arXiv:2303.17270v1 [math.GR] 30 Mar 2023

可逆图灵机群：子群、生成元与可计算性

SEBASTI´AN BARBIERI、JARKKO KARI 和 VILLE SALO

摘要。我们研究一个抽象的可逆图灵机群。在我们的模型中，每台机器都被视为某个空间上的同胚，该空间表示一条填有符号的纸带，以及一个携带状态的读写头。这些同胚只能在读写头周围的有限距离内修改纸带、改变状态，并以有限的方式移动读写头。我们研究该模型中出现的三个自然子群：有限状态自动机群，它推广了拓扑动力学和轨道等价理论中研究的拓扑全群；无条件图灵机群，其移动方式独立于纸带内容，它推广了灯笼群，并与通用可逆逻辑门的研究有关；以及初等图灵机群，它由有限状态自动机和无条件图灵机复合而成。我们证明，无条件图灵机群和初等图灵机群都是有限生成的，而有限状态自动机群和可逆图灵机群则不是。我们证明，初等图灵机群的挠问题不可判定。由此我们还得到，元胞自动机群（更一般地，任何不可数一维 sofic 子移位的自同构群）都包含一个挠问题不可判定的有限生成子群。我们还证明，对于非平凡字母表上的全 $\mathbb{Z}^d$ 移位，其拓扑全群的挠问题不可判定，当且仅当$d \geqslant 2$。

关键词：可逆图灵机、元胞自动机、挠问题、拓扑全群。**MSC2010：**主要：68Q05,68Q80, 37B15, 次要：37B10, 37B50.

1. 引言

本文是会议论文 [4] 的扩展版本。会议论文中未曾出现的主要新结果是：初等图灵机群是有限生成的；不可数 sofic $\mathbb{Z}$-移位的自同构群包含挠问题不可判定的有限生成子群。

1.1. 图灵机及其推广。自 20 世纪 30 年代以来，图灵机一直被视为计算这一抽象概念的标准形式化模型。然而，近年来，图灵机也开始在动力系统的背景下得到研究。在 [25], 中，人们将两个动力系统与一台图灵机关联起来，一个对应“移动纸带”，另一个对应“移动读写头”。此后，图灵机动力学受到了广泛研究，示例见 [18, 37, 23, 13,12, 19, 14]。图灵机与动力学之间的另一种联系是，它们可用于描述“有效闭”的零维动力系统。一个特别有趣的情形是，其禁模式由图灵机枚举的子移位。这些子移位称为有效闭子移位，或 Π_1^0 子移位；尤其是在多维情形下，由于已知有限型子移位、sofic 移位与 Π_1^0-子移位之间存在紧密联系，它们成为该领域的核心议题，示例见 [17, 10, 3]。文献 [2], 提出了适用于一般群上这些子移位的一种内在图灵机计算概念；文献 [35, 34] 则使用有限状态机进行了类似研究。

在所有这些论文中，图灵机的定义（除大多只是记号上的差异，以及在移动纸带模型和移动头模型之间进行切换外）如下：图灵机是一个

函数 T：由局部规则 f_T 定义的 $\Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q \to \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q$： $\Sigma \times Q \to \Sigma \times Q \times \{-1,\ 0,\ 1\}$ 其公式为

$$T(x,q) = (\sigma^{-d}(\tilde{x}), q') \text{ if } f_T(x_0, q) = (a, q', d),$$

其中 σ: $\Sigma^{\mathbb{Z}} \to \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 是由 $\sigma^d(x)_z = x_{z-d}$、 $\tilde{x}_0 = a$ 和 $\tilde{x}|_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}} = x|_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$给出的移位作用。在本文中，这类图灵机称为**经典图灵机**。据我们所知，这一定义足以涵盖所有值得关注的计算和动力学性质，但也存在一些不理想之处：两个经典图灵机的复合——甚至一个经典图灵机的平方——通常都不是经典图灵机，而且可逆经典图灵机的逆机也不总是经典图灵机。

在本文中，我们给出一种更一般的图灵机定义，允许它在每个时间步以任意（但有界的）距离移动读写头并修改单元格。采用新定义后，这两个问题都迎刃而解：根据我们的定义，

- 图灵机在复合运算下封闭，构成一个幺半群；而• 可逆图灵机在求逆运算下封闭，构成一个群。

我们还用组合术语刻画经典图灵机的可逆性，并说明其逆映射的形式。我们的图灵机定义源自 M. Schraudner 与最后一位作者尚未发表的研究；他们在该研究中考察了这类机器在一般子移位上的群（研究目标略有不同）。1991年，Moore 也给出了相同的定义，并称之为“广义移位”。

定义带来的这些好处，应与允许元胞自动机定义采用任意半径所带来的好处相比较：如果将元胞自动机定义为半径固定为某个值（例如 3），那么可逆元胞自动机的逆映射并不总是元胞自动机，因为元胞自动机的逆映射可能具有大得多的半径，见 [9]。同样，若半径固定，两个元胞自动机的复合也不一定是元胞自动机。

我们采用两种方式定义图灵机：移动纸带和移动读写头，如 [25] 所述。研究单步行为和不变测度时，移动纸带的视角通常更有用；而在构造示例以及需要追踪多个读写头的移动时，我们发现移动读写头的视角更容易处理。事实上，移动读写头图灵机是特定类型子移位上的元胞自动机的一个子集。另一方面，移动带机器是子移位拓扑全群的一种推广；拓扑全群是一个重要概念，尤其涉及拓扑动力学和轨道等价理论。关于极小子移位的拓扑全群及其有趣的群论性质，参见例如 [15, 16, 20]。单侧有限型子移位的情形见 [30]。我们将证明，这两种图灵机模型给出的幺半群彼此同构；在可逆图灵机的情形下，它们给出的群也彼此同构。

1.2. **我们的结果及与其他群的比较**。在第2节中，我们定义模型并证明关于它们的基本结果。在第 2.3 节中，我们为这些空间定义一种自然的均匀测度，并用它证明，在我们的模型中，单射性和满射性都等价于可逆性。

我们的结果在元胞自动机理论中有有趣的对应结论：元胞自动机理论中的一个主要定理指出，对于一大类群（即**满射单射群**，例如参见 [8] 的第 3 节），单射性蕴含满射性，而（全局）双射性等价于存在元胞自动机逆映射。此外，对于可逆的一维或二维元胞自动机，可以定义其“平均漂移”，即应用该映射时信息移动的速度；这构成了从元胞自动机群到一个子群的同态

$\mathbb{Q}^d$ 在乘法运算下（其中 d 是相应的维数），参见 [21]。在第 3 节中，我们使用均匀测度来定义一个类似的概念，即图灵机的“平均移动”同态。

在第 3 节中，我们定义了可逆图灵机群的一些有趣子群。首先，我们定义局部置换——即完全不会移动读写头的图灵机——以及它在无知图灵机中的推广：在这种机器中，读写头可以移动，但其移动方式与纸带内容无关。无知图灵机群可视为提灯人群的一种推广。事实证明，无知图灵机群是有限生成的。我们的证明很大程度上依赖于通用可逆逻辑门的存在，见 [1]。

我们还定义了（可逆）有限状态机群——即永远不会修改纸带的图灵机所构成的群。这个群不是有限生成的，但我们给出了一个自然的无限生成集。只有一个状态的有限状态机恰好对应于全移位的拓扑全群；从这个意义上说，我们对可逆有限状态机的定义可以看作是全 $\mathbb{Z}^d$-移位上的拓扑全群的一种推广。

我们最初定义这些子群——有限状态机和局部置换——是为了研究它们能否生成所有可逆图灵机。也就是说，可逆图灵机会在读写头所在的位置改变纸带内容，然后以全局可逆的方式移动。因此，一个自然的问题是，是否每个可逆图灵机都能拆分为可逆纸带变换（由局部置换实现）和可逆移动（有限状态自动机）。

我们将有限状态机与局部置换的并称为初等图灵机，并证明并非所有图灵机都是初等的：图灵机的平均移动可以任意小，但初等图灵机可能实现的平均移动仅构成一个离散子格。然而，我们证明每个可逆经典图灵机（以及它的所有迭代）都是初等的。

初等图灵机之所以如此有趣，一个原因是：尽管我们证明可逆图灵机群不是有限生成的（定理 3.11），但对于任意固定的字母表大小和状态数，一维纸带上的初等图灵机群却是有限生成的。

定理 1.1。在具有 n 个符号、k 个状态且维数为 1 的图灵机群中，初等图灵机群对任意 n、$k \geqslant 1$ 都是有限生成的。

在第 4 节中，我们证明了图灵机群是递归呈示的，并且具有可判定字问题；但其挠问题（即判断给定元素是否具有有限阶的问题）在所有维数下都是不可判定的。事实上，我们证明了初等图灵机的有限生成群在纯粹的群论意义下具有不可判定的挠问题。证明基于以下模拟：在固定字母表和状态集上，用初等图灵机模拟经典图灵机，并且该模拟保持有限轨道。由于可逆图灵机的周期性是不可判定的，因而可得该结果 [23]。

定理 1.2。在具有 n 个符号、k 个状态且维数为 d 的图灵机群中，初等图灵机群的挠问题对任意 $n \geqslant 2$、$k \geqslant 1$ 和 $d \geqslant 1$ 都是不可判定的。

作为前述结果的一个应用，我们得到：在全移位（因而也在任意不可数 sofic 移位）上，存在一个有限生成的可逆元胞自动机群，其挠问题不可判定。这是由将图灵机群几乎嵌入元胞自动机群得出的——出于群论原因，这并非真正的嵌入，但我们证明，所构造的几乎嵌入保持挠问题的可判定性。

推论 1.3。 设 X 是一个不可数 *sofic* $\mathbb{Z}$-子移位。则 自同构群(X)中存在一个有限生成子群，其挠问题不可判定。

对于有限状态机，我们证明挠问题在一维情形下是可判定的，但在更高维情形下不可判定；我们还构造了一个该问题不可判定的有限生成子群。一维情形下的证明基于简单的鸽巢论证，而高维情形下的不可判定性则是蛇形铺砖问题 [22]不可判定性的推论。

定理 1.4. 考虑由作用于 $n \geqslant 2$ 个符号、具有 $k \geqslant 1$ 个状态且维数为 $d \geqslant 1$的有限状态机构成的群 G ，

(1) 当 $d = 1$ 时， G 的挠问题是可判定的。*(2)* 当 $d \geqslant 2$ 时， G 包含一个挠问题不可判定的有限生成子群。

此外，我们证明，可判定性结论适用于在任意 sofic 子移位上运行的有限状态机；事实上，它们的有限性问题也是可判定的，也就是说，我们可以判定给定的有限生成子群是否有限（这意味着它们的挠问题也是可判定的）。作为我们结果的一个特例，我们得到关于拓扑全群的以下结论。

推论 *1.5*。 *</style}*设 $d \geqslant 2$。至少含有两个符号的全 $\mathbb{Z}^d$-移位的拓扑全群包含一个具有不可判定的挠问题的有限生成子群。

我们注意到，我们的群与 Thompson-Brin 群 2V 非常相似 [6, 5], ，二者的主要区别在于，2V 的元素可以从纸带中擦除符号，也可以向纸带中添加符号；事实上，RTM$(2,\ 1)$ 可以自然地视为 2V 的一个子群，其中的元素不使用这种额外功能。我们的群不同构于任何 Thompson-Brin 群 nV，因为后者是有限生成的。Thompson 的 V 有可判定的挠问题，但 2V 的挠问题不可判定，这同样是由于可逆图灵机的周期性不可判定。

1.3. **预备知识**。 本节将介绍一般定义，并确定全文使用的记号。我们将简要回顾这些概念，重点关注其动力学方面。若要了解更完整的介绍，读者可参阅 [28]。我们的讨论限于有限生成的无挠阿贝尔群 $\mathbb{Z}^d$；不过，与元胞自动机 [8],类似，图灵机的概念可以直接推广到一般群。本节及下一节的所有结果都可直接推广到任意可数群 G ，以取代 $\mathbb{Z}^d$。

设 A 为一个有限字母表。集合 $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d} = \{x\colon\ \mathbb{Z}^d \to \mathrm{A}\}$配备移位作用 $\sigma\colon\ \mathbb{Z}^d \times \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d} \to \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 定义为 $(\sigma^{\vec{v}}(x))_{\vec{u}} = x_{\vec{u}-\vec{v}}$ ，称为**全移位**。因此， $\sigma^{\vec{v}}$ 沿方向 $\vec{v}$移改单元格内容，或者等价地，将 x 的原点移动到 $-\vec{v}$。元素 $a \in \mathrm{A}$ 和 $x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 分别称为**符号**和**构型**。构型 $x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是**周期的**，如果对于某个非零$\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$有 $\sigma^{\vec{v}}(x) = x$ ；如果存在一个周期构型 $y \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$ ，仅在有限多个位置上与x 不同，则称其为**最终周期**。在 A 上赋予离散拓扑后，构型集合 $\mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个紧致可度量空间，生成度量由 $d(x,\ y) = 2^{-\inf\{|\vec{v}|\colon\ \ \vec{v}\in\mathbb{Z}^d,\ \ x_{\vec{v}}\neq y_{\vec{v}}\}}$给出，其中 $|\vec{v}|$是出租车范数 $|\vec{v}| = \sum_{i=1}^{d} |\vec{v}_i|$。

该拓扑以集合 $[a]_{\vec{v}} = \{x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}\colon\ x_{\vec{v}} = a \in \mathrm{A}\}$ 为子基。**支撑** 是一个有限子集 $F \subset \mathbb{Z}^d$。给定一个支撑 F，一个以 F为支撑的**图案** 是 A^F 的一个元素 p。由 p 在位置 $\vec{v}$ 生成的**柱集**为 $[p]_{\vec{v}} = \bigcap_{\vec{u}\in F}[p_{\vec{u}}]_{\vec{v}+\vec{u}}$。为简便起见，我们记作 $[p] = [p]_{\vec{0}}$。

定义 1.6。 X 是$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 的一个子移位 ，当且仅当它是拓扑闭且 σ-不变的，也就是说，对每个 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$ ，都有 $\sigma^{\vec{v}}(X) \subset X$。

等价地， X 是一个子移位，当且仅当存在一组定义它的图案 F .

$$X = \bigcap_{p\in\mathcal{F},\vec{v}\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}\backslash[p]_{\vec{v}}.$$

任何定义 X 的此类 F 都称为 X 的**禁模式**集。

对于子移位 $X \subset \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 和有限支撑 $F \subset \mathbb{Z}^d$，我们将 X 的**语言** $L_F(X)$ **支撑为**F定义为满足 $[p] \cap X \neq \varnothing$ 的模式 $p \in \mathrm{A}^F$ 的集合。 X 的语言是对所有有限 $F \subset \mathbb{Z}^d$ 上的 $L_F(X)$ 取并集 $L(X)$。若 $p \in L(X)$，我们记作 $p \sqsubset X$。对于单个构型 $x \in \mathrm{A}^{\mathbb{Z}^d}$，若存在某个 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $x \in [p]_{\vec{v}}$，我们记作 $p \sqsubset x$；并称模式 p 在 x 中**出现**。

设 X, Y 分别是字母表 A 和 B 上的子移位。子移位之间的连续 $\mathbb{Z}^d$-等变（即与移位可交换）映射 $\phi\colon X \to Y$ 称为态射。Curtis 、 Lyndon 和 Hedlund 的一个著名定理（其一般形式可见于 [8] ）断言，态射等价于由局部规则定义的映射，具体如下：存在有限 $F \subset \mathbb{Z}^d$ 和 $\Phi\colon \mathrm{A}^F \to \mathrm{B}$，使得对于每个 $x \in X$， $\phi(x)_{\vec{v}} = \Phi(\sigma^{-\vec{v}}(x)|_F)$。如果 ϕ 是自同态（即 $X = Y$），则称其为元胞自动机。若存在一个元胞自动机 ϕ^{-1}，使得 $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}$，则称元胞自动机可逆。众所周知，可逆性等价于双射性，参见 [8] 第 1.10 节。

本文始终采用以下受图灵机启发的记号。我们用$\Sigma = \{0、\ldots\ldots、 n-1\}$ 表示带符号集合，用 $Q = \{1、\ldots\ldots、 k\}$ 表示状态集合。我们还用符号$n = |\Sigma|$ 表示字母表的大小，用 $k = |Q|$ 表示状态数。给定一个形如$f\colon \Omega \to A_1 \times \ldots \times A_m$的函数，我们用 f_i 表示从 f到第 i个坐标的投影。

2. 图灵机群的两种模型

本节定义广义图灵机模型以及图灵机群。事实上，我们为这个群给出两种定义：一种采用移动读写头，另一种采用如 [25]所示的移动纸带。我们证明，除字母表平凡的情形外，这些群彼此同构。[1]此外，这两种模型既可以通过局部规则定义，也可以用“动态”的方式定义，即通过连续性和移位作用来定义。在移动纸带模型中，我们将可逆性刻画为对某个适当定义的测度的保持。

2.1. 移动头模型。 在移动头模型中，我们将空间表示为 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d$。也就是说，它是构型集合 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$、状态集合 Q 以及读写头可能位置 $\mathbb{Z}^d$的乘积。因此，该空间中的对象是三元组 $(x,\ q,\ \vec{v})$。为了简洁地表示，我们使用记号 $x_q^{\vec{v}}$代替 $(x,\ q,\ \vec{v})$。

给定一个函数

$$f\colon \Sigma^{F_{\mathrm{in}}} \times Q \to \Sigma^{F_{\mathrm{out}}} \times Q \times \mathbb{Z}^d,$$

其中 F_{in}， F_{out}是 $\mathbb{Z}^d$的有限子集，我们可以定义一个映射 $T_f\colon \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d \to \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d$如下：给定 $x_q^{\vec{v}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d$，令 $p = \sigma^{-\vec{v}}(x)|_{F_{\mathrm{in}}}$和 $f(p,\ q) = (\tilde{p},\ \tilde{q},\ \tilde{\vec{u}})$。接着我们定义 $T_f(x_q^{\vec{v}})\colon = \tilde{x}_{\tilde{q}}^{\vec{v}+\tilde{\vec{u}}}$，其中：

$$\tilde{x}_{\vec{u}} = \begin{cases} x_{\vec{u}} & \text{if } \vec{u} - \vec{v} \notin F_{\mathrm{out}} \\ \tilde{p}_{\vec{u}-\vec{v}} & \text{if } \vec{u} - \vec{v} \in F_{\mathrm{out}} \end{cases}$$

定义 2.1. 若函数 T满足存在一个 $f\colon \Sigma^{F_{in}} \times Q \to \Sigma^{F_{out}} \times Q \times \mathbb{Z}^d$，使得 $T = T_f$，则称其为一台移动头图灵机 $(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机，而 f 是它的局部规则。若存在一台$(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机 T^{-1}，使得 $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}$，则称 T是可逆的。

[1]请注意，由这两个定义得到的**动力学**实际上截然不同，如 [25, 26所示].

当 $d = 1$,$F_{\text{in}} = F_{\text{out}} = \{\vec{0}\}$ 和 $f_3(x, q) \in \{-1, 0, 1\}$ 对所有 x, q均成立时，该定义对应于采用移动头模型的经典图灵机。图1展示了移动头图灵机的运行方式。注意， $\sigma^{-\vec{v}}(x)|_F$ 是形状为 F、位于“ $\vec{v}$ 处”的图案。我们不写 $x|_{\vec{v}+F}$，因为我们希望从 x 读取的图案以 F 作为其定义域。

请注意，其中一台机器可以由多个不同的局部函数 f 定义，并且 f 的第三个分量具有有限值域。另外，给定 $f\colon \Sigma^{F_{\text{in}}} \times Q \to \Sigma^{F_{\text{out}}} \times Q \times \mathbb{Z}^d$，我们可以定义 $F := F_{\text{in}} \cup F_{\text{out}} \cup f_3(\Sigma^{F_{\text{in}}} \times Q)$ 和 $f'\colon \Sigma^F \times Q \to \Sigma^F \times Q \times F$，使得 $T_f = T_{f'}$。这启发了以下定义： T 的**最小邻域**是按包含关系而言的最小集合 F，使得存在 $f\colon \Sigma^F \times Q \to \Sigma^F \times Q \times F$，满足 $T = T_f$。这个最小集合总是存在，因为满足此定义的 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集构成的集合在交集运算下封闭。

由于 $\mathbb{Z}^d$ 是有限生成的，我们也可以用半径的数值定义来取代邻域：令 $B(\vec{v},\ r)$ 为满足 $|\vec{u} - \vec{v}| \leqslant r$ 的 $\vec{u} \in \mathbb{Z}^d$ 的集合。通过适当改变局部规则 f，我们总能选取 $F_{\text{in}} = B(\vec{0},\ r_i)$ 和 $F_{\text{out}} = B(\vec{0},\ r_o)$，其中某个 $r_i,\ r_o \in \mathbb{N}$，同时不改变其所定义的图灵机 T_f。这样的最小 r_i 称为 T 的**输入半径**，而最小的 r_o 称为 T 的**输出半径**。如果图灵机的输入半径为 -1，我们就说它不依赖输入，也就是说，邻域 $B(0^d,\ r_i)$ 可以替换为空集。所有 $\vec{v} \in f_3(\Sigma^F \times Q)$ 的 $|\vec{v}|$ 的最大值称为 T 的**移动半径**。最后，这三个半径中的最大值称为 T 的**半径**。按照这个术语，经典图灵机的输入半径和输出半径均为 0，移动半径为 1。

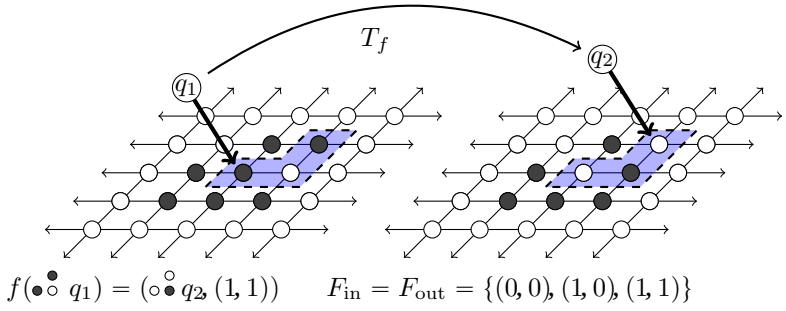


图1. 移动读写头机器 T_f 的作用。

定义 2.2. 我们用 $\mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 表示 $(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机的集合，并用 $\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$表示可逆 $(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机的集合。

在本文的某些部分中，我们只考虑 $d = 1$。此时，我们简化记号，只写作 $\mathbf{RTM}(n, k) := \mathbf{RTM}(\mathbb{Z}, n, k)$ 和 $\mathbf{TM}(n, k) := \mathbf{TM}(\mathbb{Z}, n, k)$。当然，我们希望 $\mathbf{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 在函数复合下构成一个幺半群，而 $\mathbf{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 构成一个群。事实确实如此，而且可以通过为可逆图灵机的逆以及两个图灵机的复合构造局部规则，直接证明这一点。不过，从下面将图灵机刻画为一种特殊元胞自动机的结果中推导出这一点会更容易。

令 X_k 为字母表为 $Q \cup \{0\}$ 的子移位，其中每个构型中非零符号的数量至多为一个。

$$X_k = \{x \in \{0, 1, \ldots, k\}^{\mathbb{Z}^d} : 0 \notin \{x_{\vec{u}}, x_{\vec{v}}\} \implies \vec{u} = \vec{v}\}.$$

在 $k = 1$ 的情况下，这个子移位通常称为**向阳子移位**。注意， $X_0 = \{0^{\mathbb{Z}^d}\}$ 由单个构型组成；对于非负整数 $i < j$，我们有 $X_i \subsetneq X_j$。

另外，令$X_{n,\ k} = \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times X_k$，回想一下，我们总是令 $\Sigma = \{0,\ \ldots,\ n-1\}$。对于 $d = 1$的情况，$X_{n,\ k}$ 中的构型表示一条由 Σ 中的符号填充的双无限磁带，其中可能包含一个处于 Q状态的读写头。注意，某个构型中可能没有读写头。

更准确地说，我们将$X_{n,\ k}$解释为通过将 $x_q^{\vec{v}} = (x,\ q,\ \vec{v}) \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d$ 与点 $(x,\ y)$ 等同，从而对 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d$进行紧化，其中 $y_{\vec{v}} = q$ 且对于 $\vec{u} \neq \vec{v}$有 $y_{\vec{u}} = 0$。现在，我们可以按以下方式将图灵机解释为作用在$X_{n,\ k}$ 上的函数：对于 $(x,\ y) \in X_{n,\ k}$，若不存在满足$y_{\vec{v}} \neq 0$的 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$，则 $T(x,\ y) := (x,\ y)$。否则，通过自然双射应用 T。

对于子移位 X，我们用 $\mathsf{End}(X)$ 表示 X 的自同态所构成的幺半群，用 $\mathsf{Aut}(X)$ 表示 X的自同构所构成的群。由前面的论证可知，图灵机恰好是作用在$X_{n,\ k}$ 上的元胞自动机，并且还满足以下性质："构型只在读写头附近被修改"。以下命题阐述了这一点。

命题 2.3。设 n、k 为正整数，且 $Y = X_{n,\ 0}$。则：

$$\mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k) = \{\phi \in \mathrm{End}(X_{n,k}) : \phi|_Y = \mathrm{id}, \phi^{-1}(Y) = Y\}$$
$$\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k) = \{\phi \in \mathrm{Aut}(X_{n,k}) : \phi|_Y = \mathrm{id}\}.$$

证明。考虑图灵机 $T \in \mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，将其视为定义在 $X_{n,\ k}$上的函数。直接计算可得，T 与移位可交换且连续，因此 $T \in \mathsf{End}(X_{n,\ k})$。此外，$T$ 在$X_{n,\ 0}$ 上平凡作用，因此 $T|_Y = \mathrm{id}$；若一个构型包含读写头，它只能被移位，而不会消失，因此$T^{-1}(Y) = Y$。此外，若 $T \in \mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，则 T有一个图灵机逆，因而有一个元胞自动机逆，由此可得 $T \in$自同构群$(X_{n,\ k})$。

反过来，设 $\phi \in \mathsf{End}(X_{n,\ k})$，于是 $\phi(x,\ y)_{\vec{v}} = \Phi(\sigma^{-\vec{v}}(x,\ y)|_F)$，其中某个局部规则 Φ: $(\Sigma \times \{0, \ldots, k\})^F \to \Sigma \times \{0, \ldots, k\}$，且 F是 $\mathbb{Z}^d$的一个有限子集；不妨设 $\vec{0} \in F$。

与 $\phi|_Y = \mathrm{id}$ 一样，我们可以推导出：若 $v = 0^F$，则 $\Phi(u,\ v) = (u,\ v)_{\vec{0}}$。因此，若 $(x,\ y) \in X_{n,\ k}$，并且我们定义 $W_{\vec{v}} = \{\vec{u} :\ \vec{v} \in \vec{u} + F\} = \vec{v} - F$，则可得 $\phi(x,\ y)|_{\mathbb{Z}^d \setminus W_{\vec{v}}} = (x,\ y)|_{\mathbb{Z}^d \setminus W_{\vec{v}}}$。我们通过对 Φ 逐点应用，将 Φ 扩展到 $\widetilde{\Phi}$：$(\Sigma \times \{0,\ \ldots,\ k\})^{W_{\vec{0}}+F} \to (\Sigma \times \{0,\ \ldots,\ k\})^{W_{\vec{0}}}$。注意，$W_{\vec{0}} = -F$。

随后，我们可以利用 $\widetilde{\Phi}$ 定义 f_ϕ：$\Sigma^{F-F} \times Q \to \Sigma^{-F} \times Q \times \mathbb{Z}^d$，如下：如果在定义 $r \in \{0,\ \ldots,\ k\}^{F-F}$（使得 $r_{\vec{0}} = q$ 且在其他位置为 0）之后，我们有 $\widetilde{\Phi}(p,\ r) = (p',\ r')$，并且 $r' \in \{0,\ \ldots,\ k\}^{-F}$ 在位置 $\vec{u}$ 处包含符号 $q' \neq 0$（由于 $\phi^{-1}(Y) = Y$，这样的位置 $\vec{u}$ 总是唯一的），我们便设定 $f_\phi(p,\ q) = (p',\ q',\ \vec{u})$。可以验证，图灵机 T_{f_ϕ} 恰好是 ϕ，因此 $\phi \in \mathsf{TM}(G,\ n,\ k)$。

若 $\phi \in \mathsf{Aut}(X_{n,\ k})$ 则 $\phi^{-1}(Y) \supset Y$可由 $\phi|_Y = \mathrm{id}$ 推出；又因为逆自同构 ϕ^{-1}也满足 $\phi^{-1}|_Y = \mathrm{id}$，所以我们还有 $\phi^{-1}(Y) \subset Y$。因此，ϕ 是图灵机。类似地，逆映射 ϕ^{-1} 也是图灵机。因此，在这种情况下 $\phi \in \mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$。□

或者，在前面的陈述中，我们也可以直接写成 $\mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k) = \{\phi \in \mathsf{End}(X_{n,\ k}) \mid \phi|_Y = \mathrm{id}\ \phi^{-1}(Y) \subset Y\}$，因为 $\phi^{-1}(Y) \supset Y$可由 $\phi|_Y = \mathrm{id}$ 推出。

推论 2.4. 设 $\phi \in \mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$。我们有，$\phi \in \mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 当且仅当 ϕ 是双射。

熟悉元胞自动机理论的读者可能会想知道，单射性是否已经足够，因为全移位上的单射元胞自动机都是满射的。但这一点并非显然，因为非传递 sofic移位（例如 $X_{n,\ k}$）上的元胞自动机可能是单射而非满射。不过，我们稍后将证明一个更强的结果：单射性和满射性都等价于双射性。

显然，命题 2.3 的条件在函数复合和求逆下保持不变。因此：

推论 2.5. 在函数复合下，$(\mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k), \circ)$ 构成一个幺半群，而 $(\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k), \circ)$ 构成一个群。

我们通常省略函数复合符号，并使用记号 TM$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 和 RTM$(\mathbb{Z}^d, n, k)$来表示相应的幺半群和群。

命题 2.3 的一个重要推论是，我们关于图灵机群所证明的每个结果，都对元胞自动机有所说明。特别地，如果群 H 嵌入 RTM$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$，那么H 也嵌入 Aut$(X_{n,\ k})$，这意味着存在一个一维 sofic 子移位，其自同构群包含 H。[2]

在定义图灵机的第二种模型之前，我们先介绍一种扩展模型，后文偶尔会用到该模型。给定一个子移位 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$，我们将满足 $f(X \times X_k) \subset X \times X_k$ 的移动读写头$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$-图灵机 f的集合记为 TM$(X,\ k)$（这里省略记号中的群，因为该群由 X 决定）。可逆图灵机的集合记为 RTM$(X,\ k)$。这一变化基本上相当于在定义中用任意子移位 X 替换全移位 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$。这样做是为了明确我们的结果需要 X 的哪些性质，不过我们关注的是 $X = \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 的情形，在该情形下 RTM$(\Sigma^{\mathbb{Z}^d},\ k)$ = RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 对于 $|\Sigma| = n$。命题 2.3 在这一扩展语境下仍然成立。

这一推广的一项用途是，它使我们能够在比全移位更稳健的一类子移位上研究图灵机。例如，只研究传递有限型子移位而非全移位上的图灵机时，可以消去状态，这得益于以下引理。

De定义 2.6. 设 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 是一个子移位，且 $\# \notin \Sigma$。用 $\sqrt[n]{X}$ 表示具有 *poin* 的移位空间 ts

$$\{x \in (\Sigma \cup \{\#\})^{\mathbb{Z}} : \textit{there are } k \in \{0, \dots, n-1\} \textit{ and } y \in X \textit{ such that for every } m \in \mathbb{Z},$$
$$(x_{mn+k} = y_m \textit{ and for every } j \in \{0, \dots, n-1\} \backslash \{k\} \textit{ we have } x_{mn+j} = \#)\}.$$

子移位 $\sqrt[n]{X}$ 是 $\mathbb{Z}$ 上构型所组成的空间，其中 X 的某个构型出现在 $n\mathbb{Z}$ 的一个陪集上，其余位置则填入特殊符号 #。

引理 2.7. 设 $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ 是一个子移位。那么，$\mathrm{TM}(X, k)$ 与 $\mathrm{TM}(\sqrt[k]{X}, 1)$ 作为幺半群同构，而 $\mathrm{RTM}(X, k)$ 与 $\mathrm{RTM}(\sqrt[k]{X}, 1)$ 作为群同构。

证明。 由于图灵机幺半群可以看作子移位自同态所构成的幺半群的子幺半群，因此其中的元素与移位可交换。更准确地说，对于每台机器 T 和 $\vec{m} \in \mathbb{Z}$，若将 T 视为通过自同态作用于 $X \times X_k$，则有 $\sigma^{\vec{m}} \circ T \circ \sigma^{-\vec{m}} = T$。特别地，由于 TM$(\sqrt[k]{X}, 1)$ 的每个构型中，非 # 符号之间的距离都有界，只需定义 $(\sqrt[k]{X} \backslash [\#]_0) \times \{1\} \times \mathbb{Z}$ 中的一台图灵机，就能完全确定其在 $\sqrt[k]{X} \times \{1\} \times \mathbb{Z}$ 上的作用。

令 $\psi\colon\ X \to \sqrt[k]{X}$ 定义为

$$\psi(x)_i = \begin{cases} \#, & \text{if } i \not\equiv 0 \bmod k, \text{ and} \\ x_{i/k}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，ψ 定义了一个到 $\sqrt[k]{X} \backslash [\#]_0$ 上的一一映射。

另外，通过 $\eta(\vec{v},\ q) = k\vec{v} + q - 1$ 定义 $\eta\colon\ \mathbb{Z} \times Q \to \mathbb{Z}$，显然这是双射。因此，我们最终可以通过 $\delta(x_q^{\vec{v}}) = \psi(x)^{\eta(\vec{v},\ q)}$ 定义一个双射 $\delta\colon\ X \times Q \times \mathbb{Z} \to (\sqrt[k]{X} \backslash [\#]_0) \times \{1\} \times \mathbb{Z}$。

现在，给定一台机器 $T \in$ TM$(\sqrt[k]{X},\ 1)$ 我们通过 $\varphi(T) = \delta^{-1} \circ T \circ \delta$ 定义 $\varphi(T) \in$ TM$(X,\ k)$。注意，这是定义良好的，因为 $T \in$ TM$(\sqrt[k]{X},\ 1)$ 意味着 $T(\sqrt[k]{X} \backslash [\#]_0 \times X_1) = \sqrt[k]{X} \backslash [\#]_0 \times X_1$ 会再次出现，这是因为非 # 符号以有界间隔出现；并且由于 T 是在读写头不出现的位置上的恒等映射。根据定义，显然 $\varphi(T \circ T') = \varphi(T) \circ \varphi(T')$，且 φ 是一一映射。我们只需证明 $\varphi(T) \in$ TM$(X,\ k)$ 以及 φ 是满射。

[2]在第 4.3 节中，我们证明了 RTM$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$ 也“几乎”嵌入到自同构群 $(\Sigma^{\mathbb{Z}})$ 中。8

首先，显然 $\delta^{-1}\circ T\circ\delta$ 将 $X\times Q\times\mathbb{Z}$ 映射到其自身，因此读写头不可能消失。我们有 $\delta\circ\sigma^{\vec{m}}=\sigma^{k\vec{m}}\circ\delta$，因此 $\varphi(T)$ 与移位交换。

$$\begin{aligned}\varphi(T)\circ\sigma^{\vec{m}}&=\delta^{-1}\circ T\circ\delta\circ\sigma^{\vec{m}}\\&=\delta^{-1}\circ T\circ\sigma^{k\vec{m}}\circ\delta\\&=\delta^{-1}\circ\sigma^{k\vec{m}}\circ T\circ\delta\\&=\sigma^{\vec{m}}\circ\delta^{-1}\circ T\circ\delta\\&=\sigma^{\vec{m}}\circ\varphi(T).\end{aligned}$$

由于 δ 和 T 是连续的，且 δ^{-1} 在 δ 的像上连续，因此 $\varphi(T)$ 是连续且移位不变的，从而定义了 $X\times X_k$ 的一个自同态；该自同态是 $\mathsf{TM}(X,\ k)$ 的一个元素。反过来，类似的论证表明，对于每个 $T\in\mathsf{TM}(X,\ k)$，映射 T' 定义为 $T'=\delta\circ T\circ\delta^{-1}$ 在 $\sqrt[k]{X}\setminus[\#]_0\times\{1\}\times\mathbb{Z}$ 上的映射（在其他点上则通过与 σ 的适当次幂共轭来定义），属于 $\mathsf{TM}(\sqrt[k]{X},\ 1)$，因此 $\varphi(T')=T$，这表明 φ 是满射。

最后，如果 $T\in\mathsf{RTM}(\sqrt[k]{X},\ 1)$，那么 $\varphi(T)\circ\varphi(T^{-1})=$ 为恒等映射，因此 $\varphi(T)\in\mathsf{RTM}(X,\ k)$。 □

2.2. **移动纸带模型**。尽管移动头模型在构造示例时很有帮助，但它存在一个根本性缺陷：机器作用的空间不是紧致的。直观地说，这意味着一列图灵机可能会将读写头移到无穷远处，使其消失。或者，从将图灵机视为自同态的角度来看，如命题 2.3 所述（通常，例如在 K˚urka [25], 中，这正是移动头模型所指的含义），空间是紧致的，但存在不可数多个并不完全代表图灵机构型的点。

还可以将图灵机的位置固定在 $\vec{0}$，转而移动纸带，从而得到移动带图灵机模型。在 [25], 研究图灵机作为动力系统时，移动头模型和移动纸带模型给出了非共轭动力系统。然而，由这两种观点定义的抽象幺半群最终是相同的，因此我们得到图灵机群的一个等价定义。

与上一节一样，我们从使用局部规则的定义开始。

给定一个函数 $f\colon\ \Sigma^{F_{\text{in}}}\times Q\to\Sigma^{F_{\text{out}}}\times Q\times\mathbb{Z}^d$，其中 F_{in}，F_{out} 是 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集，我们可以如下定义一个映射 $T_f\colon\ \Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q\to\Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q$：如果 $f(x|_{F_{\text{in}}},\ q)=(p,\ q',\ \vec{v})$，那么 $T_f(x,\ q)=(\sigma^{-\vec{v}}(y),\ q')$ 其中

$$y_{\vec{u}}=\begin{cases}x_{\vec{u}}, & \text{if } \vec{u}\notin F_{\text{out}}\\ p_{\vec{u}}, & \text{if } \vec{u}\in F_{\text{out}},\end{cases}$$

定义 2.8。任何函数 $T\colon\ \Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q\to\Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q$，若存在如上所述的 f，使得 $T=T_f$，则称其为一个移动纸带 $(\mathbb{Z}^d$、n、$k)$-图灵机，而 f 是其局部规则。如果存在一个 $(\mathbb{Z}^d$、n、$k)$-图灵机 T^{-1}，使得 $T\circ T^{-1}=T^{-1}\circ T=$ 恒等映射，则称 T 是可逆的。

这些机器还有以下一种刻画，带有一些动力系统的意味。若 x 和 y 在 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 中是**渐近**的，就记作 $x\sim y$；这表示存在一个有限的 $F\subset\mathbb{Z}^d$，使得 $x|_{\mathbb{Z}^d\setminus F}=y|_{\mathbb{Z}^d\setminus F}$。为了更具体地说明，我们写作 $x\sim_F y$，表示某个特定的 F 满足这一性质。

引理 2.9. 设 $T\colon\ \Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q\to\Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q$ 是一个函数。那么，当且仅当 T 是连续的，T 才是移动带图灵机；对于连续函数 $s\colon\ \Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q\to\mathbb{Z}^d$ 和有限的 $F\subset\mathbb{Z}^d$，我们有 $T_1(x,q)\sim_F\sigma^{s(x,q)}(x)$，对所有 $(x,\ q)\in\Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q$ 均成立。

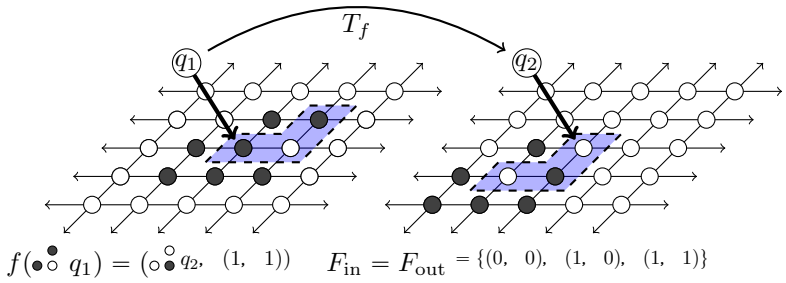


图 2。移动带机器 T_f 的作用。

证明. 容易看出，对于任意局部规则 $f\colon \Sigma^{F_{\text{in}}} \times Q \to \Sigma^{F_{\text{out}}} \times Q \times \mathbb{Z}^d$， T_f 是连续的。将 f 投影到第三个分量，便得到函数 $-s$；而 F 可以取作 T_f的最小邻域。

反之，由于 s 是从紧空间到离散空间的连续函数，我们可以断定 s 的像是有界的。此外，它只取决于 x 的一个有限坐标集 F_0。由于 T 是连续的，$T(x,\ q)|_{F+s(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q)}$ 只取决于 x 的一个有限坐标集 F_1。于是很容易提取出一个局部规则

$$f\colon \Sigma^{F_0\cup F_1} \times Q \to \Sigma^{F-s(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}\times Q)} \times Q \times \mathbb{Z}^d,$$

T。 □

我们将这些机器定义中的函数 s 称为 T 的**移位指示函数**，因为它表示纸带根据 $\vec{0}$ 周围的局部构型发生移位的幅度。在轨道等价和拓扑全群理论中，s 的类似物通常称为**余循环**。注意，在使用局部函数的定义中，像的第三个坐标表示读写头移动的幅度，而移位指示函数表示构型如何移位，因此在上述证明中 s 旁边有负号。

注 2.10。在前一个引理中，仅有 $T_1(x,q) \sim \sigma^{s(x,q)}(x)$ 对所有 $(x,q) \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$ 成立是不够的；我们需要这些构型彼此一致地渐近（其中 $F \subset \mathbb{Z}^d$ 固定）。事实上，令$Q = \{1\}$，并考虑由 $(T_1(x,\ 1))_i = x_{-i}$ 定义的函数 $T\colon \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q \to \Sigma^{\mathbb{Z}} \times Q$：若 $x_{[-|i|+1,|i|-1]} = 0^{2i-1}$ 且 $\{x_i, x_{-i}\} \neq \{0\}$，则取该值；否则取 $(T_1(x,1))_i = x_i$。显然，此映射是连续的，常值映射 $s(x,q) = \vec{0}$ 是它的一个移位指示函数，并且对每个 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 都有 $T_1(x,q) \sim x$。然而，T 不是由任何局部规则定义的，因为它可以在离原点任意远的地方任意修改纸带。

对于移动头机器，很容易看出（无论是通过构造局部规则，还是应用动力学定义），两个移动带图灵机的复合仍然是一个移动带图灵机。这使我们能够像之前一样继续定义它们的幺半群和群。

定义 2.11. 我们分别用 $\mathrm{TM}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 和 $\mathrm{RTM}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 表示移动纸带$(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机组成的幺半群，以及可逆移动纸带 $(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机组成的群。

现在，我们证明这两个模型在群论术语下是等价的。首先，我们定义自然的幺半群满同态 $\Psi\colon \mathbf{TM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k) \to \mathbf{TM}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，它将构型移位，使读写头保持在原点：

定义 2.12. 令 $T \in \mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$。我们将 $\Psi(T) \in \mathrm{TM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 定义为满足以下条件的移动带图灵机：

$$\Psi(T)(x, q) = (\sigma^{-\vec{v}}(y), r) \ when \ T(x_q^{\vec{0}}) = y_r^{\vec{v}}.$$

换言之，在移动头空间 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d$ 上定义平移等价关系 $\equiv$：对所有 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$、$q \in Q$ 和 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{Z}^d$，$x_q^{\vec{u}} \equiv \sigma^{\vec{v}}(x)_q^{\vec{u}+\vec{v}}$。那么，对于 $T \in \mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$，$\Psi(T)$ 是由 T 在商集 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \times \mathbb{Z}^d/\equiv$ 上诱导的作用。注意，对于任意两个 $\equiv$-等价类 U 和 V，若 $T(U) \subset V$，则 $T|_U \colon U \longrightarrow V$ 是一个双射。正如我们将看到的，这表明 Ψ 保持图灵机的单射性和满射性。

命题 2.13. *T 是单射（满射），当且仅当 $\Psi(T)$ 是单射（分别为满射）.*

证明。若 T 不是单射，则对某个 $c_1 \neq c_2$，有 $T(c_1) = T(c_2)$。由于 T 在每个 $\equiv$-等价类中都是单射，因此 $c_1 \not\equiv c_2$。于是存在两个不同的 $\equiv$-等价类，它们的像相同，因此 $\Psi(T)$ 不是单射。反过来，若 $\Psi(T)$ 将两个不同的 $\equiv$-等价类映射到同一个等价类中，则存在 $c_1 \not\equiv c_2$，使得 $T(c_1) \equiv T(c_2)$。由于 T 在 $\equiv$-等价类中是满射，因此存在 $c_1' \equiv c_1$，使得 $T(c_1') = T(c_2)$，故 T 不是单射。

如果 T 是满射的，那么显然每个 $\equiv$-类都有一个原像，因此 $\Psi(T)$ 是满射的。如果 $\Psi(T)$是满射的，那么每个 $\equiv$-类都有一个原像；又因为 T 在 $\equiv$-类上是满射的，所以每个 $\equiv$-类中的每个元素都有一个原像，也就是说，T 是满射的。□

函数 Ψ 显然始终是幺半群满同态。在平凡情形 n =1中，它不是单射的：事实上，我们有 $\mathrm{RTM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d, 1, k)$ 同构于作用在 k 个符号上的对称群，而 $\mathrm{TM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d, 1, k)$ 同构于从 $\{1, \ldots\ldots, k\}$ 到自身的所有函数构成的幺半群。因此，当 $n = 1$时，这两个群都是有限的。另一方面，显然 $\mathbb{Z}^d$ 嵌入 $\mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d, 1, k)$ 和 $\mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d, 1, k)$ 中，因为移位是这些群的非平凡元素。接下来，我们将证明在其他大多数情形下 Ψ 是单射的。

直观地说，为了使 $\mathbb{Z}^d$ 也嵌入移动带图灵机的幺半群，我们需要配置空间能够容纳具有一定程度无周期性的构型。我们将看到，这确实是唯一的障碍，并由此得到如下推论：对于每个 $n \geqslant 2$，映射 Ψ都是同构。

定义 2.14. 若子移位 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 满足以下条件，则称其为局部无周期的：对于每个 $x \in X$、每个有限 $F \subset \mathbb{Z}^d$ 以及每个非零 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$，都存在 $y \in [x|_F]$ 使得 $\sigma^{\vec{v}}(y) \neq y$。

例如，向阳子移位 $X_1 \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ 是局部无周期的，因为每个非空柱集都包含一个恰好有一个 1 的构型，而这样的构型不是周期的。但这意味着，定义 2.12 中的态射 Ψ 即使在局部无周期子移位上的可逆图灵机之间也未必是单射。例如，考虑单状态机器 $T \in \mathsf{TM}(X_1, 1)$ 它对某个固定的 $\vec{v} \in \mathbb{Z}$进行映射，

$$x_1^{\vec{0}} \mapsto \begin{cases} x_1^{\vec{0}}, & \text{if } x_0 = 0, \\ \sigma^{\vec{v}}(x)_1^{\vec{v}}, & \text{if } x_0 = 1. \end{cases}$$

如果读写头下方的单元格包含构型中唯一的 1，该机器就会将构型和位置移位 $\vec{v}$；如果该单元格包含符号 0，则不执行任何操作。显然，这个图灵机是可逆的，而且无论向量 $\vec{v}$ 如何选择，$\Psi(T)$ 都是单位元。

为了保证 Ψ 的单射性，我们定义一种限制更严格的局部无周期性变体 :

定义 2.15. 若对于每个 $x \in X$、每个有限$F \subset \mathbb{Z}^d$ 以及每个非零 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$，都存在 $y \in [x|_F]$，使得对于某个 $\vec{u}$，有 $y_{\vec{u}} \neq y_{\vec{u}+\vec{v}}\, \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \notin F$，则子移位 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 是强局部非周期的。

显然，只要 $n \geqslant 2$， $X = \{0, \ldots, n-1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 就是强局部非周期的。根据此定义，我们有以下结论。

引理 2.16。设 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 是强局部非周期的。则有

$$\mathrm{TM}_{\mathrm{fix}}(X,k) \cong \mathrm{TM}(X,k)$$
$$\mathrm{RTM}_{\mathrm{fix}}(X,k) \cong \mathrm{RTM}(X,k).$$

证明。再次考虑满同态 $\Psi\colon \mathbf{TM}(\mathbb{Z}^d,n,k) \to \mathbf{TM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d,n,k)$，并假设存在 $\mathbf{TM}(X,k)$ 中的一对 $T \neq T'$，使得 $\Psi(T) = \Psi(T')$。设 x_q^0 满足 $T(x_q^0) \neq T'(x_q^0)$。记 $W = F \cup F'$ 为 F 在 T 中的邻域与 F' 在 T' 中的邻域的并，则 T 和 T' 可由形如 $f_T(x|_W、 q) = (p、 r、 \vec{v})$ 以及 $f_{T'}(x|_W、 q) = (p'、 r'、 \vec{v}')$ 的规则描述。记 $x_{[p]}$ 和 $x_{[p']}$ 为这样的构型：将支撑 W 中 x 的符号分别替换为 p 和 p'。显然， $\Psi(T) = \Psi(T')$ 蕴含 $r = r'$ 和 $\sigma^{-\vec{v}}(x_{[p]}) = \sigma^{-\vec{v}'}(x_{[p']})$。

如果 $\vec{v} = \vec{v}'$，那么同样有$x_{[p]} = x_{[p']}$，这与$T(x_q^0) \neq T'(x_q^0)$相矛盾。因此我们必须有 $\vec{v} \neq \vec{v}'$。由于 X 是强局部非周期的，存在 $y \in [x|_W]$，使得对于满足 $\vec{u}$， $\vec{u} + \vec{v}' - \vec{v} \notin W$的某个位置$\vec{u}$，有$y_{\vec{u}} \neq y_{\vec{u}+\vec{v}'-\vec{v}}$。由于 $y|_W = x|_W$，我们有 $\Psi(T)(y,\ q) = (\sigma^{-\vec{v}}(y_{[p]}),\ r)$ 以及$\Psi(T')(y, q) = (\sigma^{-\vec{v}'}(y_{[p']}),\ r')$。于是 $\Psi(T) = \Psi(T')$意味着 $y_{[p]} = \sigma^{\vec{v}-\vec{v}'}(y_{[p']})$，但这在位置 $\vec{u}$并不成立。□

非平凡全移位 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 是强局部非周期的，因此引理 2.16 得出以下推论。

推论 2.17。若 $n \geqslant 2$ 则：

$$\mathrm{TM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d,n,k) \cong \mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d,n,k)$$
$$\mathrm{RTM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d,n,k) \cong \mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d,n,k).$$

前面的结果意味着，除去纸带不起作用的平凡情形 $n = 1$，我们可以使用任意模型来研究这些群的性质。

2.3. **均匀测度与可逆性**。考虑空间 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$。令 μ 为 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 上的均匀伯努利测度与 Q上的均匀离散测度的乘积。也就是说， μ 是满足以下条件的测度：对任意有限的 $F \subset \mathbb{Z}^d$ 和 $p \in \Sigma^F$，都有

$$\mu([p] \times \{q\}) = \frac{1}{kn^{|F|}}.$$

定理 2.18。设 $T \in \mathrm{TM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d、 n、 k)$。则以下命题等价：

(1) T 是单射。*(2)* T 是满射。*(3)* $T \in$ 可逆图灵机$_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d、 n、 k)$。*(4)* T 保持均匀测度（$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ 对所有博雷尔集 A均成立）。*(5)* $\mu(T(A)) = \mu(A)$ 对所有博雷尔集 A均成立。

证明。任取 T，令 F 为其最小邻域。考虑柱集 $C_i = [p_i] \times \{q\}$，其中 $p_i \in \Sigma^F$， $q \in Q$。这些柱集构成 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$ 的一个闭开划分，划分为 $kn^{|F|}$ 个测度为$\frac{1}{kn^{|F|}}$的柱集。

现在，由于 F是 T的最小邻域， T是从 C_i到 $D_i = T(C_i)$的同胚，而 D_i是形如 $[p'] \times \{q'\}$ 的柱集，其中 $p' \in \Sigma^{\vec{v}+F}$为某个 $q' \in Q$，因此它必须与 C_i 具有相同的测度，因为 p' 的定义域 $\vec{v} + F$ 与 p的定义域 F 具有相同数量的坐标。注意， D_i 不一定是以原点为中心的柱集，而偏移量 $\vec{v}$ 由移位指示器给出。现在观察可知，单射性等价于柱集 $D_i = T(C_i)$ 两两不相交。

也就是说，如果 T 是单射的，那么它们必须不相交；反之，如果它们不相交，那么 T 就是单射的，因为$T|_{C_i}$： $C_i \to D_i$ 是一个同胚。另一方面，满射性等价于 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q = \bigcup_i D_i$，因为 $\bigcup_i D_i = \bigcup_i T(C_i) = T(\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q)$。

现在，很容易证明单射性与满射性等价：如果 T 是单射的，那么 D_i 彼此不交，并且 $\mu(\bigcup_i D_i) = \sum_i \mu(D_i) = 1$，因此我们必有 $\bigcup_i D_i = \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$，因为$\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$ 是唯一一个具有全测度的既开又闭集。如果 T 不是单射的，那么对某个 $i \neq j$，我们有$D_i \cap D_j \neq \varnothing$。那么 $D = D_i \cap D_j$是一个非空的既开又闭集，因此其测度为正。由此可得 $\mu(\bigcup_i D_i) \leqslant \sum_i \mu(D_i) - \mu(D) < 1$，所以 $\bigcup_i D_i \subsetneq \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$。当然，由于单射性与满射性等价，它们也都等价于双射性，进而等价于 T 的可逆性。

上述论证实际上表明，可逆性等价于在正向意义上保持均匀伯努利测度——如果 T是可逆的，那么对于所有既开又闭集 A，都有 $\mu(T(A)) = \mu(A)$，因此对所有博雷尔集也成立；而如果 T不可逆，那么就存在柱集的一个不交并 $C \cup D$，使得 $\mu(T(C \cup D)) < \mu(C \cup D)$。

对于通常意义上的（逆向）保测性，请注意，可逆图灵机的逆机是可逆的，因此在正向意义下具有保测性，所以可逆图灵机自身必然在传统意义下具有保测性。如果 T不可逆，那么对于某些互不相交的柱集 C和 D，有 $\mu(T(C \cup D)) < \mu(C \cup D)$，其半径足够大，使得 $T|_C$和 $T|_D$是保测同胚。于是对于 $E = T(C) \cap T(D)$，我们有 $\mu(T^{-1}(E)) \geqslant \mu((T^{-1}(E) \cap C) \cup (T^{-1}(E) \cap D)) = 2\mu(E)$。□

注 2.19。 证明基于以下事实：每台图灵机都是**局部同胚**，并且在正向意义下保持所有大半径柱集 C的测度 $\mu(T(C)) = \mu(C)$。请注意，在一般情况下，在正向意义下保持大半径柱集的测度，并不意味着保持所有博雷尔集（甚至所有柱集）的测度。例如，对于任意满足 $S \supset F$的$p \in \Sigma^S$，具有 $n \geqslant 2$，$k = 1$的机器会将 $F = \{\vec{0}\}$ 中的符号变为 0，同时不移动读写头，并满足 $\mu([p]) = \mu(T[p])$。但是，$\mu(\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q) = 1$和 $\mu(T(\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q)) = \mu([0]) = 1/2$。

注记 2.20。 利用命题 2.13 和定理 2.18，我们看到，即使在移动头模型下，单射性和满射性也是等价的。

我们也可以使用均匀测度来定义图灵机的平均移动。

定义 2.21。 设 $T \in \mathrm{TM}_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 具有移位示性函数 s： $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q \to \mathbb{Z}^d$。我们将平均移动 $\alpha(T) \in \mathbb{R}^d$ 定义为

$$\alpha(T) := \mathbb{E}_\mu(s) = \int_{\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q} s(x, q) d\mu,$$

其中， μ 是 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$上的均匀测度。对于TM中的 $T(\mathbb{Z}^d, n, k)$，我们将 α 定义为其在典范满同态 Ψ 下的像上的应用，该典范满同态来自定义 *2.12*，即 $\alpha(T) := \alpha(\Psi(T))$。

当然，由于 $s(x, q)$ 只依赖于 x的有限多个坐标，因此该积分实际上是在柱集 $p \in \Sigma^F$ 上的有限求和，其中某个有限的 $F \subset \mathbb{Z}^d$，从而对于所有 T都有 $\alpha(T) \in \mathbb{Q}^d$。下面的引理表明，事实上 α 是一个同态。

引理 2.22。 映射 α：可逆图灵机$_{\mathrm{fix}}(\mathbb{Z}^d、\ n、\ k) \to \mathbb{Q}^d$ 是一个群同态。

Pro的。 如果 $T_1,\ T_2 \in$可逆图灵机$_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$那么，由于可逆性蕴含保测性，我们有 e

$$\begin{aligned}\alpha(T_1 \circ T_2) &= \mathbb{E}_\mu(s_{T_1 \circ T_2}) \\ &= \mathbb{E}_\mu(s_{T_1} \circ T_2 + s_{T_2}) \\ &= \mathbb{E}_\mu(s_{T_1} \circ T_2) + \mathbb{E}_\mu(s_{T_2}) \\ &= \mathbb{E}_\mu(s_{T_1}) + \mathbb{E}_\mu(s_{T_2}) \\ &= \alpha(T_1) + \alpha(T_2).\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}_\mu(s_{T_1 \circ T_2}) = \mathbb{E}_\mu(s_{T_1} \circ T_2 + s_{T_2})$成立，因为 $s_{T_1 \circ T_2}(x,\ q) = s_{T_1}(T_2(x,\ q)) + s_{T_2}(x,\ q)$对于所有$(x,\ q) \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times Q$均成立。□

3. 子群和生成元

本节研究 RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$的若干子群。本节的主要结果是，存在一个由有限个生成元生成的“初等图灵机”子群。在接下来的各节中，我们将展示，就纯粹的可计算性而言，这些机器能够模拟一般图灵机。

初等图灵机群 EL$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 是可逆图灵机的子群，由两个自然子群的并生成：LP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$, 即局部置换群；以及 RFA$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$, 即可逆有限状态自动机群。这两个群分别刻画了改变纸带和移动读写头的动力学。我们还将无条件图灵机群 OB$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 定义为 LP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 的扩展，其中允许任意与纸带无关的移动。

我们证明的关于这些子群的主要结果如下，其中 $n \geqslant 2$:

- RFA$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不是有限生成的（定理 3.5），
- RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不是有限生成的（定理 3.11）。
- RFA$(X,\ 1)$ 对于任意一维子移位，都由“逐轨道移位”和“受控位置交换”生成（定理 3.28），
- OB$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 是有限生成的（定理 3.18），
- EL$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$ 是有限生成的（定理 1.1）。

关于“逐轨道移位”和“受控位置交换”的定义，请参见第 3.3 节。对于任意具有移动读写头的图灵机类 CL$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，我们将相应的移动纸带机类记作 CL$_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，也就是该类在定义 2.12 中的态射 Ψ 下的像。

3.1. 子群的定义。

3.1.1. 无条件图灵机。 对于 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$，定义机器 $T_{\vec{v}}$：它不修改状态或纸带，并在每一步将读写头移动向量 $\vec{v}$。记作 SHIFT$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k) = \langle \{T_{\vec{v}}\}_{\vec{v} \in \mathbb{Z}^d} \rangle$。显然，SHIFT$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k) \cong \mathbb{Z}^d$。另外，定义 SP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 为**状态置换**：从不移动且仅根据纸带对其状态进行置换的图灵机。

定义 3.1。 我们将$\mathrm{LP}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 定义为局部置换 群，即$\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 中移位指示函数为平凡函数的图灵机子群，也就是说，该函数为常函数 $x \mapsto \vec{0}$。

我们还定义 $\mathrm{OB}(\mathbb{Z}^d, n, k) = \langle \mathrm{SHIFT}(\mathbb{Z}^d, n, k)、\mathrm{LP}(\mathbb{Z}^d, n, k) \rangle$，即无条件图灵机群。

换句话说，LP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 是不移动读写头的可逆机群，而 OB$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 是读写头移动与状态和纸带内容无关的可逆图灵机群。请注意，在这两个群的定义中，我们允许状态随纸带变化，也允许纸带随状态变化，因此 SP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k) \leqslant$ LP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$。

注 3.2. H 为有限群的限制花环积 $H \wr \mathbb{Z}^d$ 有时称为**广义提灯人群**，其中最初的提灯人群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$。因此，$\mathsf{OB}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$可视为双重广义提灯人群，因为由半径为 0 的局部置换 $\mathsf{LP}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ 1)$ 和 $\mathsf{SHIFT}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ 1)$ 生成的 $\mathsf{OB}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 子群同构于对称群 S_n的花环积 $S_n \wr \mathbb{Z}^d$。下文将证明，与提灯人群类似，$\mathsf{OB}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 也是有限生成的。

3.1.2. 有限状态自动机。

定义 3.3. 我们将$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 可逆有限状态自动机定义为不改变纸带的可逆 $(\mathbb{Z}^d, n, k)$图灵机所构成的群。也就是说，对于所有条目 $p \in \Sigma^F, q \in Q$，局部规则的形式为 $f(p, q) = (p, q', \vec{v})$。

类似地，对于子移位 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$，我们将 $\mathsf{RFA}(X, k)$ 定义为 $\mathsf{RTM}(X, 1)$ 中不改变纸带的机器所构成的子群。

从以下意义上说，这个群与 $\mathsf{OB}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ “正交”：

$$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k) \cap \mathrm{LP}(\mathbb{Z}^d, n, k) = \mathrm{SP}(\mathbb{Z}^d, n, k)$$
$$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k) \cap \mathrm{OB}(\mathbb{Z}^d, n, k) = \langle \mathrm{SP}(\mathbb{Z}^d, n, k), \mathrm{SHIFT}(\mathbb{Z}^d, n, k) \rangle$$

注记 3.4. 根据定义可直接得出，群 $\mathsf{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, 1)$ 同构于 $\mathbb{Z}^d$个符号上的完整 $\mathbb{Z}^d$移位的拓扑全群，该群的定义见 [15]。类似地，若固定一个子移位 X，则 $\mathsf{RFA}_{\mathrm{fix}}(X, 1)$ 同构于 X上的移位作用的拓扑全群。只有当 X 不是强局部非周期时，才需要下标“fix”；参见引理 2.16。

通常，$n = 1$ 的情形并没有特别的趣味性，而且我们有 $\mathsf{RFA}(\mathbb{Z}^d, \mathbf{1}, k) = \mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d, \mathbf{1}, k)$。一般情况下，这个群则更有趣。

定理 3.5. 设 $n \geqslant 2$。那么 $\mathrm{RFA}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}, n, k)$ 不是有限生成的。

证明。 我们在移动纸带模型中证明这一点。对于 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$，令 $\mathsf{Per}_{\vec{v}}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d})$ 为 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 的构型集合，其中在移位作用下的稳定子包含 $\vec{v}\mathbb{Z}^d$。令 $\mathbb{Z}_{\geqslant 2}$ 为整数集合 $t \geqslant 2$。令 $\phi\colon \mathsf{RFA}_{\mathrm{fix}}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}, n, k) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}_{\geqslant 2}}$ 为奇偶同态，其中 $\phi(T)_t$是置换 T在有限集 $\mathsf{Per}_{(t,t,\ldots,t)}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d}) \times Q$上作用所产生的符号。

由于有限生成群在同态下的像也是有限生成的，只需证明 $\phi(\mathsf{RFA}_{\mathrm{fix}}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d},\ n,\ k))$ 不是有限生成的。因此，只需证明对于任意有限 $m \geqslant 2$，$\phi(\mathsf{RFA}_{\mathrm{fix}}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d},\ n,\ k))$ 到 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\{2,\ldots,m\}}$ 的限制是满射的。由此显然可知，$\phi(\mathsf{RFA}_{\mathrm{fix}}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d},\ n,\ k))$ 不是有限生成的。

设 $t \geqslant 2$ 和 $\vec{v} = (t,\ t,\ \ldots\ldots,\ t) \in \mathbb{Z}^d$。设 T_t 是这样一台机器：在状态 $q \neq 1$ 下其作用为平凡作用；若 $q = 1$，则进行如下操作：令 $\vec{e} = \vec{e}_1 = (1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0,\ 0)$ 为第一个标准基向量。对于 $\vec{u} \in \mathbb{Z}^d$，令 $A_{\vec{u}} = \vec{u} + \{0,\ \ldots\ldots,\ t-1\} \times \cdots \times \{0,\ \ldots\ldots,\ t-1\}$。于是，在构型 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 上，

- 如果将 x 限制在 $A_{\vec{0}}$ 上所得的构型包含唯一一个位于 $\vec{0}$的 $\mathbf{1}$，且其他位置均为 $\mathbf{0}$，则将构型移位 $-\vec{e}$；
- 如果将 x 限制在 $A_{\vec{e}}$ 上所得的构型包含唯一一个位于 $\vec{e}$的 $\mathbf{1}$，且其他位置均为 $\mathbf{0}$，则将构型移位 $\vec{e}$；
- 否则不执行任何操作。

机器 T_t 是一个对合，因此是可逆的。由此构造可得，$\phi(T_t)_t = 1$ 且对所有 $2 \leqslant t' < t$，$\phi(T_t)_{t'} = 0$。

现在，令 $y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\{2,\dots,m\}}$。令 $M_1 =$ 为恒等映射。对 $2 \leqslant j \leqslant m$ 迭代构造

$$M_j = \begin{cases} M_{j-1} & \text{if } y_j = \phi(M_{j-1})_j \\ T_j \circ M_{j-1} & \text{if } y_j \neq \phi(M_{j-1})_j \end{cases}$$

由于 ϕ 是一个同态，因此可得 $\phi(M_m) = y$，所以 $\phi(\mathbf{RFA}_{\text{fix}}(\Sigma^{\mathbb{Z}^d},\ n,\ k))$到 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\{2,\dots,m\}}$ 的限制是满射。□

我们将介绍一种看待有限状态机的新视角，称为**置换模型**。该模型有助于在后续证明初等图灵机是有限生成的。在这个模型中，我们为 $\mathbf{RFA}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 中的每个图灵机都关联一个 $(\Sigma \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Q)^{\mathbb{Z}^d}$的自同构。这种对应关系的核心思想是：给定 $T \in \mathbf{RFA}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，每个构型 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 都会在 $\mathbb{Z}^d \times Q$上诱导一个作用；也就是说，指向 $\mathbb{Z}^d$ 中某个位置、处于状态 q的读写头，在应用 T后会移动到 $\mathbb{Z}^d \times Q$ 中的一个新位置和状态对。由于 T是可逆的，它会在 $\mathbb{Z}^d \times Q$ 上诱导一个置换。该置换可以同时作用于任意数量的读写头，而这些读写头又可以表示为 $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Q)^{\mathbb{Z}^d}$中的一个构型。我们将在以下命题的证明中精确说明这种嵌入。

命题 3.6。 群 $\mathrm{RFA}_{fix}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 嵌入到 自同构群$(A^{\mathbb{Z}^d})$ 中，其中 $|A| = n2^k$。

证明。 注意，任意一对 $(T, x) \in \mathbf{RFA}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d, n, k) \times \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 都会在 $\mathbb{Z}^d \times Q$上诱导一个置换 $\sigma_{T,x}$。具体而言，令 s 为 T的移位指示函数，并令

$$\sigma_{T,x}(\vec{v}, q) = (\vec{v} - s(\sigma^{-\vec{v}}(x), q), T_2(\sigma^{-\vec{v}}(x), q))$$

我们将 A 视为字母表 $\Sigma \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Q$，因此 $A^{\mathbb{Z}^d}$ 的构型可以看作一对$(x, y) \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Q)^{\mathbb{Z}^d}$。

最后，令 φ: $\mathbf{RFA}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d, n, k) \to \mathbf{Aut}(\mathbf{A}^{\mathbb{Z}^d})$ 为由 $\varphi(T) = \phi_T$定义的映射，其中：

$$(\phi_T)_1(x, y)_{\vec{v}} = x_{\vec{v}},$$

$$(\phi_T)_2(x, y)_{\sigma_{x,T}(\vec{v},q)} = 1 \text{ if and only if } y_{(\vec{v},q)} = 1.$$

也就是说， ϕ_T不会修改 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d}$纸带；对于每个标记为 1 的位置 $(\vec{v}, q) \in \mathbb{Z}^d \times Q$，我们将其解释为处于状态 q、位于位置 $\vec{v}$ 的图灵机读写头，并在像中标记应用 T后它最终所处的状态和位置。显然，这是 $\Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times ((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^Q)^{\mathbb{Z}^d}$上的一个元胞自动机，因为 T 的移位指示函数具有有限半径。

我们断言， φ 是一个嵌入。直接计算表明，由 $T_1 \circ T_2$诱导的置换正是 $\sigma_{T_1,\ x} \circ \sigma_{T_2,\ x}$ 从而说明 φ 是一个同态。现在，若 $T_1 \neq T_2$ 存在某一对 $(x,\ q)$使得它们的作用不同。考虑构型 $(x,\ y)$ 其中 $y_{0^d,\ q} = 1$ 而其他位置均为 0。显然， $\phi_{T_1}(x,\ y) \neq \phi_{T_2}(x,\ y)$。因此， φ是单射。□

定义 3.7。 对于任意 $T \in \mathrm{RFA}_{fix}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 通过上一证明中的嵌入得到的自同构 $\phi_T \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d \times Q}$ 称为 T的置换模型。

置换模型具有在第二分量上线性的显著性质。也就是说，给定 $T \in \mathbf{RFA}_{\text{fix}}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 及其置换模型 $\phi(T)$，对于任意 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ 和$y,\ z \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d \times Q}$，我们有

$$\phi_T(x, y + z) = (x, (\phi_T)_2(x, y) + (\phi_T)_2(x, z)),$$

其中的和按坐标逐项计算。

已知，任意非平凡全移位的自同构群都嵌入到任意不可数 sofic 移位的自同构群中 [32]。因此我们得到以下推论：

推论 3.8。 如果 X 是一个不可数 *sofic* $\mathbb{Z}$-子移位，那么$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}, n, k)$ 嵌入到自同构群(X)中。特别地，对于任意 $|\mathcal{A}| \geqslant 2$，$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}, n, k)$ 嵌入到自同构群$(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ 中。

3.1.3. 初等图灵机。

定义 3.9. 初等图灵机$\mathrm{EL}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 是由有限状态机和局部置换生成的群，即

$$\mathrm{EL}(\mathbb{Z}^d, n, k) := \langle \mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k), \mathrm{LP}(\mathbb{Z}^d, n, k) \rangle.$$

初等图灵机群由不改变纸带或不移动读写头的机器生成，其目的是使用简单的构件来近似群 $\mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 。换句话说，它可以被理解为一类足够丰富的图灵机，这些图灵机能够由简单的基本单元构造而成。例如，朗顿蚂蚁 [27] 是 $\mathsf{EL}(\mathbb{Z}^2,\ 2,\ 4)$中的一个机器示例。

显然，群 $\mathsf{LP}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不是有限生成的，因为它是局部有限且无限的。我们还证明了 $\mathsf{RFA}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不是有限生成的，并且很快将证明 $\mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不是有限生成的。不过，后面我们将证明 $\mathsf{OB}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 和 $\mathsf{EL}(\mathbb{Z},\ n,\ k)$ 都是有限生成的。

在研究这些机器之前，我们先证明 $\mathsf{RTM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不是有限生成的。此证明使用第 2.3 节中定义的平均移动同态 α 。

引理 3.10。

$$\alpha(\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)) = \left\langle \frac{e_i}{kn^j} : j \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, d\} \right\rangle \leqslant (\mathbb{Q}^d, +)$$

证明。考虑由局部函数 f 给出的 $(\mathbb{Z}, n, k)$-图灵机 $T_{\mathtt{SURF},m}$： $\Sigma^{\{0,\ldots,m\}} \times Q \to \Sigma^{\{0,\ldots,m\}} \times Q \times \mathbb{Z}$，其定义如下：对于 $a \in \Sigma$ 和 $q < k$，令 $f(0^m a, q) = (0^m a, q+1, 0)$ 和$f(0^m a, k) = (a0^m, 1, 1)$。否则，$f(u, q) = (u, q, 0)$。此机器是可逆的，并且满足$\alpha(T_{\mathtt{SURF},m}) = 1/kn^m$。很容易将此机器扩展为平均移动为 $(1/kn^m, 0, \ldots, 0)$, 的 $(\mathbb{Z}^d, n, k)$-图灵机；类似的构造可得到在其他坐标上具有完全相同移动的图灵机。因此我们得到

$$\left\langle \frac{e_i}{kn^j} : j \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, d\} \right\rangle \leqslant \alpha(\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)).$$

为得到这一等式，注意到定义平均移动的积分是关于柱集的有限和，每个柱集的贡献都是一个整数向量，而柱集的测度属于由 $\frac{1}{kn^j}$ 生成的群。因此， α(可逆图灵机$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$) 中的每个元素都可以写成$\frac{e_i}{kn^j}$的有限和。□

上述同态 α 对 (可逆图灵机$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$) 的像在 $n \geqslant 2$ 时不是有限生成的，因此我们得出结论：当 $n \geqslant 2$ 时，可逆图灵机$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 不能有限生成。

定理 3.11. 对于 $n \geqslant 2$，群 可逆图灵机$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 不是有限生成的。

尽管 α 不是 $\mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 上的同态，但利用定理 2.18，我们可以得出 $\mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$也不能有限生成。

定理 3.12。 对于 $n \geqslant 2$ 幺半群 $\mathrm{TM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 并非有限生成。

证明。 设 $T \in$可逆图灵机$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$。由于 T 是单射的，我们得出，如果 $T = T_n \circ \cdots \circ T_1$，那么 T_1 也是单射的。根据定理 2.18，这意味着 T_1 是可逆的，进而推出 T_2 是单射的，依此类推。因此，如果 $\mathsf{TM}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 由 S 生成，那么存在 $S' \subset S$ 使得

该 $\langle S' \rangle =$ 可逆图灵机$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$。但是，根据定理 3.11，所有这样的 S' 都是无限的，因此 S 也必定是无限的。□

在本节余下部分中，我们将研究 EL$(\mathbb{Z}^d、\ n、\ k)$ 与 RTM$(\mathbb{Z}^d、\ n、\ k)$之间的差距有多小。我们还将为每个 $\mathbb{Z}$-子移位 X给出一个自然的 RFA$(X、\ k)$ 无限生成集。之后我们将证明 EL$(\mathbb{Z}、\ n、\ k)$是有限生成的，这意味着 EL$(\mathbb{Z}、\ n、\ k)$ 严格包含于 RTM$(\mathbb{Z}、\ n、\ k)$中。不过，我们先给出一个简单的证明，该证明适用于任意维数。

命题 3.13。令 $\frac{1}{k}\mathbb{Z} = \{\frac{n}{k} \mid n \in \mathbb{Z}\}$。我们有

$$\alpha(\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k)) = \alpha(\mathrm{EL}(\mathbb{Z}^d, n, k)) = \left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^d.$$

特别地，$\mathrm{EL}(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 严格包含于 $\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d, n, k)$。

证明。显然，对每个 $T \in$ LP$(\mathbb{Z}、\ n、\ k)$，都有 $\alpha(T) = 0$，因此第一个等式成立。接下来考察有限状态自动机的平均移动值。机器 T_j 每一步都将状态加 1（对状态数取模），并在进入状态 1 时沿第 j 个轴移动一步，其平均移动为 $\alpha(T_j) = (0、\ \ldots\ldots、\ 0、\ 1/k, 0, \ldots, 0)$。于是我们得到

$$\left(\frac{1}{k}\mathbb{Z}\right)^d = \langle \alpha(T_j) L j \leqslant d \rangle \leqslant \alpha(\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k)).$$

接下来，我们证明对于每个有限状态机 T，都有 $\alpha(T) \in (\frac{1}{k}\mathbb{Z})^d$。为此，考察 T 在全零构型上的行为。给定一个固定状态 q，T 会移动整数向量 $\vec{v}_q$，因而对平均移动的贡献为 $\frac{1}{k}\vec{v}_q$。令 $\vec{v} = \sum_{q \in Q} \frac{1}{k}\vec{v}_q$ 表示 T 在全零构型上的平均移动。

我们断言 $\alpha(T) = \vec{v}$。注意，通过将 T 与机器 T_j 及其逆的适当组合复合，只需在 $\vec{v} = \vec{0}$ 的情况下证明这一点。现在，取一个足够大的 m，令 $p \in \Sigma^{\{-m,\ldots,m\}^d}$ 为一个图案，$\vec{u} \in \{-m, \ldots, m\}^d$ 为一个位置，$q \in Q$ 为一个状态。将 p 补全为构型 $x_p \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$：在 $\{-m, \ldots, m\}^d$ 之外的每个单元格中都写入 0。用 $\alpha_m(T)$ 表示 T 在 p, u, q 的有限种选择下的平均移动。形式上，若 s_T 是 T 的移位指示函数：

$$\alpha_m(T) = \frac{1}{k(2m+1)^d n^{(2m+1)^d}} \sum_{p,u,q} s_T(\sigma^{-\vec{u}}(x_p), q).$$

作为 $m \to \infty$，很容易证明 $\alpha_m(T) \to \alpha(T)$，因为 T 的移动向量在除边界处以外的所有位置上都正确分布；该边界会随着 $o(m^d)$ 而增长 $\{-m,\ \ldots,\ m\}^d$。

另一方面，对于任意固定的 $p \in \Sigma^{\{-m,\ldots,m\}^d}$，从随机状态和随机位置开始时，$T$ 在 x_p 上的平均移动为 $\vec{0}$，即

$$\sum_{u,q} s_T(\sigma^{-\vec{u}}(x_p), q) = \vec{0}.$$

这是由以下事实得出的：$T \in$ RFA$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，因此该作用只是对位置-状态对集合的一个置换；此外，$\vec{v} = \vec{0}$。由此我们得出，限制在 $u \in \{-m,\ \ldots,\ m\}^d$ 上的和为 $o(m^d)$。因此，$\alpha(T) = \lim \alpha_m(T) = \vec{0}$。□

3.2.**无条件图灵机群是有限生成的**。在本节中，我们证明 OB$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 是有限生成的。我们的证明基于存在用于 A^m 的置换的强通用可逆门；对于二元字母表情形，这些门可见于 [1, 38]，并在 [7]中推广到了其他字母表。我们需要 $Q \times \Sigma^m$ 的置换的一个有限生成集，因此必须调整 [7] 中的证明，以考虑非齐名字母表大小（也就是说，因为可能存在 $n \neq k$）。

我们先指出，$n=1$ 的情形是平凡的：群 LP($\mathbb{Z}^d$，1，k) 是有限的，而 SHIFT($\mathbb{Z}^d$，1，k) 由单步移动生成。因此，我们假设 $n \geqslant 2$。

以下结果已在 [7]（引理 3 和引理 5）中证明：

引理 3.14。设 $H=(V,E)$ 是一个连通无向图。

（*a*）对于 $\{s,t\} \in E$，对换 $(s\ t)$ 生成 $\mathrm{Sym}(V)$，即顶点集上的置换集。（*b*）设 $\Delta \subset \mathrm{Sym}(V)$ 是 V 上的一个置换集，对于每条边 $\{s,t\} \in E$，该置换集都包含一个 *3*-轮换 $(x\ y\ z)$，其中 $\{s,t\} \subset \{x,y,z\}$。则 Δ 生成 交错群(V)，即顶点集上的偶置换集。

设 $m \geqslant 1$，并考虑 $Q \times \Sigma^m$ 的置换。**受控交换** 是对换 $(s\ t)$，其中 $s,\ t \in Q \times \Sigma^m$ 的汉明距离为 1。**受控 3- 轮换** 是置换 $(s\ t\ u)$，其中三对之间的汉明距离分别为 1 、 1 和 2。

分别用 $C_m^{(2)}$ 和 $C_m^{(3)}$ 表示 Sym$(Q \times \Sigma^m)$ 中的受控交换和 3-轮换集合。令 $H=(V,\ E)$ 为顶点集为 $V=Q \times \Sigma^m$、边集为 $\{s,\ t\}$ 的图，其中边连接汉明距离为一的元素 s 和 t。这是一个连通无向图，因此由引理 3.14(b) 可知，受控 3-轮换生成其所有偶置换：

引理 3.15。设 $n \geqslant 2$ 和 $m \geqslant 1$。群 交错群$(Q \times \Sigma^m)$ 由 $C_m^{(3)}$ 生成。

设 $\ell \leqslant m$，且 f 是 $Q \times \Sigma^\ell$ 的一个置换。我们可以对 $Q \times \Sigma^m$ 的 $1+\ell$ 个坐标（包括第一个坐标）应用 f，同时保持其他 $m-\ell$ 个坐标不变。更准确地说，f 在 $Q \times \Sigma^m$ 上的 **前缀^应用** f 定义为

$$\hat{f}(q,s_1,\ldots,s_\ell,\ldots,s_m)=(f_1(q,s_1,\ldots,s_\ell),\ldots,f_{\ell+1}(q,s_1,\ldots,s_\ell),s_{\ell+1},\ldots,s_m),$$

$\hat{}$ 在前 $1+\ell$ 个坐标上应用 f。要将它应用到其他坐标上，我们使用符号重布线对 f 进行共轭。对于任意置换 $\pi \in$ Sym$(\{1,\ldots,m\})$，我们将 $Q \times \Sigma^m$ 的**重布线** 置换定义为

$$r_\pi : (q,s_1,\ldots,s_m) \mapsto (q,s_{\pi(1)},\ldots,s_{\pi(m)}).$$

它根据 π 对 m 个带符号的位置进行置换。现在，我们可以通过重布线对前缀应用 $\hat{}\ f$ 进行共轭，得到 $\hat{}\ f_\pi = r_\pi^{-1} \circ \hat{}f \circ r_\pi$；我们称 $\hat{}\ f_\pi$ 为 f 在坐标 $\pi(1),\ldots,\pi(\ell)$ 上的**应用**。记

$$[f]_m = \{\hat{f}_\pi \mid \pi \in \mathrm{Sym}(m)\},$$

$Q \times \Sigma^m$ 的置换集中，由 f 应用得到的置换所组成的集合。对于置换集 P，我们用 $[P]_m$ 表示 $[f]_m$ 在所有 $f \in P$ 上的并集。

注意，如果 n 为偶数且 $f \in$ Sym$(Q \times \Sigma^\ell)$ 对 $\ell < m$ 成立，那么 $[f]_m$ 只包含偶置换。原因是，未参与 f 应用的坐标上带有偶字母表 Σ 中的一个符号。因此，应用 $[f]_m$ 由偶数个奇偶性相同的不相交置换组成，所以结果是偶置换。相反，出于类似原因，如果 n 为奇数，那么只要 f 本身是一个奇置换，$[f]_m$ 就只包含奇置换。

引理 3.16。设 $m \geqslant 6$，并设 $G_m = \langle [C_4^{(2)}]_m \rangle$为由 $Q \times \Sigma^m$上的 $Q \times \Sigma^4$ 的受控交换生成的群。若 $n=|\Sigma|$ 为奇数，则 $G_m = \mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^m)$。若 n 为偶数，则 $G_m =$ 交错群 $(Q \times \Sigma^m)$。

证明。对于偶数 n，根据上面的注释，$[C_4^{(2)}]_m \subset$ 交错群$(Q \times \Sigma^m)$；对于奇数 n，$[C_4^{(2)}]_m$中存在奇置换。因此，两种情况下只需证明交错群$(Q \times \Sigma^m) \subset G_m$。我们还注意到，显然，$[G_{m-1}]_m \subset G_m$。

根据图3中的分解，我们首先得出，任意受控 3-循环 f 对 $Q \times \Sigma^m$而言，都是由 $Q \times \Sigma^{m-2}$的受控交换操作复合四次得到的。图中， $Q \times \Sigma^m$ 的各个分量已排列在平行水平线路上， Q分量位于最上方的三条线路之一。参照图中的符号，左侧的门是一个一般的 3-循环$(pszabcdw\ ptzabcdw\ qszabcdw)$，其中前三条线路之一是 Q分量， a， b， c， $d \in \Sigma$ 和$w \in \Sigma^{m-6}$。所提出的分解由两个不同的受控交换 p_1 和 p_2 组成，并按顺序 $f = p_1p_2p_1p_2$ 各应用两次。由于 p_1 和 p_2 是对合，除非输入具有 $xyzabcdw$ 的形式，否则该分解的结果为单位元，其中 $x \in \{p,\ q\}$ 和 $y \in \{s,\ t\}$。当输入具有这种形式时，很容易验证右侧的电路确实实现了所需的 3-循环。由此得出，对于所有 $m \geqslant 6$，$C_m^{(3)} \subset \langle [C_{m-2}^{(2)}]_m \rangle$。根据引理 3.15，

$$\mathrm{Alt}(Q \times \Sigma^m) = \langle C_m^{(3)} \rangle \subset \langle [C_{m-2}^{(2)}]_m \rangle. \tag{1}$$

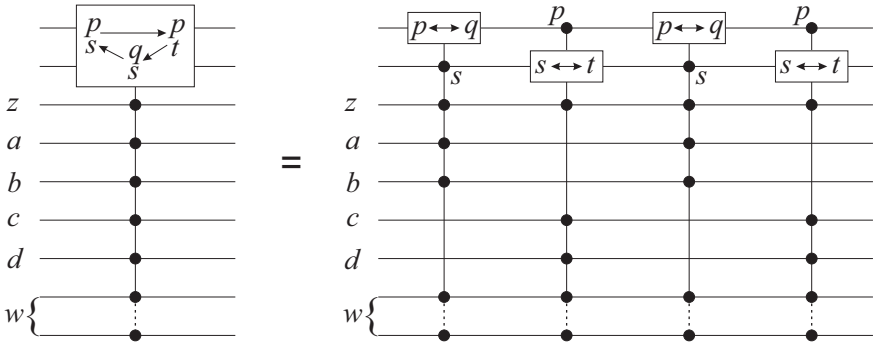


图3。将左侧的 $Q \times \Sigma^m$ 受控3-循环分解为右侧的 $Q \times \Sigma^{m-2}$ 四次受控交换依次作用。导线的排列方式是：最上方三条导线包含 Q-分量，以及被 3-循环改变的两条导线（其中一条可能是也可能不是 Q-分量）。黑色圆点表示控制点：除非导线携带导线左侧或控制点旁标出的符号，否则该门执行单位元。

我们对 m进行归纳法。基础情形 $m = 6$ 显然：由 (1) 可得，

$$\mathrm{Alt}(Q \times \Sigma^6) \subset \langle [C_4^{(2)}]_6 \rangle = G_6.$$

现在考虑 $m > 6$，并假设 G_{m-1} 如所述成立。如果 n 是奇置换，那么由归纳假设可得，

$$[C_{m-2}^{(2)}]_m \subset [\mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^{m-1})]_m \subset [G_{m-1}]_m \subset G_m.$$

于是由 (1) 可知 $\mathrm{Alt}(Q \times \Sigma^m) \subset \langle [C_{m-2}^{(2)}]_m \rangle \subset G_m$。如上所述， G_m 包含奇置换（ $[C_4^{(2)}]_m$ 的所有元素都是奇置换），因此 $G_m = \mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^m)$，如所述。

如果 n 是偶的，那么对 $Q \times \Sigma^m$ 应用 $Q \times \Sigma^{m-2}$ 的一个置换，也等同于对 $Q \times \Sigma^m$应用 $Q \times \Sigma^{m-1}$ 的一个偶置换。（因此，我们在图3右侧的门中留出了两条非控制线。）由此及归纳假设，

$$[C_{m-2}^{(2)}]_m \subset [\mathrm{Alt}(Q \times \Sigma^{m-1})]_m \subset [G_{m-1}]_m \subset G_m,$$

因此，由（1）可得所需的交错群$(Q \times \Sigma^m) \subset G_m$。 □

推论 3.17。 $[\mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^m)]_{m+1} \subset \langle [\mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^4)]_{m+1} \rangle$ 对所有 $m \geqslant 5$。

证明。 如果 n 是偶置换，则 $[\mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^m)]_{m+1} \subset \mathrm{Alt}(Q \times \Sigma^{m+1})$；如果 n 是奇置换，则 $[\mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^m)]_{m+1} \subset \mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^{m+1})$。无论哪种情况，该结论都可由引理 3.16 和 $C_4^{(2)} \subset \mathrm{Sym}(Q \times \Sigma^4)$ 得出。□

在推论 3.17 中， $Q \times \Sigma^m$ 的任意置换都作为 $Q \times \Sigma^{m+1}$的置换的投影获得。额外的符号是一个辅助位，可以具有任意初始值，并在最后恢复为该值。这种辅助位在 [38]中被称为“借用位”。当 n 为偶置换时，需要它来协助实现 $Q \times \Sigma^m$的奇置换。

现在我们可以证明以下定理了。

定理 3.18. 无知图灵机群$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 是有限生成的。

证明. 我们构造一个有限生成集 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$。令 A_1 包含针对 $i = 1$ 的单步移动 $T_{e_i}, \ldots, d$。显然，这些生成 SHIFT$(\mathbb{Z}^d, n, k)$。

每个 $T \in$ 局部置换群$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 都由一个局部规则 f 定义： $\Sigma^F \times Q \to \Sigma^F \times Q \times \{\vec{0}\}$，其中包含有限个 $F \subset \mathbb{Z}^d$。为了保证单射性，显然需要 π： $(p, q) \mapsto (f_1(p, q), f_2(p, q))$ 是 $\Sigma^F \times Q$ 的一个置换。我们记作 $T = P_\pi$。任取一个大小为 4 的 $E \subset \mathbb{Z}^d$，并令 A_2 为由 $\pi \in$ Sym$(\Sigma^E \times Q)$ 确定的所有 $P_\pi \in$ 局部置换群$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 的集合。

对于任意具有有限支撑的 α $\mathbb{Z}^d$的置换，我们定义单元置换机 C_α： $(p,\ q) \mapsto (p',\ q)$，其中对于所有 $\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$均有 $p'_{\vec{v}} = p_{\alpha(\vec{v})}$。显然，这些机器属于 LP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$。我们令 A_3 由满足以下条件的单元置换机构成：对于每个 $i = 1,$ ....., d，交换当前扫描的单元格与偏移量为 e_i 的相邻单元格中的内容。

注意， A_1 和 A_3 生成所有单元置换机 C_α。首先，将 C_i 与 $T_{\vec{v}} \in$ SHIFT$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 共轭，可得到对应于对换 $\alpha = (\vec{v}\ \vec{v} + e_i)$ 的单元置换机 $C_\alpha = T_{\vec{v}}^{-1} C_i T_{\vec{v}}$。此类对换生成所有具有有限支撑的 $\mathbb{Z}^d$ 的置换：根据引理 3.14(a)，考虑一个包含该置换支撑的有限连通网格图即可得到这一结论。

于是考虑任意一个 $P_\pi \in$ LP$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，其中 $\pi \in$ Sym$(\Sigma^F \times Q)$。我们可以放心地假设 $|F| \geqslant 5$。取一个辅助位 $v \in \mathbb{Z}^d \backslash F$ 并记 $F' = F \cup \{v\}$。根据推论 3.17， P_π 是由类型为 P_ρ 的机器复合而成的，其中 $\rho \in$ Sym$(\Sigma^H \times Q)$，且 $H \subset F'$ 的大小为 $|H| = 4$。因此，只需能够生成这些机器即可。设 α 是 $\mathbb{Z}^d$ 的一个置换，它交换 E 和 H，这两个集合的基数均为四。于是 $C_\alpha^{-1} P_\rho C_\alpha \in A_2$，这意味着 P_ρ 由 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$生成。□

3.3. 任意一维子移位上的有限状态自动机的生成元。 本节将证明，尽管有限状态自动机在一维满移位上不是有限生成的，但有限状态自动机群在每个一维子移位上都有一个自然的生成集。

我们将证明，该群的一个生成集由两类对象组成：一类是平移轨道的阿贝尔群（秩可能无限），它是平均移动的一种抽象化概念；另一类是平均移动为零的元素集合，由“受控位置交换”生成，其思想与上一节中的受控交换相似。我们将针对拓扑全群（单个状态）证明这一结果，并利用引理 2.7 将其推广到多个状态的情形。

关于极小系统的拓扑全群，已有类似结果（例如参见 [29, 16]）。主要的额外问题在于平均移动，而在我们的主要应用——全移位——中，平均移动实际上并不适用。研究拓扑全群时通常会假设无周期性，但周期点不会造成任何问题；唯一的小问题是，如果缺乏强局部无周期性，我们可能没有 RFA$_{\text{fix}}(X,\ k) \cong$ RFA$(X,\ k)$。我们研究 RFA$(X,\ k)$，并认识到，在我们实际关注的所有情形中，这些群都是相同的。

如前所述，我们首先证明，在任意 $\mathbb{Z}$子移位上，都存在平均位移同态的一种自然推广，它能够分别测量每个轨道上的平均移动。当 $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 时，这个同态与平均移动 α 重合；而在极小子移位上，它对应于为拓扑全群 [15] 定义的指标映射。

本节的结果将高度依赖于我们的子移位是一维的这一事实。我们的指标映射类比将基于统计某个区间左右两侧的读写头数量，而这种方法不易直接推广到多维情形。

在本节余下部分，设 X 表示一个一维子移位。在本节中，我们记作 $\mathrm{RFA}(X)=\mathrm{RFA}(X,\ 1)$。我们可以将移位 σ 视为由 $\sigma(x_1^i)=x_1^{i-1}$定义的 $\mathrm{RFA}(X)$ 中的一个元素。

令 $\sim_n'$ 为定义在 X 上出现的长度为 n 的字的语言 $L_n(X)$ 上的关系，其定义为：$u\sim_n' v$ 当且仅当存在 $x\in X$，使得 u 和 v 出现在 x中。令 $\sim_n$ 为 $\sim_n'$的传递闭包。对于由每个 $n\in\mathbb{N}$对应的 $\sim_n$ 所诱导的等价关系，我们记作 $\sim\ \sim_n$。

定义 3.19. 若对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $u,\ v\in L_n(X)$都有 $u\sim v$，则子移位 $X\subset\Sigma^{\mathbb{Z}}$ 是弱链传递的。

我们使用前缀“弱”来区分这一概念与文献中其他（更强的）链传递性概念，例如 [24]中提出的概念。

对于任意子移位 X，令 $X\subset\prod_n L_n(X)/\sim_n$ 为 X 在因子映射 $\pi(x)_n=\widehat{}x_{[0,n-1]}/\sim_n$ 下的像。将 X 视为带有平凡 $\mathbb{Z}$-作用的动力系统，很容易看出$\widehat{}\pi$：$X\to X$ 是一个因子映射：$x_{[0,n-1]}\sim x_{[-1,n-2]}$ 对所有 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 均成立，因此 $\pi(\sigma(x))=\pi(x)=\mathrm{id}(\pi(x))$。注意，$X$ 弱链传递当且仅当 X 是单元素集。

回顾定义 2.6，对于给定的子移位 $X\subset\Sigma^{\mathbb{Z}}$，我们定义子移位 $\sqrt[k]{X}\subset(\Sigma\cup\{\#\})^{\mathbb{Z}}$，其中 X 的构型出现在 $k\mathbb{Z}$ 的某个陪集中，所有其他位置均填入符号 #。

引理 3.20. 设 X 是弱链传递子移位，则 $\sqrt[k]{X}$ 弱链传递。

证明。设 u',v' 是 $\sqrt[k]{X}$中长度相同的两个字。于是，适当延长 u' 和 v' 后，我们可以将它们写成以下形式的字 u'' 和 v'' 的子词

$$u'\sqsubset u''=\#^{n-1}u_1\#^{k-1}u_2\#^{k-1}u_3\cdots u_n\#^{k-1},$$

$$v'\sqsubset v''=\#^{k-1}v_1\#^{k-1}v_2\#^{k-1}v_3\cdots v_n\#^{k-1},$$

其中 $n\in\mathbb{N}$ 为某个元素，u,v 是 $L_n(X)$中的字。由于 X 是弱链传递的，存在有限链 $u=w_0\sim w_1\sim\cdots\sim w_k=v$，使得对于所有 i，w_i 和 w_{i+1} 都出现在 X 的同一个点中。于是，将 w_i 对应地交错排列后，便得到一条连接 u'' 与 v''的链，进而得到连接u' 与 v'的链。□

定义 3.21。若对每个 $x\in X$ 都存在$k\in\mathbb{Z}$ 使得以下条件成立，则称 $T\in\mathrm{RFA}(X)$ 是一个逐轨道移位

$$T(x_1^i)=x_1^{i-k}\ for\ every\ i\in\mathbb{Z}.$$

抽象逐轨道移位是一个连续函数 $f\colon X\to\mathbb{Z}$，满足对所有$x\in X$都有 $f(x)=f(\sigma(x))$。分别用$\mathrm{OS}(X)$ 和$\mathrm{AOS}(X)$ 表示逐轨道移位群和抽象逐轨道移位群。

注意，逐轨道移位构成 $\mathrm{RFA}(X)$ 的一个子群，而抽象逐轨道移位在逐点加法下构成一个群。一般而言，逐轨道移位群远小于 $\mathrm{RFA}(X)$。例如，$\mathrm{OS}(X)$ 总是阿贝尔的，而可以证明 $\mathrm{RFA}(X)$ 可能包含一个由两个生成元生成的自由群，参见例如 [11] 或 [4]。

引理 3.22. 抽象逐轨道移位恰好是满足以下条件的连续函数 $f\colon X\to\mathbb{Z}$：它们经由因子分解 $\widehat{}X$，也就是说，$f=g\circ\pi$ 存在某个连续映射 $g\colon X\to\mathbb{Z}$。

证明。假设对于某个 g，有 $f=g\circ\pi\colon X\to\mathbb{Z}$。那么，$f$ 作为两个连续函数的复合是连续的，并且

$$f(x)=g(\pi(x))=g(\pi(\sigma(x)))=f(\sigma(x)),$$

因此 f 是一个抽象逐轨道移位。

^另一方面，如果 $f\colon X \to \mathbb{Z}$ 连续且 $f(x) = f(\sigma(x))$，那么由公式 $g(\pi(x)) = f(x)$ 给出的映射 $g\colon X \to \mathbb{Z}$ 对所有 $x \in X$ 都定义良好：反设不然，且 $\pi(x) = \pi(y)$ 和 $f(x) \neq f(y)$。由于 f 连续而 X 紧致，$f(z)$ 只取决于 z 的有限个坐标；也就是说，存在 n，使得只要 $z_{\{-n,\dots,n\}} = z_{\{-n,\dots,n\}}$，就有 $f(z) = f(z')$。由于 $\pi(x) = \pi(y)$,$u = x_{\{-n,\dots,n\}}$ 和 $v = y_{\{-n,\dots,n\}}$ 由一条有限链 $u = w_0 \sim w_1 \sim \cdots \sim w_k = v$ 相连，且对所有 $0 \leqslant i < k$，w_i 和 w_{i+1} 出现在 X 的同一构型中。

由于 f 的像由中心 $2n+1$ 坐标上的限制决定，我们可以将这个唯一值记为 $n_i = f(w_i)$。现在，由于对于所有 $z \in X$ 都有 $f(z) = f(\sigma(z))$，很容易看出，事实上对于所有 i 都有 $n_i = n_{i+1}$；只需沿着连接字 w_i 和 w_{i+1} 的点的轨道移动即可。这说明 g 定义良好。此外，由于 f 的像由中心 $2n+1$ 坐标上的限制决定，因此很容易推出 g 是连续的。□

现在我们来定义指标映射的对应物。设 $T \in \mathrm{RFA}(X)$，并令 $\phi := \phi_T$ 为其置换模型，因此 ϕ 是 $X \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ 的自同构。设 $r \in \mathbb{N}$ 满足 ϕ 的双半径有界于 r（即，作为自同构，ϕ 和 ϕ^{-1} 的半径的最大值有界于 r）。设 $u \in L(X)$ 满足 $|u| \geqslant 4r$，并令 $(x,\ y) \in X \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ 为一个构型，其中

(1) $x|_{\{0,\dots,|u|-1\}} = u$**(2)** $y_m = 1$ 当且仅当 $r \leqslant m < |u| - r$。

回想一下，自同构 ϕ 保持数值 $|y^{-1}(1)|$不变，因此 $\phi_2(x,\ y)$ 也有 $|u| - 2r$ 个读写头。我们定义

$$L_\phi(u) = |\phi(x,y)^{-1}(1) \cap \{0,\dots,2r-1\}| - r \text{ and } R_\phi(u) = |\phi_2(x,y)^{-1}(1) \cap \{|u|-2r,\dots,|u|-1\}| - r.$$

非正式地解释这个定义最为直观。计算应用 ϕ 后，坐标 $2r$ 左侧（不含该坐标）的读写头数量，并将其记为 $L^*_\phi(u)$。令 $R^*_\phi(u)$ 为坐标 $|u|-2r$ 右侧（含该坐标）的读写头数量。显然有 $L^*_\phi(u) + R^*_\phi(u) = 2r$，因为 ϕ会置换任意构型上的读写头，而且其双半径为 r，所以 $[2r,\ |u| - 2r - 1]$ 中的坐标都包含读写头。于是 $L_\phi(u) = L^*_\phi(u) - r$ 和 $R_\phi(u) = R^*_\phi(u) - r$ 满足 $L_\phi(u) + R_\phi(u) = 0$。若要查看 ϕ 为移位平方所关联的置换模型时的示意图，请参见图 4。

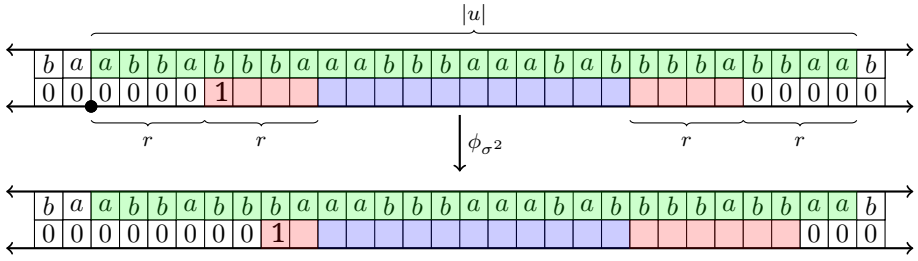


图 4。对于 $T = \sigma^2$，其置换模型 ϕ_{σ^2} 将头向右移动两次。如果我们选择 $r = 4$，可以观察到红色区域的总和为 $2r$，蓝色区域保持不变，$L_\phi(u) = -2$ 以及 $R_\phi(u) = 2$。

定义3.23。设 X 是一个 $\mathbb{Z}$子移位，$T \in \mathrm{RFA}(X)$，且 ϕ 是其置换模型。X 与 T 的头部索引映射 是映射 $H_T\colon\ X \to \mathbb{Z}$，定义如下

$$H_T(x) = \lim_{n\to\infty} L_\phi(x|_{\{0,\dots,n-1\}}).$$

注意，函数 H_T 定义良好，因为 L_ϕ 的值在 $n \geqslant 4r$ 之后趋于稳定，其中 r 是 ϕ 的双半径。还值得注意的是，选择任何大于双半径 r 的值 r' 都不会改变该值。事实上，由于 ϕ 只会置换有限半径内的头，任何位于 $2r'$ 左侧且距离超过双半径的头，必然仍位于 $2r'$ 左侧，因此不会改变值 $L_\phi(u) = L^*_\phi(u) - r'$，因为差值 $r' - r$ 已在 $L^*_\phi(u)$ 上计入。

引理 3.24。令 X 为一个 $\mathbb{Z}$-子移位。对于任意 $T \in \mathrm{RFA}(X)$，我们都有 $H_T \in \mathrm{AOS}(X)$，且由 $\gamma(\phi_T) = H_T$ 定义的映射 $\gamma\colon \mathrm{RFA}(X) \to \mathrm{AOS}(X)$ 是一个同态。该同态以 $\beta\colon \mathrm{AOS}(X) \to \mathrm{RFA}(X)$ 为截面，其中 $\beta(f)(x) = \sigma^{f(x)}(x)$ 定义了该截面；并且 $\beta(\mathrm{AOS}(X)) = \mathrm{OS}(X)$，因此 β 给出了 $\mathrm{AOS}(X)$ 与 $\mathrm{OS}(X)$ 之间的一个同构。

证明。考虑置换模型中作用于 $X \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ 且双半径为 r 的任意 ϕ。我们首先断言，如果 $|u| \geqslant 4r$ 且 $au \sqsubset X$，那么 $L_\phi(au) = L_\phi(u)$。为说明这一点，注意到除最左侧的新头之外的所有头都与之前完全相同地映射，因此 $R^*_\phi(au) = R^*_\phi(u)$。由于对于每个 $v \in L(X)$ 都有 $R^*_\phi(v) + L^*_\phi(v) = 2r$，我们得出 $L^*_\phi(au) = L^*_\phi(u)$，从而 $L_\phi(au) = L_\phi(u)$。对称地，可以证明 $L_\phi(ua) = L_\phi(u)$。

现在假设 $u,\ v \sqsubset x \in X$。令 $w \sqsubset x$ 为一个同时包含 u 和 v 的任意词，并反复应用上一段的观察，得到 $L_\phi(u) = L_\phi(w) = L_\phi(v)$。由此可知，对于所有 x，都有 $H_T(x) = H_T(\sigma(x))$。函数 H_T 是连续的，因为经过 $n > 4r$ 后，极限便稳定下来。我们得出结论：$H_T \in \mathrm{AOS}(X)$。

为了证明 $\gamma(T) = H_T$ 是同态，我们需要关于 L_ϕ 的以下更强结论：固定 $m \in \mathbb{N}$，令 $(x,\ y) \in X \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}$ 为一个构型，其中 $x_{[0,\ |u|-1]} = u$，且 $|u| \geqslant m + 4r$；再令 $y = \ldots 000.0^r v 1^{|u|-|v|-r} 000\ldots$，其中 $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ 是任意一个长度为 m 的词。那么，$\phi_2(x,\ y)|_{\{0\ldots\ldots m+2r-1\}}$ 中的头数为 $|v^{-1}(1)| + r + H_T(x)$。要看出这一点，只需填补 v 中的空隙（将其中的 0 符号改为 1 符号）。每一步中，像中的头数都会增加一个，而且新增的头总是位于 $\{0、\ldots\ldots、 m + 2r - 1\}$ 中的坐标上，因为 ϕ 的双半径为 r。填补 v 中的空隙后，根据 L_ϕ 的定义，$\phi_2(x,\ y)|_{\{0\ldots\ldots m+2r-1\}}$ 中有 $m + r + H_T(x)$ 个头。

现在，可以通过先在 x 中一个较长词 u 的左侧作用 $\phi' = \phi_{T'}$（将读写头适当地放置在 u 的坐标上），再对所得的分散读写头集合施加 $\phi = \phi_T$，来完成对 $\gamma(T \circ T')(x)$ 的计算。由上一段可知，γ 是一个同态，也就是说，对所有 $x \in X$，都有 $\gamma(T \circ T')(x) = \gamma(T)(x) + \gamma(T')(x)$。映射 β 本质上由 $\mathrm{AOS}(X)$ 的定义良好定义，并且显然是 γ 的一个截面。□

如前所述，同态 γ 推广了定义在拓扑全群元素上的指标映射。众所周知，在极小情形下，指标映射的取值属于 $\mathbb{Z}$。这对所有弱链传递子移位也成立，因为对于弱链传递子移位，其最大不变符号因子是平凡的。

Le引理 3.25。如果 X 是弱链传递的，那么其逐轨道移位恰好就是移位。

^证明。由于 X 是单元素集，引理 3.22 表明 $\mathrm{AOS}(X) \cong \mathbb{Z}$，因此根据 β 的定义，$\beta \circ \gamma$ 必定将 $\mathrm{RFA}(X)$ 的每个元素映射为 σ 的某个幂。□

前述引理成立的一个显而易见的示例是全 $\mathbb{Z}$-移位 $\Sigma^{\mathbb{Z}}$。给定任意 $T \in \mathrm{RFA}_{\mathrm{fix}}(X)$，我们可以将 T 与逐轨道移位复合，从而使每个轨道上的平均移动都为零，也就是说，得到 $T \in \mathrm{RFA}_{\mathrm{fix}}(X)$，使得 $\gamma(T)$ 恒等于零。因此，唯一剩下的问题是找到一种方法，生成 $\mathrm{RFA}_{\mathrm{fix}}(X)$ 中所有在任意轨道上平均移动均为零的元素。

定义 3.26. 设 $u, v \in \Sigma^*, a \in \Sigma$。可逆有限状态自动机 $T = T_{u,a,v} \in \mathrm{RFA}(X)$称为受控位置交换，如果 $T((xu.avy)_1^j) = (xu.avy)_1^{1-j}$对于 $j \in \{0, 1\}$成立，并且对于所有 $z \in X \times X_1$，若其像未由这些规则确定，则 $T(z) = z$。

引理 3.27。设 u、$v \in \Sigma^*$、$a \in \Sigma$。当 uav 为非一元时（即 $uav \notin \{a\}^*$），受控位置交换 $T_{u,\ a,\ v}$ 定义良好且属于$\mathrm{RFA}(X)$。

证明。当 uav 为非一元时，柱集 $[u.av]$ 与 $[ua.v]$ 的交集为空。因此，读写头移动所依据的条件互不重叠，有限状态机 $T_{u,\ a,\ v}$ 定义良好。显然，它是一个对合，因而可逆。□

更一般地，给定一个既开又闭集 $C \subseteq X$，我们定义映射 $T_C \in \mathrm{RFA}(X)$，称其为**闭开集受控位置交换**。

$$T_C(x_1^i) = \begin{cases} x_1^{i+1} & \text{if } \sigma^{-i}(x) \in C \\ x_1^{i-1} & \text{if } \sigma^{-i+1}(x) \in C \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

如上所述，对于满足 $C \cap \sigma(C) = \varnothing$的任意既开又闭集 C，这些映射都是定义良好的。由于既开又闭集可以写成有限个柱集的并集，任意这样的 T_C都可以表示为有限个受控位置交换的复合。

定理 3.28。设 X 是一个子移位。那么$\mathrm{RFA}(X)$ 由逐轨道移位和受控位置交换生成。

证明。对于 $T \in \mathrm{RFA}(X)$，令 $P_T \subset \{(0,\ 0)\} \cup \mathbb{Z}_+^2$ 为所有满足以下条件的配对 $(m,\ k)$ 的集合：存在$x \in X$ 和 $i \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $0 \leqslant j < k$都有 $T(x_1^{i+j}) = x_1^{i+j+m}$。按字典序排列这些配对（$m$的优先级更高）。其序型是 $1 + \omega^2 \cong \omega^2$的一个子序，因此是良序的。现在只需证明，只要 T 的平均移动量为零，

(1) P_T 有一个极大元素 M_T；(2) 若 $M_T > (0,\ 0)$，则存在受控位置交换 T'，使得 $M_{T \circ T'} < M_T$；(3) 当且仅当 $M_T = (0,\ 0)$时，T是恒等映射。

也就是说，根据良基性，通过迭代第二项，我们必须在有限步内到达 $(0,\ 0)$，而根据第三项，我们已经到达恒等映射。

现在固定 $T \in \mathrm{RFA}(X)$。为证明最大值 $M_T = (m,\ k)$ 存在，首先注意到 $P_T \neq \varnothing$ 由于$(0,\ 0) \in P_T$。接下来，对于 $(m,\ k) \in P_T$，T的局部规则显然给出了 m的有限上界。最后，如果 m 是极大的，并且 $(m,\ k) \in P_T$对于任意大的 k都成立，那么 $m > 0$（因为根据选择有 $P_T \subset \{(0,\ 0)\} \cup \mathbb{Z}_+^2$），由紧致性可知，存在一个构型 $x \in X$，使得对所有 $i \in \mathbb{Z}$都满足 $T(x_1^i) = x_1^{i+m}$，因此 x 上的平均移动显然非零。

现在假设 $M_T = (m,\ k) > (0,\ 0)$。现在，令 $C \subset X$为满足 x使得$\forall i \in [-k+1,\ 0]$的构型集合：$T(x_1^i) = x_1^{i+m}$。注意到 $x \in C \implies T(x_1^1) = x_1^{1+j}$，其中 $j \leqslant m-2$，即$j \leqslant m-1$根据 k的极大性成立，而 $j = m-1$将与 T的双射性矛盾。显然，C是一个既开又闭集，并且 $C \cap \sigma(C) = \varnothing$，因为 $k > 0$。令 $T' = T_C$。

现在考虑任意一点 $x \in X$ 和 $i \in \mathbb{Z}$。

(1) 如果 $\sigma^{-i}(x) \notin C$和 $\sigma^{-i+1}(x) \notin C$，那么 $(T \circ T')(x_1^i) = T(x_1^i)$。(2) 如果 $\sigma^{-i}(x) \in C$，那么 $(T \circ T')(x_1^i) = T(x_1^{i+1})$。(3) 如果 $\sigma^{-i+1}(x) \in C$，那么 $(T \circ T')(x_1^i) = T(x_1^{i-1})$。

将 $y, z \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$定义为 $y_i = j$，其中 $T(x_1^i) = x_1^{i+j}$，且 $z_i = j$，其中 $(T \circ T')(x_1^i) = x_1^{i+j}$。$y$ 与 z 之间的区别恰恰在于，所有形式为 $m^k j \in \mathbb{Z}^{k+1}$ 的子序列都被替换为

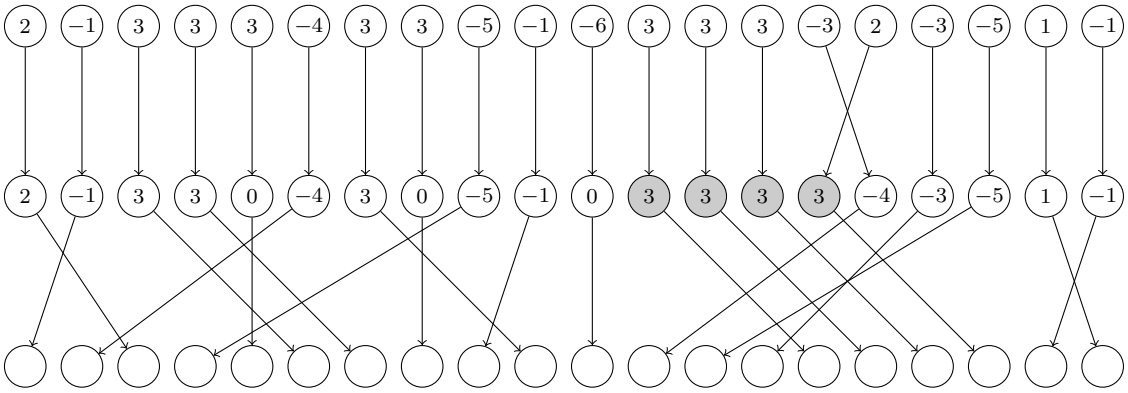


图5。 $T \circ T'$ 与 $m = 3$、 $k = 4$的复合。展示了置换模型中构型 x 上读写头的移动情况，节点上的值分别为 y （中间行）和 z （顶行）的值。构成 m^k 的四个节点已突出显示。构型 x 决定了这些移动，但未显示其内容。

$m^{k-1}(j+1)(m-1)$。由于 $j \leqslant m-2$， m 的游程会严格缩短，且不会引入大于 m的符号，因此需要 $M_{T\circ T'} < M_T$。图5给出了一个示例。□

注记3.29。 在上述证明中，只有关于非零平均移动和逐轨道移位的部分关键性地依赖于 X的性质。其他部分则不依赖于此：如果 $T \in \mathrm{RFA}(Y)$， T 的平均移动为零（在 Y上），并且 $X \subset Y$，那么可以规范地完成证明中的所有选择，使得将 T 分解为 Y 上的受控位置交换，然后限制到 X ，等价于先限制到 X ，再在 X上应用我们的构造。

让我们使用引理 2.7，在状态数多于一个的情形下推导出一些推论。如果 $k \geqslant 2$，那么回忆一下，$\mathrm{RTM}(X,k)$ 与 $\mathrm{RTM}(\sqrt[k]{X},1)$ 之间的同构，只是利用#线段上的不同位置来编码状态。因此，使读写头沿着由#符号组成的连续线段向右移动一步，就对应于将状态加一。将读写头从最右侧的#符号移到其右侧的非#符号，意味着将状态改为1并向右迈进一步。

因此，将前述结果翻译成如下表述：设 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 是一个局部无周期子移位，且 $k \geqslant 2$。对于 u, $v \in \Sigma^*$ 以及 $q \in \{1, \ldots, k-1\}$，定义**受控状态交换** $f_{u,\ q,\ v} \in \mathrm{RFA}_{\mathrm{fix}}(X,\ k)$ 如下：

$$f_{u,q,v}(x,q') = (x,q'')$$

其中，若 $q' \notin \{q,\ q+1\}$ 或若 $x_{\{-|u|,\ldots,|v|-1\}} \neq uv$，则 $q'' = q'$；否则令 $q'' \in \{q,\ q+1\}\backslash\{q'\}$。对于$u,\ v \in \Sigma^*,\ a \in \Sigma$，定义**有状态受控位置交换** 为 $f(xu.avy,\ k) = (xua.vy,\ 1)$并且$f(xua.vy,\ 1) = (xy.avy,\ k)$对所有尾部 $x,\ y$成立；对于不属于此形式的所有点，令 $f(z) = z$。对于所有 u, v ，这都是定义良好的对合（因为 $k \geqslant 2$）。

推论 3.30. 设 X 是一个弱链传递的局部无周期子移位，并且 $k \geqslant 2$。那么$\mathrm{RFA}(X,k)$ 由移位映射、受控状态交换和有状态受控位置交换生成。

3.4. 初等图灵机群是有限生成的。 在本节中，我们证明定理 1.1。也就是说，我们证明对于任意 n, $k \geqslant 1$ ，群 $\mathrm{EL}(\mathbb{Z},n,k)$ 是有限生成的。

定理 *1.1* 的证明。 $n = 1$ 的情形很简单。因此，设 $n \geqslant 2$。令 $X = \Sigma^{\mathbb{Z}}$。由于 $\mathrm{OB}(X)$ 是有限生成的，且 $\mathrm{OS}(X) = \langle\sigma\rangle$，我们只需证明受控位置交换可以

在 $k=1$ 时实现，而有状态受控位置交换和受控状态交换可以在 $k \geqslant 2$ 时实现。我们采用固定头模型。

首先，假设 $k=1$。令 $s_\ell = T_{\epsilon,\ 1,\ 0^\ell}$。通过与无知图灵机群 (X) 中的一个元素作共轭，这些交换可以生成所有左控制为 ϵ 的受控交换。具体而言，要生成 $T_{\epsilon,\ a,\ v}$，其中 av 不是一元的（见引理 3.27），将 s_ℓ（其中 $\ell = |v|$）与任意一个映射.....的局部置换作共轭

$$f(x.avy) = x.10^\ell y \text{ and } f(xa.vy) = x1.0^\ell y.$$

这样的 f 存在，因为 av 不是一元的，因而与其向右移位 1 不重叠——只需正确映射这些模式，并任意补全该置换即可。其他位置上的交换可通过与 σ 作共轭得到。因此，我们只需证明 s_ℓ 可以分解为无知图灵机群 (X) 中的元素、移位以及有限个受控交换。我们对此按 ℓ 归纳。

我们先构造 n 为偶数时的情形。先给出直观说明。由于可以在局部判断读写头是否位于单词 10^ℓ 的坐标 0 或 1 上，我们可以将位置视为一个二进制位 c（因此，$c=0$ 表示位于单词 10 的零坐标上，$c=1$ 表示位于此类图案的一坐标上；其他情况下，我们保持该点不变）。注意，利用无知图灵机群 (X) 中的元素，我们可以独立于 c 交换图案 10 右侧的位置。因此，只要不依赖于超过常数个坐标，我们的受控交换就可以依赖于距离中心 10 任意远的右侧位置。

我们先考虑状态 cwb，其中 c 是头部位置（取 0 或 1，表示我们位于 w的第一个或第二个坐标），而 $w = 10u$ 中 $u \in \Sigma^{\ell-1}$ 是我们要检查是否取值 $0^{\ell-1}$的控制字。该置换如下：首先，若 $b=0$，则翻转 c（将 b 移到 w 最初的 10 旁边，执行一个小半径的受控交换，然后将 b 移回）。接着，若 $u = 0^{\ell-1}$，则将 b加 1（模 n）（通过初等图灵机群中的一个元素 (X)）。然后重复这两个步骤 n 次。最终结果是：若 $u = 0^{\ell-1}$，则 c恰好翻转一次，因为在恰好一个 c翻转步骤中 $b=0$；否则，c 翻转 0 次或 n 次，因此保持不变。

更确切地说，先将 $g \in \mathrm{RFA}(X)$ 定义为受控交换 $T_{\epsilon,\ 1,\ 00}$，也就是说，

$$g(x1.00y) = x.100y,\ \ g(x.100y) = x1.00y$$

以及对于不具有这种形式的点，$g(z) = z$。这显然属于 $\mathrm{RFA}(X)$，我们将其纳入生成元集合中。另定义 $h \in \mathrm{OB}(X)$ 为任意满足以下条件的局部置换：

$$h(x1.0uby) = x1.0buy,\ \ h(x.10uby) = x.10buy$$

对于所有 $u \in \Sigma^{\ell-1}$，$b \in \Sigma$（对于不具有这种形式的点，$h(z)$ 可以任意取值），这一定义同样良定，因为没有点同时具有这两种形式。

现在，定义 $f' = h^{-1} \circ g \circ h$，我们有

$$f'(x1.0u0y) = x.10u0y,\ \ f'(x.10u0y) = x1.0u0y$$

对于所有 $u \in \Sigma^{\ell-1}$，以及对于不具有这种形式的点，$f'(z) = z$。

接下来，通过以下方式定义 $f'' \in \mathrm{OB}(X)$：

$$f''(x.10^\ell by) = x.10^\ell(b+1)y,\ \ f''(x1.0^\ell by) = x1.0^\ell(b+1)y$$

对于所有 $b \in \{0,\ 1,\ .....,\ n-1\}$（其中递增按模 n 计算），并且对于所有不具有这种形式的 $z \in X$，$f''(z) = z$。那么，$(f'' \circ f')^n$ 就是我们所需的映射。

于是，假设 n 为奇数。我们将采用 [36]的证明结构。同样，考虑输入为 $c10ub$，其中 $c \in \{0,\ 1\}$ 表示读写头的位置（位于 c之后的单词 10 中的符号 1 或符号 0 上），并且 $u \in \Sigma^{\ell-1}$ 和 $b \in \Sigma$。我们通过归纳法构造机器。假设

我们已经构造出一台机器，它在以 $u = 0^{\ell-1}$为条件时翻转 c，现在来说明如何检验 $b = 0$。首先，如果 $u = 0^{\ell-1}$，就用 OB(X)中的一台机器翻转 b（在 0 和 1 之间），并在 $b \in \Sigma\backslash\{0,\ 1\}$时固定 b 的值。然后，如上所述，用 OB(X)中的一台机器对 RFA(X) 中的一台机器进行共轭；若 $b = 0$，则翻转比特 c。重复这些步骤。所得机器 g^2 属于 EL(X)，当且仅当 $b \in \{0,\ 1\}$ 且 $u \in 0^{\ell-1}$时，它才会翻转 c。

现在，利用仿射平移对该机器作共轭：令 $h \in$OB(X) 将 b 的值加 2。于是，当且仅当 $u = 0^{\ell-1}$ 和 $b \neq 0$ 时，$h^{-\frac{n-1}{2}} \circ (g^2 \circ h)^{\frac{n-1}{2}}$ 才会翻转 c 的值。最后，当 $u = 0^{\ell-1}$ 时翻转 c，这样得到的机器当且仅当 $ub = 0^{\ell}$ 时翻转 c。

将其转换为 RFA(X) 和 OB(X) 中的机器的具体细节略去，因为它们与偶字母表情形中的细节相似。

在 $k \geqslant 2$ 的情况下，我们需要使用 RFA(X) 中的有限多个元素以及 OB(X) 中的元素，执行受控状态交换和有状态受控位置交换。受控状态交换的证明与上面的证明相同，但现在比特 c（用于指示上方的位置）表示我们处于所交换的两个状态中的哪一个（如果我们处于这两个状态之外，则不发生任何操作）。有状态受控位置交换的证明也类似；现在，当我们处于状态 k 时，比特 c 为 0，而当我们处于状态 k 时，比特 c 为 1，并且在状态 1 中，控制字通过偏移量 1 来读取。□

4. 可计算性方面

在本节中，我们研究 RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$的可计算性方面。我们首先简要说明图灵机的哪些性质是可计算的。特别地，我们证明了 TM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 中机器的单射性，从而其可逆性，是可判定的。这一性质连同计算复合规则和逆的可能性，为 RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 给出了一个递归表示，并且它具有可判定字问题。

在此背景下，我们进一步研究 RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 及其子群的挠问题，即是否存在这样一种算法：给定 $T \in$ RTM$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 的描述，当且仅当存在 $n \geqslant 1$ 使得 $T^n = \mathrm{id}$ 时，该算法总会停机并接受。在此背景下，我们证明 EL$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$具有不可判定的扭结问题（定理 1.2）。此外，我们利用这一结果证明，任何不可数 $\mathbb{Z}$-子移位的自同构群都包含一个具有不可判定的扭结问题的有限生成子群（推论 1.3 ）。

最后，我们研究 RFA$(\mathbb{Z}^d, n, k)$中的挠问题。我们通过一个简单的论证证明，RFA$(\mathbb{Z}, n, k)$ 具有可判定的挠问题。有趣的是，对于$d \geqslant 2$，RFA$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 中的挠问题是不可判定的。我们给出了这一结果的详细证明，该证明利用了蛇形铺砖问题 [22]的不可判定性。这两个结果共同构成了我们在引言中讨论的定理 1.4。

4.1. 基本可判定性结果。

首先，我们注意到，局部规则的基本操作是可判定的。

引理 4.1。 给定移动头模型中的两个局部规则 f, g，

- 可以判定 $T_f = T_g$• 可以有效地计算出 $T_f \circ T_g$ 的一个局部规则，• 可以判定 T_f 是否为单射，• 可以判定 T_f 是否可逆，并且• 当 T_f 可逆时，可以有效地计算出 T_f^{-1} 的一个局部规则。

证明。 对于第一个断言，令 $f\colon \Sigma^{F_1} \times Q \to \Sigma^{F_2} \times Q \times \mathbb{Z}^d$ 和 $g\colon \Sigma^{F_3} \times Q \to \Sigma^{F_4} \times Q \times \mathbb{Z}^d$，并定义 $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$。扩展规则 f, g，使其定义为 $f', g'\colon \Sigma^F \times Q \to \Sigma^F \times Q \times \mathbb{Z}^d$，满足 $T_f = T_{f'}$ 和 $T_g = T_{g'}$。如果存在某个 $(p, q) \in \Sigma^F \times Q$ $f'(p, q) \neq g'(p, q)$，那么显然有 $T_{f'} \neq T_{g'}$。否则，我们有 $T_{f'} = T_{g'}$。

为两个图灵机的复合寻找局部规则是一项简单但略显繁琐的工作。

为了判定可逆性，我们给出了两个方向的半算法。首先，如果 T_f 是可逆的，那么它有一个逆机 T_g。因此，我们只需枚举局部规则 g，并检查 $T_f \circ T_g =$ 是否等于 id；这可以通过使用前面描述的两个过程来判定。

如果 T_f 不是单射，那么对于某些 $(x、\ y)$、$(x'、\ y') \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times X_k$，有 $T_f(x,\ y) = T_f(x',\ y')$，且满足 $y_{\vec{0}} \neq 0$。如果 r 是 f 的移动半径，那么 y' 的非零位置与原点的距离必定至多为 r，并且对于大于 T_f 半径的 $|\vec{v}|$，都有 $x_{\vec{v}} = x'_{\vec{v}}$。于是，我们可以假设对于所有这样的 $\vec{v}$，都有 $x_{\vec{v}} = x'_{\vec{v}} = 0$。由此可知，如果 T_f 不是单射，那么它在有限构型集 $(x,\ y) \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d} \times X_k$ 上也不是单射，其中对于所有大于 T_f 半径的 $|\vec{v}|$，都有 $(x,\ y)_{\vec{v}} = 0$；这一点可以通过算法检查。

根据定理 2.18，单射性等价于可逆性，因此，图灵机可逆性的可判定性是前述论证的直接结果。

最后，如果 T_f 是可逆的，我们可以通过枚举所有图灵机并输出第一个满足 $T_f \circ T' = T' \circ T_f =$ 恒等的 T'，有效地为其构造一个逆 ${T_f}^{-1}$。□

由上述结果可知，所有能够生成可逆作用的局部规则 f T_f 构成了 RTM($\mathbb{Z}^d,\ n,\ k$)的一个递归可数表示。此外，该表示具有可判定字问题。

命题 4.2。$\mathrm{RTM}(\mathbb{Z}^d\, n\, k)$ 具有一个带可判定字问题的递归表示。

证明。给出移动读写头图灵机的局部规则可以递归枚举。事实上，考虑由 $n \in \mathbb{N}$ 索引的集合序列 $\Lambda_n = \{-n,\ \ldots\ldots,\ n\}^d$，并按某个字典序列出所有局部规则 $f\colon\ \Sigma^{\Lambda_n} \times Q \to \Sigma^{\Lambda_n} \times Q \times \Lambda_n$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，这是一个有限集，因此所有局部规则都可以递归列出为 $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$。根据引理 4.1，可以判定哪些局部规则定义了可逆图灵机，因此可以对每个 f_i 运行该算法，从而得到所有可逆移动读写头图灵机的递归枚举 $(f_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$。此外，利用引理 4.1，可以将每个字 $f_{\varphi(i_1)} f_{\varphi(i_2)} \cdots f_{\varphi(i_k)}$ 约化为某个与之等价的规则 f_{eq}。只需检验 f_{eq} 与恒等机是否相等，即可判定该表示的字问题。□

4.2. **初等图灵机的挠问题**。

定义 4.3. 设 G 是由 $S \subset G$ 生成的群。G 的挠问题是由满足以下条件的字 $w \in S^*$ 构成的集合：存在 $n \in \mathbb{Z}_+$，使得 w^n 所表示的元素是 G 的单位元。

如果群 G 是递归呈示的，那么挠问题是递归可枚举的。然而，即使 G 具有可判定字问题，其挠问题也可能不可判定。已知许多这样的例子，而本节的主要结果给出了一个新的此类例子。

如引言中所述，如果移动头图灵机的输入半径和输出半径均为 0，且移动半径为 1，我们就称它为**经典**图灵机。这里我们刻画经典图灵机的可逆性。如果 T_0 的输入半径、输出半径和移动半径均为 0，也就是说，T_0 只在读写头所在位置对有序对 $(s\ 、\ q) \in \Sigma \times Q$ 的集合进行置换，那么我们称 $T_0 \in \mathrm{LP}(\mathbb{Z}、\ n、\ k)$ 为**状态-符号置换**。如果 T_1 的输入半径为 -1，从不修改纸带，并且只沿 $\{-1、\ 0、\ 1\}$ 中的向量移动，那么 $T_1 \in \mathrm{RFA}(\mathbb{Z}、\ n、\ k)$ 就称为**状态依赖移位**。

如果我们考虑在某个有限字母表上、具有一定状态数的所有经典图灵机构成的类，那么挠问题是不可判定的。Kari 和 Ollinger 在 [23] 中证明了这一结果——他们在自己的框架中将其称为周期性问题——所采用的方法是从消亡问题进行归约；而他们又通过从可逆双计数器机的消亡问题进行归约，证明了前述消亡问题同样是不可判定的

。在本节中，我们将证明，对于具有固定字母表和状态数的初等图灵机，挠问题同样是不可判定的。我们通过将其归约到经典机器来实现这一点。首先，我们在本文的框架下对这些机器进行描述。

命题 4.4. 经典图灵机 $T \in$ 可逆图灵机$(\mathbb{Z}, n, k)$ 可逆，当且仅当它可以表示为 $T_1 \circ T_0$，其中 T_0 是状态-符号置换，T_1 是状态依赖移位。特别地，经典可逆图灵机属于 初等图灵机群$(\mathbb{Z}, n, k)$。

证明。我们只需证明，若 T可逆，则它具有上述形式。设 $f_T\colon \Sigma \times Q \to \Sigma \times Q \times \{-1,\ 0,\ 1\}$是移动纸带模型中 T的局部规则。我们断言，若 $f_T(a,\ q) = (b,\ r,\ d)$且$f_T(a',\ q') = (b',\ r,\ d')$，则 $d = d'$。也就是说，若不满足这一条件，很容易找到两个像相同的构型。有多种情形需要考虑，它们都可以用类似方法处理。例如，设 $x,\ y$ 分别是由 Σ 中符号构成的向左和向右无限序列，并假设 $d = 0$和 $d' = 1$。在这种情况下：

$$T((xb'.ay), q) = (xb'.by, r) = T((x.a'by), q').$$

因此，这与 T 的可逆性相矛盾。对所有的 $d \neq d'$ 重复这一论证，我们得到移动方向完全由输出状态决定。当然，为了使 T 为单射，f_T 也必须是单射，因此由 $g(a, q) = (b, r)$（若 $f_T(a,\ q) = (b, r, d)$）定义的映射 $g\colon \Sigma \times Q \to \Sigma \times Q$ 是单射，因而是双射。从这里看，唯一剩下的可能性是：T_0 是置换 g，而 T_1 是具有局部规则 $f_{T_1}(a, q) = (a, q, d)$（若$f_T(b, q') = (b', q, d)$ 对某个 $(b,\ q) \in \Sigma \times Q$）的有限状态自动机。□

由此可知，可逆经典图灵机的逆始终具有以下形式：$T_0 \circ T_1$，其中 T_0 是状态-符号置换，而 T_1 是状态依赖移位。按照第 3 节的术语，该定理意味着所有可逆经典图灵机都是初等的。

现在我们可以证明定理 1.2，即对于所有 $n \geqslant 2$、$k \geqslant 1$ 和 $d \geqslant 1$，$\mathbf{EL}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 的挠问题都是不可判定的。

定理 *1.2* 的证明。由于对于每个 $k,\ d \geqslant 1$，$\mathbf{EL}(\mathbb{Z},\ n,\ 1)$ 都嵌入 $\mathbf{EL}(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$，只需证明 $d = 1$ 和 $k = 1$ 的情形即可。

[23] 中构造的机器已经是初等图灵机，但它们的字母表并不有界（注意，这些是经典图灵机，因此对于任意给定的状态-字母表对，机器的数量都是有限的）。然而，可以使用具有固定字母表的初等图灵机来模拟它们。也就是说，给定一台经典可逆图灵机 T（使用某个有限字母表并具有一定的状态数），可以构造一台属于 $\mathbf{EL}(\mathbb{Z},\ n,\ 1)$ 的机器，使其为周期的当且仅当 T 为周期的。于是，我们的结果由 [23] 的主要结果得出。

设 T 是一台给定的经典图灵机，其状态集合为 Q，纸带字母表为 Σ，其局部规则为 f_T。注意，在本证明中，我们使用 Σ 和 Q 表示 T 的字母表和状态集合，而不是初等图灵机群 $\mathbf{EL}(\mathbb{Z},\ n,\ 1)$ 中各机器的字母表和状态集合。

由命题 4.4 可得 $T = T_1 \circ T_0$，其中 T_0 是一个状态-符号置换，T_1 是一个依赖于状态的移位。我们还可以进一步假设，T_1 不使用移动 0：对于每个会移动 0 的状态 q，我们引入一个新状态 q'，并修改移位 T_1，使其在状态 q 下移动 -1，在状态 q'下移动 $+1$。我们还修改状态-符号置换 T_0：每当它原本会进入状态 q时，都改为进入状态 q'；并且对所有带符号 a，令它将 $(a,\ q') \mapsto (a,\ q)$。这样，单个不移动的步骤就被替换为先向右、再向左移动的两步。显然，修改后的机器是周期的，当且仅当原机器是周期的。记 $L \subset Q$ 和 $R \subset Q$ 为 T_1中向左移动和向右移动的状态集合。那么，Q 是不交并 L 与 R

令 $\perp$ 为一个不属于 Q 的符号，并令 m 满足 $n^m \geqslant |\Sigma \times (Q \cup \{\perp\})|$，这样我们就可以将纸带符号（用 $\Sigma \times \{\perp\}$) 中的数对表示）以及状态-符号对编码为 n 字母字母表上的长度为 m的唯一块。数对 $(a,\ q)$ 表示一个包含 $a \in \Sigma$ 且正由机器在状态 $q \in Q$下读取的纸带单元，而 $(a,\ \perp)$ 表示一个包含 $a \in \Sigma$ 且当前未被机器读取的单元。任取一个一一对应的编码函数 $\Sigma \times (Q \cup \{\perp\}) \to \{1,\ \ldots,\ n\}^m$。记 $[a,\ r]$为 $(a,\ r) \in (Q \cup \{\perp\})$的编码，它是字母表 $\{1,\ \ldots,\ n\}$上的一个长度为 m 的词。

我们的想法是，将 T 的一个构型表示为编码配置：其纸带内容为 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$，状态为 $q \in Q$，位置为 $p \in \mathbb{Z}$；编码配置的纸带内容为 $x' \in \{1 \ldots,\ n\}^{\mathbb{Z}}$，其中 $x'_{[im,\ (i+1)m)} = [x_i,\ \perp]$ 对于 $i \neq p$，而 $x'_{[pm,\ (p+1)m)} = [x_p,\ q]$，且无状态读写头位于位置 pm。请注意，$\{1, \ldots, n\}^{\mathbb{Z}}$ 中可能有许多构型并非有效编码。

我们构造初等图灵机群 $\mathbf{EL}(\mathbb{Z},\ n,\ 1)$ 中的一个元素，它是复合 $T'_1 \circ T'_0$，其中 $T'_0 \in \mathbf{LP}(\mathbb{Z},\ n,\ 1)$ 和 $T'_1 \in \mathbf{RFA}(\mathbb{Z},\ n,\ 1)$ 都是对合。通俗地说，局部置换 T'_0 在编码纸带上实现状态—符号置换 T_0，包括将新状态写入正确位置；而有限状态自动机 T'_1 则只将机器读写头 m 个位置向右或向左移动，以扫描包含新状态的块。我们将 T'_0 和 T'_1 的局部规则补全为对合，使它们也能执行逆步骤，并在所有其他情况下保持恒等。这会自动使机器反转时间方向；如果它遇到无效图案，就会开始沿着原路倒退。

更准确地说，局部置换 T'_0 以邻域 $F_0 = \{-m, \ldots, 2m-1\}$ 定义，并且局部规则 f_0 是 $\{1, \ldots, n\}^{F_0}$的一个置换。机器会看到三个 m块：当前块位于中间，两侧各有一个相邻块。对于每个 $a, b, c, d \in \Sigma$ 和 $q, p \in Q$,

(1) 若 $f_T(a, q) = (b, p, -1)$，则 f_0 交换

$$[c, \perp][a, q][d, \perp] \longleftrightarrow [c, p][b, \perp][d, \perp],$$

(2) 若 $f_T(a, q) = (b, p, +1)$，则 f_0 交换

$$[c, \perp][a, q][d, \perp] \longleftrightarrow [c, \perp][b, \perp][d, p].$$

$\{1 \ldots, n\}^{F_0}$ 中的所有其他模式都映射到自身。根据 T的可逆性，f_0 是一个定义良好的对合。

可逆单状态有限自动机 T'_1 使用邻域 $F_1 = \{-2m, \ldots, 3m-1\}$，因此机器会看到当前块左侧和右侧各两个块。它的局部规则是一个函数 f_1: $\{1, \ldots, n\}^{F_1} \longrightarrow \mathbb{Z}$，其中 $f_1(u)$ 给出了纸带模式 u上的读写头移动。

(1) 令 $p \in L$。那么对于所有 $b,\ c,\ d \in \Sigma,\ f_1$ 映射,

$$\begin{array}{ccccccc} * & [c,p] & [b,\perp] & [d,\perp] & * & \mapsto & -m, \\ * & * & [c,p] & [b,\perp] & [d,\perp] & \mapsto & +m, \end{array}$$

其中 $*$ 表示 $\{1 \ldots,\ n\}^m$ 中任意一个 m-块。换句话说，如果机器在其左侧的块上看到一个状态$p \in L$，并在当前块及其右侧的块上看到非状态 $\perp$，机器就向左移动。如果它在当前块上看到一个状态 $p \in L$，并在右侧两个块上看到 $\perp$，它就向右移动。这些移动互为逆操作：如果其中一个移动此刻适用，那么另一个移动就在下一个时间步适用，并使机器返回到原来的位置。

(2) 对称地，令 $p \in R$。那么对于所有 $c,\ b,\ d \in \Sigma,\ f_1$ 映射,

$$\begin{array}{ccccccc} * & [c,\perp] & [b,\perp] & [d,p] & * & \mapsto & +m, \\ [c,\perp] & [b,\perp] & [d,p] & * & * & \mapsto & -m. \end{array}$$

此外，这些移动互为逆。

对于 $\{1\ldots,\ n\}^{F_1}$ 中的所有其他模式，移动量为 0。由于 L 和 R 互不相交，T_1' 定义良好。它也是一个对合。

机器 T_0' 和 T_1' 的设计使得 $T_1'\circ T_0'$ 能够在其构型的有效编码上模拟 T 的一步运行。因此，如果 T 不是周期的，那么 $T_1'\circ T_0'$ 也不是周期的。

现在假设 $T_1'\circ T_0'$ 不是周期的。当交替迭代 T_0' 和 T_1' 时，如果在任意时刻其中一台机器没有改变构型，那么迭代就会开始沿时间方向回溯。这是因为 T_0' 和 T_1' 是对合。任何包含两次这种时间方向变化的轨道都是周期的。由此再结合紧致性可知，如果 $T_1'\circ T_0'$ 不是周期的，则存在一条双无限轨道，其中 T_0' 和 T_1' 的每次作用都会改变构型。根据该构造，机器在局部只能看到有效编码。于是，这条轨道沿正向或反向时间方向，都是在 T 所看到的那部分纸带上对 T 的有效模拟。因此，T 也具有一条非周期的轨道。□

结合定理 1.2 和定理 1.1，我们立即得到以下推论 .

推论 4.5. 存在一个可逆图灵机的有限生成子群$(\mathbb{Z}, n, k)$，其挠问题不可判定。

4.3. 元胞自动机的挠问题。 本节将证明，存在一个其挠问题不可判定的元胞自动机有限生成群。人们可能会尝试通过构造从初等图灵机群$(\mathbb{Z}, n, k)$ 到自同构群$(A^{\mathbb{Z}})$的嵌入来证明这一点，但这是不可能的：众所周知，自同构群$(A^{\mathbb{Z}})$ 是残余有限的；然而，有限支撑置换群$\mathbb{N}$ 嵌入到局部置换群$(\mathbb{Z}, n, k)$ 中，因此初等图灵机群$(\mathbb{Z}, n, k)$ 不可能是残余有限的。尽管如此，从图灵机构造元胞自动机有标准方法；我们将证明，虽然无法保留完整的群结构，但可以保留挠性。

可以像上一节一样，通过直接证明模拟图灵机的自同构是周期的，当且仅当该图灵机是周期的，来完成这一点。我们将证明一个稍强的抽象结果，即构造一个从 EL$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$ 到 Aut$(A^{\mathbb{Z}})$ 的映射，该映射保留 EL$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$ 的部分群结构，同时只增加一些“局部”恒等式。为了实现这一点，我们似乎不能使用上一节中的同一构造，正如下文注记 4.9 所讨论的那样。

下文中，由群 G 的元素生成的自由幺半群记作 G*，由形式词 w组成，其中对于所有 $i = 1,\ \ldots,\ |w|$都有 $w_i \in G$。对于 $w \in G$*，记 $\underline{w} = w_1 \cdot w_2 \cdots w_{|w|} \in G$为 G中对应的元素。

定义 4.6。 设 G 和 H 为群，$\mathcal{P}$ 为一个群性质。若函数 $\phi\colon\ G \to H$满足以下条件，则称其为 $\mathcal{P}$ 保持的：对于每个有限集 $F \subset G$* ，群$\langle \underline{w} \mid w \in F\rangle \leqslant G$ 具有性质 $\mathcal{P}$，当且仅当群 $\langle \underline{\phi(w_1)\phi(w_2)\cdots\phi(w_{|w|})} \mid w \in F\rangle$具有性质 $\mathcal{P}$

我们注意到，保持 P 的函数 ϕ 不一定是态射，因为我们并未要求 $\phi(w_1w_2)$ =$\phi(w_1)\phi(w_2)$。我们只要求将 ϕ 应用于 F中的字所含的符号时，性质 P 得以保持。

接下来，我们将使用有限这一性质 P。我们利用这一性质，将群的可计算性不变量（例如挠问题）从一个群扩展到另一个群，即使不存在从前一个群到后一个群的嵌入。这种扩展显然要求函数 ϕ 以某种方式可计算。若对于某个固定表示，G和 H 的字问题均可判定，且存在一台图灵机，能将表示 G 中的任意字 w （满足 $\underline{w} = g \in G$ ）转换为表示H 中的一个字 u （满足 $\underline{u} = \phi(g) \in H$），则称函数 ϕ: $G \to H$ 为**可计算的** 。

引理 4.7. 设 G 是一个挠问题不可判定的有限生成群，其生成集为S，并假设存在一个可计算的保有限函数 $\phi\colon G \to H$。那么，子群$H' = \langle \{\phi(s)\}_{s\in S}\rangle \leqslant H$ 的挠问题不可判定。

证明。 假设由 $\phi(s)$ 生成的群 H' 的挠问题可判定，且令 $w \in S^*$。由于 ϕ保持有限性，因此 $\langle \bar{w}\rangle$ 有限，当且仅当 $\langle \phi(w_1)\phi(w_2)\cdots\phi(w_{|w|})\rangle$有限。这意味着$\underline{w}$在 G中为有限阶，当且仅当 $\phi(w_1)\phi(w_2)\cdots\phi(w_{|w|})$在 H'中为有限阶。我们可以根据 w和有限集 $\{\phi(s)|s \in S\} \subset H$计算出 $\phi(w_1)\phi(w_2)\cdots\phi(w_{|w|})$。因此，可以用判定 H' 中挠问题的算法来判定 G中的挠问题，由此导出矛盾。□

前一个引理表明，为了证明 $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ 包含一个挠问题不可判定的有限生成子群，我们现在只需给出一个从 $\mathrm{EL}(\mathbb{Z}, n, k)$ 到 $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$的可计算保有限映射。

引理 4.8. 设 $A = \Sigma^2 \times (\{\leftarrow, \rightarrow\} \cup Q \times \{\uparrow, \downarrow\})$。存在一个可计算的保有限映射$\phi\colon \mathrm{RTM}(\mathbb{Z}, n, k) \to \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$。

证明. 字母表 A 由三元组组成，因此 $A^{\mathbb{Z}}$ 可以看作由三条磁带组成。前两条磁带承载 $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ 中的一个构型，而第三条磁带上的符号属于 $(\{\leftarrow, \rightarrow\} \cup (Q \times \{\uparrow\downarrow\}))$，用于处理读写头和计算区域。读写头由 $Q \times \{\uparrow, \downarrow\}$中的一个元组表示，其中 Q 是图灵机的状态集合， $\{\uparrow, \downarrow\}$ 是机器所在的轨道。如果该值为 $\uparrow$，读写头位于第一条（“最上方”）磁带上；如果为 $\downarrow$，则位于第二条（“最下方”）磁带上。 $\leftarrow$表示读写头位于当前区域中当前单元格的左侧（如果当前区域中有读写头），而 $\rightarrow$ 表示读写头位于右侧。

$A^{\mathbb{Z}}$ 中的一个构型由第三条磁带的内容划分为若干区域。具体而言，第二条轨道的每个有限片段都能唯一地拆分为以下形式的片段： $\rightarrow^*$ $(q,\ a)$ $\leftarrow^*$ 和 $\rightarrow^*\leftarrow^*$，其中 $(q,\ a) \in Q \times \{\uparrow,\ \downarrow\}$。我们称这些片段为**区域**，见图 6。要定义保持有限性的映射 ϕ: 可逆图灵机$(\mathbb{Z},\ n,\ k) \to A^{\mathbb{Z}}$，只需在每个这种形式的片段中定义它。

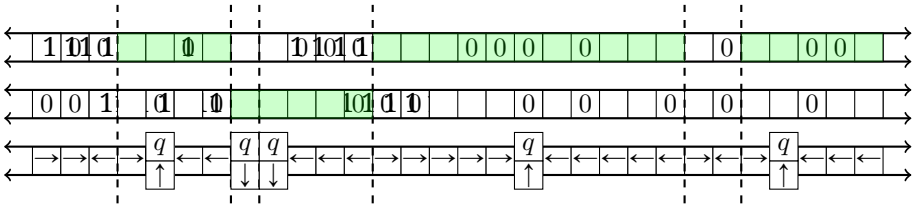


图 6。 A^* 中的一个有限词由第三层划分为若干区域。虚线分隔各个区域，颜色表示状态旁边箭头所指向的是哪条磁带。

设 $T \in$可逆图灵机$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$ 为半径为 r 的移动头图灵机。我们通过定义 $\phi(T) \in$自同构群 $(A^{\mathbb{Z}})$ 在每个区域上的作用来定义它：若区域内没有读写头，或区域大小小于$2r + 1$，则不执行任何操作。否则，设 u_0、……、u_{m-1}和 v_0、……、v_{m-1}分别为第一条轨道和第二条轨道中的字， $(q,\ a) \in Q \times \{\uparrow,\ \downarrow\}$为读写头， $\ell \in \{0$、……、$m-1\}$为第三条轨道上读写头的位置。利用这些信息，我们可以构造如下构型 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$：

$$x_i = \begin{cases} u_j & \text{if } j = (i \mod 2m) \in \{0, \ldots, m-1\} \\ v_{2m-j-1} & \text{if } j = (i \mod 2m) \in \{m, \ldots, 2m-1\} \end{cases}$$

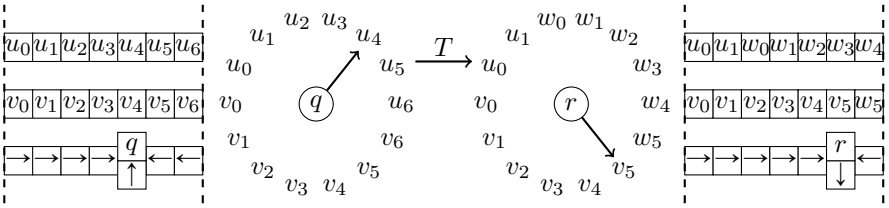


图7。每个区域都被卷绕成一条传送带，其中 $\phi(T)$ 的行为就像 T 看到一个周期词一样。

并将 T应用于 x：若 $a = \uparrow$，读写头的位置在 ℓ；否则在 $2m - \ell - 1$。应用图灵机的局部规则后，再次对结果进行编码，并更新左右箭头，使区域保持原有形状，如图7所示。根据此定义，在每个有界区域中，$\phi(T)$ 会对所有可能的读写头和纸带内容进行置换；而在无界区域中，它则作为 T 作用于一个无限配置。

映射 $\phi(T)$ 显然是连续且移位不变的，因此 $\phi(T) \in$ 属于自同构群$(A^{\mathbb{Z}})$。此外，ϕ 显然是一个可计算映射。只需证明 ϕ 保有限性。

考虑由 $F \subset$可逆图灵机$(\mathbb{Z},\ n,\ k)$*和 $H = \langle \phi(w_1)\phi(w_2)\cdots\phi(w_{|w|}) \mid w \in F\rangle$在自同构群$(A^{\mathbb{Z}})$中生成的群。如果$\langle F\rangle$是无限的，只需注意，对于任意一个构型：第三条磁带是一个带有读写头的单一无界区域（即 $\ldots \leftarrow\leftarrow\leftarrow (q,\ \uparrow) \rightarrow\rightarrow\rightarrow \ldots$），$\phi(T)$ 在其上的作用会精确复现 T 在第一条磁带上的行为。因此，$\langle F\rangle$ 中的每个元素至少会在一个这种形式的构型上产生不同作用，这意味着 H 是无限的。反过来，如果 $\langle F\rangle$ 是有限的，考虑其在任意无界区域上的作用，或在长度大于 $\langle F\rangle$中机器从原点出发所能达到的最大移动距离的区域上的作用。显然，这种机器的作用与原机器相同，因此，这些区域上的作用满足与 $\langle F\rangle$的作用相同的关系。接着考虑长度不超过固定长度 h的区域。由于每种作用都是有限集上的一个置换，这些区域上不同机器作用的数量有上界，因此图灵机读写头的移动距离同样有界。所以 H 是有限的，且一个粗略的上界为 $|H| \leqslant |\langle F\rangle| \cdot (\prod_{m\leqslant h}(2kmn^{2m})!$
) □

注记 4.9. 上述并非将图灵机转化为元胞自动机的唯一可能构造。例如，在 [23], 中，人们改用方向位；如果图灵机碰到计算区域的边界，就会将其运行方向从正向翻转为反向。这大致对应于上一节中的构造。至少在未经修改的情况下，这种构造并不能给出符合上述定义意义下的保持有限性的映射：假设 f 和 g 是不满足任何关系的图灵机。取 $F = \{(f^{-1}g^{-1}) \cdot g \cdot f\}$（$G$* 中长度为 3 的一个形式乘积），如定义 4.6 所述。由于 id $= (f^{-1}g^{-1}) \cdot g \cdot f$ 作为图灵机是挠元，我们应当有相应的元胞自动机 $\phi(f^{-1}g^{-1}) \circ \phi(g) \circ \phi(f)$ 也是挠元。但对于方向位指向时间反方向的构型，这个元胞自动机实际上模拟的是图灵机 $g \circ f \circ g^{-1} \circ f^{-1}$，而后者具有无限阶。

利用 EL$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 是有限生成的，并考虑引理 4.7 中映射在 EL$(\mathbb{Z}^d, n, k)$ 上的限制，我们得到：

推论 4.10. 对于某个至少含有两个符号的字母表 A，存在一个有限生成子群$G \leqslant$ 自同构群$(A^{\mathbb{Z}})$，其挠问题不可判定。

在 [32], 的引理 7 中证明了，对于每个有限集 A 和每个不可数 sofic 子移位 X，都有 End$(A^{\mathbb{Z}})$ 嵌入 End(X)。特别地，Aut$(A^{\mathbb{Z}})$ 嵌入 Aut(X)。令 A

为推论 4.10 的字母表，我们得到推论 1.3，即每个不可数 sofic $\mathbb{Z}$-子移位的自同构群都包含一个具有不可判定挠问题的有限生成子群 G 。

4.4. 有限状态机的挠问题。对于无知图灵机群 OB$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 这个问题并没有太大意义，因为该群中的元素是周期的，当且仅当其移位分量为 0^d。然而，对于 $n \geqslant 2$，群 RFA$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ k)$ 则颇为有趣。具体而言，挠问题的可判定性具有维数敏感性，正如定理 1.4 所述。本节分两部分证明该定理：一维部分是定理 4.11 的一个推论，而多维结果则由定理 4.12 给出。

我们首先证明，对于 $d = 1$ ，挠问题是可判定的。事实上，我们将从一个更一般的结果推出这一结论。若存在一台图灵机，对于输入的表示中的有限个字，当且仅当这些字所表示的群元素生成一个有限子群时才接受该输入，则称该群表示的有限性问题是可判定的。这一概念推广了挠问题；挠问题可以看作有限集为单元素集时的特殊情形。

我们在会议版本附录中给出的证明 [4] 包含错误；这里我们给出一个新的证明，该证明基于鸽巢原理的一种强形式，即拉姆齐定理。在 [33] 中给出了同一结果的动力系统证明。

定理 4.11。设 X 是一个 *sofic* $\mathbb{Z}$-子移位。则对于每个 n、$k \geqslant 1$，RFA$(X$、n、$k)$ 的有限性问题都是可判定的。

证明。设 F 是一个由其局部规则和 $n \in \mathbb{N}$ 表示的有限图灵机集合。根据引理 4.1，给定 u，$v \in F^*$，我们可以计算关系 $\sim$，其中 $u \sim v$ 当且仅当 $\underline{u} = \underline{v}$。一个当且仅当 $\langle F \rangle$ 为有限时接受的半算法，可以计算集合 $U_n = (\bigcup_{m \leqslant n} F^n)/\sim$，并在某个 n 满足 $U_n = U_{n+1}$ 时接受。换言之，有限性问题是递归可枚举的，因此只需证明它是余递归可枚举的。

对于另一个方向，我们可以假设， F 中的机器的移动只取决于其下方的当前符号，并且每一步至多移动一个单元格。为此，取 X 的一个足够大幂次 p 的高阶幂表示（见 [28]第 1.4 节），并将单元格中的位置模 p 记录在状态中，从而使 Q 的大小变为 kp。

现在，对每个字 $u \sqsubset X$ 赋予

$$\phi(u)\colon \{\leftarrow, \rightarrow\} \times Q \to 2^{\{\leftarrow, \rightarrow\} \times Q},$$

其中， $(d', q') \in \phi(u)(q, d)$ 的含义是：当机器以状态 q 沿方向 d进入字 u 时，可以在 F 中依次应用有限个有限状态机，使得机器最终以状态 q'沿方向 d' 离开 u 。例如， $(\rightarrow, q') \in \phi(u)(\rightarrow, q)$ 表示存在 $f_1, f_2, \ldots, f_k \in F$使得

$$(f_k \circ \cdots \circ f_1)(q, x.uy) = (q', xu.y)$$

其中 x 和 y 是尾部，满足 $xuy \in X$，并且读写头在“中间步骤”中不会离开 u ，也就是说，对所有 $1 \leqslant j < k$，都有 $(f_j \circ \cdots \circ f_1)(q, xu'.u''y)$，其中 $u = u'u''$ 且 $|u'|, |u''| > 0$。

回顾一下，sofic $\mathbb{Z}$-子移位具有正则语言 [28] ，因此有一个相应的句法幺半群。将每个非空的 u 与其在 $L(X)$的句法幺半群中的等价类 $\psi(u)$ 关联起来。记作 $I(u) = (\phi(u),\ \psi(u))$。那么， I 在其定义域内是一个半群同态，即如果 $uv \sqsubset X$ ，那么

$$I(uv) = (\phi(uv), \psi(uv)) = (\phi(u)\phi(v), \psi(u)\psi(v)) = I(u)I(v),$$

其中映射 $\phi(u) \in \{\leftarrow,\ \rightarrow\} \times Q \to 2^{\{\leftarrow,\ \rightarrow\} \times Q}$ 上的半群结构，是通过观察得到的：从左侧或右侧进入 uv 后，所有可能离开它的方式，完全由 u 和 v对应的信息决定。

现在，根据拉姆齐定理，存在 N，使得对于每个长度至少为 N 的字 $w \sqsubset X$，都存在一个子词 uv，使得 u 和 v 均非空，且 $I(u) = I(v) = I(uv)$。为此，设 w 是这样一个字，并将 2-子集 $\{i,\ j\} \subset N$ 按照 $I(w_{[i,\ j]})$ 着色。如果 N 足够大，就存在一个大小为 3 的单色子集，它对应于字 uv。特别地，由上一段可知

$$I(u) = I(uv) = I(u)I(v) = I(u)I(u) = I(u^2) \cdots = I(u^k)$$

对所有 k 均成立。[3]

如果 F 生成一个无限群，那么在适当应用 F 中元素的情况下，存在任意长的字 w，读写头可以在其上行走。否则，每个足够长的字都会阻碍移动，因此 F 必须生成一个有限群。更准确地说，存在任意长的字 $w \in X$ 是可遍历的，这意味着

$$(\rightarrow, q') \in \phi(w)(\rightarrow, q) \text{ or } (\leftarrow, q') \in \phi(w)(\leftarrow, q)$$

对于某个 $q,\ q' \in Q$。

如果 w 具有这一性质，那么它的所有子词也都具有这一性质。因此，如果 F 生成一个无限群，那么存在一个可遍历词 u，使得 $I(u) = I(uu)$。一旦找到这样一个字 u，就有 $u^k \sqsubset X$ 对所有 k 均成立，并且每个 u^k 都是可遍历的，因此 F 必须是无限的。□

在处理多维情形的问题之前，我们回顾一下在 [22] 中提出并证明为不可判定的**蛇形铺砖问题**。在这个问题中，给定一个 T 由带有颜色边且关联有方向箭头的正方形瓷砖组成的集合，目标是找到 $\mathbb{Z}^2$ 的部分铺砖 —— 也就是说，可以有一些位置不放置瓦片 —— 使得对于两个相邻瓦片，如果其中一个瓦片的箭头指向另一个瓦片，则它们在相邻边上具有相同的颜色。此外，我们还要求部分铺砖中至少出现一条无限路径，并沿着与瓦片关联的方向行进。

对于接下来的证明，我们将使用蛇形铺砖问题的一个略作修改的版本，该问题同样是不可判定的 [22]。我们不再使用只有一个向外方向的王氏瓷砖，而是使用同时具有左方向和右方向的瓦片。形式化地，设 T 为一个带有颜色边和函数 $\texttt{left}, \texttt{right}\colon T \to D$ 的有限瓦片集，其中 $D = \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$，并且对每个 $t \in T$ 满足 $\texttt{left}(t) \neq \texttt{right}(t)$。我们将要求一个部分铺砖 $\tau\colon \mathbb{Z}^2 \to T \cup \{\epsilon\}$，使得存在一个函数 $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$，满足 $\tau(p(n)) \in T$、$p(n+1) - p(n) = \texttt{right}(\tau(p(n)))$，并且对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $p(n) - p(n+1) = \texttt{left}(\tau(p(n+1)))$；同时，所有瓦片都沿着箭头与其非-$\epsilon$ 邻居匹配。如果存在带有这样一条路径的部分铺砖 τ，我们就说该问题的实例 $(T, \texttt{left}, \texttt{right})$ **允许一条蛇**。

理解这一版本的一种方式是：右箭头给出如何在这条路径中走到 $+\infty$ 的指示，而左箭头则指向 $-\infty$。

定理 4.12。对于所有 $n \geqslant 2$、$k \geqslant 1$、$d \geqslant 2$，$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^d$、$n$、$k)$ 中都存在一个有限生成子群，其挠问题是不可判定的。

证明。在证明的其余部分，我们假设 $d = 2$。一般情形下，结论由显然的事实得出：$\mathbf{RFA}(\mathbb{Z}^2, n, k)$ 嵌入 $\mathbf{RFA}(\mathbb{Z}^d, n, k)$。

[3]或者，也可以应用众所周知的事实：每个有限半群都有一个幂等元；但本段的论证更明确地说明了为什么可以选取语言 X 中的幂等元 u，并使其具有可遍历性。

首先，我们说明，若令字母表 Σ 任意，并取元素$f \in \mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^2, |\Sigma|, 2)$的局部规则，那么判定 T_f 是否为该群中的扭元是不可判定的。然后，我们说明如何在固定字母表和状态数的情形下进行这一构造。最后，我们证明，对于每个 $n \geqslant 2$ 和 $k \geqslant 1$，$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^2, n, k)$的有限生成子群中的挠问题仍然是不可判定的。

考虑修改后的蛇形铺砖问题的一个实例 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$ 其中 T是砖块集合。我们选择 $|\Sigma| > |T|$，并将 Σ 中的前 $|T|$ 个符号与 T 中的砖块对应，其余符号对应空砖块。我们构造一个局部规则 f，当且仅当 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$存在蛇时，该规则给出一个非扭元 T_f。

在这个实例中，我们需要两个状态，称为**方向位** $Q = \{R,\ L\}$，分别表示向右和向左。机器 T_f 的半径为 $F = \{(i,\ j) \in \mathbb{Z}^2 \mid |i| + |j| \leqslant 1\}$，其运行方式如下：

- 设 t 为 $(0,\ 0)$处的砖块。若 $t = \epsilon$，则不执行任何操作。
- 否则：– 若状态为 L，检查 $\texttt{left}(t)$方向上的砖块。若它与 t正确匹配，则将读写头移至该位置；否则将状态切换为 R。– 若状态为 R，检查 $\texttt{right}(t)$方向上的砖块。若它与 t正确匹配，则将读写头移至该位置；否则将状态切换为 L

机器 T_f 是可逆的，其逆机器与原机器执行相同的操作，只是交换 R 和 L 的作用。如果 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$ 存在一条蛇，那么只需考虑 $\Sigma^{\mathbb{Z}^2} \times X_q$ 中包含一条无限蛇，且机器的读写头位于蛇上某处的构型。显然，在该构型中，T_f 会不断向无穷远处移动，且不会重复经过任何位置，因此 T_f 是一个非扭元（请回忆我们使用的是移动头模型）。反过来，如果 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$ 不存在蛇，那么 T_f 从起始位置出发，在遇到错误或进入循环之前能够移动的距离就有一个一致上界，因此 T_f 的阶有限。这就证明了当字母表任意时，挠问题不可判定。

现在我们说明如何改用固定字母表，以及如何避免使用状态。为此，我们将瓦片编码为大小为 $n \times n$ 的正方形。让编码的左下角包含 $\begin{smallmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$，并确保其他位置不存在相邻的两个 1，这样就能保证将给定铺砖“解析”为正方形编码的方式唯一。显然，机器 T_f 的移动现在会扩大 n 倍，而任何不符合瓦片编码的内容都会被解释为空砖块。此外，由于正确正方形的解析方式唯一，也可以利用读写头在左下角的位置来编码状态。例如，$\begin{smallmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$ 的左下角编码 L，而 $(1,\ 0)$ 的右下角编码 R。因此，状态改变相当于移位 $(1,\ 0)$ 或 $(-1,\ 0)$。

前述构造的不足之处在于，由此定义的机器子群不一定是有限生成的。因此，事先看来，$\mathrm{RFA}(\mathbb{Z}^2、 n、 k)$ 的每个有限生成子群都可能具有可判定的挠问题。为了证明情况并非如此，我们构造一个有限机器集来模拟前述构造。为此，我们将使用一种特定的 7×7 方形编码，如图 8 所示。这种编码由三个区域组成。**外部区域**由一个边长为 7 的 1 环构成，用于明确无误地编码结构的边界。该区域左下角的四个 1 用于编码状态；具体做法是，强制机器的读写头始终停留在模 $\mathbb{Z}^2/7\mathbb{Z}^2$意义下的这四个位置之一。**中间区域**由一个边长为 5 的 0 环构成，用于隔开这三个区域，从而避免任何歧义。最后，**内部区域**是一个 3×3 方形，其中包含一个$\{0、 1\}^9$中的构型。其中四个比特 l_1、l_2、r_1、r_2 用于在 $D = \{(1、 0)、 (-1、 0)、 (0、 1)、 (0、 -1)\}$中编码两个方向。其余比特的用途将在后文说明。

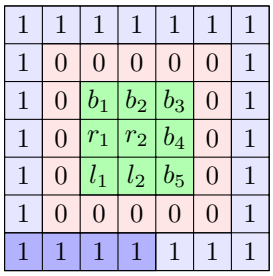


图 8. 该构造的基本编码。1 的外环（蓝色）编码单元格的边界和状态。0 的中环将各区域分隔开。内环（绿色）编码信息。

在这一构造中，我们将使用一个两比特字符串 $s \in \{0、1\}^2$ 作为状态集合（通过读写头在外环四个固定位置中的位置进行编码）。第一个比特是**方向位**，也就是说，它在第一个构造中承担 L 和 R 的作用。第二个比特是**辅助位**，其作用稍后便会明了。

令 C 为图 8 所示形状的所有图案的集合，这些图案以 1 的环上的四个固定位置之一为中心——也就是说，其支撑具有 $([-i, 7-i] \times [0,7]) \cap \mathbb{Z}^2$ 的形式，其中 $i \in \{0,1,2,3\}$——。我们将以下有限机器集作为生成集 S。

(1) $\{T_{\vec{v}}\}_{v \in D}$，其行走方向为 $\vec{v} \in D$，且不受构型影响。(2) $T_{\texttt{walk}}$，其行走方向由 l_1, l_2 或 r_1, r_2 编码，具体取决于方向位。(3) $\{g_c\}_{c \in C}$，若当前图案为 $c \in C$，则翻转方向位；(4) $\{h_c\}_{c \in C}$，若当前图案为 $c \in C$，则翻转辅助位；(5) $\{g_{+,c}\}_{c \in C}$，若当前图案为 $c \in C$，则将辅助位加到方向位上；(6) $\{h_{+,c}\}_{c \in C}$，若当前图案为 $c \in C$，则将方向位加到辅助位上，

机器 $T_{\texttt{walk}}$ 是唯一需要仔细定义的机器。它的作用与开头定义的 T_f 类似。形式上，它执行以下操作：

• 如果单位元周围的图案不对应于 $c \in C$，则不执行任何操作。• 否则：– 如果方向位为 0，则检查以实际头部位置向 $\texttt{7left}(t)$ 偏移处为中心的图案。如果该图案是处于相同状态的有效 $c' \in C$，且其右侧两位编码了 $-\texttt{left}(t)$，则将读写头移动 $\texttt{7left}(t)$。否则，将方向位翻转为 1。– 如果方向位为 1，则检查以实际头部位置向 $\texttt{7right}(t)$ 偏移处为中心的图案。如果该图案是处于相同状态的有效 $c' \in C$，且其左侧两位编码了 $-\texttt{right}(t)$，则将读写头移动 $\texttt{7right}(t)$。否则，将方向位翻转为 0。

机器 $T_{\vec{v}}$ 的作用就是移位 $\vec{v} \in D$，显然这是可逆的。由于 $\langle D \rangle = \mathbb{Z}^2$，对于每个向量 $\vec{u} \in \mathbb{Z}^2$，将读写头移动 $\vec{u}$ 的机器 $T_{\vec{u}}$ 属于 $\langle S \rangle$。

令 p^* 为由 c 中的图案串联而成的图案，这些图案沿列和 1 的行对齐。更形式化地，对于有限的 $F \subset \mathbb{Z}^2$，p^* 是一个支撑为 $7F + (([-i,\ 7-i] \times [0,\ 7]) \cap \mathbb{Z}^2)$ 的图案，其中某个 $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 满足：对于每个 $\vec{v} \in F$，都有 $\sigma^{-7\vec{v}}(p^*)|_{([-i,\ 7-i] \times [0,\ 7]) \cap \mathbb{Z}^2} \in C$。我们将 g_{p^*} 和 h_{p^*} 定义为如下机器：若它们读取 p^*，就分别翻转方向位和辅助位。我们声称 g_{p^*}，$h_{p^*} \in \langle S \rangle$。若 p^* 由某个单元素集 $F = \{\vec{v}\}$ 定义，只需注意，对于适当的 $c \in C$，有 $g_{p^*} = T_{-7\vec{v}} \circ g_c \circ T_{7\vec{v}}$ 和 $h_{p^*} = T_{-7\vec{v}} \circ h_c \circ T_{7\vec{v}}$。归纳地，我们可以选取 $\vec{v} \in F$，并将 p^* 分解为图案 $p^*_{F \setminus \{\vec{v}\}}$ 与另一部分的不交并，其中图案 $p^*_{F \setminus \{\vec{v}\}}$ 由 $F \setminus \{\vec{v}\}$ 定义，而

由 $p^*_{\vec{v}}$ 和 $\vec{v}$ 定义的图案，因此记作：

$$g_{p^*} = (T_{-7\vec{v}} \circ g_{+,c} \circ T_{7\vec{v}} \circ h_{p^*_{F\setminus\{\vec{v}\}}})^2, \text{ and } h_{p^*} = (T_{-7\vec{v}} \circ h_{+,c} \circ T_{7\vec{v}} \circ g_{p^*_{F\setminus\{\vec{v}\}}})^2.$$

考虑蛇形铺砖问题的一个实例 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$。与每块瓦片 $t \in T$ 相关的信息由颜色四元组 $(c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ 以及方向 $\texttt{left}(t)$ 和 $\texttt{right}(t)$ 组成。假设 T 中的瓦片使用 N 种颜色定义。令 $M \in \mathbb{N}$ 满足 $M^2 > \log_2(N)$。我们为每个 $t \in T$ 定义一个宏瓦片 $\mathbf{M}(t)$，它是一个固定的方形图案阵列，其形状如图 8 所示，边长为 M（见图 9）。我们固定这些图案从左下到右上的一个枚举，记作 $\{c_j\}_{1 \leqslant j \leqslant M^2}$，并将 c_j 的比特 b_i 记为 $b_{i,\ j}$。我们要求 $\mathbf{M}(t)$ 满足以下性质：

- 对于 $i \in \{1、2、3$，位序列$\{b_i$表示颜色 c_i。
- b_5，对于所有 $j > 1$，比特$b_{5,\ j} = 0$。
- l_1和 r_1 的位 l_2 和 r_2 分别编码 $\texttt{left}(t)$ 和 $\texttt{right}(t)$。
- 如果 $\texttt{left}(t) = (1,\ 0)$，那么对于所有 $2 \leqslant j \leqslant M$，我们有 $l_1,\ l_2$，且 r_1和 r_2 的 c_j 分别编码 $(1、\ 0)$ 和$(-1、\ 0)$。
- 如果 $\texttt{right}(t) = (1,\ 0)$，那么对于所有 $2 \leqslant j \leqslant M$，我们有 $l_1,\ l_2$，且 r_1和 r_2 的 c_j 分别编码 $(-1、\ 0)$ 和$(1、\ 0)$。
- 如果 $\texttt{left}(t) = (0,\ 1)$，那么对于所有 $1 \leqslant j \leqslant M-1$，我们有 $l_1,\ l_2$，且 r_1和 r_2 的 c_{1+jM} 分别编码 $(0、\ 1)$和 $(0、\ -1)$。
- 如果 $\texttt{right}(t) = (0,\ 1)$，那么对于所有 $1 \leqslant j \leqslant M-1$，我们有 $l_1,\ l_2$，且 r_1和 r_2 的 c_{1+jM} 分别编码$(0、\ -1)$ 和 $(0、\ 1)$。

由于 $M^2 > \log_2(N)$，可以满足第一个要求。其余要求可以通过 $\texttt{left}(t) \neq \texttt{right}(t)$ 满足。图 9 展示了这样一个宏瓦片的示例。

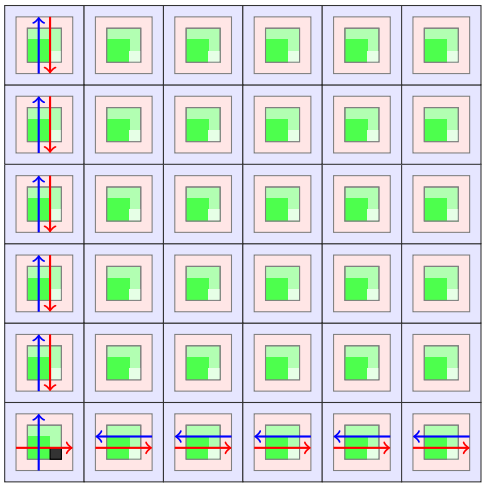
$\mathbf{M}(t) =$ 

图 9。边长为 $M = 6$ 的宏瓦片 $\mathbf{M}(t)$ 示例。红色箭头表示函数 $\texttt{left}(t) = (1,0)$，而蓝色箭头表示 $\texttt{right}(t) = (0,1)$。左下角的黑色方块表示 $b_{5,1} = 1$。

将所有不表示某个 $t \in T$ 的 $M \times M$ 编码数组关联到 ϵ 瓦片。此外，令 $\mathbf{M}$ 为所有模式的集合，这些模式以数组形式给出，包含 3×3 个宏瓦片，表示蛇形问题的有效局部图案，并且中间瓦片不是 ϵ 瓦片，同时位于中间宏瓦片左下角位置的中心。

考虑由 $T^* \in \langle S \rangle$ 给出的机器：

$$T^* = (T_{\texttt{walk}})^M \circ \prod_{p^* \in \mathcal{M}} g_{p^*} \circ \prod_{c \in C} g_c$$

我们断言， T^* 是一个扭元，当且仅当 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$ 不含蛇 .

如果 $(T,\ \texttt{left},\ \texttt{right})$ 含有一条蛇，那么只需取一个含有蛇的构型，将其中的每个瓦片和 ϵ 替换为相应的宏瓦片，并将机器的读写头放在属于这条蛇的某个宏瓦片的左下角。机器 T^* 会先检测到某个图案 $c \in C$，因此恰好有一个 g_c 会翻转方向位一次。随后，它会检测到蛇形问题的一个有效图案 p^* ，于是 g_{p^*} 会再次翻转方向位，相当于什么也没做。最后， $(T_{\texttt{walk}})^M$ 只会朝下一个宏瓦片的左下角移动。由于初始配置编码了一条蛇，重复这一过程会使 T^* 无限行走，因此 T^* 不是一个挠元。

要证明反向结论，我们需要更仔细地分析 T^*的行为。首先，如果初始配置中的读写头不在图案 $c \in C$上方，那么根据定义， T^* 的作用是平凡的。否则，假设读写头位于一个 $c \in C$上方。应用 $\prod_{p^* \in \mathcal{M}} g_{p^*} \circ \prod_{c \in C} g_c$ 至多会导致一次状态改变，因此之后读写头仍会看到某个 $c' \in C$ 。此外，根据 $T_{\texttt{walk}}$的定义，应用 $(T_{\texttt{walk}})^M$后，读写头始终会看到 C 的一个元素。这意味着应用 T^*后，读写头始终会看到 C 中的一个图案。

T^* 从 C中的一个图案开始时，存在两种可能的行为。如果读写头不在 M 中的有效宏瓦片数组上方，则 g_c会翻转方向位，第二部分不执行任何操作，并且$T_{\texttt{walk}}$ 会被应用 M 次。否则，方向位会被翻转两次，等于没有发生翻转，并且 $T_{\texttt{walk}}$ 会被应用 M 次。

这两种行为可表述如下：如果读写头位于 M 中的有效宏瓦片数组上方，则 T^* 要么可以移动到另一个有效数组中（并正确模拟证明中最初定义的 T_f的运行），要么会移出有效宏瓦片数组。如果确实移出，那么再次应用 T^* 会撤销 $T_{\texttt{walk}}$ 的最后 M 步，并改变方向位。因此，该机器会继续处于 M 的有效数组内部，并模拟 T_f。在这种情况下，我们可以利用蛇形长度的一致上界，找到一个上界 N ，使得 $(T^*)^N$ 在所有这些构型上都平凡作用。剩下的唯一情况是：读写头最初不在 M 中的数组上方，而应用一次 T^* 后仍然如此。在这种情况下，我们只需注意到 $(T^*)^2$ 在这些构型上平凡作用。由此可知 $(T^*)^{2N} = id$，因此 T^* 是 $\langle S \rangle$的一个挠元。□

在 $k = 1$ 的特殊情形下，前述结果可以用动力系统的术语来表述。具体而言，RFA$(\mathbb{Z}^d,\ n,\ 1)$ 恰好是作用在 n 个符号上的全 $\mathbb{Z}^2$ 移位的拓扑全群。因此得到推论 1.5：对于每个 $d \geqslant 2$ ，作用在 n 个符号上的全 $\mathbb{Z}^2$ 移位的拓扑全群都包含一个具有不可判定挠问题的有限生成子群。

5. 致谢

S. Barbieri 的部分研究经费由 ANR 项目 CODYS (ANR-18-CE40-0007)、CoCoGro (ANR-16-CE40-0005) 及 FONDECYT 资助项目 11200037 提供。V. Salo 的部分研究经费由 FONDECYT 资助项目 3150552 和芬兰科学院资助项目 2608073211 提供。

参考文献

[1] S. Aaronson、D. Grier 和 L. Schaeffer。《可逆比特操作的分类》。载于 C. H. Papadimitriou 编，第八届理论计算机科学创新会议（*ITCS 2017*），莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*）第 67 卷，第 23:1–23:34 页，德国达格施图尔，2017 年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik。

[2] N. Aubrun、S. Barbieri 和 M. Sablik. 有限生成群上子移位的一种有效性概念. *Theoretical Computer Science*, 661:35–55, 2017.

[3] N. Aubrun 和 M. Sablik. 用二维有限型子移位模拟有效子移位. 《应用数学学报》, 126(1):35–63, 2013.[4] S. Barbieri、J. Kari 和 V. Salo. 可逆图灵机群. 载于 M. Cook 和 T. Neary 编, 《元胞自动机与离散复杂系统》, 第 49–62 页, 沙姆, 2016年。施普林格国际出版.[5] J. Belk 和 C. Bleak. 关于异步转换器和 brin-thompson 群 $2V$ 的若干不可判定性结果. 《美国数学会会刊》, 369(5):3157–3172, 2016.[6] J. Belk 和 F. Matucci. Thompson群中的共轭性与动力学. 《几何学专题》, 169(1):239–261, 2014.[7] T. Boykett 、 J. Kari 和 V. Salo. 强通用可逆门集 . 载于 S. Devitt 和 I. Lanese 编, 《可逆计算》, 第 239–254 页, 沙姆, 2016年。施普林格国际出版.[8] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert. 《元胞自动机与群》. 施普林格数学专著. 施普林格出版社, 2010.[9] E. Czeizler 和 J. Kari. 双射自动机同步延迟的紧线性上界. Theoretical Computer Science, 380(1–2):23–36, 2007. 自动机、语言与编程.[10] B. Durand、A. Romashchenko 和 A. Shen. 一维有效闭子移位可在二维中实现. 载于《逻辑与计算领域》, 第 208–226 页。Springer, 2010.[11] G. Elek 和 N. Monod. 关于 Cantor 极小 $\mathbb{Z}^2$ 系统的拓扑全群. 《美国数学会会刊》, 141(10):3549–3552, 2013年6月.[12] A. Gajardo 和 P. Guillon. 图灵机中的之字形结构. 载于《计算机科学：理论与应用》, 第 109–119 页。Springer, 2010.[13] A. Gajardo 和 J. Mazoyer. 通过符号方法构造单读写头机器. Theoretical Computer Science, 370(1–3):34–47, 2007.[14] A. Gajardo、N. Ollinger 和 R. Torres-Avil´es. 图灵机的传递性问题. 载于 G. F. Italiano、G. Pighizzini 和 D. T. Sannella 编, 《2015年计算机科学数学基础》, 第 231–242 页, 柏林、海德堡, 2015年。施普林格柏林海德堡.[15] T. Giordano、I. Putnam 和 C. Skau. Cantor极小系统的全群. 《以色列数学杂志》, 111(1):285–320, 1999.[16] R. I. Grigorchuk 和 K. S. Medynets. 关于拓扑全群的代数性质. 《数学文集》, 205(6):843–861, 2014年6月.[17] M. Hochman. 关于多维符号系统的动力学与递归性质. 《数学发明》, 176(1):131–167, 2009.[18] P. K. J Delvenne 和 V. Blondel. 符号动力系统中的可判定性与通用性 . Fund. Inform., 74(4):463–490, 2006.[19] E. Jeandel. 单带图灵机熵的可计算性. 载于 E. W. Mayr 和 N. Portier 编, 《第31届国际计算机科学理论方面研讨会（STACS 2014）》, 莱布尼茨国际信息学论文集第25卷, 第 421–432 页, 德国达格施图尔, 2014年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心.[20] K. Juschenko 和 N. Monod. Cantor系统、分片平移与单可恬群. 《数学年刊》, 178(2):775–787, 2013年6月.[21] J. Kari. 用块置换表示可逆元胞自动机. 《计算系统理论》, 29:47–61, 1996.[22] J. Kari. 《语言理论发展：第六届国际会议，DLT 2002，日本京都，2002年9月18—21日，修订论文集》, 章节：无限蛇形铺砖问题, 第 67–77 页。施普林格柏林海德堡, 柏林、海德堡, 2003.

[23] J. Kari 和 N. Ollinger。《可逆计算中的周期性与永生性》。载于《第33届国际计算机科学数学基础研讨会论文集》（MFCS ’08），第419–430页，柏林、海德堡，2008年。施普林格出版社。[24] A. Kazda。《sofic 子移位中的链关系》。Fundam. Inf.，84(3,4):375–390，2008年12月。[25] P. K˚urka。《图灵机的拓扑动力学》。Theor. Comput. Sci.，174(1-2):203–216，1997年3月。[26] P. K˚urka。《勘误：带移动读写头的图灵机的熵》。Theor. Comput. Sci.，411(31-33):2999–3000，2010年6月。[27] C. G. Langton。《用元胞自动机研究人工生命》。Physica D: Nonlinear Phenomena，22(1–3):120–149，1986年10月。[28] D. Lind 和 B. Marcus。《符号动力学与编码导论》。剑桥大学出版社，1995年。[29] H. Matui。《关于 Cantor 极小系统拓扑全群的一些评述》。International Journal of Mathematics，17(02):231–251，2006年。[30] H. Matui。《单侧有限型移位的拓扑全群》。Journal f ¨ur die reine und angewandte Mathematik（Crelles Journal），2015(705)，2015年1月。[31] C. Moore。《广义移位：动力系统中的不可预测性与不可判定性》。Nonlinearity，4(2):199，1991年。[32] V. Salo。《关于全移位自同构群子群的一则注记》。Ergodic Theory and Dynamical Systems，第1–13页，2016年。[33] V. Salo。《具有稀疏迹的子移位》。Studia Mathematica，255:159–207，2020年。出版方：波兰科学院数学研究所。[34] V. Salo 和 I. T¨orm¨a。《群行走自动机》。载于 J. Kari 编，《元胞自动机与离散复杂系统》，《计算机科学讲义》第9099卷，第224–237页。施普林格柏林海德堡，2015年。[35] V. Salo 和 I. T¨orm¨a。《平面行走自动机》。载于 T. Isokawa、K. Imai、N. Matsui、F. Peper 和 H. Umeo 编，《元胞自动机与离散复杂系统》，《计算机科学讲义》第8996卷，第135–148页。施普林格国际出版，2015年。[36] P. Selinger。《奇数 k 的可逆 k 值逻辑电路是有限生成的》。arXiv 预印本，2016年4月。[37] J. C. V. Blondel 和 C. Nichitiu。《关于图灵机和计数器机中周期构型的存在》。Theoretical Computer Science，289(1):573–590，2002年。[38] S. Xu。《最少使用辅助位的可逆逻辑综合》。硕士论文，麻省理工学院，2015年6月。