arXiv:2303.17263v1 [math.HO] 30 Mar 2023

曲面的镶嵌与三角剖分

GIANLUCA FARACO

摘要。镶嵌或铺砌是由一组集合构成的，这些集合称为铺砌块，它们无缝隙、无重叠地覆盖平面。本文旨在引领读者领略可定向曲面的镶嵌与三角剖分之美及其恢宏壮丽。

目录

1. 引言 1
2. 紧致多边形的庞加莱定理 3
3. 三角形镶嵌与三角形群 5
4. 柏拉图立体 12
参考文献 16
21

1. 引言

在本综述中，我们旨在向读者介绍镶嵌这一主题。在现实生活中，我们每天都会遇到镶嵌的例子：铺有正方形镶嵌块的地板无疑是最典型的例子，尽管并非唯一的例子。*Tessellate* 一词源自拉丁语词*tessellatus*，它是*tessellare*的过去分词，字面意思是用*tessellae*铺砌；这是拉丁语词*tessella*的复数形式，意为小正方形。Tessella 对应于现代词语铺砌块，而镶嵌通常也称为铺砌、铺路或马赛克，参见 [GS77]。尽管名称如此，铺砌块不一定是正方形，也可以是任意多边形，甚至可以是不规则多边形。更一般地说，铺砌块也可以是某种别致的形状，不一定非得是多边形。

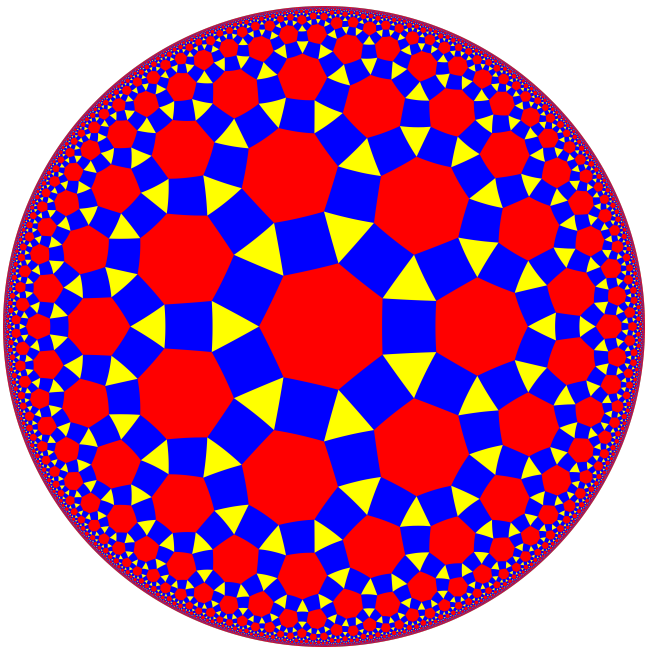


图 1. 庞加莱圆盘上的菱形三六边形镶嵌。

虽然自古以来人们就已知晓镶嵌，例如苏美尔人曾用黏土砖砌筑墙面装饰图案，但首次开创性的研究是由约翰内斯

日期：2023 年 3 月 31 日。

开普勒在十七世纪前后进行的。在他的《世界的和谐》中，开普勒研究了正则镶嵌和半正则镶嵌，并且首次描述了蜂窝的结构。事实证明，蜂窝是欧几里得平面上三种可能的镶嵌之一。

然而，镶嵌的美感与壮丽，在广泛用于马赛克或地面铺砌的古典艺术中，才能得到充分的领略。西班牙塞维利亚考古博物馆便有这样的铺砌实例：地面采用正方形、三角形和六边形原型砖铺砌而成。上方的图（1）展示了这种铺砌在庞加莱圆盘中的样子，它称为菱形三六角镶嵌。本文将着重从数学角度阐述球面、欧几里得平面和双曲平面上的镶嵌。我们从以下问题开始：

1.1. 什么是镶嵌？所谓镶嵌 $\mathcal{T}$，是指将几何曲面 S 划分为若干互不重叠的多边形，即它们的内部互不相交；这些多边形称为铺砌块。几何曲面是指配备了三种二维几何之一（球面几何、欧几里得几何或双曲几何）的拓扑曲面。一般的镶嵌 $\mathcal{T}$ 不一定呈现任何周期图案，这类镶嵌通常称为非周期镶嵌。彭罗斯镶嵌是最著名的非周期镶嵌实例，参见 [Pen78]。这类镶嵌由两种不同的原型砖铺成。长期以来，人们一直在探讨是否存在仅由一种原型砖铺成的非周期镶嵌。这类镶嵌有时称为非周期单块镶嵌。最近，文献 [SMKGS23] 针对拓扑圆盘铺砖给出了肯定答案，作者展示了一族连续统个组合等价的非周期多边形。镶嵌 $\mathcal{T}$ 的对称是指 S 的一种等距变换，它保持镶嵌结构不变，也就是说，它将镶嵌的顶点、边和铺砌块映射到自身。若任意一个铺砌块都能通过某种等距变换映射到其他任一铺砌块，且该变换将整个 $\mathcal{T}$ 映射到自身，则称此镶嵌 $\mathcal{T}$ 为对称镶嵌。其基本思想是，对称铺砌中的铺砌块（例如 $\mathcal{T}$）彼此无法区分；从任一铺砌块的角度看，$\mathcal{T}$ 呈现的样子都完全相同。对称铺砌中的所有铺砌块两两全等，因此只有一种原型砖。如果原型砖是正多边形，则称该对称铺砌为正则铺砌。

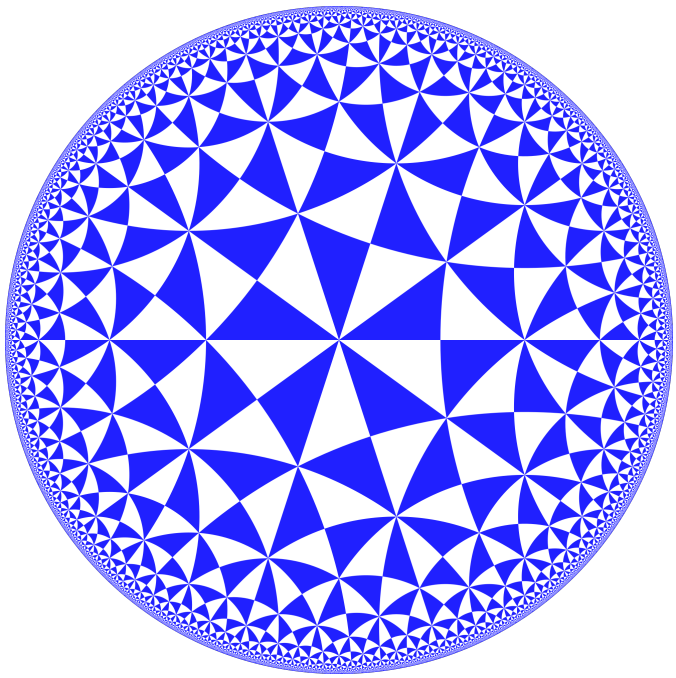


图2. 庞加莱圆盘的三角形镶嵌，其中每个铺砌块都与一个内角大小为$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}\right)$的双曲三角形等距。在第 §3.2节中，我们将看到，该镶嵌对应于三角群 Δ(2,4,5)。

图（2）展示了庞加莱圆盘的一个正则铺砌示例 $\mathbb{D}^2$；我们将在第 §3节详细讨论这类镶嵌。图（1）所示的镶嵌并不正则，因为其中有三种不同的原型砖。在本文中，我们将主要关注对称镶嵌，并在 §1.3 和 §4.3中简要讨论半正则镶嵌。现在，我们关注镶嵌的另一个方面，即边对边性质。如果一个铺砌 $\mathcal{T}$ 满足边对边，则称任意一对铺砌块之间的相互关系属于以下情形之一：

- 它们互不相交（没有共同点）；
- 它们恰有一个公共点，且该点是两个多边形各自的顶点；或者
- 它们共享一条线段，而这条线段分别是这两个多边形的一条边。

对于边对边镶嵌，平面上任何一个属于某个铺砌块顶点的点，也必定是所有包含该点的其他铺砌块的顶点。在本文中，我们将重点讨论边对边铺砌。感兴趣的读者可参阅 [GS77，第 §4] 节，了解非边对边铺砌。最为熟悉的边对边正则镶嵌是 $\mathbb{E}^2$欧几里得平面上的那些镶嵌。为了给读者提供一些可供思考的具体例子，我们将在即将介绍的小节 §1.2中对它们作更详细的描述。

1.2. **欧几里得平面上的对称镶嵌**。 在雅典的泰阿泰德（约公元前 417 年—公元前 369 年）对柏拉图立体进行分类之前，我们将在第 §4节介绍这些立体，而欧几里得平面上可能的边对边镶嵌早已被发现。欧几里得平面上只有三种正则镶嵌。换句话说，只有三种正多边形能够单独铺砌整个欧几里得平面，如同马赛克一般。通过启发式推理（我们将在下一节 §2节中使其更加严谨），本段旨在回答以下问题。

1.2.1. 有多少种正则镶嵌？ 我们首先探寻正多边形铺砌欧几里得平面的条件。首先可以观察到，每个顶点总是至少由三块瓦片共享。此外，每个顶点处的角之和为 2π。这一简单事实立即排除了边数不少于 7 的所有正多边形，因为它们的内角都全等且大于 $\frac{2\pi}{3}$。注意，三个边数为七条或更多的瓦片共用一个顶点时，必然会相互重叠。这样一来，剩下的可能作为原型砖的多边形只有四种：三角形、正方形、五边形和六边形。在这些多边形中，唯一应排除的是五边形，因为它的内角大小为 $\frac{3\pi}{5}$。三个共用一个顶点的瓦片不足以将图形封合；而四个五边形则会相互重叠。其余的正多边形，即三角形、正方形和六边形，其内角分别等于 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$和 $\frac{2\pi}{3}$。下面证明它们都能铺砌整个欧几里得平面。设欧几里得平面T 中有一个正（等边）三角形 $\mathbb{E}^2$，我们可以在 T 的任意一个顶点处放置五个与T 自身等距的正三角形。如此无限重复，我们便可覆盖整个欧几里得平面。注意，由于这些三角形（瓦片）彼此等距，这种铺砌具有边对边性质，且是对称的。对正方形和正六边形也可以采用同样的方法；两种情况下，最终都能铺砌 $\mathbb{E}^2$。后者尤其形成了我们前面提到的蜂窝镶嵌。因此我们可以确认，欧几里得平面上有三种边对边正则镶嵌。然而，若取消边对边性质，则 $\mathbb{E}^2$上还会有另外七种正则镶嵌，见 [GS77，第 §4]节。

1.2.2. 对偶性。 镶嵌也有对偶性的概念。考虑由正三角形铺成的 $\mathbb{E}^2$。每个顶点处都有六个三角形面。连接相邻面的中心，即 有一条公共边的面，我们便得到一种由正六边形构成的欧几里得平面正则镶嵌。反过来也可以进行同样的构造。我们可以从由正六边形铺成的 $\mathbb{E}^2$ 镶嵌出发，再连接相邻六边形面的中心，从而得到一种完全由正三角形构成的镶嵌。因此，我们可以在三角形镶嵌和六边形镶嵌之间相互转换：它们互为对偶。由正方形构成的另一种铺砌则是自对偶的。事实上，连接相邻面的中心后，正方形铺砌会确定一种新的铺砌，其原型砖是一个正方形，与我们起初所用镶嵌中的任意铺砌块都等距。对偶性在理论中发挥着重要作用。事实上，对偶镶嵌具有相同的内在性质，尽管镶嵌本身看起来可能有所不同。我们将在第 §4节介绍柏拉图立体的类似对偶性概念。

1.3. **半正则铺砌及其他**。 本段简要讨论由两种或更多原型砖组成的铺砌。若原型砖均为正多边形，且可以是不同类型，并且每个顶点的价和构型都相同，则称这种镶嵌为半正则镶嵌，见 [DG21，顶点类型]。请注意，正则镶嵌是半正则镶嵌的特例。开普勒在《世界的和谐》中描述了欧几里得平面上的半正则铺砌。他证明，半正则铺砌恰有 11 种《世界的和谐》；其中三种是上文 § $\mathbb{E}^2$ 所述的正则镶嵌 1.2。其余 8 种铺砌可按原型砖的数量细分：

- 六种半正则镶嵌由两种原型砖组成：其中五种的原型砖都包含三角形，并且三角形可以分别以两种不同方式与正方形原型砖、六边形原型砖或十二边形原型砖组合。最后一种铺砌的原型砖则是正方形和八边形。
- 有两种半正则镶嵌包含三种原型砖。其中一种由三角形、正方形和六边形组成；另一种则由正方形、六边形和十二边形组成。

值得一提的是，如果我们不再假设原型砖是正则的，那么就有无穷多个 $\mathbb{E}^2$。例如，任意三角形或四边形本身都可以作为铺砌欧几里得平面的原型砖。我们甚至可以找到五边形（非正则的）原型砖，例如开罗五边形铺砌，因其被用作开罗（埃及）的铺路图案而得名，见图（3）。

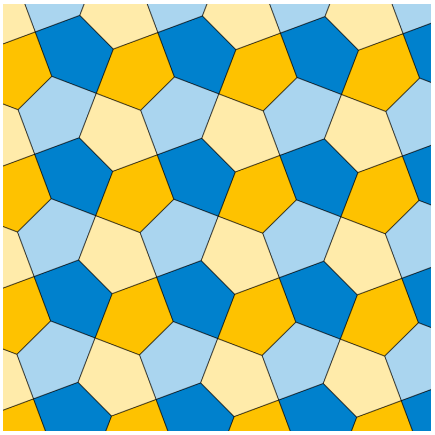


图 3. 开罗五边形铺砌。注意，这并非正则铺砌，而是 $\mathbb{E}^2$的对称铺砌。

如上文已经提到的，我们将在第 §4 节介绍柏拉图立体。它们将在镶嵌理论中发挥重要作用，因为球面的若干正则镶嵌 $\mathbb{S}^2$ 都由它们产生。类似地，可以证明半正则柏拉图立体能够产生 $\mathbb{S}^2$的半正则镶嵌；一个例子见图（10）。最后，我们将在 §3 节看到，任意n–边形都可以作为双曲平面的正则镶嵌的原型砖。尽管这些结果多年前就已为人所知，双曲平面的半正则镶嵌直到最近才由 Datta-Gupta 在 [DG21]中进行研究。图（1）给出了双曲平面半正则镶嵌的一个例子。

1.4. **深入探讨**。 根据 [GS77], 镶嵌的数学理论本身相当基础，但蕴含着许多有趣的事实，并与数学的其他领域有着丰富的联系。欧几里得平面中的正则与半正则镶嵌为入门提供了绝佳的研究场景。上文中，我们通过观察哪些正多边形可以用作原型砖，以启发式方式基于逻辑推理介绍了它们。球面镶嵌和双曲镶嵌的理论则更加有趣，也更具挑战性。尤其是，要找出哪些多边形能够铺满球面或双曲平面已不再那么容易。粗略地说，这是因为球面几何和双曲几何都不局部等距于欧几里得几何。§1.2.1中的启发式方法 n高度依赖一条经典事实：欧几里得 $n-2$边形内角之和总是等于 $(n-2)\pi$，因此两个正 n边形在 $\mathbb{E}^2$ 中总是相似的。这些性质在非欧几何中却完全不成立。在球面几何和双曲几何中，两个正 n边形可能并不相似，其内角和也可能各不相同。因此，对于任意n，都可能存在多个（甚至无限多个）两两不相似的正 n边形。原则上，完全可能对每个 n都存在一个正 n边形原型砖；也就是说，存在一个能够铺砌球面或双曲平面的正 n边形。正如我们将在 §4 中看到的，球面镶嵌并非如此，但双曲平面镶嵌确实如此。

1.5. **本文结构**。 在第 §2 节中，我们将给出一个多边形在相应几何中成为原型砖的条件。第 §3 节是本节的核心部分。我们将介绍 三角群，即由三角形铺片构成的铺路的对称群，参见图（2）。正如我们将要看到的，任何正则镶嵌都可以通过将每个铺砌块划分为子铺砌块来进行细化。将任意铺砌块的中心与其顶点以及任意一条边的中点连接起来，就得到一种新的铺路，其原型砖为三角形。很容易验证，任意镶嵌的对称群 Γ 无非就是其三角剖分细化的对称群。值得注意的是，不同的镶嵌可能具有相同的对称群。例如，欧几里得平面中的三角形镶嵌和六边形镶嵌就是如此，这两种镶嵌在 §1.2.1 中有所描述。这两个铺砌互为对偶并非巧合。在第 §4 节中，我们将描述球面的正则镶嵌 $\mathbb{S}^2$。有趣的是，它们几乎都来源于柏拉图立体。

致谢。我谨此感谢 Prakruti Kalsaria 仔细审阅本文并提出意见。图片来源：大多数图片均直接取自网络。维基百科收录了内容十分丰富的双曲平面镶嵌目录，对应于不同的三角群。这些图片均已发布到公有领域。图（1）、（2）归功于 Parcly Taxel。图（3）归功于 David Eppstein。图（4）和（7）归功于 Tamfang。图（10）归功于 Tomruen。

2. 紧多边形的庞加莱定理

曲面就是二维拓扑流形。让我们从下面这个引出曲面上正则镶嵌研究的一般性引导问题开始。

> 给定一个多边形 $\mathcal{P}$ 和一个曲面 S，是否存在一种将 S 划分为互不重叠的全等铺砌块的方法，使每块都与 $\mathcal{P}$ 全等？

为了讨论“多边形”和“全等”等概念，首先需要在拓扑曲面上赋予黎曼度量 ds^2，这样距离、角和面积等概念才有意义。我们将这类曲面称为几何曲面。我们先简要回顾曲面几何。关于曲面几何的精彩介绍，读者可参阅 [Sti95]。

2.1. 单连通曲面的几何。从拓扑角度看，单连通曲面只有两种，按紧致性区分：球面是紧致的，而平面不是。在古典几何中，球面被视为三维欧几里得空间中的一个图形，类似于欧几里得平面中的圆。球面之所以备受关注，是因为它并非局部等距于平面。尤其是，球面的内蕴结构使其成为非欧几何的第一个例子。

球面几何。采用外在观点，2–维球面通常记作 $\mathbb{S}^2$，可以看作以下轨迹

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2-1=0 \right\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{2.1}$$

使用极坐标 $x = \sin\theta\cos\phi$、$y = \sin\theta\sin\phi$ 和 $z = \cos\theta$，$\mathbb{S}^2$ 上的通常圆度量可明确写为 $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$。赋予圆度量的 $\mathbb{S}^2$ 的等距变换群记作 $\mathrm{Iso}(\mathbb{S}^2)$，它与 $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ 同构。这种外在方法也使得我们可以非常简单地定义该几何中的直线。直线由大圆给出，也就是说，它们是 $\mathbb{S}^2$ 与一个经过 $\mathbb{R}^3$ 中原点的 2–维平面相交所得到的圆。

平面可以看作与 $\mathbb{R}^2$ 同胚的拓扑空间。尽管球面在微分同胚意义下只允许有一个黎曼度量共形类，见下文的基灵-霍普夫定理，但平面在微分同胚意义下实际上允许有两个非等价的黎曼度量共形类。用我们的术语来说，平面允许有两种非等距几何。

欧几里得几何。其中一种是众所周知的欧几里得几何，它由标准黎曼度量 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ 确定。欧几里得平面记作 $\mathbb{E}^2$，定义为 $\mathbb{R}^2$ 配备标准欧几里得度量，其等距变换群自然地同构于 $\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^2) \cong \mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$。

双曲几何。对于另一种几何，我们将范围限制在 $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$，称为上半平面。求出 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{H}^2$ 之间的一个显式同胚是常规练习。上半平面 $\mathbb{H}^2$ 配备黎曼度量 $ds^2 = y^{-2}(dx^2+dy^2)$，是双曲平面的一个模型。我们称之为“模型”，因为目前有多个双曲几何模型在使用，它们都同样有资格称为双曲平面。对于这个模型，其等距变换群同构于 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$，作用由莫比乌斯变换给出，如下所示

$$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}. \tag{2.2}$$

在这个模型中，双曲度量下的直线由与 $\partial\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\}$ 正交的射线和半圆构成。

另一个值得一提的模型是所谓的庞加莱圆盘 $\mathbb{D}^2$。它定义为 $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，并配备黎曼度量 $ds^2 = 4(1-|z|^2)^{-2}|dz|^2$。当然，这个模型与上半平面模型等价。注意，$\mathbb{H}^2$ 和 $\mathbb{D}^2$ 都是 $\mathbb{CP}^1$ ——黎曼球面——的真子集，而这两个模型之间的显式等距变换由映射 $j \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{CP}^1)$ 给出，定义如下：

$$j : \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2, \quad j(z) = \frac{iz+1}{z-1}.$$

对于第二种模型，双曲度量下的直线由直径和与 $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ 正交的半圆构成。很容易验证，$\mathbb{D}^2$ 的等距变换群由 $j\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})\,j^{-1}$ 给出。在本文中，我们将根据需要使用这两种模型。

注 2.1。 从历史角度来看，双曲平面源于人们对非欧几何平面的探索——一种具有无界直线的曲面；对于每条直线 ℓ 和每个点 $P \notin \ell$，都存在多条经过 P 且不与 ℓ 相交的直线。

欧几里得几何、球面几何和双曲几何通过其标量曲率加以区分，这是黎曼几何中的一个关键概念。对于曲面而言，标量曲率恰好是高斯曲率的两倍，而高斯曲率是赋予黎曼度量的曲面的一个内在不变量。赋予圆度量的球面具有标量曲率 +1，欧几里得平面 $\mathbb{E}^2$ 的标量曲率为 0，而双曲平面的任意模型都具有标量曲率 −1。高斯提出的所谓绝妙定理表明，标量曲率在局部等距变换下保持不变，因此我们可以推 deduce 出这三种几何彼此并不同构。

在这三种几何中的任意一种里，任意两个不同的点都可以由一条长度最小的路径连接，这类路径通常称为线段或测地线。在这些几何中，事实证明任意线段都可以无限延伸。这一关键性质并非一般黎曼流形所必具，使得欧几里得几何、球面几何和双曲几何完备。根据霍普夫–里诺定理，这等价于说，S 中的任意闭有界子集都是紧致的。下面是单连通曲面上的一个不完备黎曼度量的例子：把球面看作 $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$，也就是 $\mathbb{S}^2$的一点紧化。 $\mathbb{S}^2$ 上的圆度量限制在 $\mathbb{R}^2$ 上，得到一个现在并不完备的黎曼度量。这尤其说明，如果我们从假设中去掉完备性，那么 $\mathbb{R}^2$还可以承载其他几何结构。

下面的定理指出，在二维中，除度量可能经过缩放外，欧几里得几何、球面几何和双曲几何是仅有的具有常数标量曲率的完备几何。

基灵-霍普夫定理。 配备了具有常数标量曲率的完备黎曼度量的单连通曲面，等距于带有圆度量的2维球面、带有欧几里得度量的平面，或带有双曲度量的上半平面。

下文中，多边形 指 $\mathbb{E}^2$、 $\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$中的一个有界区域及其边界回路，该区域由有限条首尾相连、构成封闭多边形链的直线段围成。在镶嵌中，多边形通常称为瓦片 ，我们也沿用这一惯例。对于正整数p和q，q正p–边形指有p 条边且每个内角大小为 $\frac{2\pi}{q}$ 的正多边形。我们已在引言中以最一般的形式介绍了镶嵌的概念。下一节将给出镶嵌的群论表述。

2.2. 从对称镶嵌到群。设 S 是 $\mathbb{E}^2$、 $\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$中的任意一个。设 $\mathcal{T}$ 是一个对称镶嵌，也就是说，它是 S 的一个镶嵌，并且对于任意一对铺砌块 t 和 τ，都存在 $g \in G = \mathrm{Iso}(S)$，使得 $g \cdot t = \tau$，且 g 将整个 $\mathcal{T}$ 映到自身。对于镶嵌 $\mathcal{T}$，我们用 Sym($\mathcal{T}$) 表示其对称群。原则上，给定两个铺砌块 t 和 τ，可能有多个对称变换将第一个铺砌块映到第二个铺砌块。设 g、 $h \in \mathrm{Iso}(S)$ 是两个等距变换，满足 $g \cdot t = \tau$，且 $h \cdot t = \tau$。由于每个对称变换当然都是可逆变换，也就是说，$t = g^{-1} \cdot \tau$，因此 $g^{-1}h \cdot t = t$，这意味着 $g^{-1}h$ 固定 t。对于任意铺砌块 t，我们用 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t)$ 表示 t 的稳定子；也就是说，它是 Sym($\mathcal{T}$) 中所有固定 t 的对称变换所构成的子群。从几何上说，$\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t)$ 可以视为 t 的对称群。由于假定 $\mathcal{T}$ 是对称的，任意一对铺砌块都全等，因此它们的对称群都相同。另一方面，由于两个铺砌块位于 S 上的不同位置，它们各自的稳定子并非同一个群，但彼此同构。

引理 2.2. 设 $\mathcal{T}$ 是几何曲面 S 的一个对称镶嵌，且 t 和 τ 是两个瓦片。那么

$$\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t) \cong \mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(\tau). \tag{2.3}$$

证明。 设 $g \in \mathrm{Sym}(\mathcal{T})$，使得 $g \cdot t = \tau$。设 $h \in \mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t)$，则 $ghg^{-1} \in \mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(\tau)$。由此可直接推出 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t) \cong \mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(\tau)$，证毕。□

尽管 Sym($\mathcal{T}$) 可能是一个无限群，但任意铺砌块 t 的稳定子 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t)$ 总是有限的。令 $n \geq 1$为其基数——注意，该基数不依赖于 t。可将 t 有限细分为有限多个子瓦片，例如 $s_1, \ldots, s_n$，使得对于任意 s_i和 s_j，都存在唯一一个稳定子群 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(t)$ 中的对称变换 $g_{ij} \in$将它们联系起来，也就是说 $s_i = g_{ij} \cdot s_j$。对于任意其他铺砌块 $\tau = h \cdot t$，也存在定义良好的细分 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$，其中 $\sigma_i = h \cdot s_i$；对于任意 σ_i和 σ_j，都存在唯一一个稳定子群 $\mathrm{Stab}_{\mathcal{T}}(\tau)$ 中的对称变换 $h\, g_{ij} h^{-1} \in$将它们联系起来。因此，对称镶嵌 $\mathcal{T}$ 总是可以细分为定义良好的子瓦片镶嵌。由于这些子瓦片是在原铺砌块内选取的，且恰好只有一个 $g \in \mathrm{Sym}(\mathcal{T})$ 能将其中一个子瓦片映射到另一个，因此细分镶嵌中的任意两个子瓦片也具有同样的性质。

这样的细分镶嵌能更清楚地展现对称群 Sym($\mathcal{T}$)。事实上，细分镶嵌中的任意铺砌块都可视为一个基本铺砌块——我们将会看到，这一术语绝非随意使用——因为它包含了 Sym($\mathcal{T}$)-轨道中的一个代表元，而且每个 Sym($\mathcal{T}$)-轨道在基本铺砌块内部至多有一个代表元。一旦选定一个基本铺砌块，例如 t_o，就能在几何曲面 S 上的镶嵌这类几何对象与其等距变换群 $\mathrm{Iso}^+(S)$ 的一个子群之间建立自然对应关系，具体如下

$$\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{Sym}(\mathcal{T}) \tag{2.4}$$

将t 映射到$g \in \mathrm{Sym}(\mathcal{T})$中的唯一元素，使得$g \cdot t_o = t$。

例 2.3。 三角形铺砌与由正六边形组成的铺砌具有相同的对称群。事实上：如果我们通过对每个面进行重心细分来细化由正三角形组成的欧几里得平面的镶嵌，就会得到一个新的正则镶嵌，即 $\mathcal{T}$，它由角度为 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 的直角三角形组成。另一方面，后者也可以通过细化由正六边形组成的镶嵌得到。 $\mathcal{T}$ 的对称群记为 $\Delta(2,3,6)$。不难证明，任何保持 $\mathcal{T}$ 的等距变换 $\Delta(2,3,6)$也保持由三角形组成的正则镶嵌以及由正六边形组成的正则镶嵌。

注 2.4. 对于对称镶嵌，可以通过将子多边形交替涂成黑色和白色，得到这种镶嵌的一种实用改进。从图示上看，整个镶嵌就像一张可能无限延伸的棋盘，只不过瓦片不再是正方形，而是一般的多边形。每种情况下，颜色都在原始铺砌块的一个副本上突出显示。保持这种着色不变的镶嵌对称变换，恰好是保向对称；而交换颜色的对称变换则对应于反向对称。

对于镶嵌 $\mathcal{T}$，我们确定了一个细分镶嵌，使得其中任意一对瓦片都由 Sym($\mathcal{T}$) 中唯一的对称变换关联。这个细分镶嵌的特点是，每块瓦片都不再具有新的对称变换。若 $\Gamma < \mathrm{Sym}(\mathcal{T})$ 是 $[\Gamma, \mathrm{Sym}(\mathcal{T})]$ 的有限指数子群，其陪集为 Sym($\mathcal{T}$) γ_1、.....、Sym($\mathcal{T}$) γ_n，且 t_o 是 Sym($\mathcal{T}$) 的一个基本铺砌块，那么 $\gamma_1 \cdot t_o \cup \cdots \cup \gamma_n \cdot t_o$ 就是 Γ 的一个基本铺砌块。就此而言，最重要的例子如下所示

命题 2.5。 设 $\mathcal{T}$ 是 S 的一个对称镶嵌，其对称群为Sym($\mathcal{T}$) ，基本铺砌块为 t_o。假设Sym($\mathcal{T}$)包含一个反向保向的元素 γ，那么 $t_o \cup \gamma \cdot t_o$ 是保向对称子群 $\mathrm{Sym}^+(\mathcal{T})$ 的基本铺砌块。此外，$\gamma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{T})$可以选取得使 $t_o \cup \gamma \cdot t_o$ 成为一个多边形，也就是$\mathrm{Sym}^+(\mathcal{T})$的基本铺砌块。

鉴于这一命题，从现在起我们将把讨论限定在保向等距变换群。 n-保向等距变换。

2.3. **基本多边形**。 本小节旨在确定一个多边形 $\mathcal{P}$ 能否成为对称镶嵌 $\mathcal{T}$的基本铺砌块。在本小节中，设S 为三种经典几何 $\mathbb{E}^2$、 $\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$之一。首先来看下面的

定义 2.6. 设 S为一个几何曲面， $\Gamma < \mathrm{Iso}(S)$ 为一个作用在 S 上的群。若对每个紧集 $K \subset S$，除有限多个 $\gamma \in \Gamma$ 外，均有 $K \cap \gamma \cdot K = \phi$，则称 Γ 的作用是适当不连续的。

定义 2.7 （基本域）.设 $\Gamma < \mathrm{Iso}^+(S)$ 是一个在 S 上适当不连续地作用的群。闭子集 $\Omega \subset S$ 称为 S 的一个基本域，如果

1. $\mathrm{int}(\Omega)$ 是一个开域；2. 存在一个基本集 F，使得 $\mathrm{int}(\Omega) \subset F \subset \Omega$，其中， Γ 的一个基本集是指在 S 的每条轨道中恰好包含一个点的集合。

We s称 Ω 及其在 Γ 下的像镶嵌 S。事实上，如果 Ω 是某个群的一个基本域， Γ 作用在 S 上，则对所有 $\gamma \neq 1$ 都有 $\mathrm{int}(\Omega) \cap \gamma(\mathrm{int}(\Omega)) = \phi$，并且

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\Omega) = S. \tag{2.5}$$

根据这些定义，我们现在可以陈述以下显而易见的推论 e.

命题 2.8. 对于 S 上的对称镶嵌 $\mathcal{T}$，其对称群 Sym($\mathcal{T}$) 在 S 上恰当地不连续作用。

现在我们确定多边形成为对称变换镶嵌中的基本铺砌块所需的必要和充分条件。 $\mathcal{P}$ 根据命题 2.5 我们将把讨论限制在保向对称群中。

2.3.1. 边与角条件。如果紧多边形 $\mathcal{P}$ 是 S 上保向等距变换群 Γ 的基本铺砌块，则有如下结论

> i. 对于 $\mathcal{P}$ 的每条边 s，恰好存在 $\mathcal{P}$ 的另一条边 s'，其形式为 $s' = \gamma \cdot s$，其中 $\gamma \in \Gamma$ —— 这些元素被称为 $\mathcal{P}$ 的边配对变换；ii. 如果每条边 s 都与对应的 s' 进行识别，那么由此识别出的每组顶点都对应于 $\mathcal{P}$ 的一组角，其角度和为 $\frac{2\pi}{p}$，其中某个 $p \in \mathbb{Z}^+$。

Let 让我们说明这些条件为何成立，从而解释它们为何是必要条件。我们将通过以下方式证明： in with 证明

条件 i 的必要性。设 $\gamma_1 \cdot \mathcal{P}$、.....、$\gamma_n \cdot \mathcal{P}$ 是与 $\mathcal{P}$ 共享一条边的铺砌块。设 s_i 是 $\mathcal{P}$ 与 $\gamma_i \cdot \mathcal{P}$ 共享的边。那么，很容易观察到，$s_i' = \gamma_i^{-1} \cdot s_i$ 由 $\gamma_i^{-1} \cdot \mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}$ 共享。因此，s_i' 也是 $\mathcal{P}$ 的一条边。完全可能出现 $s_i = s_i'$ 的情况；在这种情况下，$\gamma_i = \gamma_i^{-1}$ 意味着 γ_i 是一个二阶旋转，因为它是保持方向的等距变换。每当出现这种情况时，s_i 的中点都由 γ_i 固定，因此可以将其视为 $\mathcal{P}$ 的一个新顶点，而 s_i 被分成两个子线段，映射 γ_i 将它们交换。接下来还需证明，对于任意 s_i，只有一个 s_i'。如果情况并非如此，那么 $\mathcal{P}$ 的内部将有两个点属于同一个 Γ-轨道。然而，这与 $\mathcal{P}$ 是基本铺砌块这一事实相矛盾。□

条件 ii 的必要性。对于多边形 $\mathcal{P}$，设 $\{\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n\}$ 是其顶点集合。当且仅当存在一个映射 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $\gamma(\mathrm{v}_i) = \mathrm{v}_j$ 时，两个顶点 v_i 和 v_j 属于同一个顶点循环。很容易验证，两个循环要么不相交，要么完全相同。设 $\{\mathrm{v}_{i_1}, \dots, \mathrm{v}_{i_k}\}$ 是一个顶点循环，并假设 $\mathrm{v}_{i_1}, \dots, \mathrm{v}_{i_k}$ 是由边配对变换诱导的角的次序。那么，如果 $\mathrm{v} = \gamma_h(\mathrm{v}_{i_h})$ 是任意一个这样的顶点在 $\gamma_h \in \Gamma$ 下的像，则在 v 处相交的瓦片的角，正好是 $\mathrm{v}_{i_1}, \dots, \mathrm{v}_{i_k}$ 处各角在相同循环次序下的像。v 处的角度和 2π 是 $\mathrm{v}_{i_1}, \dots, \mathrm{v}_{i_k}$ 处各角的角度和的整数倍。结论得证。□

我们可以预期，满足边与角条件的多边形 $\mathcal{P}$ 总能用来铺砌其所属的曲面 $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$，而这正是庞加莱定理所述的内容。

2.3.2. 庞加莱定理。我们的目标是证明，边与角条件对于紧多边形成为基本多边形也具有充分性。设 $\mathcal{P}$ 是 S 中的一个给定多边形，其中 S 等于 $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$，并设 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ 是 $\mathrm{Iso}^+(S)$中的一组等距变换，它们实现了边的配对 $s_i \mapsto \gamma_i \cdot s_i$。我们将证明，$\mathcal{P}$ 是群 $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$的基本区域。换句话说，我们将证明，$\mathcal{P}$镶嵌$S$，且 Γ 构成此类镶嵌的对称群。

对于这样的多边形 $\mathcal{P}$，核心思路是取一组铺砌块 $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$，每一块都与 $\mathcal{P}$ 全等，并以 Γ 的元素为标签。令 t_1 为标记为 $1 \in \Gamma$ 的（唯一）铺砌块。这样的铺砌块将作为接下来

> **构造：** 对每个 $\gamma \in \Gamma$，令 t_γ 为 t_1 的一个副本。注意，$\gamma : t_1 \longrightarrow t_\gamma$ 给出了 t_1 与 t_γ 之间的一个等距变换。我们给 t_γ 的边标上标签 s_i，这些标签与它们通过 γ 在 t_1 中的原像所带的标签相同。令 Σ 为由这些铺砌块构成的曲面：将 t_γ 的边 s_i' 与铺砌块 $t_{\gamma\gamma_i}$ 的边 s_i 识别，其中 γ_i 将 s_i 与 s_i' 按 $\gamma_i(s_i) = s_i'$ 对应起来。

注意，这尤其确保了$t_{\gamma\gamma_i}$ 与 t_γ 相邻，正如 t_{γ_i} 与 t_1 相邻一样。现在我们的目标是证明 $\Sigma = S$，其中 S 等于 $\mathbb{S}^2$、$\mathbb{E}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$，而 $\mathcal{P}$ 属于其中之一。我们从以下内容开始

命题2.9。 Σ 是一个完备的几何曲面。

证明。首先，需要证明 Σ 是一个几何曲面。只需证明 Σ 是一个曲面，因为全局几何由每个铺砌块的局部几何决定。显然，$\gamma \cdot \mathcal{P}$ 内部的任意一点都有一个开邻域，该邻域与 $\mathbb{R}^2$中的开球同胚。此外，由于 $\mathcal{P}$ 的边是成对识别的，任意一条边的内点也都有圆盘邻域。不过，要证明顶点也有与 $\mathbb{R}^2$ 中的开球同胚的开邻域，就不那么显然了，需要更详细的论证。

令 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 为 $\mathcal{P}$的一个顶点循环。这意味着这些顶点由一系列循环的边配对$g_{i_1}, \dots, g_{i_k}$关联起来。令 θ_i 表示顶点v_i的大小。由于 $\mathcal{P}$ 被假定满足角度条件，因此总和 $\theta_1 + \cdots + \theta_k$ 等于 $2\pi/p$，其中$p \in \mathbb{Z}^+$。令$r_i(v_i)$表示以顶点v_i为中心、角度为 θ_i的旋转，方向为从$s'_{i_{j-1}}$ 到s^{i_j}。我们有

$$g_{i_k}\, r_k(v_k) \cdot \cdots \cdot g_{i_2}\, r_2(v_2)\, g_{i_1}\, r_1(v_1) = \mathrm{Id} \tag{2.6}$$

因为左侧的等距变换是 s^{i_k} 上的恒等映射。此外，可以观察到

$$r_2(v_2) = g_{i_1}\, r_2(v_1)\, g_{i_1}^{-1} \tag{2.7}$$

因为 g_{i_1} 将 v_1 映射到 v_2。将（2.7）代入（2.6），得到

$$g_{i_k}\, r_k(v_k) \cdot \cdots \cdot g_{i_2}\, g_{i_1}\, r_2(v_1)\, r_1(v_1) = \mathrm{Id}. \tag{2.8}$$

同样地，可以观察到

$$r_3(v_3)\, g_{i_2}\, g_{i_1} = g_{i_2} g_{i_1} r_3(v_1) \tag{2.9}$$

然后，将后者代入（2.8），得到

$$g_{i_k}\, r_k(v_k) \cdot \cdots \cdot g_{i_3}\, g_{i_2}\, g_{i_1}\, r_3(v_1)\, r_2(v_1)\, r_1(v_1) = \mathrm{Id}. \tag{2.10}$$

重复同样的过程k 次，最终得到

$$g_{i_k} \cdot \cdots \cdot g_{i_1} \cdot r_k(v_1) \cdot \cdots \cdot r_1(v_1) = \mathrm{Id}. \tag{2.11}$$

注意，$r_k(v_1) \cdot \cdots \cdot r_1(v_1)$是绕$v_1$ 旋转 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 2\pi/p$ 角的旋转，因此$g_{i_k} \cdot \cdots \cdot g_{i_1}$ 是绕同一顶点旋转 $2\pi/p$角。由此可得 $(g_{i_k} \cdot \cdots \cdot g_{i_1})^p = \mathrm{Id}$。因此， Σ 中与顶点循环 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ 对应的顶点处的角序列，恰好经过p 次循环后闭合；也就是说，此时角度和为 2π，正如所要求的那样。

剩下要证明 Σ 是完备的。很容易证明，任意闭有界子集$K \subset \Sigma$都包含在有限个铺砌块的并集中，也就是说，包含在有限多个我们的多边形 $\mathcal{P}$的副本中。由于这样的并集是紧致的，且K 是闭集，因此我们推得K 也是紧致的。因此， Σ 如所需般完备。□

现在我们可以证明

庞加莱定理。 满足边与角条件的紧多边形 $\mathcal{P}$ 是由其边配对变换生成的群 Γ 的基本区域 $\mathcal{P}$。

证明。 设 $\mathcal{P}$ 是一个满足边角条件的多边形，并按上述方式构造 Σ 。根据命题 2.9，我们已经知道 Σ 是完备的。然而，我们仍不知道它是否是单连通的。

首先假设 $\pi_1(\Sigma) = \{1\}$——我们稍后将证明这总是成立的。若此条件成立， $\Sigma = S$ 以及由多边形 t_γ 铺成的 Σ 镶嵌就是曲面 S的镶嵌；也就是说，它是包含原多边形 $\mathcal{P}$的曲面之一： $\mathbb{R}^2$、 $\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$ 。我们将与 $1 \in \Gamma$对应的唯一铺砌块 t_1, 简单记作 $\mathcal{P}$。我们的目标是证明 $\gamma \cdot \mathcal{P} = t_\gamma$。这可以通过对 k作归纳法来证明，其中

$$\gamma = \gamma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot \cdots \cdot \gamma_{i_k}^{\varepsilon_k} \tag{2.12}$$

以及每个 $\varepsilon_i = \pm 1$。当 $k = 1$ 时，断言成立，因为根据定义， $\mathcal{P}$ 的邻接瓦片 $\gamma_i^{\pm 1} \cdot \mathcal{P}$ 恰好是 $t_{\gamma_i^{\pm 1}}$。现在假设 $\gamma' \cdot \mathcal{P} = t_{\gamma'}$，其中 γ 是由 $k-1$ 个生成元或其逆元相乘得到的。根据 Σ 的定义， $t_{\gamma'\gamma_i^{\pm 1}}$ 与 $t_{\gamma'}$ 邻接，当且仅当 $t_{\gamma_i^{\pm 1}}$ 与 t_1 邻接。另一方面，根据归纳假设，$t_\gamma = \gamma \cdot \mathcal{P}$ 和 $t_{\gamma_i^{\pm 1}} = \gamma_i^{\pm 1} \cdot \mathcal{P}$。由此我们推得

$$t_{\gamma\gamma_i^{\pm 1}} = \gamma \cdot t_{\gamma_i^{\pm 1}} = \gamma\, \gamma_i^{\pm 1} \cdot \mathcal{P} \tag{2.13}$$

归纳法至此完成。因此，若 $\pi_1(\Sigma) = \{1\}$，则铺砌 Σ 的多边形恰好是多边形 t_γ，即 $\gamma \cdot \mathcal{P}$，其中 $\gamma \in \Gamma$。因此， $\mathcal{P}$ 是 Γ 的一个基本区域，正如所需。

现在我们不再假设 $\pi_1(\Sigma) = \{1\}$。根据经典覆盖理论， Σ 的万有覆盖要么是 $S = \mathbb{E}^2$ ，要么是 $S = \mathbb{H}^2$。考虑通过提升 Σ 的镶嵌而得到的 S 的镶嵌。这里的核心思路是证明 S 中每个铺砌块 $t_\gamma \subset \Sigma$ 上方恰好有一个多边形，从而证明 $\pi_1(\Sigma) = \{1\}$，进而得到 $\Sigma = S$ 。令 t_1 为 Σ 上镶嵌的基本铺砌块，并令 $\mathcal{P}$ 和 $\gamma \cdot \mathcal{P}$ 为它的两个不同提升。对于一点 $p \in \mathcal{P}$，令 $\gamma(p) \in \gamma \cdot \mathcal{P}$，并令 $c : [0,1] \to S$ 为一条连接它们的路径。在 S 中，路径 c 通过有限次穿过对应于 $\gamma = \gamma^{\varepsilon_1} i_1 \cdot \cdots \cdot \gamma_k^{\varepsilon_k} i$ 的边，从 $\gamma \cdot \mathcal{P}$ 连接到 $\mathcal{P}$。路径 c 投影为 Σ 中的一个闭合回路，记作 c，因为 $\mathcal{P}$ 和 $\gamma \cdot \mathcal{P}$ 是 t_1 的两个不同提升。我们注意到，根据构造，$^-$c 在 Σ 中穿过边的次序与 c 在 S 中穿过边的次序一致。由于 c 是闭合回路，因此 $\gamma = 1$，从而 t_1 上方只有一个与 $\mathcal{P}$ 对应的瓦片。由于任何瓦片都可以作为基本铺砌块（在对称镶嵌中，瓦片是不可区分的），所以结论对任意瓦片都成立。因此 $\pi_1(\Sigma) = \{1\}$，正如所需。□

由此可直接得到一个对称镶嵌 $\mathcal{T}$，它以S 为底， $\mathcal{P}$ 为原型砖，而群 Γ则是 $\mathcal{T}$ 的对称群。现在我们将重点讨论正则镶嵌，它们是对称多边形中特殊而有趣的例子。

2.4. 正则镶嵌。 S 上的正则镶嵌 $\mathcal{T}$ 是一种对称镶嵌，其中每个铺砌块都是正多边形。考虑一种二维镶嵌，每个多边形顶点处都有 q 个正p边形。回想一下，在欧几里得平面中，p–边形的内角和等于 $(p-2)\pi$。由于每个顶点处的角为 $2\pi/q$，在欧几里得平面中

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi=\frac{2\pi}{q}. \tag{2.14}$$

这等价于

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}. \tag{2.15}$$

so

$$(p-2)(q-2)=4. \tag{2.16}$$

不难验证，唯一可能的数对 $\{p、q\}$ 是 $\{3,6\}$、$\{4,4\}$ 和 $\{6,3\}$，分别对应于 $\mathbb{E}^2$的三角形镶嵌、正方形镶嵌和六边形镶嵌。值得注意的是，数对 $\{3,6\}$ 和 $\{6,3\}$ 的对称性反映了三角形镶嵌与六边形镶嵌互为对偶这一事实。另一方面，数对 $\{4,4\}$ 是对称的；事实上，正方形镶嵌是自对偶的。这些数对 $\{p、q\}$ 连同当前记法，在文献中称为施莱夫利符号。

对于球面 $\mathbb{S}^2$ 上的一个q 正则p边形，其内角和严格大于（$p-2$）π。这是因为一个经典事实：球面三角形的内角和总是大于 π。因此，对于球面上的正则p边形

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi<\frac{2\pi}{q}. \tag{2.17}$$

通过上述推理，这个方程等价于 to

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}, \tag{2.18}$$

因此

$$(p-2)(q-2)<4. \tag{2.19}$$

在这种情况下，解有无穷多个；事实上，对于每个 $\mathrm{n}\geq 2$，数对 $\{2,\mathrm{n}\}$ 都满足（2.18）。球面上的月牙形区域是由两条在对跖点相交的大圆半圆围成的区域。“月牙形区域”一词源于“luna”，这是拉丁语中“月亮”的意思。对于任意 $\mathrm{n}\geq 2$，n 边多月形多面体是将球面镶嵌成 n 个月牙形区域的图形，这些区域都共享同一对极对顶点。n 边多月形多面体对应施莱夫利符号 $\{2,\mathrm{n}\}$。根据对称性，对于任意 $\mathrm{n}\geq 2$，任意数对 $\{\mathrm{n},2\}$ 也都是方程（2.18）的解。在这种情况下，我们得到二面体，也就是具有两个面的多面体，且这两个面共享同样的 n 条边。作为一种球面铺砌，正二面体是由两个 n 边形面覆盖球面的多面体，每个面都是半球，顶点则等距分布在一条大圆上。

如果我们将范围限制为 $p、q\geq 3$，那么解只有有限多个。事实上，只有五个解，分别对应于施莱夫利符号 $\{3,3\}$、$\{3,4\}$、$\{4,3\}$、$\{3,5\}$ 和 $\{5,3\}$。其中有一些对称的成对解，这再次表明它们绝非偶然。这些对 $\{3,4\}$ 和 $\{4,3\}$分别对应由立方体和八面体确定的镶嵌——我们将在第 §4节看到，柏拉图立体如何确定一个球面镶嵌。同样，这些对 $\{3,5\}$ 和 $\{5,3\}$ 分别对应由二十面体和十二面体确定的镶嵌。剩下的一对 $\{3,3\}$ 是由四面体产生的球面铺砌的施莱夫利符号。我们将在第 §4节讨论球面铺砌与柏拉图立体之间的联系。

最后，我们考察球面上的正q 正p边形 $\mathbb{H}^2$，其内角和严格小于 $(p-2)\pi$。在这种情况下，这是由经典事实得出的：双曲三角形的内角和总是小于 π。对于双曲平面上的正p边形

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)\pi>\frac{2\pi}{q}. \tag{2.20}$$

按照上述推理，这个方程等价于

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}, \tag{2.21}$$

因此

$$(p-2)(q-2)>4. \tag{2.22}$$

即使在这种情况下，方程（2.21）也有无穷多个解。事实上，以下结论成立。

命题 2.10。对于满足不等式 $\{p、q\}$ 的任意一对正整数（2.21），在 $\mathbb{H}^2$中存在一个 q-正则 p 边形。特别地，任意这样的多边形都是 $\mathbb{H}^2$的正则镶嵌的原型砖。

图（2）展示了双曲平面由直角五边形构成的镶嵌示例。同一铺砌的另一种视角可见于下图中。ff。

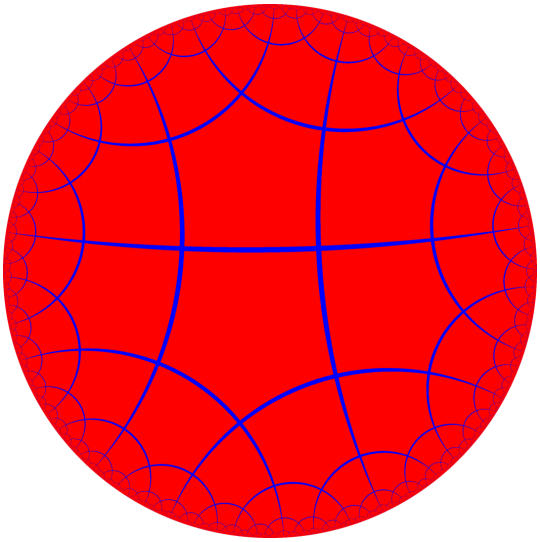


图 4。庞加莱圆盘的三角形镶嵌，其中每个铺砌块都是一个双曲直角五边形。

证明。设p、q 是一对满足不等式（2.21）的整数。为了实现一个q-正则双曲p-边形，我们最好使用庞加莱圆盘。考虑p 条从原点r_k出发且$k = 1, \ldots\ldots, p$，并定义为 $0 \in \mathbb{D}^2$ 的射线

$$r_k = \left\{ \rho \exp\left(\frac{2\pi i k}{p}\right) \;\middle|\; \rho \in [0,1) \right\}. \tag{2.23}$$

固定一个值 $\rho \in [0,1)$，并定义v_k 为r_k 上距离原点 ρ 的唯一点。令 $\mathcal{P}_\rho$为 $\mathbb{D}^2$ 中的多边形，其顶点为$v_1, \ldots、 v_p$。根据构造，这是一个正双曲p边形。令 $\alpha(\rho)$表示 $\mathcal{P}_\rho$ 的任一内角的大小——由于它是正多边形，所有内角大小都相同。容易验证函数 $\rho \longmapsto \alpha(\rho)$是连续的，并且

$$\lim_{\rho \to 1^-} \alpha(\rho) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\rho \to 0^+} \alpha(\rho) = \left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi. \tag{2.24}$$

实际上，我们将 $\mathcal{P}_\rho$ 的双曲面积明确地写成 ρ的函数

$$\mathcal{A}_{\mathbb{D}^2}\left(\mathcal{P}_\rho\right) = (p-2)\pi - p\,\alpha(\rho). \tag{2.25}$$

注意，作为 ρ的函数，它在开区间 $(0,1)$上连续。当 $\rho \mapsto 1^-$时，在极限情况下，$\mathcal{P}_\rho$ 是一个理想正多边形；也就是说，所有顶点都位于无穷远处。在这种情况下，双曲面积达到最大值，即 $(p-2)\pi$，且内角之和等于 0。因此，第一个极限成立。当 $\rho \to 0^+$时，双曲面积 $\mathcal{A}_{\mathbb{D}^2}\left(\mathcal{P}_\rho\right)$趋于 0，因此第二个极限成立。

因此，映射 $\rho \longmapsto \alpha$（ρ）是单调递减的，并且对于任意值 $\theta \in \left(0, {}_{p-2\,p}\ \pi\right)$，存在唯一的 ρ_o 使得 α（ρ_o）。 $= \theta$由于有序对 p、q 满足不等式（2.21），因此可得

$$\frac{2\pi}{q} < \left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi; \tag{2.26}$$

特别地，存在 ρ_o 使得 $\alpha(\rho_o) = {}^{2\pi}{}_q$。因此，$\mathcal{P}_{\rho_o}$ 就是所需的 q 正则双曲 p–边形。最后，注意到 $\mathcal{P}_{\rho_o}$ 满足边与角条件，因此第二个结论可由庞加莱定理得出。□

3. 三角形镶嵌与三角群

在本节中，设 S 是 $\mathbb{E}^2$、$\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$ 中的任意一个。S 的三角形镶嵌是一种对称镶嵌 $\mathcal{T}$，其原型砖是三角形 T。三角群是由三角形 T 的各边上的反射生成的群 $\Delta < \mathrm{Iso}(S)$。正如我们将看到的，每个三角群都表现为由三角形砖铺成的欧几里得平面、球面或双曲平面上的某个镶嵌 $\mathcal{T}$ 的对称群 $\mathrm{Sym}(\mathcal{T})$。这些三角形中的每一个于是都是一个原型砖，即 $\mathrm{Sym}(\mathcal{T})$ 作用的基本域。关于三角群的优秀参考资料包括 Magnus [Mag74] 和 Ratcliffe [Rat94]。

3.1. **三角形铺片**。满足边与角条件的最简单多边形是由三角形加倍得到的四边形。更准确地说，对于一个三角形 T，设 T' 是沿其一条边反射 T 得到的三角形。根据构造，T 与 T' 有一条公共边；因此所得图形 $T \cup T'$ 是一个四边形 Q。我们称 Q 是由 T 加倍得到的。当然，Q 很大程度上取决于我们沿 T 的哪条边进行反射。

定义 3.1. 如果一个三角形 T 的内角具有 π/p、π/q 和 π/r 的形式，其中 p、q、$r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 是某些正整数，则称其具有**有理角**。按照惯例，也允许 ∞ 作为 p、q、r 的可能取值，并且它们可以全部取该值。如果一个三角形 T 具有 π/p、π/q 和 π/r 形式的有理角，则称其为 (p, q, r)-三角形。

注 3.2。只要这些整数中至少有一个是 ∞，三角形 T 就不再是 S 的紧致子集，相应的顶点位于“无穷远处”。位于无穷远处的顶点通常称为**理想顶点**，我们约定 $\frac{\pi}{\infty} = 0$，也就是说，每个理想顶点的大小都是 0。请注意，在球面几何中这永远不会发生，因为 $\mathbb{S}^2$ 的任意闭子集都是紧致的。

S 的一个以四边形为原型砖的对称镶嵌来自一个镶嵌，记为 $\mathcal{T}$，它由关于三角形各边的反射生成。更确切地说，四边形镶嵌可以看作与 $\mathrm{Sym}(\mathcal{T})$ 的指数为二的子群相对应的铺砌，参见命题 2.5。存在性问题可通过依赖于角 π/p、π/q 和 π/r 的值的论证来解决。可以证明，如果三角形 T 是有理的，那么通过将 T 加倍得到的四边形 Q 满足边角条件。庞加莱定理保证了以 Q 为原型砖的对称镶嵌的存在。在欧几里得几何中，任意三角形的内角和等于 π，这是一个经典事实。这意味着，一个内角为 π/p、π/q 和 π/r 的有理三角形满足方程

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} = \pi \qquad \text{that is} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1. \tag{3.1}$$

另一方面，再次回忆一下，任意球面三角形的内角和都大于 π，而任意双曲三角形的内角和都小于 π。因此，我们有与（3.1）类似的关系

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} > \pi \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \tag{3.2}$$

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} < \pi \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \tag{3.3}$$

读者可能会注意到，我们已经在（2.15）、（2.18）和（2.21）中见过类似的方程，不过当时 $r = 2$ 是一个非常特殊的情形。显然，这绝非巧合。事实上，一个 q-正则 p边形 $\mathcal{P}$ 可以细分为 $2p$ 个内角分别为 π/p、π/q 和 $\pi/2$ 的三角形。换言之，我们上面看到的任何正则镶嵌都可以细分为直角三角形。我们将此量定义为

$$\chi(p, q, r) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1\ . \tag{3.4}$$

根据量 $\chi(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 是正、零还是负，三元组 $(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 分别称为球面、欧几里得或双曲三元组。不难验证，球面三元组为 $(2, 3, 3)$、$(2, 3, 4)$、$(2, 3, 5)$ 和 $(2, 2, \mathrm{n})$，其中 $\mathrm{n} \geq 2$。在第4节中，我们将看到这些三元组与球面镶嵌对应的施莱夫利符号之间的关系。欧几里得三元组为 $(3, 3, 3)$、$(2, 3, 6)$、$(2, 4, 4)$，以及一个由 $(2, 2, \infty)$ 给出的特殊三元组。后一三元组对应于将 $\mathbb{E}^2$ 铺砌成无限半条带。这些半条带是非紧三角形，具有两个直角和一个理想顶点。其他三元组则对应于用紧三角形铺砌 $\mathbb{E}^2$。例如，$(3, 3, 3)$ 铺砌是通过将 $\mathbb{E}^2$ 三角剖分为等边三角形得到的。$(2, 3, 6)$ 铺砌同样是通过将 $\mathbb{E}^2$ 三角剖分为等边三角形得到的，其中每个等边三角形又被分成 6 个直角三角形。将一个正六边形分成 12 个直角三角形，也能得到相同的铺砌。最后，$(2, 4, 4)$ 则由正方形镶嵌分割成 8 个等腰直角三角形得到。所有其他三元组都是双曲三元组。

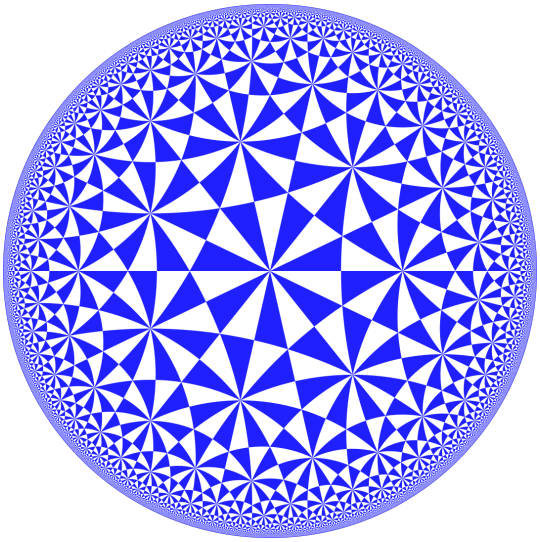


图 5. 庞加莱圆盘上的三角形镶嵌，其中每个铺砌块都与一个内角大小为 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}\right)$ 的双曲三角形等距

– – –

例 3.3. 最重要的三元组无疑是双曲三元组 (2，3，7)。在 $\mathbb{D}^2$中，可以放置 336 个 (2，3，7) 三角形的副本，从而构成一个七正则十四边形；也就是说，这是一个正十四边形，其每个内角的大小为 $\frac{2\pi}{7}$。根据上文的注释 2.4，我们可以将三角形交替涂成黑色和白色。两个颜色不同的相邻铺砌块构成一个四边形，它由两个 (2，3，7) 三角形拼合而成。我们可以辨认出 168 个这样的四边形，它们铺满了这个十四边形。任选一条边标记为 1，然后按照正向循环次序依次标记其余各边。若将此多边形的边 $2i + 1$ 与边 $2i+6 \pmod{14}$ 识别，结果是一个有两个顶点的亏格为3的曲面。这两个顶点分别对应于该十四边形的偶数顶点集和奇数顶点集；很容易验证，它们的角度和均为 2π。因此，我们得到一个配备双曲度量的亏格为3的曲面，也就是说，它具有一个高斯曲率恒为 -1的黎曼度量。从多个意义上说，这个曲面都是所谓的 拟柏拉图曲面的首个实例。我们将在第 **??** 小节中再讨论拟柏拉图曲面。

3.2. **三角群**。设 (p,q,r) 是上述任意一个三元组。我们可以为任意这样的三元组关联一个群，暂记为 $W(p, q, r)$，该群由元素 $-1, \delta_p, \delta_q, \delta_r$ 生成，其中 -1 在 $W(p,q,r)$ 中是中心元，并满足关系 $(-1)^2 = 1$ 以及

$$\delta_p^p = \delta_q^q = \delta_r^r = \delta_p\delta_q\delta_r = -1, \tag{3.5}$$

其中，按照惯例，我们令 $\delta_\infty^\infty = -1$。$(p,q,r)$–三角群，记作 $\Delta(p,q,r)$，定义为 $W(p,q,r)/\{\pm 1\}$ 的无中心商群。

注记 3.4. 值得一提的是，不失一般性，我们可以对生成元排序，使得 $p \le q \le r$。事实上，可以看出，$\delta_p\delta_q\delta_r = -1$ 在循环置换下保持不变，因此

$$W(p, q, r) \cong W(q, r, p) \cong W(r, p, q). \tag{3.6}$$

More此外，将每个生成元映射为其逆元的映射给出了一个同构 $W(p,q,r) \cong W(r,q,p)$，这是一个很容易证明，这些同构都可归结为通过对 $\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ 取商。

“三角群”这一名称的由来，很大程度上是因为这些群是某些 $\mathbb{E}^2$、$\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{D}^2$ 上三角形铺砌的对称群。更准确地说，根据庞加莱定理，W(p, q, r) 是 S 的三角形镶嵌 $\mathcal{T}$ 的完整对称群，该镶嵌以一个角为 (p, q, r)– 的三角形 T（例如 T）为原型砖。当然，三元组为欧几里得的、球面的或双曲的时，S 分别是 $\mathbb{E}^2$、$\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{D}^2$。因此，其商群 Δ(p, q, r) 是 S 上对称铺砌的完整对称群，该铺砌以将 T 加倍得到的四边形为原型砖。我们可以看到，Δ(p, q, r) 是 W(p, q, r) 的一个指数为二的子群，且它恰好由 $\mathcal{T}$ 的所有保向对称变换构成；参见命题 2.5。原则上，人们或许会倾向于将三角群定义为群 W(p, q, r)，而不是它的商群 Δ(p, q, r)。然而，由于使用保持方向的对称群更为方便，通常将其无中心商群 Δ(p, q, r) 定义为三角群。

为方便读者，下面给出几个例子。事实上，可以发现，某些三角群与其他知名群同构。一般而言，可以注意到，如果 p、$q \ge 2$ 和 $r = \infty$，那么

存在一个典范同构 $\Delta(p,q,\infty) \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$。这一简单观察引出了以下一些有趣的例子。

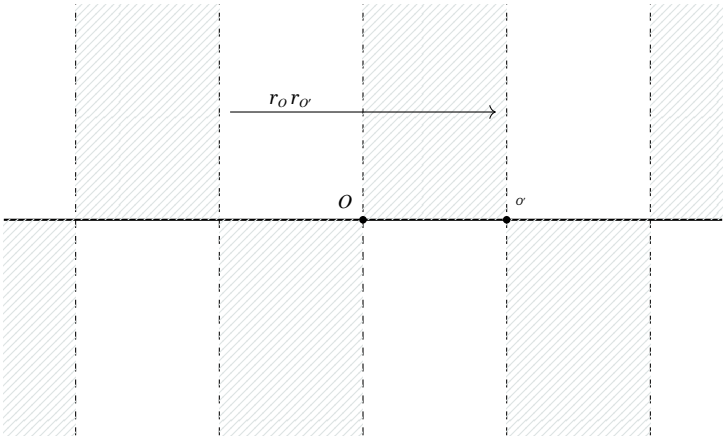


图 6. $\Delta(2,2,\infty)$ 由两个旋转生成，分别记作r_O 和$r_{O'}$，它们的阶均为 2，旋转中心是两个不同的点O 和O'。不难验证，$r_O r_{O'}$ 是一个平移，其平移长度等于 $2d_{\mathbb{E}^2}(O,O')$。任意阴影区域都是$W(2,2,\infty)$ 的基本域，而任意无限条带都是 $\Delta(2,2,\infty)$ 的基本域。

例 3.5。 在非常特殊的情形下 $p = q = 2$，三元组 $(2,2,\infty)$ 是欧几里得的，并且 $\Delta(2,2,\infty) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ 可以几何实现为由两个绕不同点旋转所生成的等距变换群 $\mathbb{E}^2$。无穷阶元素对应于沿着唯一一条经过这两点的直线进行的平移，其平移长度等于这两点距离的两倍。见图（6）。

例 3.6. 对于球面三元组 (2, 3, 3)、(2, 3, 4) 和 (2, 3, 5)，有如下同构

$$\Delta(2,3,3) \cong A_4, \qquad \Delta(2,3,4) \cong \mathfrak{S}_4, \qquad \Delta(2,3,5) \cong A_5. \tag{3.7}$$

A正如我们将看到的，它们对应于柏拉图立体的保向对称群，见 §4 .

例 3.7. 另一个值得一提的例子是 $\Delta(2,3,\infty) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$，即模群。更准确地说，众所周知，$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 由以下矩阵生成

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

不难验证，$S^2 = 1$，而 T的阶为无穷。此外，它们的乘积 $U = ST$是一个阶为 3 的变换。因此，$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 有一个有限表示

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \langle S, U \mid S^2 = I,\ U^3 = I \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3. \tag{3.9}$$

将 $S \longmapsto \delta_2$、$U \longmapsto \delta_3$ 和 $T \longmapsto \delta_\infty$。对应起来的映射 ϕ 自然延拓为所需的同构 $\phi\colon \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \Delta(2,3,\infty)$。我们来简要考察一下群 $W(2,3,\infty)$。后者的一个基本域是三角形 $T \subset \mathbb{H}^2$，其顶点位于 $\zeta_4 = i$、$\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 和 ∞。我们将三角形 T' 作为 T 关于虚轴的镜像，以此将 T加倍。于是，将区域 F 定义为

$$F = T \cup T' = \left\{ z \in \mathbb{H} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \le \Re(z) \le \frac{1}{2},\ |z| \ge 1 \right\} \tag{3.10}$$

结果表明，这是 $\Delta(2,3,\infty)$ 的基本区域。商空间 $\mathcal{M}_1 = \mathbb{H}/\Delta(2,3,\infty)$ 具有非凡的重要性，它对应于椭圆曲线的模空间，参见 §**??**。

例 3.8。 对于$q \ge 3$，由H_q 表示的*Hecke* 群定义为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的由以下元素生成的子群

$$S : z \longmapsto -\frac{1}{z} \quad \text{and} \quad U_q : z \longmapsto z + 2\cos\frac{\pi}{q}. \tag{3.11}$$

对于 $q = 3$，群 H_3 同构于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$，因此同构于 $\Delta(2,3,\infty)$。更一般地，有 $H_q \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$，因此根据上述相同的论证，$H_q \cong \Delta(2,q,\infty)$。

例 3.9。另一个值得关注的群是 $\Delta(\infty, \infty, \infty) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$。双曲几何中的一个经典事实是，只要两个三角形具有相同的内角，它们就是等距的。特别地，两个理想三角形，即所有顶点都在无穷远处的三角形，总是等距的。因此，我们可以直接推出，中的任意理想三角形 $\mathbb{H}^2$ 都是 $\Delta(\infty, \infty, \infty)$的基本域。见图（7）。这个三角群对应于主合同子群 $\Gamma(2) < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$，其定义为

$$\Gamma(2) = \left\{ g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; g \equiv \pm \mathrm{Id} \pmod 2 \right\}. \tag{3.12}$$

读者可以注意到，$\Gamma(2)$ 是模群 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 中指数为六的正规子群，其商群为 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) / \Gamma(2) \cong \mathrm{S}_3$。

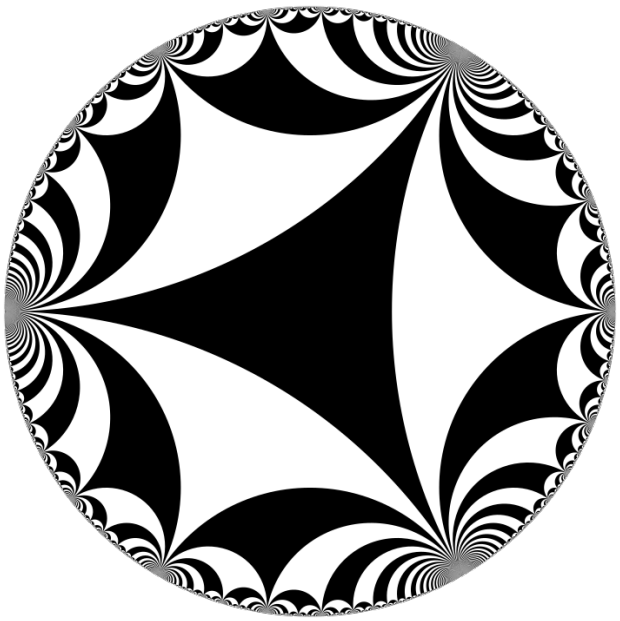


图 7. 庞加莱圆盘的三角形镶嵌，其中每个铺砌块都与一个理想三角形等距。对应的三角群为 $\Delta(\infty, \infty, \infty)$。

最后，我们聚焦于双曲型三角群 $\Delta(p, q, r)$，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$。我们有如下

定理 *3.10.* 设 $\Delta(p, q, r)$ 是一个双曲型三角群。则 $\Delta(p, q, r)$ 在 $\mathbb{H}^2$ 上适当且不连续地作用，且商群 $\mathbb{H}^2/\Delta(p, q, r)$ 与黎曼球面 $\mathbb{C}P^1$ 双全纯。更准确地说，存在一个亚纯函数 $j : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}P^1$，它在 $\Delta(p, q, r)$ 作用下不变，即对所有 $z \in \mathbb{H}^2$ 以及所有 $g \in \Delta(p, q, r)$，都有 $j(g(z)) = j(z)$。若 T 是 $W(p, q, r)$ 的基本域，且 $F = T \cup T'$ 是 $\Delta(p, q, r)$ 的基本域，则 j 将 T 的内部和 T' 双全纯地映射到 $\mathbb{H}^2$ 和 $-\mathbb{H}^2$，将边映射到 $\mathbb{R}P^1$，并将顶点映射到 0、1、∞，其重数分别为 p、q、r。

证明。我们首先注意到，$\Delta(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 通过莫比乌斯变换作用于 $\mathbb{H}^2$。一个内角分别为 π/r、π/q 和 π/r 的三角形 $\mathrm{T} \subset \mathbb{H}^2$满足边角条件，因此根据庞加莱定理，它是对称镶嵌的基本域，而由边配对变换生成的群 $\mathrm{W}(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 则是其对称群。此外，根据命题 2.8，$\mathrm{W}(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 的作用是适当不连续的。按照第 §3.1 小节中的方法，将 T 加倍后，我们得到一个四边形，它是指数为二的子群 $\Delta(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 作用下的基本域。由于 $\mathrm{W}(\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r})$ 的作用是适当不连续的，任何真子群的作用也同样如此。

我们接下来定义映射j： $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 如下。我们调用黎曼映射定理，断言存在一个将T 的内部映射到 $\mathbb{H}^2$的映射j。一个强得多的版本断言，j 可连续延拓到边界上，并且经过归一化，使得T 的顶点被映射到0、1和 ∞。然后，根据施瓦茨反射原理，j 延拓到T'。通过在所有像$g(F)$的所有边界线上应用相同的思想，可以迭代这一过程，其中$F = T \cup T'$ 且$g \in \Delta(p, q, r)$。这样，我们就在 $\mathbb{H}$ 上得到一个良定义的全纯函数，至少在F的顶点的 Δ-轨道之外如此。对于这些点，我们最后应用黎曼可去奇点定理。最后我们注意到，按照构造，映射j： $\mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 是$\Delta(p,q,r)$-不变的。□

3.3. **三角群的包含关系**。 在本小节中，我们仍然考虑双曲型三角群。一个*Fuchs*群 Γ 是PSL(2, $\mathbb{R}$)的离散子群。根据定义，任何三角群都是Fuchs群，但反之则远非如此。事实上，有许多Fuchs群并不是三角群。三角群 $\Delta(p,q,r)$若是极大的，则它不能被真嵌入任何Fuchs群中。Singerman [Sin72] 和 Greenberg [Gre63，定理3B], 的一个结果表明，任何包含三角群的Fuchs群本身也是三角群。Singerman在 [Sin72]中列出了三角群之间的正规包含和非正规包含。这些包含关系通过连接给出，具体描述如下

定理 3.11. 双曲三角群之间的正规包含形式如下：

1. $\Delta(s, s, t) \lhd_2 \Delta(2, s, 2t)$，其中 $(s-2)(t-1) > 2$，且商群为 $\mathbb{Z}_2$；*2.* $\Delta(t, t, t) \lhd_3 \Delta(3, 3, t)$，其中 $t > 3$，且商群为 $\mathbb{Z}_3$；*3.* $\Delta(t, t, t) \lhd_6 \Delta(2, 3, 2t)$，其中 $t > 3$，且商群为 S_3。

双曲三角群之间的非正规包含形式如下：

4. $\Delta(2, 7, 7) <_9 \Delta(2, 3, 7)$、*5.* $\Delta(3, 8, 8) <_{10} \Delta(2, 3, 8)$、*6.* $\Delta(4, 4, 5) <_6 \Delta(2, 4, 5)$、*7.* $\Delta(3, 3, 7) <_8 \Delta(2, 3, 7)$、*8.* $\Delta(t, 2t, 2t) <_4 \Delta(2, 4, 2t)$，其中 $t \geq 3$、*9.* $\Delta(2,t, 2t) <_3 \Delta(2, 3, 2t)$ 其中 $t \geq 4$，以及 *10.* $\Delta(3,t, 3t) <_4 \Delta(2, 3, 3t)$ 其中 $t \geq 3$。

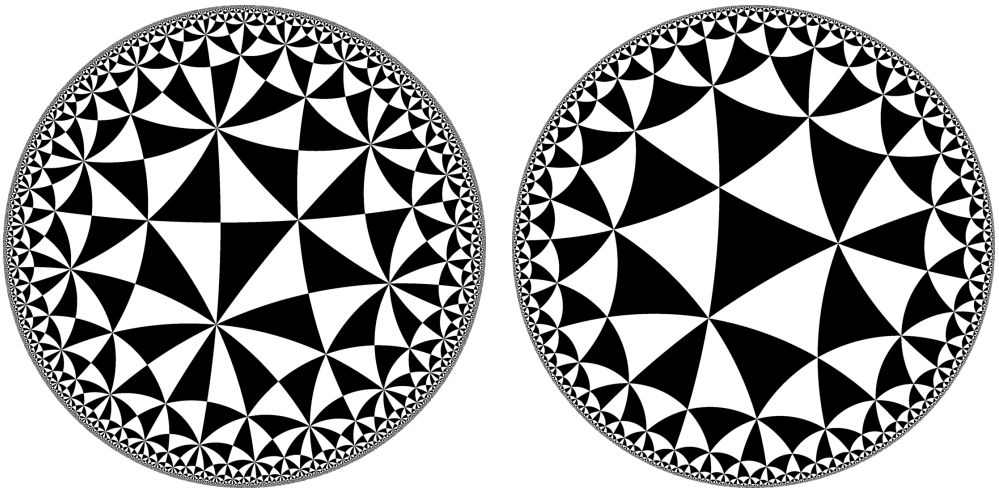
这里，$H \lhd_n G$ 表示 G 的一个指数为 n 的正规子群，而 $<_n$ 则表示 G 的一个指数为 n 的子群。参数 s、t 的值较小时，对应的是欧几里得的或球面的三角群之间的包含关系。最后提一下，上面的列表略有冗余，因为读者很容易验证，对于 s、t > 3，第三个包含关系是前两个的组合。还有一些情况没有列在上面，因为它们可以由上述包含关系组合推导出来。这些情况都列于 [JW16，《定理》3.12], 参见 [CV19，第 §2], 节，对应以下四个包含关系：$\Delta(7, 7, 7) <_{24} (2, 3, 7)$、$\Delta(4, 8, 8) <_{12} \Delta(2, 3, 8)$、$\Delta(9, 9, 9) <_{12} \Delta(2, 3, 9)$，以及 $\Delta(t, 4t, 4t) <_6 \Delta(2, 3, 4t)$，其中 $t \geq 2$。

如何从镶嵌的角度理解定理 3.11？为了给出令人满意的答案，我们首先回顾以下事实；命题 2.5 正是这一事实的一个特例。设 Γ 是一个在 $\mathbb{H}^2$ 上适当不连续地作用的群，Γ' 是一个具有 n 个不同陪集的有限指数子群，这些陪集记为 $\Gamma'\gamma_1$、……、$\Gamma'\gamma_n$。如果 $\mathcal{P}$ 是 Γ 的基本域，那么 $\mathcal{P}' = \gamma_1 \cdot \mathcal{P} \cup \cdots \cup \gamma_n \cdot \mathcal{P}$ 就是 Γ' 的基本域。特别地，可以选取 γ_1、……、γ_n，使得 $\mathcal{P}'$ 成为一个连通多边形。由于 Γ 是任意一个在 S 上适当不连续地作用的群，因此这一论证尤其适用于作用在 $\mathbb{H}^2$ 上的任意三角群 Δ(p, q, r)。Δ(p, q, r) 的任何有限指数子群都对应于 $\mathbb{H}$ 的一种铺砌，其原型砖是一个多边形，由 n 个全等且相邻的四边形合并而成，其中每个四边形都是 Δ(p, q, r) 的基本域。

例 3.12（一个简单的例子）。考虑三角群 $\Delta(2, 4, 6)$。不难验证它是双曲型的。W(2, 4, 6) 作用在 $\mathbb{H}^2$ 上的一个基本域是一个双曲三角形，记作 T_1，，其内角为 $\pi/2$、$\pi/4$ 和 $\pi/6$。因此，根据命题 2.5，Δ(2, 4, 6) 的一个基本域是通过将 T_1加倍得到的四边形。我们沿着一条边将 T_1 加倍，这条边的两个端点分别是角为 $\pi/2$ 和 $\pi/6$ 的顶点。所得四边形是退化的，因为它有一个角为 π的顶点。换句话说，我们对 T_1 进行加倍，使所得形状成为一个三角形，记作 T_2，，其内角为 $\pi/4$、$\pi/4$ 和 $\pi/3$。显然，这是 W(3, 4, 4) 作用的一个基本域；最后，我们将 T_2 加倍，从而得到四边形 Q，作为 Δ(3, 4, 4) 的基本域。更准确地说，我们沿着唯一一条边将 T_2 加倍，这条边的两个端点都是角为 $\pi/4$ 的顶点。读者现在可以观察到，这样的四边形包含 T_1 的四个副本，并且具有一个由绕其中心旋转角度为 π 的旋转所给出的二阶对称。特别地，以 Q 为原型砖的对称铺砌是以 T_2 为原型砖的对称铺砌的一个子镶嵌。参见图（8）。

4. 柏拉图立体

本节重点讨论球面的正则镶嵌和球面三角群。在第 §2.4节中，我们已经计算了球面上可能存在的正则镶嵌。不过，我们之前的方法依赖于球面几何中的一个标准结论，即一个p – 边形的内角和总是大于（$p-2$）π。事实上，任意球面三角形的内角和都大于 π，因此，按照欧几里得情形中的推理，我们便可得到所声称的下界。本文旨在提供一种更具拓扑性的方法，说明这些镶嵌与经典柏拉图立体之间的关系。



(a) 与下列三角群对应的对称铺砌
三角群 $\Delta(2, 4, 6)$

(b) 与下列三角群对应的对称铺砌
三角群 $\Delta(3, 4, 4)$

图 8。左侧可以看到 $\mathbb{D}$ 的对称铺砌，其原型砖是一个内角分别为 $\pi/2$、$\pi/4$ 和 $\pi/6$ 的双曲三角形。右侧可以看到 $\mathbb{D}$ 的对称铺砌，其原型砖是一个内角分别为 $\pi/3$、$\pi/4$ 和 $\pi/4$ 的双曲三角形。诚邀读者细分右侧的铺砌，以复现左侧的铺砌。

4.1. 柏拉图立体有多少种? 柏拉图立体自古以来便为人所知，古希腊人对其进行了广泛研究。泰阿泰德最早对柏拉图立体作出数学描述，他可能还给出了已知最早的证明，证明除四面体、立方体、八面体、十二面体和二十面体之外，不存在其他凸正多面体。这里的“正则”指这样的多面体：其各面全等，且都是正则p–边形。该结论的一个拓扑证明基于以下观察，这一观察称为

欧拉观察。对于给定的凸多面体（即与球面同胚），设 V，E，F 分别表示顶点、边和面的数量。那么 $V - E + F = 2$。

这个经典结论有几种证明方法，以下是柯西所给出的一种。给定一个凸多面体，移除它的任意一个面。将缺失面的边彼此向外拉开，把其余部分变形成由点和曲线构成的平面图，并使缺失面的周界位于外侧，环绕着所得的图。注意，由于我们的凸多面体与球面同胚，这样做总是可行的。顶点和边的数量保持不变，但面的数量减少了 1。因此，要证明该多面体的欧拉公式，只需证明对于这个变形后的平面图有$V - E + F = 1$。在这个平面图中，如果有一个面超过三条边，我们就画一条对角线，也就是说，在这个面内画一条曲线，连接两个尚未连接的顶点。这样会增加一条边和一个面，但不会改变顶点的数量。因此，画一条边不会改变$V - E + F$这一数量。我们重复这一过程，直到所有的面都是三角形。接下来，反复执行以下操作之一，使外边界始终为一个简单环——也就是说，外部网络围成一个多边形，且其内部连通。

1. 移除一个只有一条边与外部相邻的三角形。注意，这会使边数和面数都减少一个，但不会改变顶点数。因此，$V - E + F$ 在此操作下保持不变。2. 移除一个有两条边与网络外部共用的三角形。移除这样的三角形后，顶点数和面数都减少一个，而边数减少两个。因此，$V - E + F$ 保持不变。

这些变换最终会将平面图化简为一个三角形，很容易验证，在这种情况下$V - E + F = 1$。因此，对于我们得到的平面图，$V - E + F = 1$ 成立。由此可得，对于凸多面体，$V - E + F = 2$，欧拉的观察也就如愿得到证明。

让我们回到主要目标：证明凸正多面体只有五种。回想一下，我们要求所有面都与给定的正多边形p–全等。除了欧拉观察之外，我们还可以发现正多面体满足以下关系。首先，每个面都邻接p条边，而每条边恰好邻接两个面。因此$pF = 2E$。另一方面，

每个顶点都恰好邻接q个面，而每个面邻接p个顶点。因此$pF = qV$。所以

$$pF = 2E = qV. \tag{4.1}$$

将这个方程与$V - E + F = 2$结合，得到

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2 \tag{4.2}$$

也就是说

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{4.3}$$

由于E严格为正，因此我们再次得到上文的条件（2.18）并不令人意外

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \tag{4.4}$$

由于非退化的p–正多边形至少有3条边，因此$p \geq 3$。如果将范围限制在$q \geq 3$，那么（4.4）只有五个解，即也就是这些数对$\{3,3\}$、$\{3,4\}$、$\{4,3\}$、$\{3,5\}$和$\{5,3\}$，它们已在上文§2.4中求得。因此，正如本综述行文过程中数次提及的，柏拉图立体恰有五种。它们是对应施莱夫利符号$\{3,3\}$的四面体、立方体$\{4,3\}$、八面体$\{3,4\}$、十二面体$\{5,3\}$和二十面体$\{3,5\}$。

显然，q不可能为1，因为每条边都由两个面共享，因此每个顶点至少与两个面相邻。原则上，$q = 2$是允许的；然而在这一特殊情况下，读者可以自行确认，由此得到的多面体是退化的，因为它必须恰好有两个面。换言之，所得多面体是将两个正p–边形逐边粘合后得到的商空间。这确实是$\mathbb{E}^3$–3–维空间中的一个退化多面体——读者可能会注意到，它与§2.4中介绍的二面体之间存在一种并非偶然的相似性。

对偶性。对于正则多面体，存在一个定义良好的对偶性概念。设P是一个具有F个面的正多面体，并设$\{p_1, \dots, p_F\}$是它们的中心。如果且仅如果相应的面相邻，我们就用一条边连接两个点p_i和p_j。事实证明，所得空间是某个内接于P的正多面体Q的1–骨架。读者可以观察到，如果初始多面体具有V个顶点和F个面，那么所得多面体具有F个顶点和V个面。特别地，对Q应用同样的构造，就会得到P的1–骨架。由此可见，我们称P和Q互为对偶。
如上所述，我们可以将一个柏拉图立体与一对$\{p, q\}$联系起来；即它的施莱夫利符号。有些数对显然具有对称性，而这些对称性反映了这样一个事实：某些正多面体彼此对偶。例如，$\{4,3\}$与$\{3,4\}$之间的对称性反映了立方体和八面体互为对偶。同样，数对$\{5,3\}$与$\{3,5\}$之间的对称性反映了二十面体和十二面体互为对偶。最后，数对$\{3,3\}$具有对称性；事实上，四面体是自对偶的。

4.2. 从柏拉图立体到$\mathbb{S}^2$的镶嵌。 我们在前一节中已经看到，柏拉图立体恰好有五种。对于每一种柏拉图立体，我们都可以构造出$\mathbb{S}^2$的一种铺砌。这意味着，如果忽略球面多面体和二面体，则$\mathbb{S}^2$恰好有五种正则镶嵌。将每个铺砌块划分为直角球面三角形后，我们得到$\mathbb{S}^2$的一种对称三角形铺砌。每一种铺砌的保向对称群都是一个球面三角群$\Delta(2, p, q)$。然而，这样的三角群只有三种，即$\Delta(2,3,2)$、$\Delta(2,3,4)$和$\Delta(2,3,5)$。因此必然有一些镶嵌共享同一个对称群。现在我们的目标是证明：如果两个柏拉图立体互为对偶，那么它们确定相同的直角球面三角形铺砌，从而所诱导的铺砌具有相同的三角群，并且该三角群就是它们的对称群。

设P为一个正多面体，那么球面$\mathbb{S}^2$可视为其同心外接球，球心即为P的对称中心。我们可以把这个对称中心想象成一个点光源。光线一旦亮起，P的各个面就会投影到球面上，从而在球面上形成一种正则铺砌，其原型砖为正（球面）多边形。值得一提的是，这种投影并非保角，因为正多面体的各个面都与$\mathbb{E}^2$中的某个正多边形全等，而诱导出的铺砌在$\mathbb{S}^2$上的瓦片则是球面多边形（彼此全等）。通过这种方式，我们可以得到$\mathbb{S}^2$的所有可能的正则铺砌。

虽然正则铺砌有五种，但对称三角形铺砌只有三种。给定一个正多面体，我们可以将其进行重心细分，划分为更小的三角形，见图（9）。由于所有面在$\mathbb{E}^2$中都与一个正多边形等距，因此所有三角形都两两全等于$\mathbb{E}^2$中的某个直角欧几里得三角形。于是，只要打开光源，细分后的面就会投影为$\mathbb{S}^2$上的对称三角形镶嵌。不同于$\mathbb{E}^2$

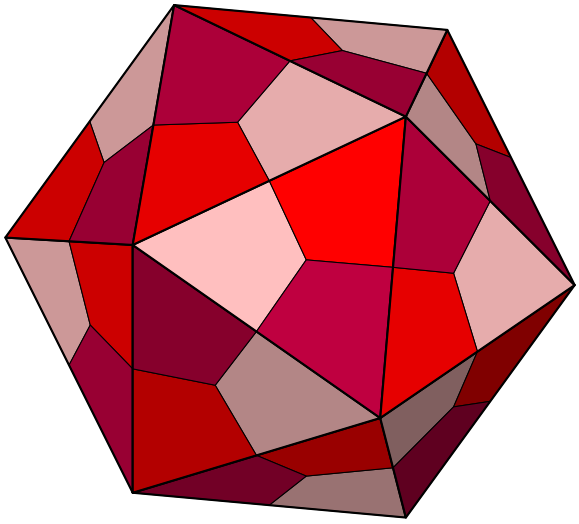


图9。带有铺砌块面的二十面体。每个面上的每个铺砌块都呈“风筝形”，由两个角为 $(\frac{\pi}{2}、\ \frac{\pi}{3}、\ \frac{\pi}{6})$ 的欧几里得直角三角形粘合而成。我们可以精确地数出二十面体上有60个风筝形，事实上每个面有3个。其对称群具有传递性，即 任意一对风筝形都可由二十面体的唯一一个对称相互对应。正如我们将在下文看到的，其对称群可与 $\Delta(2,3,5) \cong A_5$ – 五元素的交错群对应，该群的阶为60。

和 $\mathbb{H}^2$，$\mathbb{S}^2$ 上的任意对称三角形镶嵌都只有有限个铺砌块。事实上，设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathbb{S}^2$ 上的一个以 t 为原型砖的对称三角形镶嵌。回顾一下，由于球面是紧致的，t 是一个具有有限体积 $\mathrm{vol}(t)$的紧致三角形。由于单位球面的体积等于 4π，并且 $\mathcal{T}$ 具有对称性——这是一个关键假设——我们得到 $\mathcal{T}$ 具有

$$|\mathcal{T}| = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(t)} \tag{4.5}$$

铺砌块，其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathcal{T}$ 的基数。这远不只适用于三角形铺砌；事实上，我们有以下

命题4.1。 设 $\mathcal{T}$ 是一个对称镶嵌，其原型砖为多边形 t，位于 $\mathbb{S}^2$ 中，并且具有 $\mathbb{S}^2$ 。 n

$$|\mathcal{T}| = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(t)}.$$

证明与上面的论证基本相同。因此，我们可以计算给定对称三角形镶嵌中的三角形铺片数量。下文中，对于三角形t 及其顶点v ，其中t ，我们将v 的价 定义为与v相邻的三角形数量。牢记这一点，对于每种正多面体，我们计算其面的重心细分所得的三角形数量，以及这些三角形顶点的价。

1. 四面体 有4个面，且每个面都是全等的等边三角形。因此，重心细分后得到24个直角三角形，其内角为 $\pi/2$、 $\pi/3$和 $\pi/6$。所得细分中的每个顶点的价都是6，也就是说，每个顶点都与6个三角形相邻。2. 立方体 有6个面，且每个面都是全等的正方形。因此，重心细分后得到48个直角三角形，其内角为 $\pi/2$、 $\pi/4$和 $\pi/4$。在这种情况下，所得细分有6个价为8的顶点和8个价为6的顶点。3. 八面体 有8个面，且每个面都是全等的等边三角形。因此，重心细分后得到48个直角三角形，其内角为 $\pi/2$、 $\pi/3$和 $\pi/6$。与上面的情况相同，所得重心细分有6个价为8的顶点和8个价为6的顶点。4. 十二面体 有12个面，且每个面都是全等的五边形。因此，重心细分后得到120个直角三角形，其内角为 $\pi/2$、 $3\pi/10$和 $\pi/5$。在这种情况下，所得细分有12个价为10的顶点和20个价为6的顶点。最后，5. 二十面体 有20个面，且每个面都是全等的等边三角形。因此，重心细分后得到120个直角三角形，其内角为 $\pi/2$、 $\pi/3$和 $\pi/6$。与十二面体相同，所得重心细分有12个价为10的顶点和20个价为6的顶点。

根据上面的列表，我们可以推导出以下结论

命题 4.2. 每个柏拉图立体都可以通过对其各个面的重心细分，得到由直角三角形构成的三角剖分。特别是，如果两个柏拉图立体互为对偶，那么它们可以得到瓦片数量相同的三角剖分，且其原型砖在顶点处具有相同的价。

由于投影显然不会改变瓦片的数量和顶点的价，因此，由投影诱导的球面镶嵌具有相同数量的瓦片，且顶点具有相同的价。关键事实如下

命题 4.3. 设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 $\mathbb{S}^2$ 的两个对称三角形镶嵌，且瓦片数量相同。那么，对于某个 $R \in$ 等距变换群($\mathbb{S}^2$)，有 $\mathcal{T}_1 = R \cdot \mathcal{T}_2$，当且仅当它们各自的原型砖在顶点处具有相同的价。

证明。 设 t_1 和 t_2 分别是 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的原型砖。命题 4.1 适用，因为两个铺砌都是对称的，因此

$$\frac{4\pi}{\mathrm{vol}(t_1)} = |\mathcal{T}_1| = |\mathcal{T}_2| = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}(t_2)}. \tag{4.6}$$

因此，$\mathrm{vol}(t_1) = \mathrm{vol}(t_2)$。由于原型砖在顶点处具有相同的价，因此它们具有相同的内角。因此，$t_1 = R \cdot t_2$，从而 $\mathcal{T}_1 = R \cdot \mathcal{T}_2$，其中某个 $R \in$ 属于 $\mathrm{Iso}(\mathbb{S}^2)$。□

由此可得以下

定理 4.4. 四面体确定了 $\mathbb{S}^2$ 上的一种对称铺砌，其原型砖为一个球面直角三角形，角为 $(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/3)$。立方体和八面体确定了 $\mathbb{S}^2$上的同一种对称铺砌，其原型砖为一个球面直角三角形，角为 $(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/4)$。最后，十二面体和二十面体确定了 $\mathbb{S}^2$ 上的同一种对称铺砌，其原型砖为一个球面直角三角形，角为 $(\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/5)$。

接下来需要确定这些三角形铺砌的对称群。回顾我们在§3.1 和§3.2 中的讨论，可得以下结果

推论 4.5. 令 $\mathcal{T}$ 为由四面体的重心细分所确定的球面上的对称三角形铺砌。则 $Sym^+(\mathcal{T}) \cong \Delta(2,\ 3,\ 3)$。类似地，令 $\mathcal{T}$ 为由立方体或八面体的重心细分所确定的球面上的对称三角形铺砌。则 $Sym^+(\mathcal{T}) \cong \Delta(2,\ 3,\ 4)$。最后，令 $\mathcal{T}$ 为由十二面体或二十面体的重心细分所确定的球面上的对称三角形铺砌。则 $Sym^+(\mathcal{T}) \cong \Delta(2,\ 3,\ 5)$。

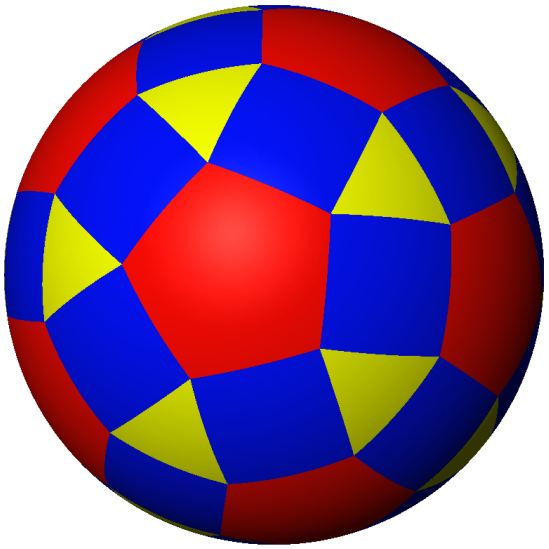


图10. 球面上的菱形三六边形镶嵌。这是由一个半正则柏拉图立体产生的半正则镶嵌实例。

4.3. **简要谈谈半正则柏拉图立体**。本节最后，我们简要讨论一下半正则多面体。半正则多面体是指一种凸多面体，其所有面都是 $\mathbb{E}^2$ 中的正多边形，但这些面不再两两全等。当然，柏拉图立体也属于这个更大的类别。不过，只要不再要求各面都与 $\mathbb{E}^2$ 中的某个给定多边形全等，可行的情况就很多，事实上有无穷多种。半正则多面体包括阿基米德立体、棱柱和反棱柱。阿基米德立体构成一个有限的凸多面体族，而棱柱和反棱柱则各自构成无限族。按照上文对柏拉图立体所采用的方法，将这些半正则多面体的面投影后，我们就得到 $\mathbb{S}^2$ 的半正则镶嵌。图（10）展示了一个这样的镶嵌，读者可以看到，它是庞加莱圆盘上的菱形三六边形镶嵌在球面上的对应形式。

参考文献

[CV19] P. L. Clark 和 J. Voight，关于由三角群的同余子群统一化的代数曲线，《美国数学会汇刊》371（2019），第 1 期，33–82。MR 3885137[DG21] B. Datta 和 S. Gupta，双曲平面的半正则镶嵌，《离散与计算几何》65（2021），531–553。[Gre63] L. Greenberg，极大的福克斯群，《美国数学会通报》69（1963），第 4 期，569–573。[GS77] B. Grünbaum 和 G. C. Shepard，正多边形镶嵌：从开普勒到现在的平面图案，包括研究成果和未解决的问题，《数学杂志》50（1977），227–247。[JW16] G. A. Jones 和 J. Wolfart，黎曼曲面上的儿童画，《施普林格数学专著》，Springer，Cham，2016。MR 3467692[Mag74] W. Magnus，非欧几里得镶嵌及其群，Academic Press，1974。[Pen78] R. Penrose，五重复杂性，《尤里卡》39（1978），16–22。[Rat94] J. G. Ratcliffe，双曲几何，《双曲流形基础》，Springer，1994，第 56–104 页。[Sin72] D. Singerman，有限极大的福克斯群，《伦敦数学会杂志》2（1972），第 1 期，29–38。[SMKGS23] D. Smith、J. S. Myers、C. S. Kaplan 和 C. Goodman-Strauss，非周期单块镶嵌，https://arxiv.org/abs/ 2303.10798，2023。[Sti95] J. Stillwell，曲面几何，Springer Science & Business Media，1995。

数学与应用系 U5，米兰比可卡大学，科齐街55号，20125 米兰，意大利电子邮箱：gianluca.faraco@unimib.it电子邮箱：gianluca.faraco.math@gmail.com