论 4.11 也将对其进行推广。在近似含幺的情形下，根据单位化的唯一性（例如 [9, 引理 4.10]），我们知道 $(A^1)_c = (A_c)^1$。根据定理 4.2 的证明，$I(A)$ $\subset I(A_c)$ 是含幺 C^*-代数，并且与 A^1 和 $(A_c)^1$ 的内射包络一致。在复情形下（ [6] 中的 4.3.4 ）， $C_e^*(A_c)$ 被定义为由 A_c 在 $C_e^*(A_c^1)$ 内生成的 C^*- 代数。由于

$$C_e^*(A_c^1) = C_e^*(A^1)_c = C_e^*(A^1) + i\, C_e^*(A^1) \subset I(A^1)_c = I(A)_c,$$

我们有 $C_e^*(A_c) = C_e^*(A) + i\, C_e^*(A) = C_e^*(A)_c$。

(2) 这一点已在 [42, 第 4], 节提及，也可由复情形通过复化立即得出。□

注。对于不含任何形式近似单位元的非含幺实算子代数 A，定义 $C_e^*(A)$ 为由 A 在 $C_e^*(A^1)$ 中生成的 C^*- 代数。然后，如 [6, 命题 4.3.5] 中一样，容易验证 $C_e^*(A)$ 具有 C^*-包络的泛性质：给定任意含单位完全等距同态j： $A \to D$ 到一个实 C^*-代数 D，使得 $j(A)$ 作为实 C^*-代数生成 D，则存在一个（必然唯一且满射的） $*$-满同态 π： $D \to C_e^*(A)$，使得 $\pi \circ j$ 是 A 在 $C_e^*(A)$ 中的典范嵌入。同样，我们使用单位化的唯一性（例如 [9, 引理 4.10]）。

现在我们转向更一般的 G-算子空间情形。例如，只关心实空间的读者可以取 $G = (0)$。

给定一个群 G， G-集指的是该群在集合 X 上的一个给定作用。给定两个 G-集 X 和 Y， G-等变映射（或 G-映射）是一个映射 $f\colon X \to Y$，满足

$$f(gx) = gf(x), \quad \text{for all } g \in G \text{ and } x \in X.$$

以下设 G 为一个离散群（不过，正如我们在引言中所说，本节的大多数结果适用范围要广泛得多）。按照 Hamana 的

关于 G-模的概念（参见 [21, 22] ），我们将实 G-算子空间（分别为 G-算子系统）定义为满足以下条件的实算子空间（分别为算子系统）： X 在 $G \curvearrowright X$下，由实线性满射完全等距映射（分别为含幺完全序实线性同构）作用。有时我们将这些完全等距映射记作 u_g： $X \to X$ ，其中 $g \in G$。若复算子空间 X 在 $G \curvearrowright X$ 下由复线性满射完全等距映射作用，则称其为复 G-算子空间。 G-含幺算子空间是含幺算子空间，也是带有 G作用的 G-算子空间，其中作用由线性满射含幺完全等距映射给出。我们指出，在 [22] 中，Hamana 研究了一类比复 G-算子空间一般得多的复算子空间，并为其建立了内射包络和三元包络理论。

回顾一下，(实或复) G-C^*-代数是满足如下条件的(实或复) C^*-代数： B 由(实或复) $*$-自同构作用于 $G \curvearrowright B$ 。显然， G-C^*-代数（分别地，含幺 G-C^*-代数）是一个 G-算子空间（分别地， G-算子系统）。反过来，作为C^*-代数的 G-算子系统是一个 G-C^*-代数。事实上， C^*-代数上的“算子系统 G-作用”必然由 $*$-自同构给出。这是因为我们此前在复情形中多次见过 Kadison-Banach-Stone 定理的算子空间版本： C^*-代数之间的含幺完全等距映射是一个 $*$-同态。该版本 Kadison-Banach-Stone 定理的实情形可由复情形通过复化立即推出（另见 [41, 定理 4.4]）。类似地，我们将 G-TRO 定义为满足如下条件的(实或复) TRO： Z $G \curvearrowright Z$ 由(实或复)三元自同构作用于（另见 [22, 第 4] 节）。根据引言中提到的关于 TRO 的事实， G-TRO 是一个 G-算子空间。反过来，作为 TRO 的 G-算子空间是一个 G-TRO。事实上，根据刚才引用的事实，TRO 上的“算子空间 G-作用”必然由三元自同构给出。

引理 4.4. 如果 X 是实 G-算子空间（分别地，实 G-算子系统），那么 X_c 在作用 $g(x + iy) = gx + igy$ 下是复 G-算子空间（分别地，复 G-算子系统）， θ_X 是 G-等变的，并且典范投影 $X_c \to X$ 是实线性 G-等变的完全压缩（分别地，酉完全正）。事实上， X_c 上的 G 作用与命题 2.1 中提到的 $\mathbb{Z}_2$ 作用相交换。

证明。这本质上只是以下事实：$(u_g)_c$： $X_c \to X_c$ 是满射完全等距映射。在系统情形中，典范投影 $X_c \to X$ 是完全压缩且含幺的，因此是酉完全正的。□

备注。1）如果 X、Y 是实 G-算子空间（分别地，实 G-算子系统），且 T： $X \to Y$ 是 G-等变的，那么 T_c 也具有同样性质。

2) 一个简单但重要的事实是，如果 X 和 Y 是实 G-算子空间，那么一个 G-等变的 $T \in CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c)$ 等于 S_c，对于一个 G-等变的 $S \in CB_{\mathbb{R}}(X, Y)$，当且仅当 T 是 $\mathbb{Z}_2$-等变的（定义见命题 2.1 之前）。

本文中的许多定义和结果都可以用命题 2.1 之前讨论的 $\mathbb{Z}_2$-作用来重新表述。例如，引理 4.1（以及本文其他地方）中的映射 P 和 Q 可以看作是相对于 $\mathbb{Z}_2$-作用的平均。或者，推论 2.4 可以表述为：对于 $S \in CB_{\mathbb{R}}(X, Y)$， $T \in CB_{\mathbb{C}}(X_c, Y_c)$ 等于 S_c，当且仅当 T 是 $\mathbb{Z}_2$-等变的。

3）通过“取平均”，通常可以根据任意线性映射构造出一个 G-映射。例如，设 G 是一个有限群， X 和 Y 是向量空间，且

˜也是 G-集，且 $T\colon X \to Y$ 是线性的。定义 $T\colon X \to Y$ 为

$$\tilde{T}(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}T(gx),$$

˜对 $x \in X$。那么， T 是线性的且具 G-等变性。

Hamana 在 [21] 和 [22] 中证明，在其由（复） G-模及 G-态射构成的范畴中，内射包络和三元包络均存在。这一理论与通常的内射包络理论相似，其中 G-刚性和 G-本质性发挥着各自必需的作用，一如既往。（例如请注意， G-刚性的定义与刚性的定义相同，只是所有态射都具有 G-等变性。）同一理论及其证明也适用于实 G-算子空间（以及实 G-算子系统、复 G-算子空间）；对于实或复 G-算子空间（以及 G-算子系统），其态射分别是具有 G-等变性的实或复线性完全压缩映射（以及酉完全正映射）。我们称这些为 G-态射。关于这一理论在众多范畴中的系统发展，见 [14]。按照这里的记号，Hamana 在 [21] 中的复 G-模就是复 G-算子系统。关于 G-内射包络的较新用法，参见 [27] 及其续篇。

定理 4.5. [21, 22, 14] 每个实或复 G-算子空间（分别地， G-算子系统） X 都有一个实或复 G-内射包络，记作（$I_G(X)$ κ）（在实或复 G-算子空间（分别地， G-算子系统）的范畴中）。这里， $\kappa\colon X \to I_G(X)$ 是一个实或复线性 G-等变完全等距映射（分别地，单位完全序嵌入）。这个 G-内射包络具有如下意义下的唯一性：对于上述范畴中 V 的任意 G-内射包络（Z, λ），都存在一个 G-同构 $\psi\colon I_G(V) \to Z$ （即， ψ 和 ψ^{-1} 是该范畴中的态射），使得 $\psi \circ \kappa = \lambda$。

下面简要概述主要思想，这些思想也将在下文中使用。对于刚才提到的某个范畴中的任意 X（例如，实 G-算子空间），如果 $X \subset B(H)$ 是一个算子子空间（或子系统），我们可以在 $l^\infty(G, X)$ 和 $l^\infty(G, B(H))$ 上定义一个 G-作用，即对 $s, t \in G$，有（tf）(s) $= f$ ($t^{-1}s$)。在 $l^\infty(G, B(H))$ 上还有一个对合： $f^*(s) = f(s)^*$。我们有 G-等变包含映射

$$X \subset l^\infty(G, X) \subset l^\infty(G, B(H)),$$

其中第一个是映射 $j(x)(s) = s^{-1}x$ for $s \in G, x \in X$。下文有时将其写作 j as j_X。容易看出， $l^\infty(G, B(H))$ 是一个内射且G-内射的冯·诺伊曼代数；如果 X 是内射的，那么 $l^\infty(G, X)$ 就是 G-内射的（证明思路见 [21, 引理 2.2]）。 G-内射包络可以构造为 $W = l^\infty(G, B(H))$ 的一个子空间，即某个完全压缩投影 $\Phi\colon W \to W$ 的值域，该投影在 $j(X)$ 上取恒等值。利用这些思路（见 [21, 引理 2.4] 及其上文），可以将内射包络 [6, 18, 36] 的通常构造推广到 G-空间，从而得到定理 4.5。另可参见例如 [11]，其中阐述了 Hamana 在一个特定情形下的思路。

注意，如果 X 是 B（H）的（实或复）含幺 C^*-子代数（分别为冯·诺伊曼子代数、含幺子代数、含幺子空间、算子子系统、子 TRO），那么 l^∞（G， X）是 l^∞（G， B（H））的含幺 C^*-子代数（分别为冯·诺伊曼子代数、含幺子代数、含幺子空间、算子子系统、子 TRO）。容易看出， $j_X\colon X \to l^\infty$（G， X）是含幺 $*$-同态（分别为正规 $*$-同态、含单位元的同态、含单位元的映射、UCP 映射、三元态射

）。（冯·诺伊曼代数的情形在本文中不会用到，但可以由 [6] 中 1.6.6 的一个事实推得。）

如 [21, 备注 2.3] 所示：

引理 4.6. 设 X 为实或复 G算子空间（分别为实或复G算子系统）。那么， X 在其给定范畴中是 G内射的，当且仅当 X 作为实或复算子空间（分别作为实或复算子系统）是内射的，并且存在一个 G态射 $\phi\colon l^\infty(G,X) \to X$ 使得 $\phi \circ j = I_X$。

由此可知， G内射的实或复 G算子空间 Z 是一个 TRO，因为内射算子空间都是 TRO（例如，我们回顾一下 [6] 和 [42]（其中定理 4.13 之前的段落）中的 4.4.2–4.4.3：1-2-角 $pI(\mathcal{S}(X))p^\perp$ 可以取为一个 TRO，并且是 X的内射包络）。因此，根据引理 4.4 之前的论述， Z 是一个 G-TRO。

如前所述， G-刚性和 G-本质性仍发挥着必不可少的作用：一个内射的 G-扩张是一个 G-内射包络，当且仅当它是一个G-刚性扩张；而这又当且仅当它是一个 G-本质扩张。这里沿用的是一条成熟的论证路线；如需了解某些特定范畴中的精确细节，也可参见 [14] 。对于一个 G-算子系统 $\mathcal{S}$ ，可以将其 G-内射包络取为一个含幺的 G-C^*-代数（如上文所述，这通常通过 Choi-Effros 乘积实现，见定理 2.5] 前文 [21, ）。

引理 4.7. 设 X 为一个实 G-算子空间（分别为 G-算子系统、含幺 G- 算子空间）。则 $l^\infty(G,X)_c = l^\infty(G,X_c)$，且二者之间存在一个完全等距的复$G$-态射 κ（即一个 G-同构），满足 $\kappa \circ (j_X)_c = j_{X_c}$。

证明。自同构 θ_X 在 $l^\infty(G,X_c)$上诱导出一个共轭线性、周期为 2、完全等距且 G-等变的自同构，其不动点对应于 $l^\infty(G,X)$。这里

$$\kappa(f+ig)(t) = f(t) + ig(t), \qquad f,g \in l^\infty(G,X),\ t \in G.$$

对于 $x,y \in X$ ，我们有

$$(\kappa((j_X)_c(x+iy)))(t) = (\kappa(j_X(x) + i\, j_X(y)))(t) = j_X(x)(t) + i\, j_X(y)(t),$$

它是 $t^{-1}x + i\,t^{-1}y = j_{X_c}(x+iy)(t)$。因此 $\kappa \circ (j_X)_c = j_{X_c}$。 □

推论 4.8. 若 X 是实 G-算子空间（分别为实 G-算子系统），则X_c 是复 G-内射的，当且仅当 X 是实 G-内射的。

证明。由引理 4.6 可知， X 是实 G-内射的，当且仅当 X 作为实算子空间是内射的，且存在一个实 G-态射 $\phi\colon l^\infty(G,X) \to X$ 使得 $\phi \circ j = I_X$。由引理 4.1 上方的事实可知，这意味着 X_c 作为实算子空间是内射的。另外，由引理 4.7，根据 $\phi_c\colon l^\infty(G,X)_c \to X_c$ ，我们得到一个复 G-态射 $\psi = \phi_c \circ \kappa^{-1}\colon l^\infty(G,X_c) \to X_c$，满足 $\psi \circ j_{X_c} = I_{X_c}$。因此，再由引理 4.6 可知， X_c是复 G-内射的。

反之，如果 X_c 是复 G-内射的，那么根据上一段论证的一个更简单变体，它是实 G-内射的（简而言之，它是复内射的，因此也是实内射的，所以 $l^\infty(G,X_c)$ 是实 G-内射的，从而 X_c也是如此）。因此， X 是实G-内射的，因为它在 X_c 中是“实 G-补的”（见引理 4.4）。□

命题 4.9. 如果 X 是实（分别为复） G-含幺算子空间，那么其伴随空间 X^* 是实（分别为复） G-含幺算子空间， $S = X + X^*$是实（分别为复） G-算子系统，并且

$$I_G(X + X^*) = I_G(X)\,, \quad C^*_{e,G}(X + X^*) = C^*_{e,G}(X).$$

此外，任意完全压缩的含幺 G-等变映射 $T\colon X \to Y$，若其定义在实（分别为复）含幺 G-算子空间之间，则可唯一延拓为自伴的 G-˜等变 UCP 映射 $T\colon X + X^* \to Y + Y^*$；若$T$ 是完全等距的，则该延拓也是完全等距的。

证明。对于复含幺算子空间，众所周知， $X + X^*$ 作为算子系统的定义良好性与表示无关 [36, 6, 18] , , 最后一个断言也是如此。在实情形下，这是 [9], 中命题 2.4 和推论 2.5 里的含幺空间断言，以及其后的论述。将映射延拓到 $X + X^*$ 后所得的 G-等变性是一个练习（下文的一些内容或有助于证明）。

如定理 4.5 之前的构造所示，我们有 G-等变的含幺完全等距嵌入

$$X \;\subset\; l^\infty(G, X) \;\subset\; l^\infty(G, B(H)),$$

其中，第一个是映射 $j(x)(s) = s^{-1}x$ ，用于 $s \in G, x \in X$。于是

$$j(X)^* \;\subset\; l^\infty(G, B(H))\,, \quad j(X) + j(X)^* \;\subset\; l^\infty(G, B(H))$$

是 G-等变嵌入。例如，对于 $s, t \in G, x \in X$，我们有

$$(tj(x)^*)(s) = j(x)^*(t^{-1}s) = (j(x)(t^{-1}s))^* = ((s^{-1}t)x)^* = (s^{-1}t)x^*,$$

而

$$j(tx)^*(s) = (j(tx)(s))^* = (s^{-1}(tx))^* = s^{-1}(tx^*) = (s^{-1}t)x^*.$$

因此 $tj(x)^* = j(tx)^*$。于是 $j(X)^*$，所以 X^* 是一个实（分别为复） G-含幺算子空间。同理， $j(X) + j(X)^*$，所以 $X + X^*$ 是一个实（分别为复）G-算子系统。我们还用到了证明第一行中的事实。

选取 $I_G(X + X^*)$ 为如上所述的一个含幺 G-C^*-代数，其含幺 G-C^*-子代数为 $C^*_e(X + X^*)$。显然，这些是 X 的 G-内射（分别为 G-C^*-）扩张；由于它们作为 $X + X^*$ 的扩张是 G-刚性的，因此它们是 G-刚性的，且 $X \subset X + X^*$。□

根据上一个命题，许多关于含幺 G算子空间的结果都可由 G算子系统情形推出。例如，引理 4.6 和推论 4.8 对含幺 G算子空间也有相应的变体。

（实或复）三元 G包络 $\mathcal{T}_G(X)$ 可定义为由 X的副本生成的（实或复） G算子空间 $I_G(X)$ 的三元子空间。由于 X 是 $I_G(X)$ 的 G子空间，显然 $\mathcal{T}_G(X)$ 也是 G子空间，因此是一个 G算子空间。

定理 4.10. 设 $\mathcal{S}$ 是一个实 G算子空间。那么 $I_G(\mathcal{S})_c = I_G(\mathcal{S}_c)$ 且 $\mathcal{T}_G(\mathcal{S})_c = \mathcal{T}_G(\mathcal{S}_c)$。若 $\mathcal{S}$ 是一个实 G算子系统或含幺实 G算子空间，则 $(I_G(\mathcal{S})\ j)$ 可取为一个实 G-C^*代数，其中 j 含幺；事实上， $I_G(\mathcal{S})$ 是其复化 $I_G(\mathcal{S}_c)$ 的一个实 G-C^*子代数。

证明。第一部分可仿照定理 4.2 的证明得出。例如，根据推论 4.8， $I_G(\mathcal{S})_c$ 是 $\mathcal{S}_c$ 的一个 G-内射扩张。若 $u\colon I_G(\mathcal{S})_c \to I_G(\mathcal{S})_c$ 是一个延拓 $I_{\mathcal{S}_c}$ 的（复线性） G-态射，那么仿照定理 4.2 的证明可得

$R = \frac{1}{2}(u + (\theta_{\mathcal{S}} \circ u \circ \theta_{\mathcal{S}})) = I$，从而 $u = I$。因此， $I_G(\mathcal{S})_c$ 是 $\mathcal{S}_c$ 的一个 G-内射G-刚性扩张，因而是一个 $\mathcal{S}_c$ 的 G-内射包络。

如引理 4.7 后所述， $Z = I(\mathcal{S})$ 可视为一个 G-TRO。由于 $\mathcal{T}_G(\mathcal{S})$ 是由 $\mathcal{S}$ 生成的实 G-子 TRO，因此 $Z_c = \mathcal{T}_G(\mathcal{S}) + i\mathcal{T}_G(\mathcal{S})$ 是一个复 G-TRO，也是 $\mathcal{S}_c$ 的 G-扩张，并且很容易看出， Z_c 是 $I_G(\mathcal{S})_c$ 中由 $\mathcal{S}_c$ 生成的 G-TRO。所以 $\mathcal{T}_G(\mathcal{S})_c = \mathcal{T}_G(\mathcal{S}_c)$。

对于 G-含幺空间，将 $(I_G(\mathcal{S}), j)$ 视为 G-C^*-代数，所用的思路与 [6, 推论 4.2.8 (1)] 或 [21, 定理 2.5] 上方几行相同。事实上，在上文定理 4.5 后所述的 G-内射包络构造中，从 $W = l^\infty(G, B(H))$ 到 $I_G(\mathcal{S})$ 的投影 Φ 是含幺的，因此是酉完全正的，所以 $I_G(\mathcal{S})$ 在 Choi-Effros 乘积下是一个 C^*-代数（如有需要，可参阅下一个证明中的更多细节）。□

注释。1）类似地，对于含幺实算子代数或 Jordan 算子代数，定理 4.2 中的陈述也会有“G-版本”。

2）对于有限群 G ，可以使用定理 4.15，简化定理 4.10 以及推论 4.8、4.12 和 4.13 的证明。

G-C^*-包络 $C^*_{e,\,G}(X)$ 定义为由 G-含幺算子空间或算子系统 X 在 $I_G(X)$ 中的副本 X 所生成的（实或复） C^*-代数。以下结果几乎全部归功于 Hamana，他在复情形下证明了该结果[22] ，适用于一般的局部紧群作用，事实上其适用范围远比这更广。

推论 4.11。设 X 为实 G-算子系统或 G-含幺算子空间，其中 $I_G(X)$ 取为定理 4.10 中的 C^*-代数。

(1) $C^*_{e,G}(X)_c = C^*_{e,G}(X_c)$。(2) $C^*_{e,G}(X)$具有如下泛性质：对于任意含幺的 G-等变完全等距映射 κ ： $X \to D$ 进入实 G-C^*-代数 D ，且 $\kappa(X)$生成 D 作为实 C^*-代数，都存在一个（必然唯一且满射的） G-等变 $*$-满态射 π ： $D \to C^*_{e,G}(X)$，使得 $\pi \circ \kappa$是 X 到$C^*_{e,G}(X)$中的典范嵌入。(3) 定理 4.10 中的 $\mathcal{T}_G(\mathcal{S})$具有三元 G-包络所需的泛性质。具体而言：对于任意 G-等变完全等距映射 ρ ： $\mathcal{S} \to W$进入实 G-TRO W ，且 $j(\mathcal{S})$生成 W 作为实 G-TRO，都存在一个 G-等变三元态射 π ： $W \to \mathcal{T}(\mathcal{S})$，使得 $\pi \circ \rho = j$。

证明。实质上，我们只需阐明 Hamana方法在当前情形下的用法。

(1) 设 A 是一个实含幺 G-算子空间或系统，且 $I_G(A_c)$ 是上一条结果中的含幺 G-C^*-代数。由于含有单位元的子空间在含幺 C^*-代数中生成的 C^*-子代数，就是该子空间生成的 TRO，故由定理 4.10 中关于 G-三元包络的类似结论可知，$C^*_e(A)_c = C^*_e(A_c)$ 既是复 G-C^*-代数，也是 A_c 的 G-扩张。

（2）关于泛性质，我们遵循 [6] 中 4.3.3 的论证。首先，我们选择 X 的一个 G-内射包络 $I_G(X)$，它是一个含幺 G-C^*-代数，并且如定理 4.10 中那样以含幺方式包含 X 。于是 $C^*_{e,\,G}(X)$ 是 $I_G(X)$ 的一个 C^*-子代数。假设 (D, κ) 是任意一个（实或复） G-算子系统X的 G-C^*-扩张，其中 D 由 $\kappa(X)$ 生成，并假设 D 是一个 G-C^*-代数，它是 $B(H)$ 的一个含幺 $*$-子代数。那么 $j_D(\kappa(X)) \subset l^\infty(G, B(H))$。由所构造的

定理 4.5 后讨论的 G-内射包络，存在一个定义在 $l^\infty(G, B(H))$ 上的 G-等变完全正幂等映射 Φ，其值域是 $j_D(\kappa(X))$ 的一个 G-内射包络 R。此外，相对于一个新乘积，即 Choi-Effros 乘积， R 是一个 C^*-代数。相对于 $l^\infty(G, B(H))$ 上的通常乘积，由 R 生成的 $l^\infty(G, B(H))$ 的C^*-子代数包含 $j_D(D)$，后者是由 $j_D(\kappa(X))$ 生成的 $l^\infty(G, B(H))$ 的 C^*-子代数。令 B 为 R 中由 $j_D(\kappa(X))$ 生成的 C^*-子代数（采用新乘积）。正如 [6], 中 4.3.3 所述，一个与 Choi-Effros 乘积有关的公式表明，相对于 R 上的新乘积， $\pi = \Phi_{|D}$ 是从 D 到 R 的一个 $*$-同态。由于 π 延拓了 $j_D(\kappa(X))$ 上的恒等映射，它显然也映入 B。由于 X 在 $C^*_{e,G}(X)$ 中的典范嵌入是 G-等变的，对于 $x \in X$，有 $\pi(\kappa(gx)) = g\pi(\kappa(x))$。因此，对于 $x \in X$ 以及由 $\kappa(X)$ 和 $\kappa(X)^*$ 中项构成的一个乘积 y，有 $\pi(\kappa(gx)y) = g\pi(\kappa(x)y)$。所以 π 是 G-等变的。

如通常的论证（例如 [6] 中的 4.3.3）所示，自然的含幺 G-等变完全等距满射 $R \to I_G(X)$ 是一个 $*$-同态。因此很明显，$(B, j_D \circ \kappa)$ 作为 X 的一个 G-C^*-扩张，可与 $C^*_{e,\ G}(X)$ 识别。综合这些事实，我们看到 $C^*_{e,\ G}(X)$ 具有所需的泛性质。

(3) $\mathcal{T}_G(X)$ 的泛性质可以用以下两种方式之一加以证明：其一，类似于我们在前几段中的证明，但以 Youngson 定理（[6, 定理 4.4.9], 以及 [2] 中的实变体）代替上文所述的 Choi-Effros 乘积和公式；其二，类似于 8.3.11 [6] 中的证明，但所有态射都为 G-等变。后一种方法是在复情形中于 [22, 定理 4.3] 采用的。实情形可由将复情形应用于 ρ_c 立即得到： $\mathcal{S}_c \to W_c$ 和 j_c。□

备注。1）照例， A 的实 G-C^*-包络，在我们所处范畴的适当意义下，是一个 G-刚性且 G-本质的扩张。这是因为它位于 A 与其 G-内射包络之间，而后者是 G-刚性的且G-本质的。类似地， $\mathcal{T}_G(X)$是实或复 G-算子空间 X的一个 G-刚性且 G-本质的扩张。

2）特别地，如果（Z， j）是 $\mathcal{S}$ 的一个具有（3）中泛性质的三元 G-扩张，那么通常的交换图论证表明，存在一个 G-等变三元同构 θ： $Z \to \mathcal{T}(\mathcal{S})$，使得 $\theta \circ j$ 是 X 到 $\mathcal{T}(\mathcal{S})$中的典范嵌入。因此，作为 X的三元 G-扩张， Z “等于” $\mathcal{T}(\mathcal{S})$。

推论 4.12。复 G-算子空间或系统 X 是实 G-内射的，当且仅当 X 是复 G-内射的。

证明。由引理 4.6， X 是实 G-内射的，当且仅当 X 作为实算子空间或系统是内射的，或者存在一个实 G-态射 ϕ： $l^\infty(G, X) \to X$ 使得 $\phi \circ j = I_X$。现在，根据引理 4.1， X 作为实算子空间或系统是内射的，当且仅当 X 作为复算子空间或系统是内射的。令$Q(f) = \frac{1}{2}(\phi(f) - i\phi(if))$，其中 $f \in l^\infty(G, X)$。如引理 4.1 的证明所示， Q 是复线性的，并且 $Q \circ j = I_X$。它也是 G-等变且完全压缩的。在算子系统情形下， $Q(1) = Q(j(1)) = 1$，因此 Q 是酉完全正的，并且是一个 G-态射。再次使用引理 4.6 可知， X 是复 G-内射的。反向证明类似，但更简单，并且与推论 4.8 最后一部分的证明相同。□

备注。在含幺 G-算子空间的情形下，也有类似的结果；证明只需稍作变通，留给读者完成。下一个结果中的第一条陈述也同样如此。

推论 4.13。复 G-算子空间或系统的实内射包络与复内射包络相同。复 G-算子空间的实三元的 G-包络与复三元的 G-包络相同。复含幺 G-算子空间的实 G-C^*-包络与复 G-C^*-包络相同。

证明。设 $I_G(X)$ 是复 G-内射包络，包住复 G-算子空间或系统 X。那么 $I_G(X)$ 是复 G-内射且具有 G-刚性。由推论 4.12 可知， $I_G(X)$ 是实 G-内射。因此，要证明它是实 G-内射包络，只需证明它具有实 G-刚性。将 X 和 $I_G(X)$ 视为实空间，并考虑一个实线性 G-态射 $u: I_G(X) \to I_G(X)$，它延拓了I_X。如推论 4.12 的证明所示，对于$z \in I_G(X)$， $Q(z) = \frac{1}{2}(u(z) - iu(iz))$ 是一个复线性 G-态射，延拓了 I_X。由复刚性以及定理 4.2 证明中的极端点论证可得 $Q = I = u$。因此，$I_G(X)$ 是 X 的实 G-内射、 G-刚性扩张，故它是 X 的实 G-内射包络。

实三元 G包络是实 G-TRO，位于实 G-内射包络中，因此位于 $I_G(X)$中，并由 X 生成。由于 X 在 $I_G(X)$中关于 i的乘法下是闭的，这与 $I_{\mathbb{C}}(X)$中由 X生成的复 G-TRO 一致。因此，实三元 G包络与复三元 G包络重合。若取 $I_G(X)$为一个 G-C^*代数，并使其单位元与定理 4.10 中 X 的单位元相同，则 G-C^*包络的断言由此得到。□

定理 4.14。作为实 TRO 的复算子空间是复 TRO。作为实 C^*-代数的复算子空间是复 C^*-代数。作为实近似含单位元算子代数的复算子空间是复算子代数。

证明。要证明第一个陈述，对三元包络应用推论 4.13，其中 $G = (0)$。第三个陈述由算子代数的“BRS 刻画” [6, 定理 2.3.2]得到。事实上，若一个近似含幺代数 A 是复算子空间，并且还满足关于 x、 $y \in M_n(A)$的“实条件” $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$，那么它满足所引用的复算子代数刻画的全部假设。

如果 A 是一个实 C^*-代数，那么根据第三条陈述，它是一个复算子代数 B 。我们有 $A = A \cap A^* = \Delta(B)$，这是一个复 C^*- 代数。根据 [6] 和 [2] 中的 2.1.2，我们注意到，在实情形和复情形下，算子代数的“对角线” $\Delta(\cdot)$ 的定义均不依赖于表示。□

定理 4.15. 设 G 是一个有限群。如果 S 是一个实（分别为复）算子空间或系统，同时也是一个实（分别为复） G-算子空间或系统，那么 S 是实（分别为复） G-内射的，当且仅当 S 是实（分别为复）内射的。

证明。我们只讨论算子空间的情形，对于 G-算子系统的结果类似。假设 S 是内射的。设 V和 W是 G-算子空间，其中 V是 W的一个 G-子空间（即包含映射是 G-等变的）。设 ϕ: $V \to S$ 是一个实（分别为复） G-等变完全压缩映射。由于 S 是内射的，我们可以将 ϕ 延拓为一个实（分别为复） $\psi: W \to S$，但它不一定是 G-等变的。对于每个 $g \in G$，由 $\psi_g(x) = g\psi(g^{-1}x)$ 定义的映射 $\psi_g : W \to S$ 也是完全压缩的，并且由于 ϕ的 G-等变性，它延拓了 ϕ 。如果我们取

$\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_g$的平均，我们就得到一个从 W 到 S的 G-等变完全压缩映射，它延拓了 ϕ。因此， S 是 G-内射的。

现在假设 S 是 G-内射的。根据下一个定理（其证明只用到上一段），我们有 $I(S) = I_G(S) = S$，因此 S 是内射的。□

备注。在含幺 G-算子空间的情形下，也有类似的结果，证明基本相同。

在上一个结果和定理 4.16 中，我们关注的是有限群。不过我们指出，对于紧群 G 的连续作用，经过对证明作一些修改，结果仍然成立。事实上，在上一个证明中，平均 ρ 可以替换为关于归一化 Haar 测度的博赫纳积分 $\rho = \int_G \psi_g\, dg$，容易证明该积分存在且具有 G-不变性。细节留给读者。

定理 4.16. 设 G 是一个有限群， X 是一个实或复 G-算子空间（分别为 G-算子系统）。

(1) G X 在实或复 G算子空间范畴（分别地， G算子系统范畴、 G含幺算子空间范畴）中的内射包络，是该范畴中 X 的内射包络。也就是说， $I_G(X) = I(X)$。(2) $\mathcal{T}_G(X)$是 X的实（分别地，复）三元包络。(3) 对于实（分别地，复） G含幺算子空间 X， G-C^*包络$C^*_{e,\,G}(X)$是一个实（分别地，复） C^*包络 $C^*_e(X)$。

证明。我们只证明算子空间的情形，其他情形类似。(1) 设 X 是一个实（分别地，复） G 算子空间。由刚性可知，对每个 $g \in G$， g 在 X 上的作用都唯一延拓为 $I(X)$上的完全等距映射，其逆映射是 g^{-1}的延拓作用。再次利用刚性可得， $g^{-1}(h^{-1}((hg)x)) = x$ 在$I(X)$上，因此$(hg)x = h(gx)$。于是我们得到一个到 X上的满射完全等距映射群的群同态。因此， $I(X)$是一个实（分别地，复） G算子空间。由于它是刚性的，所以它是 G-刚性的。由定理 4.15 证明的第一段可知， $I(X)$是 G内射的，因此它就是 G内射包络。

由于 $\mathcal{T}_G(X)$（分别地，$C^*_{e,\,G}(X)$）是由 X 的副本生成的 $I_G(X) = I(X)$ 的（实或复）三元子空间（分别地，C^*-代数），因此它是 X 的三元包络（分别地， C^*-包络）。□

备注。对于 G-算子代数，第4节前面关于算子代数的结果也有类似结论。若算子代数 A 在 $G \curvearrowright X$ 下由满射完全等距同态（自同构）组成，则称其为G-算子代数。再次，若 A 也含幺，那么根据一个著名的 Banach-Stone 定理（例如， [6] 中的定理 4.5.13，它针对复情形，并通过复化给出实情形；另见 [41, 定理 4.4]），这等价于 G 由线性满射含幺完全等距映射作用。

5. Further extension of real structure

我们已经看到，复算子系统（分别为算子空间）中的实结构 $\mathcal{S}$ 会在其 C^*包络（分别为三元包络）和内射包络中强制产生相容的实结构。一个自然的问题是，它是否会在 C^*包络的双交换子中强制产生实结构？它确实会在 C^*包络的二重对偶中产生实结构（将命题 2.1 应用于 $(\theta_{\mathcal{S}})^{**}$ 即可）。

我们给出一个例子，说明一般情况下这并不成立。考虑圆盘代数及其 C^*包络 $C(\mathbb{T})$ 上的共轭线性二阶对合 $f^*(z) = f(\bar{z})$。问题是，如果这些代数在希尔伯特空间上非退化表示，那么该对合是否能扩张到双交换子 $C(\mathbb{T})''$ in$B(H)$? 根据冯·诺依曼双交换子定理，这也就是 $C(\mathbb{T})$ 的像的弱*闭包（以及强算子拓扑和弱算子拓扑闭包）。

取 $\mathbb{T}$ 中的一个可数稠密集 E，其中满足 $E \cap \bar{E} = \emptyset$。注意， $C(\mathbb{T})$ 可通过典范映射 $f \mapsto f_{|E}$ 与 $\subset l^\infty(E)$ 等距对应。这对应于一个典范表示 $C(\mathbb{T}) \to B(l^2(E))$，它来自典范表示$\lambda$: $l^\infty(E) \to B(l^2(E))$。我们声称， $\lambda(C(\mathbb{T}))''$ 是冯·诺伊曼代数 $\lambda(l^\infty(E))$。事实上， $C(\mathbb{T})$ 在 $l^\infty(E)$ 中弱*稠密。为此，假设 $g \in l^1(E)$ 消去 $C(\mathbb{T})$。固定 $x \in E$，并选取一个递减的正帐篷函数序列 $f_n \in C(\mathbb{T})$，满足 $f_n(x) = 1$，且在长度为$1/n$的、中心为 x 的弧之外满足 $f_n = 0$。因此， f_n 在 E 上逐点收敛到 $\chi_{\{x\}}$。由勒贝格定理可得

$$0 = \langle f_n, g\rangle \to \langle \chi_{\{x\}}, g\rangle = g(x).$$

因此， $g = 0$ 和 $C(\mathbb{T})$ 在 $l^\infty(E)$ 中弱*稠密，并且 $\lambda(C(\mathbb{T}))'' = \lambda(l^\infty(E))$，如所声称。

不存在一个共轭线性的 $*$-自同构 $l^\infty(E)$，使其延拓 $C(\mathbb{T})$ 上给定的对合。事实上，这样一个 $*$-自同构由 α 与 E之间的二阶置换（双射）给出。由此得到

$$\overline{f(\bar{z})} = \overline{f(\alpha(z))}, \qquad f \in C(\mathbb{T}),$$

¯这意味着出现矛盾： $\alpha(z) \in E \cap E$。

换一种说法：设 N 为 $C(\mathbb{T})$ 上给定对合的不动点所构成的实 C^*-代数。那么 $C(\mathbb{T}) = N_c$，但 $(\bar{N}^{w*})_c \neq \overline{N_c}^{w*}$。事实上，$\overline{N_c}^{w*} = l^\infty(E)$ 不存在共轭线性的 $*$-自同构，使其延拓 $N_c = C(\mathbb{T})$ 上的对合。在此例中， $N = \{f \in C(\mathbb{T}) : f(z) = \underline{f(\bar{z})}\ z \in \mathbb{T}\}$ 是实的 $*$-同构于上半圆上的连续复值函数，这些函数在端点处为实数 ± 1。这个例子还表明，不能将实结构扩展到每个包含 $C_e^*(A)$ 的内射 C^*-代数上。因为 $l^\infty(E)$ 是一个包含 $C(\mathbb{T})$ 的内射 C^*-代数。

另一方面，注意到，给定在 $C(\mathbb{T})$ 上的对合确实可以扩展到泛冯·诺伊曼代数 $C(\mathbb{T})^{**}$ （例如参见 [10, 引理 2.12]），也可以扩展到 $L^\infty(\mathbb{T})$。后者可视为 $C(\mathbb{T})$ 上勒贝格积分的 GNS 表示。

更一般地，我们有：

命题 5.1. 假设在复 C^*-代数 A 上给定一个对合 $\dagger$，该对合由共轭线性完全等距周期 2 $*$-自同构 θ 给出： $A \to A$（因此 $\theta(a) = a^\dagger$，且 A 是某个实 C^*-代数 B 的复化）。若 τ 是 A 上一个忠实的、保持 $\dagger$ 的态，且若 τ 在 H_τ 上的 GNS 表示为 π_τ，则对合 θ 可扩展到冯·诺伊曼代数 $\pi_\tau(A)''$，并且还能进一步扩展到 $B(H_\tau)$。

证明。首先可在 GNS 希尔伯特空间 H_τ 上定义复线性对合 c_τ，其定义为 $c_\tau(a) = \theta(a)$，其中 $a \in A$。注意到

$$\|c_\tau(a)\|_{H_\tau}^2 = \tau(\theta(a^*)\theta(a)) = \tau(a^*a) = \|a\|_{H_\tau}^2, \qquad a \in A.$$

因此， c_τ 延拓为 H_τ 上的自伴酉元（一个对称元） U。于是， $T \mapsto UTU$ 是 $B(H_\tau)$ 上的共轭线性弱*连续自同构，并将 $\pi_\tau(A)$ 上的典范对合延拓。事实上

$$U\pi_\tau(a)U(b) = U\pi_\tau(a)\theta(b) = Ua\theta(b) = \theta(a\theta(b)) = a^\dagger b, \qquad a, b \in A,$$

因此，由于 A 在 H_τ 中稠密， $U\pi_\tau(a)U(b) = \pi_\tau(a^\dagger)$。根据连续性和稠密性，将此自同构限制到 $\pi_\tau(A)'' = \pi_\tau(A)^{w*}$ 上，它在那里是一个共轭线性完全等距的周期 2 $*$-自同构。□

因此，如果 A 是如上所述的实 C^*-代数 B 的复化，那么我们可以得出， $\pi_\tau(B_c)''$ 是 $\pi_\tau(B)''$ 的复化。

References

[1] S. Ayupov、A. Rakhimov 和 S. Usmanov, *Jordan real and Lie structures in operator algebras*, Mathematics and its Applications, 418。Kluwer Academic Publishers Group，Dordrecht，1997。[2] D. P. Blecher, *Real operator spaces and operator algebras*，预印本（2023）。[3] D. P. Blecher、S. Goldstein 和 L. E. Labuschagne, *Abelian von Neumann algebras measure algebras and L^∞-spaces* **40** 2022 758 818 , Expo. Math.（），–。[4] D. P. Blecher、J. Kaad 和 B. Mesland, *Operator *-correspondences in analysis and geometry*，Proc. London Math Soc. 117 (2018)，303–344。[5] D. P. Blecher 和 M. Kalantar, *A generalized complexification*（暂定标题），准备中（2023）。[6] D. P. Blecher 和 C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules—an operator space approach* 2004 , Oxford Univ. Press，Oxford（）。[7] D. P. Blecher 和 M. Neal, *Metric characterizations II*，Illinois J. Math. 57(2013)，25–41。[8] D. P. Blecher 和 V. Paulsen, *Multipliers of operator spaces and the injective envelope*，Pacific J. Math.，200 (2001)，1–14。[9] D. P. Blecher 和 W. Tepsan, *Real operator algebras and real positive maps*，J. Integral Equations Operator Theory 90 (2021)，第5期，论文编号49，共33页。[10] D. P. Blecher 和 Z. Wang, *Involutive operator algebras*，Positivity 24 (2020)，13–53。[11] R. S. Bryder, *Injective envelopes and the intersection property*，J. Operator Theory 87 (2022)，3–23。[12] M. Cabrera Garcia 和 A. Rodriguez Palacios, *Non-associative normed algebras. Vol. 1*，Vidav-Palmer 定理与 Gelfand-Naimark 定理。《数学及其应用百科全书》第154卷。剑桥大学出版社，剑桥，2014。[13] A. Cecco, *A categorical approach to injective envelopes*，准备中（2023）。[14] A. Cecco，博士论文，休斯顿大学（进行中）。[15] G. Chiribella、K. R. Davidson、V. I. Paulsen 和 M. Rahaman, *Counterexamples to the extendibility of positive unital norm-one maps* 2022 2204 , 预印本（），08819 arXiv：。[16] G. Chiribella、K. R. Davidson、V. I. Paulsen 和 M. Rahaman, *Positive maps and entanglement in real Hilbert spaces* 2022 2207 , 预印本（），02510 arXiv：。[17] *A factor not anti-isomorphic to itself* A. Connes，，《Bull. London Math. Soc.》，7 (1975)，171–174。[18] E. G. Effros 和 Z-J. Ruan, *Operator spaces*，伦敦数学会专著新系列第23卷，Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，2000。[19] V. Ferenczi, *Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach spaces* **213** 2007 462 488 , Adv. Math.（），–。[20] K. Goodearl, *Notes on real and complex C^*-algebras*，Shiva 数学丛书第5卷，Shiva Publishing Ltd.，Nantwitch，1982。[21] M. Hamana, *Injective envelopes of C^*-dynamical systems*，Tohoku Math. J. 37 (1985)，463–487。[22] M. Hamana, *Injective envelopes of dynamical systems*，Toyama Math. J. 34 (2011)，23–86。[23] H. Hanche-Olsen 和 E. Størmer, *Jordan operator algebras*，Pitman Publishing Inc.，伦敦，1984。[24] L. Ingelstam, *Real Banach algebras*，Arkiv f¨or Matematik，5 (1964)，239–270。

[25] J. M. Isidro 和 A. Rodr´ıguez-Palacios, *On the definition of real W^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3407–3410。[26] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. of Math. 54 (1951), 325–338。[27] M. Kalantar 和 M. Kennedy, *Boundaries of reduced C^*-algebras of discrete groups*, J. Reine Angew. Math. 727 (2017), 247–267。[28] E. Breuillard、M. Kalantar、Mehrdad、M. Kennedy 和 N. Ozawa, *C^*-simplicity and the unique trace property for discrete groups*, Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 126 (2017), 35–71。[29] M. Kalantar 和 E. Scarparo, *Boundary maps germs and quasi-regular representations*, Adv. Math. 394 (2022), 论文编号108130, 共31页。[30] N. J. Kalton, *An elementary example of a Banach space not isomorphic to its complex conjugate* **38** 1995 218 222 ,

Canad. Math. Bull.（）, –。[31] M. Kennedy、S.J. Kim、X. Li、S. Raum 和 D. Ursu, *The ideal intersection property for essential groupoid C^*-algebras* 2021 2107 03980 , 预印本

（）。(arXiv: 。)。[32] M. Kennedy 和 C. Schafhauser, *Noncommutative boundaries and the ideal structure of reduced crossed products* **168** 2019 3215 3260 , Duke

Math. J.（）, –。[33] B. Li, *Real operator algebras*, World Scientific, River Edge, N.J., 2003。[34] M. S. Moslehian、A. M. Peralta 等, *Similarities and differences between real and complex Banach spaces: an overview and recent developments* , Rev.

Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 116 (2022), 论文编号88。[35] T. Palmer, *Real C^*-algebras*, Pacific J. Math, 35 (1970), 195–204。[36] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, 剑桥高等数学研究丛书第78卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002。[37] G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, 伦敦（1979）。[38] G. Pisier, *Introduction to operator space theory*, 伦敦数学会讲义系列第294卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2003。[39] J. Rosenberg, *Structure and application of real C^*-algebras*, 《当代数学》第671卷（2016）, 235–258。[40] Z-J. Ruan, *On real operator spaces*, Acta Mathematica Sinica, 19 (2003), 485–496。[41] Z-J. Ruan, *Complexifications of real operator spaces*, Illinois Journal of Mathematics, 47 (2003), 1047–1062。[42] S. Sharma, *Real operator algebras and real completely isometric theory*, Positivity 18 (2014), 95–118。[43] W. Tepsan, *Real operator spaces real operator algebras and real Jordan operator algebras*, 博士论文, 休斯顿大学（2020）。

Department of Mathematics, University of Houston, Houston, TX 77204-3008, USA
Email address: dpbleche@central.uh.edu

Department of Mathematics, University of Houston, Houston, TX 77204-3008, USA
Email address: ahcecco@central.uh.edu

Department of Mathematics, University of Houston, Houston, TX 77204-3008, USA
Email address: kalantar@math.uh.edu