arXiv:2303.17151v1 [cs.GT] 30 Mar 2023

Shapley-Hodge关联博弈

Antonio Mastropietro[1] 和 Francesco Vaccarino[2]

[1]数据科学系，EURECOM，法国，antonio.mastropietro@eurecom.fr[2]数学科学系，都灵理工大学，意大利，francesco.vaccarino@polito.it

2023年3月31日

摘要

在合作博弈论中，关联博弈有助于对解概念进行有意义的刻画。此外，广义值能够计算博弈中每个联盟的影响力或权力指数。在本文中，我们通过博弈映射的视角审视关联博弈，并定义一种新颖的Shapley-Hodge博弈，简称“SHoGa”。我们通过公理化方法将SHoGa 刻画为一种广义值，并深入讨论其关联博弈的一致性性质。此外，我们描述了一个有向图的 Hodge分解，该有向图表示博弈中联盟的 Hasse图的传递闭包。最后，我们展示了 SHoGa 如何与由此类分解导出的泊松方程的解建立联系。

2020年数学学科分类：91A12、05C50、15A24

1 引言

在合作博弈论中，关联博弈在研究合作结构以及向参与者分配联盟价值方面发挥着重要作用。关联博弈不过是通过某种变换所得的结果，它为所研究的博弈提供了一种新的视角 [13,10]。众所周知，将博弈与关联博弈的性质联系起来并加以比较，有助于推导出解概念的新刻画

，尤其是值的刻画 [10, 11, 15]。然而，过去的文献主要关注分配规则本身，而忽略了博弈之间的函数关系。因此，我们提出研究博弈映射，使关联博弈通过博弈映射成为像博弈。博弈映射这一概念在文献中并非全新，研究者曾用它根据关联一致性性质来刻画值 [15]。在其他研究中，“广义值”一词被用于描述这样一种函数：它旨在计算博弈中联盟的权力或影响力指数，从而将针对参与者的值这一概念加以推广 [17, 18, 6]。然而，据我们所知，此前似乎尚未对这两种视角之间的联系进行广泛探讨。不出所料，博弈映射使我们能够重新审视许多关于成熟值的既有研究 [13, 10, 22,11, 14, 30]。事实上，我们将说明，许多值的刻画都可以从研究博弈映射性质的角度来理解。此外，我们还表明，从广义值继承而来的公理化方法可以应用于博弈映射及关联博弈的研究。换言之，我们讨论了大量博弈映射应具备的性质或公理，其方式与广义值的研究类似。请注意，值的公理通常涉及对参与者的要求，例如虚设参与者公理或Shapley值的对称性公理 [27], ；而博弈映射的公理化方法则涉及联盟的性质。此外，受Shapley值最初的经典刻画 [27] 启发，我们提出了一组能够唯一刻画一个重要博弈映射的性质。固定玩家集合 N后，我们关注其上的可转移效用博弈（TU博弈）线性空间 N，下文记作 $\mathcal{G}^N$。具体而言，我们提出一个博弈映射 χ： $\mathcal{G}^N \to \mathcal{G}^N$，它按如下方式计算新定义的Shapley-Hodge关联博弈 χ_u：

$$\chi_u(S) = \frac{1}{2}\big(u(N) - u(N \setminus S) + u(S)\big) \quad \forall u \in \mathcal{G}^N. \tag{1}$$

随后，我们展示了应用于 $u \in \mathcal{G}^N$和 χ_u的概率值 [5] 与概率广义值 [18] 之间存在密切联系。此外，我们研究了 χ_u 与各种具有不同研究意义的博弈族之间的联系，例如双边博弈、常和博弈、凝聚博弈和超可加博弈。此外，我们根据对偶博弈 [26, 22, 8] 和商博弈 [2]描述了 χ_u 。有趣的是，与 χ_u 相关联的博弈似乎遵循剩余平分原则[29, 25], 该原则应用于两个互补联盟的商博弈 [24] 中。

最后，我们研究线性映射 χ 在可转移效用博弈向量空间中的性质。 [28] 近期的研究根据描述博弈中参与者边际贡献的定向超立方体图的组合Hodge分解，推导出了 Shapley值的一种刻画

。受其研究启发，我们使用描述博弈中所有联盟包含关系的 Hasse图传递闭包的同一 Hodge分解，对关联博弈 χ_u 给出一种刻画。最后，我们通过若干示例和评论讨论式（1）中的新型博弈映射χ。

2 公理化刻画

2.1 预备知识

可转移效用合作博弈（TU-game）是一个有序对 (N,u)：N 是基数为 $n \in \mathbb{N}$ 的玩家集合，且 u: $\mathcal{P}_N \to \mathbb{R}$ 满足 $u(\emptyset) = 0$，其中 $\mathcal{P}_N$ 是 N的幂集。下文中，博弈一词指可转移效用博弈 (N,u)，并将其与特征函数 u等同，同时假设 N为 $\{1,\ldots,n\}$。参与博弈的玩家表示为元素 $i \in N$，而每个 $S \subseteq N$ 表示一个玩家联盟。我们用 $N \setminus S$ 表示补联盟。函数 u 称为博弈的特征函数，$u(S)$表示玩家合作时联盟 S 的价值。对于博弈 $u \in \mathcal{G}^N$，若联盟 $S \subseteq N$ 满足 $u(S) = u(N \setminus S)$，则称其为双边的，如 [19]所研究。若一个博弈的所有联盟都是双边的，则称该博弈为双边博弈。若对于 $\forall T \subseteq N \setminus S$，$u(S \cup T) = u(T)$，则称 S 为空联盟。

如果 $S \subseteq N$，博弈 (N,u) 的子博弈 $(S, u|_S)$ 是一个可转移效用博弈，其中特征函数在每个 $T \in \mathcal{P}_S$ 上定义为 $u|_S(T) = u(T)$。当 $S \cap T = \emptyset$ 时，如果 $u(S \cup T) \geq u(S) + u(T)$，则博弈 u是超可加的。如果对于 N的所有划分 $\mathfrak{P} = \{S_1,\ldots,S_k\}$，都有 $u(N) \geq \sum_{j=1}^{k} u(S_j)$，则博弈 u是凝聚的。注意，超可加博弈是凝聚的。此外，如果对于每个联盟 S，都有 $u(S) + u(N \setminus S) = u(N)$，则 u是常和的。已知 [23]，由 $\mathcal{G}^N$ 表示的可转移效用博弈集合在显然的函数运算下是一个向量空间。

在 Γ^N 的博弈中，最为重要的是由 $\theta_S(T) = 1$ 当且仅当 $S \subseteq T$（对所有 $S,T \subseteq N$）给出的“一致博弈” θ_S。一致博弈集合 $\{\theta_S\}_{S \subseteq N}$ 是 $\mathcal{G}^N$（作为实向量空间）的一个线性基，见 [23]。

给定博弈 u，其零归一化为 $u_z(S) = u(S) - \sum_{i \in S} u(i)$[5]；对偶博弈和反对偶博弈分别定义为 $u^*(S) = u(N) - u(N \setminus S)$ 和 $-u^*(S)$ [22]。在合作博弈中，玩家集合可能表现为一个个整体。下文定义的商博弈描述了这样一种情形：固定的联盟结构中，玩家集合 N 的一个划分由若干联盟构成，这些联盟充当玩家 [2]。考虑一个博弈 $u \in \mathcal{G}^N$，其中有 $n \geq 2$，并且 $K = \{1,\ldots,k\}$ 满足

$k \leq n$。设 $\mathfrak{P} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ 是 N 的一个划分。商博弈 $u^{\mathfrak{P}} \in \mathcal{G}^K$ 的玩家集合由 $\mathfrak{P}$ 中的联盟构成，并且对每个 $\{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq K$， $u^{\mathfrak{P}}(\{i_1, \ldots, i_l\}) = u(\cup_{j=1}^{l} S_{i_j})$。

对于一个 $u \in \mathcal{G}^N$， N 的收益向量是$\mathbf{R}^n$ 中的一个向量，为每个玩家 $i \in N$分配收益。对于一组此类博弈，解是一种映射，为每个博弈关联一个收益向量集合。公理是解所满足的一个理想性质。值是在博弈域上的一个解，为每个博弈关联一个唯一的收益向量。值的刻画是在其定义所在的博弈域上的一组性质，借此可以在同一域上的各个值之间推导出唯一性定理。该值确定了一条在各个玩家之间分配大联盟联盟价值的规则。若一个值 ψ 是概率 [5]值，则对于每个玩家 i，存在一族常数 $p_S^i(N) \in \mathbf{R}$，对于每个联盟$S \subseteq N \setminus i$，使得：

$$\psi_i(u) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} p_S^i(N) \big(u(S \cup i) - u(S)\big), \quad \text{with} \sum_{S \subseteq N \setminus i} p_S^i(N) = 1.$$

注意，满足线性公理和虚拟参与者公理的值是概率 [9]值。概率值的示例包括Shapley值和Banzhaf值 [3]。特别地，我们将重点讨论Shapley值，它可能是可转移效用博弈中最著名、研究最广泛的值。给定一个博弈 $u \in \mathcal{G}^N$，对于每个玩家 i ，Shapley值定义为：

$$\phi_i(u) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (u(S \cup i) - u(S)). \tag{2}$$

文献中已经给出了许多公理化刻画[1]。其中，我们提及 Shapley 本人给出的第一个刻画 [27], ， 以及 [10] 采用关联一致性给出的刻画。

概率值的一个重要扩展是概率广义值 [17, 18, 6], ，其定义如下：

$$\psi_S(u) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} p_T^S(N) \big(u(T \cup S) - u(T)\big), \quad \text{with} \sum_{S \subseteq N \setminus i} p_T^S(N) = 1. \tag{3}$$

广义值的概念是衡量联盟在博弈 [17] 中的权力、实力或影响力。再次举例来说，Shapley 或 Banzhaf 广义值 [18]。回顾一下，如果对于所有超可加博弈 $u \in \mathcal{G}^N$， $\psi_S(u) \geq u(S)$ [6]，那么概率广义值满足群体理性。

2.2 统一定义：博弈映射

本节中，我们定义并研究定义在 $\mathcal{G}^N$ 上的函数，称之为博弈映射。

定义 2.1. 博弈映射是一个函数 γ，它为每个博弈$u \in \mathcal{G}^N$ 指定同一玩家集合上的关联博弈 $\gamma_u \in \mathcal{G}^N$。我们将从 $\mathcal{G}^N$ 映射到其自身的博弈映射集合记为 Γ^N。

请注意，文献中已使用“广义值”一词定义了博弈映射 [18, 6]。然而，据我们所知，关联博弈与博弈映射之间的联系此前尚未得到研究。

注意，若 γ、γ' 是博弈映射，则对所有$c \in \mathrm{R}$， $c\gamma$也是博弈映射，并且 $\gamma + \gamma'$ 同样是博弈映射。此外，注意方程 1 中的函数 χ 是博弈映射。事实上，(i) $\chi_u(\emptyset) = 0$、 $\forall u \in \mathcal{G}^N$，且 (ii) 它为每个 $u \in \mathcal{G}^N$关联 $\chi_u \in \mathcal{G}^N$。

我们可以利用博弈映射回顾文献中的重要结果。首先，在 [13] 中定义的势为

$$P(N,u) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} u(S)$$

诱导出博弈映射 ρ，其关联博弈为 $\rho_u(S) = P(S, {}^{u}|_{S})$。对于玩家 i 而言， u的势微分 $D^i P(N,u)$可由ρ轻易推导得出：

$$D^i P(N,u) = P(N,u) - P(N \setminus \{i\}, u|_{N\setminus\{i\}}) = \rho(N) - \rho(N \setminus \{i\}).$$

进一步地，由下式定义的、参数为$t \in \mathrm{R}$的关联博弈族：

$$\eta_u^t(S) = u(S) + t \sum_{j \in N\setminus S} \big(u(S \cup \{j\}) - u(S) - u(\{j\})\big), \quad \forall S \subseteq N \tag{4}$$

在 [10] 中定义的，是通过适当的博弈映射得到的像博弈。类比于利用关联一致性对Shapley值的刻画，我们针对博弈映射和值给出如下定义，该定义已在 [15]中提及。

定义2.2。在定义域 $\mathcal{G}^N$ 上的值 ψ_i 与 $\gamma \in \Gamma^N$ 具有关联一致性，当且仅当对于每个 $i \in N$， $\psi_i(u) = \psi_i(\gamma_u)$。

值得注意的是， [14] 定义了另一个关联博弈，用来刻画一种称为 [20] 不可分离成本的均等分配（EANS）的值。此外， [11] 通过一系列与公式（4）中的关联博弈类似的关联博弈，研究具有合作结构的博弈。

此外，我们注意到，κ 用于推导博弈 [12] 的 Harsanyi 红利的函数是一个博弈映射：

$$\kappa_u(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t}\, u(T), \quad \forall u \in \mathcal{G}^N.$$

此外，博弈的协同效应 ω 本身也是一个博弈映射 [9]:

$$\omega_u(S) = \sum_{T \subseteq S} u(T), \quad \forall u \in \mathcal{G}^N.$$

此外，从某种意义上说，ω 实际上是 κ 的逆映射，即 $\omega_{\kappa_u} = \kappa_{\omega_u} = u$；这可以由 M¨obius 变换[8]的性质证明。

我们还注意到，概率广义值是一个博弈映射。事实上，由方程（3）可知，对于每个 $u \in \mathcal{G}^N$，都有 $\psi_\emptyset(u) = 0$ 。反过来，也很容易证明 χ_u 同样是一个概率广义值，且

$$p_T^S(N) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ if } T \in \{\emptyset, N \setminus S\} \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

作为最后几个示例，我们注意到零归一化、对偶博弈和反对偶博弈都是博弈映射。特别地，χ 可得（见方程（1））

$$\chi_u = \frac{1}{2}\big(u^* + u\big). \tag{5}$$

上面的方程表明，χ 可以解释为：S 自身能够获得的联盟价值，与 $N \setminus S$ 无法阻止 S 在 u [22]中获得的联盟价值，两者的平均值。

定义 2.3。Shapley-Hodge博弈映射 $\chi \in \Gamma^N$ 是一个博弈映射，它将每个 $u \in \mathcal{G}^N$ 映射为 χ_u，即其 Shapley-Hodge关联博弈，简称“SHoGa”。

在接下来的章节中，我们将说明为何要将 χ 函数与Shapley值和Hodge理论联系起来。

2.3 博弈映射的公理化方法

现在我们可以给出博弈映射 χ的一种刻画。

定义2.4. $\gamma \in \Gamma^N$ 满足以下公理之一，当且仅当相应的陈述成立：

AvEFF 平均效率：$\forall u \in \mathcal{G}^N$，$\sum_{S \subseteq N} \gamma_u(S) = 2^{n-1} u(N)$。

NLL 零联盟： $\forall u \in \mathcal{G}^N$，如果 $S \subseteq N$ 是 u的零联盟，则 $\gamma_u(S) = 0$。BLT 双边性： $\forall u \in \mathcal{G}^N$，如果 $S \subseteq N$ 对于 u具有双边性，则 S 对于 γ_u 也具有双边性。CS 常和： $\forall u \in \mathcal{G}^N \quad \gamma_u(S) + \gamma_u(N \setminus S) = \gamma_u(N)$ LIN 线性： $\forall u, \ v \in \mathcal{G}^N, \ \forall a, \ b \in \mathrm{R}$ $\gamma_{au+bv} = a\gamma_u + b\gamma_v$。

AvEFF 公理要求，关联博弈的联盟价值平均值应等于大联盟的联盟价值。平均因子 $\frac{1}{2^n-1}$ 是参与博弈的互补对 $(S, N \setminus S)$ 的数量。NLL 公理将针对玩家的公理扩展到联盟情境中。该公理与 [18]提出的概率广义值中的虚设联盟公理相关。BLT 公理规定，原始联盟价值相同的互补联盟应获得相同的映射。上述两条公理可以解释为公平原则的联盟版本，涉及互补联盟对。这一观点表明，关联博弈 γ_u 可以被视为 u的公平版本。CS 公理针对关联博弈中的互补对提出要求：每一对的联盟价值之和都应等于大联盟的关联联盟价值。最后，LIN 公理的灵感来自值的线性性质。现在我们可以证明，博弈映射 χ 由所列性质刻画。

定理 2.5. 假设 $\gamma \in \Gamma^N$ 满足 EFF、LIN、NLL、CS、BLT。则对所有 $u \in \mathcal{G}^N$， $\gamma_u = \chi_u$。因此， χ 是满足 EFF、LIN、NLL、CS、BLT 的唯一博弈映射。

证明。由于 γ 满足 LIN，它是 $\mathcal{G}^N$的线性自同态。因此，只需在 $\mathcal{G}^N$的一组基上证明该结论。我们选择 $\{\theta_S\}_{S \subseteq N}$，其中 θ_S是 N上的一致博弈。

固定 $S \subseteq N$ 并考虑 $T \subseteq N$，只有以下三种情况：

(i) $T \cap S = \varnothing$。令 $R \subseteq N$ 满足 $T \cap R = \varnothing$，则当且仅当 $S \subseteq R$时 $S \subseteq T \cup R$，因此 T是空的，从而 $\gamma_{\theta_S}(T) = 0$。(ii) $T \cap S = S$，即 $S \subseteq T$。在此情况下，$(N \setminus T) \cap S = \varnothing$，因此根据 CS_S和情形 (i)，$\gamma_{\theta_S}(T) = \gamma_{\theta_S}(N)$。(iii) $\varnothing \neq T \cap S \neq S$。在此情况下同样有 $\varnothing \neq (N \setminus T) \cap S \neq S$，因此 $\theta_S(T) = \theta_S(N \setminus T) = 0$，从而根据 BLT_S 和 CS_S，$\gamma_{\theta_S}(T) = \gamma_{\theta_S}(N \setminus T) = \frac{1}{2}\gamma_S(N)$。

根据下面的引理即可得出该结果。 □

引理 2.6. 假设 $\gamma \in \Gamma^N$ 满足 $AvEFF$ 和 CS。那么$\gamma_u(N) = u(N)$，对所有 $u \in \mathcal{G}^N$均成立。

证明. CS 和 $AvEFF$ 意味着

$$\gamma_u(N) = \sum_{S \subseteq N} (\gamma_u(S) + \gamma_u(N \setminus S)) = 2u(N).$$

□

命题 2.7。 χ 的核为

$$\ker \chi = \{u \in \mathcal{G}^N : u(A) = u(N \setminus A), \forall A \in \mathcal{P}_N\} \tag{6}$$

特别地，如果 $u \in$ 核 χ，则 $u(N) = u(\emptyset) = 0$。

证明。首先， $\chi_u(N) = 0$ 当且仅当 $u(N) = 0$。对于 $S \in \mathcal{P}_N$，应用 $\chi_u(S)$的定义并令 $u(N) = 0$，即可得到该结果。 □

SHoGa 的 3 个性质

现在，我们可以从值和有趣的博弈类的角度研究 SHoGa 的性质。首先，我们略微扩展一个关于 Shapley 值 [4]的已知结果。

命题 3.1。如果 ψ 是一个概率值，则

$$\psi_i(u) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i \big(u(N \setminus S) - u(S)\big) \tag{7}$$

证明。令 $R = N \setminus (S \cup i)$，根据概率值的定义可得:

$$\begin{aligned} \psi_i(u) &= \sum_{R \subseteq N \setminus \{i\}} p_R^i \left(u(N \setminus R) - u(N \setminus (R \cup i))\right) \\ &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i \left(u(N \setminus S) - u(S)\right) \end{aligned}$$

□

命题 3.2. 如果 ψ 是概率值，则:

$$\psi_i(\chi_u) = \psi_i(u) \tag{8}$$

证明。注意， $\chi_u(N \setminus S) - \chi_u(S) = \frac{1}{2}\big(u(N \setminus S) - u(S)\big)$。两次应用命题 3.1:

$$\psi_i(\chi_u) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i \left(u(N \setminus S) - u(S)\right) = \psi_i(u). \tag{9}$$

□

推论 3.3。概率值 ψ 可以用 χ_u来定义：

$$\psi_i(u) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i \big(\chi_u(N \setminus S) - \chi_u(S)\big).$$

特别地，我们已经证明，根据定义 2.2，每个概率值都与博弈映射 χ相一致。

Proof. Follow by $\chi_u(N \setminus S) - \chi_u(S) = u(N \setminus S) - u(S)$. □

命题 3.4。

$$\forall S \subseteq N, \forall u \in \mathcal{G}^N, \quad \chi_{\chi_u}(S) = \chi_u(S). \tag{10}$$

证明。

$$\chi_{\chi_u}(S) = \frac{1}{2}\left(\chi_u(S) - \chi_u(N \setminus S) + \chi_u(S)\right) = \chi_u(S)$$

□

命题 3.5。 χ_u 是超可加的，当且仅当对于玩家集合 N 的每个划分 $\{R, S, T\}$，

$$u(R \cup S \cup T) - u(R \cup S) - u(R \cup T) - u(S \cup T) + u(R) + u(S) + u(T) \leq 0. \tag{11}$$

证明。 χ_u 是超可加博弈，当且仅当对于所有不相交集合S和$T \subseteq N$，

$$\chi_u(S \cup T) \geq \chi_u(S) + \chi_u(T).$$

如果我们将 $R = N \setminus (S \cup T)$ 称为，那么 $\{R, S, T\}$ 构成 N的一个划分。方程 11 通过展开不等式并代入 R得到。

□

推论 3.6. 给定一个超可加的常和博弈 u，则 χ_u 是超可加的。

证明。考虑 N 的一个划分 $\{R, S, T\}$。根据 CS_S，可以写为： $u(R \cup S \cup T) = u(R) + u(S \cup T)$。于是，不等式 (11) 变为：

$$u(R \cup T) - u(R) - u(T) + u(R \cup S) - u(R) - u(S) \geq 0.$$

将 u 的超可加性应用于 R、T 和 R、S 这两对，即可得出该结论。

□

推论 3.7. 如果 χ_u 是超可加的，那么 χ_{χ_u} 也是超可加的。

证明。由命题 3.4 得出。 □

命题 3.8. 如果 u 是凝聚博弈，那么

$$\chi_u(S) \geq u(S) \quad \forall S \subseteq N. \tag{12}$$

或者，等价地，对于每个联盟 S， $u^*(S) \geq u$。当且仅当 u 也是常和时，上述不等式取等号。

证明。给定一个凝聚博弈 u，并考虑 N 的划分 $\{N \setminus S, S\}$， $u(N) \geq u(N \setminus S) + u(S)$。因此，

$$\chi_u(S) \geq \frac{1}{2}\big((u(N \setminus S) + u(S)) - u(N \setminus S) + u(S)\big) = u(S).$$

假设上述等式对每个联盟都成立，那么，对于每个 $S \subseteq N$， $u(N) - u(N \setminus S) + u(S) = 2\,u(S)$，因此 u 是常和。反之，若 u 是常和，则式 (12) 中的不等式变为等式。 □

就概率广义值而言，上述命题表明 χ 满足群体理性 [6]。

考虑一个博弈 $u \in \mathcal{G}^{\{1,2\}}$。那么，Shapley值为：

$$\phi_1(u) = \frac{1}{2}\big(u(\{1,2\}) - u(2) + u(1)\big)$$
$$\phi_2(u) = \frac{1}{2}\big(u(\{1,2\}) - u(1) + u(2)\big).$$

注意，对于参与者 $i = 1,2$，有 $\phi_i(u) = \chi_u(\{i\})$。以下结论将这一观察从双人博弈推广到商博弈。

命题 3.9。给定一个博弈 u，对于每个 $S \subseteq N$，考虑 $\mathfrak{P} = \{S, N \setminus S\}$ 对 N 的划分，以及商博弈 $u^{\mathfrak{P}}$。假设参与者 1 对应于 S，参与者 2 对应于 $N \setminus S$，则：

$$\chi_u(S) = \phi_1(u^{\mathfrak{P}}); \qquad \chi_u(N \setminus S) = \phi_2(u^{\mathfrak{P}}). \tag{13}$$

证明。

$$\phi_1(u^{\mathfrak{P}}) = \frac{1}{2}\big(u(N) - u(N \setminus S) + u(S)\big) = \chi_u(S).$$

$\phi_2(u^{\mathfrak{P}})$ 的计算相同。 □

我们对上述命题提出三种有意义的解读。首先，根据命题 3.9，针对 χ_u-Shapley 的 CS 公理

可解释为将玩家的 Shapley值效率公理转化到商博弈 $u^{\mathfrak{P}}$ 上:

$$\chi_S(u) + \chi_{N\setminus S}(u) = \big(\phi_1(u^{\mathfrak{P}}) + \phi_2(u^{\mathfrak{P}})\big) = u^{\mathfrak{P}}(N) = \chi_N(u).$$

其次，回顾 [10] 中对公式（4）的解释：它描述了相应的关联博弈 η_S^t，将 S 视为星状图的中心，并将 $N \setminus S$ 中的每位玩家视为孤立元素。相反，在关联博弈 χ_u 中， S 将 $N \setminus S$ 视为一个整体，并与其分享大联盟的联盟价值。第三，从广义值的角度来看，注意 Shapley群值 [6] 在由 $[S] \cup \{i \in N \setminus S\}$ 组成的 $n - s + 1$ 个参与者的商博弈中，将 S 视为单人联盟。相反， χ 广义值考虑的商博弈只有 2 个参与者，即 S 和 $N \setminus S$。

接下来，我们定义一种新的博弈映射，它将 χ 按因子 $\frac{1}{2^{n-1}}$缩放，这很有意思。

定义 3.10. 对于每个博弈 u 和联盟 S，定义

$$\chi'_u(S) = \frac{1}{2^{n-1}}\chi_u(S) = \frac{1}{2^n}\big(u(N) - u(N \setminus S) + u(S)\big). \tag{14}$$

根据线性性，针对 χ 在命题3.2、3.4、3.8和3.9中讨论的所有性质同样适用于 χ'，其中相应的方程按 $\frac{1}{2^{n-1}}$倍缩放。显然，博弈映射 χ' 满足定义2.4中列出的除AvEFF外的所有公理。相反， χ' 满足以下效率公理:

定义3.11。若 $\gamma \in \Gamma^N$ 满足以下条件，则称其满足效率（EFF）：

$$\forall u \in \mathcal{G}^N, \quad \sum_{S\subseteq N} \gamma_u(S) = u(N) \tag{15}$$

4 Hodge刻画

本节介绍图论中组合Hodge分解的一般数学框架，该框架近期被用于Shapley值的刻画 [28] ，并在[16]中得到进一步扩展。随后，我们将博弈映射 χ' 描述为定义该博弈的Hasse图上的泊松方程的解。

4.1 插曲：图的Hodge分解

记号4.1。设 V 为顶点集合， $E \subseteq V \times V$ 为连接 V中一对节点的边集合。

定义4.2。如果（a， b）$\in E$意味着（b， a）$\notin E$，则称 $G=$（V， E）为有向图。

定义 4.3。记 $l^2(V)$ 为函数 u：$V\to$R 的函数空间，并配备内积

$$\langle u,v\rangle_V := \sum_{a\in V} u(a)v(a). \tag{16}$$

类似地，记 $l^2(E)$ 为函数 f：$E\to$R 的函数空间，并配备内积

$$\langle f,g\rangle_E := \sum_{(a,b)\in E} f(a,b)g(a,b). \tag{17}$$

定义 4.4（d 和 d*）。令图微分算子为线性映射 $\mathrm{d}_G: l^2(V)\to l^2(E)$，其定义如下：

$$\mathrm{d}_G\, u(a,b) := u(b)-u(a). \tag{18}$$

其伴随算子 d_G^* 是唯一的线性映射 $\mathrm{d}_G^*: l^2(E)\to l^2(V)$，满足

$$\langle u, \mathrm{d}_G^* f\rangle_V = \langle \mathrm{d}_G\, u, f\rangle_E$$

记号 4.5。只要图 G 的含义可由上下文明确，记号就会省略微分算子或其伴随算子中的下标 G，也就是说，$\mathrm{d}:=\mathrm{d}_G$ 或 $\mathrm{d}^*:=\mathrm{d}_G^*$。

定义 4.6。给定一个图 G，图拉普拉斯算子 L_G 是线性映射 $l^2(V)\to l^2(V)$，定义为 $L_G=\mathrm{d}_G^*\mathrm{d}_G$。若上下文含义明确，则省略图拉普拉斯算子中的下标 G，并记 L 表示 L_G。

命题4.7。内积空间 $l^2(V)$ 和 $l^2(E)$ 可分解为

$$l^2(V)=\operatorname{Im}\mathrm{d}^*\oplus\operatorname{Ker}\mathrm{d} \quad and \quad l^2(E)=\operatorname{Im}\mathrm{d}\oplus\operatorname{Ker}\mathrm{d}^*, \tag{19}$$

其中，Im 和 Ker 分别如通常所指，表示一个线性映射的像和核。在（19）中得到的分解称为 $l^2(V)$ 和 $l^2(E)$ 的组合Hodge分解。

证明。尽管这是一个众所周知的结果，我们仍在此给出一个简单证明，以阐明该分解的一些方面，这些方面随后将会有所用处。

给定任意一对内积线性空间 V和 W 以及线性映射 $f: V\to W$，则有

$$f^*(w)=0_V \iff 0=\langle v, f^*(v)\rangle_V=\langle f(v),w\rangle_W,\ \forall v\in V$$

从而 Ker $f^* = \{w \in W\colon \langle f(v)\ w\rangle_W = 0, \forall v \in V\}$，也就是说，Ker $f^* =$(Im $f)^\perp$，即 Im f在 W中的正交补。

作相应修改并使用 $f = (f^*)^*$ 可知，Ker $f =$(Im $f^*)^\perp$ 同样成立。因此，

$$V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f^* = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp \tag{20}$$

and

$$W = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Im} f \oplus (\operatorname{Im} f)^\perp \tag{21}$$

将 $\mathrm{d}: l^2(V) \to l^2(E)$ 代入即可得到结果 □

4.2 泊松方程

定理 4.8. 设 $G = (V, E)$ 是一个有限简单有向图，且 $H = (V, F)$ 是 G 的一个子图，其中 $F \subset E$。那么，对于所有的 $v \in l^2(V)$，方程

$$L_G x = L_H v \tag{22}$$

有一个解 $x = v_H \in l^2(V)$。

证明。为证明该命题，我们需要引入由包含映射 $F \subset E$ 导出的线性映射 $\iota_F: l^2(F) \to l^2(E)$，即

$$\iota_F(\psi)(a,b) := \begin{cases} \psi(a,b) & \text{if } (a,b) \in F \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{23}$$

对于所有 $\psi \in l^2(F)$ 以及 $(a,b) \in E$. 容易验证，以下结论成立 $\iota_F^* \iota_F = id_{l^2(F)}$, 其中 ι_F^*是 $\langle\ ,\ \rangle_E$ 和 $\langle\ ,\ \rangle_F$. 下 ι_F 的伴随算子

现在注意到 $\mathrm{d}_H = \iota_F^* \mathrm{d}_G$，因此 $L_H v = \mathrm{d}_H^* \mathrm{d}_H v = \mathrm{d}_G^* \iota_F \mathrm{d}_H v$。由于 $\iota_F \mathrm{d}_H v \in l^2(E)$，存在 $v_H \in l^2(V)$ 和 $r_H(v) \in \operatorname{Ker} \mathrm{d}_G^*$，使得 $\iota_F \mathrm{d}_H v = \mathrm{d}_G v_H + r_H(v)$。我们可以得出:

$$L_H v = \mathrm{d}_H^* \mathrm{d}_H v = \mathrm{d}_G^* \iota_F \mathrm{d}_H v = \mathrm{d}_G^* (\mathrm{d}_G v_H + r_H(v)) = \mathrm{d}_G^* \mathrm{d}_G v_H = L_G v_H \tag{24}$$

□

下面是一个众所周知的事实，现列出以飨读者。

命题 4.9。图是连通的，当且仅当其拉普拉斯算子的核是一维的。

证明。首先，注意到 $L = \mathrm{d}^* \mathrm{d}$ 蕴含 $\operatorname{Ker} L = \operatorname{Ker} \mathrm{d}$，而 $\operatorname{Ker} \mathrm{d} = \{u \in l^2(V) \mid u(x) = u(y)\ \forall (x,y) \in E\}$. 令 $C_1, \ldots, C_\beta$

是 G 的连通分支，并令 $\mathbb{1}_i$ 为 C_i 的特征函数，其中 $i = 1, \ldots, \beta$，则 $(\mathbb{1}_1, \ldots, \mathbb{1}_\beta)$ 是 $\mathrm{Ker}\ d$ 的一组基。因此，G 连通当且仅当 $\mathrm{Ker}\ \mathrm{d} = \{\alpha \mathbb{1} : \alpha \in \mathrm{R}\}$，其中 $\mathbf{1}(x) = 1$ 对所有 $x \in V$ 均成立。 □

今后，除非另有说明，我们假设图 G 是连通的。

命题 4.10. 对所有 $\alpha \in V$，用 V_α 表示 $V_\alpha = \{u \in \mathrm{l}^2(V) : u(\alpha) = 0\}$ 在 $\mathrm{l}^2(V)$ 中的子空间。那么，对于所有 $u \in \mathrm{l}^2(V)$，以及所有满足 $F \subset E$ 的 $H = (V, F)$，泊松方程 (22) 有唯一解 $u_H^\alpha \in V_\alpha$。

证明. 设 $u_H \in \mathrm{l}^2(V)$ 满足 $L_H u = L_G u_H$，则 $u_H - u_H(x)\mathbf{1}$ 是 (22) 的另一个解，且属于 V_α。现在假设 $u_H^\alpha, v_H^\alpha \in V_\alpha$ 是 (22) 的两个解，则 $u_H^\alpha - v_H^\alpha$ 在 V 上为常数，且属于 V_α，因此它是空的，并且 $u_H^\alpha = v_H^\alpha$。 □

现在我们将重点放在一类与 TU 博弈、Shapley值和 χ 相关的图上。我们首先需要一个定义。

定义 4.11。给定通常的玩家集合 N，其基数为 $n \in \mathbb{N}$，我们将用 V 表示一个与 $\mathcal{P}_N$. 双射的顶点集合。我们令

1. $G := (V, E)$, $E = \{(A, B) \in V \times V : A \subset B\}$;
2. $G^k := (V, E^k)$, $E^k = \{(A, B) \in E : |B \setminus A| \leq k\}$, *for all* $1 \leq k \leq n$;
3. $G_S := (V, E_S)$, $E_S = \{(A, B) \in E : B \setminus A = S\}$, *for all* $S \in \mathcal{P}_N$.

相应地，我们将用 d、d^k、d_S、L、L^k 和 L_S 表示相应的微分算子和拉普拉斯算子。

于是我们可以表述如下结论：这是定理 4.8 和命题 4.10 的直接推论。

推论 4.12。设 $S \in \mathcal{P}_N$、$u \in \mathcal{G}^N$ 和 k 为整数 $|S| \leq k \leq n$。那么，方程

$$L^k x = L_S u \tag{25}$$

有唯一解 $x = u_S^k \in \mathcal{G}^N$。

证明。令 $G = G^k$、$H = G_S$ 和 $V_\alpha = V_\emptyset = \mathcal{G}^N$，由定理 4.8 和命题 4.10 可得。 □

定义 4.13. 对于参与者 $\sigma \in \mathcal{S}_N$ 的所有置换，定义 $\sigma^* : \mathrm{l}^2(V) \to \mathrm{l}^2(V)$ 为 $(\sigma^* u)(S) := u\big(\sigma(S)\big)$，对于所有 $u \in \mathrm{l}^2(V)$ 和 $S \subset N$。

注释 4.14. 对于所有 $\sigma \in \mathcal{S}_N$ 和 $A \subseteq B \subseteq N$，有 $\sigma(A \setminus B) = \sigma(A) \setminus \sigma(B)$。

定理 4.15。设 $S \in \mathcal{P}_N$、$|S| \leq k \leq n$、G、G^k 和 G_S 如 4.11 中所述。设 u_S^k 为 $\mathcal{G}^N$ 中满足方程 (25) 的唯一博弈，其中 $u \in \mathcal{G}^N$ 如推论 4.12 中所述。

那么，博弈 u_S^k 满足以下条件：
(a) $\sum_{S:\ |S|\leq k} u_S^k = u$；(b) 如果对于所有 $T \subseteq N \setminus S$，$u(S \cup T) = u(T)$，则 $u_S^k = 0$；(c) 如果 $\sigma \in \mathcal{S}_N$，则 $(\sigma^* u)_S^k = \sigma^*(u_{\sigma(S)}^k)$。
(d) 对于任意两个博弈 u、v 和 α、$\beta \in \in \mathrm{R}$，则 $(\alpha u + \beta v)_S^k = \alpha u_S^k + \beta v_S^k$

证明。(a) 设 $S \in \mathcal{P}_N$，则 $\sum_{S\in\mathcal{P}_N} \iota_S \iota_S^* = id_{l^2(E)}$，这很容易验证。因此，$\sum_{S\in\mathcal{P}_N} L_S = \sum_{S\in\mathcal{P}_N} d^* \iota_S \iota_S^* d = d^*(\sum_{S\in\mathcal{P}_N} \iota_S \iota_S^*) d = dd^* = L$。以下设 $L \sum_{S\in\mathcal{P}_N} u_S = \sum_{S\in\mathcal{P}_N} L u_S = \sum_{S\in\mathcal{P}_N} L_S u = Lu$，由于 $\ker(L) \cap \mathcal{G}^N = \{\mathbf{0}\}$，结论成立。

(b) 只需注意到

$$L_S u(T) = \begin{cases} u(T) - u(T \cup S) & \text{if } T \cap S = \emptyset \\ u(T) - u(T \setminus S) & \text{if } T \cap S = S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{26}$$

因此，若 S 为空，则 $L_S u = 0$，进而 $L u_S = 0$。于是 $u_S = 0$，因为 $\ker L \cap \mathcal{G}^N = \{0\}$.

(c) 首先注意到 $L\sigma^* u = \sigma^* L u$。事实上，对所有 $A \in \mathcal{P}_N$ 和 $u \in \Gamma^N$，$L\sigma^* u(A) = \deg(A)\sigma^* u(A) - \sum_{B\sim A} \sigma^* u(B) = \sigma^* L u(A)$，其中 $\deg(\sigma(A)) = \deg(A)$，因为 $|A| = |\sigma(A)|$。其次，注意到 $L_S \sigma^* u = \sigma^* L_{\sigma(S)} u$，这可由 σ^* 的定义和方程 (26) 直接得出。于是，$L(\sigma^* u)_S = L_S \sigma^* u = \sigma^* L_{\sigma(S)} u = \sigma^* L u_{\sigma(S)} = L\sigma^*(u_{\sigma(S)})$，由拉普拉斯算子 L 在 $\mathcal{G}^N$ 上的单射性即可得出结论。(d) 显然。 □

Hodge-Shapley 关联博弈与泊松方程的解之间存在深刻联系，下面的定理对此进行了阐释。

定理 4.16. 设 $S \in \mathcal{P}_N$、G 和 G_S 如 4.11 中所述。设 u_S 是 $\mathcal{G}^N$ 中满足泊松方程 (22)（针对 $u \in \mathcal{G}^N$ 和 $H = G_S$）的唯一博弈解。那么 $u_S(N) = \chi'_u(S)$。

证明. 首先回顾，对于一般的图 $G=(V,E)$，有 $v\in V$，并且 $u\in l^2(V)$ 成立： $Lu(v)=\deg_G(v)\,u(v)-\sum_{w\sim v}u(w)$，其中 $w\sim v$ 当且仅当 $(v,w)\in E$ 或 $(w,v)\in E$。接着回顾 $u_S\in\mathcal{G}^N$，因此 $u_S(\emptyset)=0$。由此可得

$$\begin{aligned} Lu_S(\emptyset) &= (2^n-1)\,u_S(\emptyset)-\sum_{A\neq\emptyset}u_S(A)\\ &= 2^n u_S(\emptyset)-\sum_{A\in V}u_S(A)\\ &= -\sum_{A\in V}u_S(A) \end{aligned} \tag{27}$$

and

$$L_S\,u(\emptyset)=u(\emptyset)-u(S)=-u(S). \tag{28}$$

因此,

$$u(S)=\sum_{A\in V}u_S(A). \tag{29}$$

另一方面

$$\begin{aligned} L\,u_S(N) &= (2^n-1)u_S(N)-\sum_{A\neq N}u_S(A)\\ &= 2^n u_S(N)-\sum_{A\in V}u_S(N) \end{aligned} \tag{30}$$

and

$$L_S\,u(N)=u(N)-u(N\setminus S) \tag{31}$$

现在考虑 $L\,u_S(N)=L_S\,u(N)$，由此利用式（29）、（30）和（31），可得

$$u_S(N)=\frac{1}{2^n}(u(N)-u(N\setminus S)+u(S)) \tag{32}$$

结论由此得证。 □

在这一尺度的另一极端，当 $k=1$ 时，泊松方程的解给出了Shapley值，这一结论最早见于 [28]（尽管当时的表述略有不同）。

定理 4.17。令 $1\le i\le n$，给定 $u\in\mathcal{G}^N$，令 u_i^1 为泊松方程 $L^1u_i^1=L_iu$ 的解所对应的唯一博弈。那么，$u_i^1(N)$ 是 u 的第 $i-$ 个 Shapley值，即 $u_i^1(N)=\phi_i(u)$。

4.3 示例

例 4.18。考虑如下所述的经典手套博弈 [28], : $u \in \mathcal{G}^N$, 其中 $n = 3$。然后我们可以比较 u 和 χ_u （省略集合括号，例如 $ijk = \{i, j, k\}$）：

$$u(S) = \begin{cases} 1 \text{ if } S = 12, 13, 123 \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \qquad \chi_u(S) = \begin{cases} 1 \text{ if } S = 12, 13, 123 \\ \frac{1}{2} \text{ if } S = 1, 23 \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

我们可以看出，唯一的差别在于联盟 1 和 23 的收益。

示例 4.19. 破产问题 [7] 可追溯至《塔木德》：一名男子去世后留下了 $E = 200$的遗产，三位债权人分别要求获得 $c_1 = 100$、 $c_2 = 200$ 和 $c_3 = 300$的补偿。 $n = 3$ 个参与者的可转移效用博弈表述由[21]提出。在这个博弈中， $u(S) = \max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right)$。特别是，计算 χ_u 可得

$$u(S) = \begin{cases} 200 \text{ if } S = 123 \\ 100 \text{ if } S = 23 \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases} \qquad \chi_u(S) = \begin{cases} 200 \text{ if } S = 123 \\ 150 \text{ if } S = 23 \\ 50 \text{ if } S = 1 \\ 0 \text{ if } S = \emptyset \\ 100 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

注意， u 是超可加博弈，而 χ_u 不是（只需比较单元素联盟 1、2、3 上的χ_u与 $\chi_u(N)$）。此外，每一对互补联盟的收益之和均为常数；特别是，除非是平凡联盟对，$(1, \{2, 3\})$ 中的每个联盟都获得大联盟收益的一半。 χ_1 低于其他联盟，因为 $\{2, 3\}$ 在博弈 u中的作用。

例 4.20。机场问题讨论的是跑道上飞机起降活动之间的成本再分配。不同类型的飞机需要不同长度的跑道。假设有 4 次起降活动，分别由参与者表示。第一次起降活动的成本为 12，第二次和第三次起降活动的成本各为 28，第四次起降活动的成本为 30。特征函数 $u \in \mathcal{G}^N$, $n = 4$ 描述如下：

$$u(S) = \begin{cases} -12 \text{ if } S = 1 \\ -28 \text{ if } S \cap 2, 3 \neq \emptyset \text{ and } 4 \notin S \\ -30 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

通过计算 χ_u ，我们得到:

$$\chi_u(S) = \begin{cases} -6 \text{ if } S = 1 \\ -24 \text{ if } S = 234 \\ -14 \text{ if } S \cap 23 \neq \emptyset \text{ and } 4 \notin S \\ -16 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

请注意， u和 χ_u 都是超可加的。

5 结论

在这项工作中，我们提出了一种研究可转移效用博弈解概念的新视角。具体而言，我们建议通过博弈映射的定义，将广义值与关联博弈统一起来。我们定义了一种新的博弈映射 χ 及其对应的关联博弈 χ_u，并给出了受广义值启发的公理化刻画。

博弈映射 χ 具有显著性质，可概括如下。首先，所有概率值都与 χ关联一致。其次，它可以解释为一种分配规则，用于将大联盟的收益分配给原博弈中的每一对互补联盟。具体而言，这种分配遵循公平原则，体现为空联盟公理中的双边性、常和与零联盟公理。因此，关联博弈 χ_u 可视为原博弈的公平版本。第三， χ遵循剩余平分原则，将大联盟的收益分配给互补联盟。从这个意义上说， χ 与两人商博弈中的Shapley值之间似乎存在紧密联系。第四，作为一种概率广义值，它计算互补联盟的影响力或权力；对于凝聚博弈而言，这种计算满足群体理性。

此外，我们证明了，将 χ乘以一个缩放因子后，可以得到一个满足联盟效率公理且保留 χ性质的博弈映射 χ' 。最后，我们引入了表示博弈中联盟之间包含关系的哈斯图的传递闭包。令人惊讶的是，由该图导出的泊松方程的解唯一刻画了博弈映射 χ'。

致谢

本研究在 FAIR（未来人工智能研究）项目框架内开展，并获得欧盟 Next-

GenerationEU（国家复苏与韧性计划（PNRR）—第4任务第2组成部分，投资1.3—2022年10月11日第1555号法令，PE00000013）的资助。本文仅反映作者的观点和意见，欧盟和欧盟委员会均不对其承担责任。A.M. 衷心感谢 Mauro Leoncini 的热心支持。

参考文献

[1] Encarnaci´on Algaba、Vito Fragnelli 和 Joaqu´ın S´anchez-Soriano。《Shapley值手册》。CRC出版社，2019年。[2] Robert J Aumann 和 Jacques H Dreze。“具有联盟结构的合作博弈”。载于：《国际博弈论杂志》3（1974），第217—237页。[3] John F Banzhaf III。“加权投票并不奏效：数学分析”。载于：《罗格斯法律评论》19（1964），第317页。[4] Theo SH Driessen。“合作博弈论中一致性性质综述”。载于：SIAM评论33.1（1991），第43—59页。[5] Pradeep Dubey 和 Robert James Weber。《博弈的概率值》。技术报告。耶鲁大学，新港，康涅狄格州，考尔斯经济研究基金会，1977年。[6] Ram´on Flores、Elisenda Molina 和 Juan Tejada。“使用广义Shapley值评估群体”。载于：4OR 17（2019），第141—172页。[7] Julio Gonz´alez-Diaz、Ignacio Garcia-Jurado 和 M Gloria Fiestras-Janeiro。“数学博弈论入门课程”。载于：数学研究生教材115（2010）。[8] Michel Grabisch 等。《决策中的集合函数、博弈与容量》。第46卷。施普林格，2016年。[9] Michel Grabisch 和 Marc Roubens。“合作博弈中参与者间互动概念的公理化方法”。载于：《国际博弈论杂志》28.4（1999），第547—565页。

[10] G´erard Hamiache。“关联一致性与Shapley值 ”. 载于：《国际博弈论杂志》30（2001），第279–289页。

[11] G´erard Hamiache 和 Florian Navarro：《关联一致性、值与图》。载于：《国际博弈论杂志》49（2020），第227–249页。[12] John C Harsanyi：《n人合作博弈的简化讨价还价模型》。载于：《国际经济评论》4.2（1963），第194–220页。[13] Sergiu Hart 和 Andreu Mas-Colell：《势、值与一致性》。载于：《计量经济学：计量经济学会杂志》（1989），第589–614页。[14] Yan-An Hwang：《关联一致性与不可分离成本的均等分配》。载于：《经济理论》28.3（2006），第709–719页。[15] Norman L Kleinberg：《关于关联一致性与线性对称值的注记》。载于：《国际博弈论杂志》47（2018），第913–925页。[16] Tongseok Lim：《Shapley公理的霍奇理论扩展》。载于：SSRN 3876004（2021）。[17] Jean-Luc Marichal：《变量对伪布尔函数的影响及其在博弈论和多准则决策中的应用》。载于：《离散应用数学》107.1-3（2000），第139–164页。[18] Jean-Luc Marichal、Ivan Kojadinovic 和 Katsushige Fujimoto：《广义值的公理化刻画》。载于：《离散应用数学》155.1（2007），第26–43页。[19] Andrzej Mlodak：《常和合作博弈与双边合作博弈的若干值》。载于：《数学应用》3.34（2007），第359–371页。[20] Herv´e Moulin：《可分离性公理与均等分享方法》。载于：《经济理论杂志》36.1（1985），第120–148页。[21] Barry O’Neill：《一个源自《塔木德》的权利仲裁问题》。载于：《数学社会科学》2.4（1982），第345

371.[22] Takayuki Oishi 等人。《TU 博弈中的对偶性与反对偶性在解、公理及公理化中的应用》。载于：《数学经济学杂志》63（2016），第 44–53 页。

[23] Martin J Osborne 和 Ariel Rubinstein。《博弈论课程》。麻省理工学院出版社，1994 年。[24] Guilliermo Owen。《先验联盟博弈的值》。载于：《数理经济学与博弈论》。施普林格，1977 年，第 76–88 页。[25] Emilio Calvo Ram´on 和 Esther Guti´errez-L´opez。《合作博弈中的等集体收益值》。载于：《国际博弈论杂志》51.1（2022），第 249–278 页。[26] Luis M Ruiz、Federico Valenciano 和 Jose M Zarzuelo。《可转移效用博弈的最小二乘值族》。载于：《博弈与经济行为》24.1-2（1998），第 109–130 页。[27] Lloyd S. Shapley。《 n人博弈的一个值》。载于：《数学研究年刊：博弈论贡献 II》，第 28 卷（1953），第 307–317 页。[28] Ari Stern 和 Alexander Tettenhorst。《合作博弈的霍奇分解与 Shapley值》。载于：《博弈与经济行为》113（2019），第 186–198 页。ISSN：0899-8256。DOI：https://doi.org/10.1016/j.geb.2018.09.006。[29] Ren´e Van Den Brink 和 Yukihiko Funaki。《TU 博弈等剩余分配解类的公理化》。载于：《理论与决策》67（2009），第 303–340 页。[30] Genjiu Xu、Wenna Wang 和 Hua Dong。《分配集合值重心的公理化》。载于：《线性代数及其应用》439.8（2013），第 2205–2215 页。