arXiv:2303.17303v1 [math.FA] 30 Mar 2023

度量空间值 Sobolev 映射的弱可微性

PAUL CREUTZ 和 NIKITA EVSEEV

ABSTRACT. 我们证明，取值于对偶巴拿赫空间的 Sobolev 映射，可以用弱* 意义下的弱导数来刻画。由于每个度量空间都等距嵌入某个对偶巴拿赫空间，这就意味着，度量空间值 Sobolev 映射也可以用这类导数来刻画。此外，我们还考察了哪些目标空间中的 Sobolev 映射几乎处处弱*可微。

1. INTRODUCTION

1.1. 主要结果。我们研究一阶 Sobolev 映射 $u\colon \Omega \to X$，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，X 是完备度量空间。过去 30 年来，关于 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega; X)$，人们已经建立了若干等价定义。尤其是，如今对于哪些映射 $u\colon \Omega \to X$ 属于 $W^{1,p}(\Omega; X)$、哪些不属于，人们已有普遍共识，概述见 [22, 第 10], [25] 章和 [2] 。实值函数的经典方法是将 $W^{1,p}(\Omega)$ 定义为满足以下条件的$f \in L^p(\Omega)$的集合：对于每个 $j = 1, \ldots\ldots, n$，都存在一个弱偏导数 $f^j \in L^p(\Omega)$，使得

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \cdot f(x)\, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \varphi(x) \cdot f^j(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{for every } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1}$$

本文旨在为 X 值映射提供一种具有类似风格的刻画，该刻画与广为确立的度量定义$_{W^{1,\,p}}(\Omega; X)$ 相容。

可以将 $L^p(\Omega; X)$ 定义为满足以下条件的 f 的集合：f 可测且本质可分值，且对每个 $z_0 \in X$，都有 $\Omega \to X$ 使得 $d(f(-)\, z_0) \in L^p(\Omega)$。然而，一般而言，$X$ 不具有线性结构，因此对于 X 值映射，式 (1) 中的积分没有定义。尽管如此，通过将 X 等距嵌入到巴拿赫空间 V 中，可以引入辅助的线性结构。例如，Kuratowski 映射 $\kappa\colon X \to \ell^\infty(X)$ 提供了一个等距嵌入，将其嵌入到由 X 上有界函数构成的巴拿赫空间 $\ell^\infty(X)$ 中。因此，一种自然的方法是先定义 Banach 空间值 Sobolev 映射，然后将度量值映射定义为：它们与到某个巴拿赫空间中的等距嵌入复合后是 Sobolev 映射。

属于 $L^p(\Omega; V)$ 的函数是 Bochner 可积的，因此很自然会想将$_{W^{1,\,p}\,\mathrm{Ban}}(\Omega; V)$ 定义为由那些 $f \in L^p(\Omega; V)$ 函数组成的集合：它们具有弱偏导数 $f^j \in L^p(\Omega; V)$，且这些偏导数满足 (1)（以 Bochner 积分的意义）。对于巴拿赫空间值映射，这一定义可追溯至 Sobolev 本人 [28]，并曾由偏微分方程和泛函分析领域的研究者从经典角度加以研究，参见例如 [26, 7, 27, 23, 3]。近来，该定义被引入度量空间值映射的情形 [20]，随后也被用于许多论文，例如 [30, 18, 4, 19]。然而，正如 [6] 和 [12], 中所指出的，这种

对 $W^{1,\,p}_{\mathrm{Ban}}(\Omega;\,V)$ 的定义，只有在 V 具有拉东–尼科迪姆性质时，才与 $W^{1,\,p}(\Omega;\,V)$ 的度量定义相一致。这带来了问题，因为许多几何学中感兴趣的空间无法等距嵌入具有这一性质的巴拿赫空间，参见 [8, 定理 1.6] 和 [9, 注 4.2]。事实上，以 $W^{1,\,p}_{\mathrm{Ban}}(\Omega;\,\ell^\infty(X))$ 和 Kuratowski 嵌入 $\kappa\colon X\to\ell^\infty(X)$ 定义的度量 Sobolev 空间总是平凡的 [10]。为了解决这个问题，我们提出以下定义。

定义1.1. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，$p\in[1,\infty)$，且 V^* 是一个对偶巴拿赫空间。空间 $L^p_*(\Omega;V^*)$由满足以下条件的函数组成：$f\colon\Omega\to V^*$ 可测，并且上积分 $\fint_\Omega\|f(x)\|^p\,\mathrm{d}x$ 是有限的。若 f属于 Sobolev 空间 $W^{1,p}_*(\Omega;\,V^*)$，则 $f\in L^p(\Omega;\,V^*)$，并且对于每个$j=1,\,\ldots\ldots,\,n$，存在一个函数 $f^j\in L^p_*(\Omega;\,V^*)$，使得

$$\int_\Omega\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega\varphi(x)\cdot f^j(x)\,\mathrm{d}x\quad\textit{for every }\varphi\in C^\infty_0(\Omega)$$

在盖尔范德积分的意义下。

定义1.1是对定义1.3的略微变体，其中还额外假设，对于函数 $f\in L^p_*(\Omega;\,V^*)$，$x\mapsto\|f(x)\|$ 是可测的，参见第3.4节中的讨论。本文的主要结果是，定义1.1与 $W^{1,p}(\Omega;\,V^*)$的度量刻画是等价的。

定理 1.2。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，$p\in(1,\infty)$，且 V^* 是一个对偶巴拿赫空间。那么 $W^{1,\,*\,p}(\Omega\;V^*)=W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)$。

事实上，$W^{1,\,*\,p}(\Omega\;V^*)$ 和 $W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)$ 不仅作为集合相等，而且相应的 Sobolev 范数等价，见第3.3节。对于度量索оболев空间 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,X)$，现在可以选取一个等距嵌入 $\iota\colon X\to V^*$到某个对偶巴拿赫空间 V^*（例如 $\ell^\infty(X)$）中，并定义

$$W^{1,p}_*(\Omega;X):=\left\{u\colon\Omega\to X\mid\iota\circ u\in W^{1,p}_*(\Omega;V^*)\right\}.\tag{2}$$

并由定理 1.2 推得 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,X)=W^{1,\,p}(\Omega;\,X)$。

在 [5] 和 [10] 中，当前对偶空间 V 可分时，已证明 $W^{1,\,*\,p}(\Omega\;V^*)$ 与 $W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)$ 相等。事实上，每个可分度量空间 X 都可等距嵌入对偶可分 Banach 空间 $\ell^\infty(\mathbb{N})$，对于这样的 X，早已有人提出一种一致的定义，以 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,\ell^\infty(\mathbb{N}))$ 来定义 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,X)$，见 [10]。然而，这种方法在形式上有一个缺点：首先必须为对偶可分 Banach 空间定义$W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,V^*)$（这些空间通常本身并不可分），然后才能得到 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,X)$ 的定义，而该定义仅适用于可分的 X。

对于任意对偶空间，包含关系 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,V^*)\subset W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)$ 已在 [10] 中得到证明。对于从对偶空间到可分空间的映射，另一方向的包含关系在 [5,10] 中的证明依赖于绝对连续曲线几乎处处的弱*可微性。特别是，其中等式的证明并不适用于任意对偶空间，因为例如 Kuratowski 嵌入 $\kappa\colon[0,1]\to\ell^\infty([0,1])$ 在任何点都不具有点态弱*可微性，见下文例 3.6。在第 3.5 节中，我们将引入一类对偶空间，它不仅推广了从对偶空间到可分空间的情形，也推广了具有 Radon-Nikod´ym 性质的空间，并刻画绝对连续曲线几乎处处的弱*可微性，见下文定义 3.7。

1.2. 章节安排。首先，在第 2 节中，我们建立记号，并回顾有关可测性、积分和度量值索伯列夫映射的一些标准结果。随后，第 3 节构成全文的主体。首先，在第 3.1 节和第 3.2 节中，我们证明定理 1.2。然后，在第3.3节中，我们讨论弱弱*导数的不唯一性，以及如何在 $W^{1,*p}(\Omega; V^*)$ 上定义合适的索伯列夫范数。在第 3.4节中，我们讨论上述关于 $x \mapsto \|f^j(x)\|$ 对弱弱*导数 f^j的可测性问题。最后，在第 3.5 节中，我们研究点态几乎处处的弱*可微性，并引入一个保证绝对连续曲线具有该性质的条件。

1.3. 致谢。第一作者感谢 Matthew Romney 和 Elefterios Soultanis 的有益讨论。第二作者则感谢 Sergey Basalaev 和 Konstantin Storozhuk 提供的宝贵意见。

2. Preliminaries

本节中，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域，$p \in [1,\infty]$, V 为巴拿赫空间，X 为完备度量空间。

2.1. 可测性与积分。若函数 $f\colon \Omega \to X$ 关于 X 上的 Borel σ 代数以及 Ω 上由勒贝格可测集构成的 σ 代数可测，则称其为可测函数。对于 $p \in [1,\infty)$（分别为 $p = \infty$），我们用 $L^p(\Omega)$ 表示可测函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 所构成的空间，其中勒贝格积分$\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$（分别为 $|f|$的本质上确界）有限。函数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 的上积分为

$$\overline{\int_\Omega} f(x)\ \mathrm{d}x := \inf_{\substack{h\in L^1(\Omega)\\ f\le h}} \int_\Omega h(x)\ \mathrm{d}x.$$

若存在一个勒贝格零测集 $N \subset \Omega$，使得 $f(\Omega \setminus N)$ 可分，则称 $f\colon \Omega \to X$ 本质可分值。若 $f\colon \Omega \to X$ 可测且本质可分值，则 f 在几乎处处的 $x \in \Omega$ 上近似连续，见 [13] 中的定理 2.9.13。后者意味着，对每个 $\varepsilon > 0$，都有

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{y \in B(x,\delta) \mid d(f(y),f(x)) \ge \varepsilon\}\right)}{\mathcal{L}^n\left(B(x,\delta)\right)} = 0.$$

事实上，与 ZFC 相容的是，假设每个可测的 $f\colon \Omega \to X$ 都是本质可分值的，参见 [13] 第 2.1.6 节和第 2.3.6 节。

我们用 $L^p(\Omega; X)$ 表示由可测的本质可分值函数 $f\colon \Omega \to X$ 组成的空间，这些函数满足，对于某个（或等价地，对于每个）$z_0 \in X$，$x \mapsto d(f(x), z_0)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中定义了一个元素。对于 $f \in L^1(\Omega; V)$ 中的函数，可以关联一个 V 中的向量，称为博赫纳积分，记作 $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$。构造的思路是令

$$\int_\Omega f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^n(A_i)\cdot v_i$$

对于形如 $f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{A^i}(x)\ \cdot v_i$ 的简单函数，然后证明 $L^1(\Omega; V)$ 中的函数可以由简单函数适当地逼近，使得这些函数的博赫纳积分收敛。详情请参见 [22, 第 3 节。2]

对于 $f \in L^1(\Omega; V)$ 和带有 $\mathcal{L}^n(E) > 0$ 的 $E \subset \Omega$，我们定义

$$\fint_E f(x)\ \mathrm{d}x := \frac{1}{\mathcal{L}^n(E)} \cdot \int_E f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathcal{L}^n(E)} \cdot \int_\Omega \chi_E(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x.$$

我们将需要以下观察结果。

引理 2.1。设 $f \in L^\infty(\Omega; V)$ 且 $0 < C \leq 1$。再设 $x \in \Omega$ 是 f 的一个近似连续点，并设 $(E^\delta)_{\delta>0}$ 是一族可测集，使得$E^\delta \subset B(x,\delta)$ 且 $\mathcal{L}^n\left(E^\delta\right) \geq C \cdot \mathcal{L}^n(B(x,\delta))$。那么

$$\fint_{E^\delta} f(y)\ \mathrm{d}y \to f(x) \quad \text{as } \delta \to 0.$$

引理 2.1 的直接证明留给读者。由于每个函数$f \in L^\infty(\Omega; V)$几乎处处近似连续，引理 2.1 为巴拿赫空间值函数和博赫纳积分给出了勒贝格密度定理的一种变体。

我们用 V^* 表示 V 的对偶巴拿赫空间，并用 $\overset{*}{\rightharpoonup}$ 表示对偶向量关于 V^*上的弱*拓扑的收敛。对于 $v \in V$、$\Lambda \in V^*$ 和$f\colon \Omega \to V^*$，我们定义 $\langle v, \Lambda\rangle := \Lambda(v)$，以及函数 $f_v\colon \Omega \to \mathbb{R}$，如下：

$$f_v(x) := \langle v, f(x)\rangle.$$

映射 $f\colon \Omega \to V^*$ 若对每个 $v \in V$，f_v 都是可测函数，则称其为弱*可测。对于 $p \in [1,\infty)$（分别为 $p = \infty$），空间 $L^p_*(\Omega; V^*)$ 定义为由满足以下条件的弱*可测函数 $f\colon \Omega \to V^*$ 构成的集合：上积分 $\int_\Omega \|f(x)\|^p\ \mathrm{d}x$（分别为 $\|f\|$ 的本质上确界）有限。函数 $f \in L^1_*(\Omega; V^*)$ 的盖尔范德积分是对偶向量 $\int_\Omega f(x)\ \mathrm{d}x \in V^*$，由下述等式唯一确定：

$$\left\langle v, \int_\Omega f(x)\ \mathrm{d}x \right\rangle = \int_\Omega f_v(x)\ \mathrm{d}x$$

对每个 $v \in V$ 均成立。注意，当$f \in L^1(\Omega; V^*)$时，博赫纳积分与盖尔范德积分相同，因此我们的记号选择不会造成歧义。更多详情请参阅 [10, 第 2 节2]及其中的参考文献。

2.2. 度量值索伯列夫映射的定义。关于 $W^{1,p}(\Omega; X)$ 的各种定义方法之所以如此丰富，是因为人们一直在寻找当定义域 Ω 为奇异度量测度空间时恰当的推广方式。不过，若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域，且 $p \in (1,\infty)$，那么这些定义都等价，参见 [22, 第 10], [25] 章和 [2]。本文将采用以下可追溯至 Reshetnyak [24, 25] 的定义。

定义 2.2。空间 $W^{1,p}(\Omega; X)$ 由满足以下条件的 $f \in L^p(\Omega; X)$ 构成：
(A) 对每个 Lipschitz 函数 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$，都有 $\varphi \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$；以及 (B) 存在一个函数 $g \in L^p(\Omega)$，使得对每个 Lipschitz 函数 $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$，都有

$$|\nabla(\varphi \circ f)(x)| \leq \mathrm{Lip}(\varphi) \cdot g(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega.$$

如（B）中所述的函数 g，称为 f 的 Reshetnyak 上梯度。

注意，若 Y 是另一个完备度量空间，且 $\iota\colon X \to Y$ 是等距嵌入，则

$$W^{1,p}(\Omega; X) = \left\{ f\colon \Omega \to X \mid \iota \circ f \in W^{1,p}(\Omega; Y) \right\}. \tag{3}$$

这可由 McShane 延拓引理推出，参见例如 [21, 第 1.19] 节。特别地，一旦证明了定理 1.2，便可得出，式 (2) 中给出的 $W^{1,*p}(\Omega; X)$ 的定义不依赖于将 X 嵌入对偶巴拿赫空间时所选取的等距嵌入 ι。例如，以下通用构造总是可行的。

例 2.3. (i) 我们记 $\ell^p(X) := L^p(X, \mathcal{P}(X), \#)$，其中 # 是 X 上的计数测度。于是，[14, 定理 243G] 表明 $\ell^\infty(X)$ 是 $\ell^1(X)$ 的对偶空间。现在可以选取一个基点 $x_0 \in X$，并定义 Kuratowski 嵌入 $\kappa^{X,x_0}\colon X \to \ell^\infty(X)$，其定义为

$$\left(\kappa^{X,x_0}(x)\right)(y) := d(x,y) - d(y,x_0).$$

不难验证，这一定义良好且是一个等距嵌入，参见例如 [21, 第 11] 页。如果 X 有界，则可以避免选取基点，并定义 $\kappa^X\colon X \to \ell^\infty(X)$，其定义为 $(\kappa^X(x))(y) := d(x,y)$。

(ii) 以下另一种普适构造与 Lipschitz 自由空间密切相关，例如 [29, 16, 11] 中研究的空间。我们选取一个基点 $x_0 \in X$，并将 $\mathrm{Lip}_{x_0}(X)$ 记为满足 $f(x_0) = 0$ 的 Lipschitz 函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 所构成的空间。$\mathrm{Lip}_{x_0}(X)$ 配备如下范数：将每个 f 映射到其最优 Lipschitz 常数。我们记 $\mathcal{F}(X,x_0) := \left(\mathrm{Lip}_{x_0}(X)\right)^*$。于是，等距嵌入 $\Psi^{X,x_0}\colon X \to \mathcal{F}(X,x_0)$ 可定义为

$$\left\langle f, \Psi^{X,x_0}(x)\right\rangle := f(x)$$

对于 $f \in \mathrm{Lip}_{x_0}(X)$ 和 $x \in X$。

实际上，定义 2.2 与 Reshetnyak 在 [24] 和 [25]中提出的 Sobolev 空间 $W^{1,p}(\Omega; X)$ 的原始定义略有不同。尽管当 X 可分时，这三种定义彼此等价，但一般而言仍存在细微差异，后面的注释将对此进行讨论。

注 2.4. (i) 在 [25] 中，与定义 2.2 相比，唯一的区别在于 Reshetnyak 没有预先假设 $f \in L^p(\Omega; X)$。然而，由于到任意给定闭集的距离函数都是 1-利普希茨的，因此 (A) 蕴含 f 的可测性。因此，正如第 2.1 节所讨论的，假设这两个定义等价与 ZFC 相容。

(ii) 在他先前的文章 [24] 中，Reshetnyak 将后复合限制为形如 $\varphi = d(x, \text{–})$ 的距离函数。对于以不可分目标空间为值的一般情形，这似乎不是一个合适的定义。例如，采用这种定义，任何到离散度量空间 X 的单射都具有 Sobolev 正则性，而且如 (3) 中所观察到的，环境空间无关性将不再成立。

2.3. 度量导数。连续曲线 $\gamma\colon (a,b) \to X$ 的长度定义为

$$\ell(\gamma) := \sup_{a<t_1<\cdots<t_k<b} \sum_{i=1}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

曲线 γ 称为可求长的，如果 $\ell(\gamma)$是有限的。如果它是可求长的，并且 $t \mapsto \ell(\gamma|_{(a,t)})$定义了一个绝对连续函数（$a,b$）$\to \mathbb{R}$，则称其为绝对连续。如果 γ 在 $t_0 \in$ 处（a,b）度量可微，则

$$\mathrm{md}\gamma(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{d(\gamma(t), \gamma(t_0))}{|t - t_0|} \in [0, \infty)$$

存在。以下引理的证明参见例如 [22, 命题 4.4。25]。

引理 2.5. 设 $\gamma\colon (a,b) \to X$ 绝对连续。那么，γ 在几乎处处的 $t \in (a,b)$ 度量可微，几乎处处定义的函数 $t \mapsto \mathrm{md}\gamma(t)$ 可测，并且

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \mathrm{md}\gamma(t)\ \mathrm{d}t.$$

我们称 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ 在 $x \in \Omega$ 处存在 j 阶度量偏导数，如果

$$\mathrm{m}\partial_j f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{d(f(x+h\cdot e_j), f(x))}{|h|} \in [0,\infty)$$

存在。若映射 $f\colon \Omega \to X$ 在几乎每条平行于坐标轴的线段上都绝对连续，则对每个 $j = 1,\dots,n$，都存在一族直线 L，它们平行于 x_j-轴，且满足 $\mathcal{L}^n(\Omega \setminus \bigcup L) = 0$，并且对每个 $l \in L$，映射 f 限制在包含于 $l \cap \Omega$ 的线段上时均绝对连续。在这种情况下，我们记作 $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; V)$。事实证明，如果 $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; V)$ 可测，那么 $\mathrm{m}\partial_j f(x)$ 在几乎处处的 $x \in \Omega$ 存在，且几乎处处定义的函数 $x \mapsto \mathrm{m}\partial_j f(x)$ 可测，见 [5, 引理 2.4]。

我们称 $f\colon \Omega \to X$ 为 $g\colon \Omega \to X$ 的一个代表元，并记作 $f \equiv g$，如果对于几乎处处的 $x \in \Omega$，$f(x) = g(x)$。特别地，$f \equiv g$ 意味着 f 可测当且仅当 g 可测。事实证明，$\gamma \in W^{1,1}((a,b); X)$ 当且仅当 γ 具有一个绝对连续的代表元。在高维情形下，我们有如下蕴含关系（参见 [5, 定理 3.1] 和 [20, 引理 2.13]）。

~命题 2.6. 设 $f \in W^{1,p}(\Omega; X)$。则 f 具有一个代表元 $f \in \mathrm{ACL}(\Omega; X)$。此外，对于 f 的每个 Reshetnyak 上梯度 g，有

$$\mathrm{m}\partial_j \widetilde{f}(x) \le g(x)$$

对于几乎处处的 $x \in \Omega$。

3. Weak weak* derivatives

在本节中，始终设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个有界区域，$p \in [1,\infty]$ 为 V^* 对偶巴拿赫空间。

3.1. 嵌入 $W^{1,p}(\Omega; V^*) \subset W^{1,*}{}^{p}(\Omega; V^*)$。本部分依赖于超极限的概念。$\mathbb{N}$ 上的一个超滤子是一个有限可加测度 $\omega\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$，使得 $\omega(\mathbb{N}) = 1$。若对每个有限集 S 都有 $\omega(S) = 0$，则称一个超滤子为非主超滤子。选择公理蕴含存在 $\mathbb{N}$ 上的一个非主超滤子 ω（见 [17, 推论 2.6。2]），并且在本节余下部分我们固定这样一个超滤子。对于一个实数序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，我们称 $a \in \mathbb{R}$ 是 (a_n) 的 ω-极限，并记作 $\lim_{n\in\omega} a_n = a$，如果

$$\omega\left(\{m \in \mathbb{N} :\ a_m \in (a-\epsilon, a+\epsilon)\}\right) = 1$$

对每个 $\epsilon > 0$ 都成立。事实证明，对于每个有界序列 $(a_n) \subset \mathbb{R}$，$\lim_{n\in\Omega} a_n$ 都存在（例如参见 [1, 命题 4.4]），并且

$$\lim_{n\in\Omega} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

如果后者存在。此外，若 (a_n) 和 (b_n) 是实数的有界序列，则很容易验证

$$\lim_{n\in\Omega}(a_n+b_n)=\lim_{n\in\Omega}a_n+\lim_{n\in\Omega}b_n \quad \text{and} \quad \lim_{n\in\Omega}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim_{n\in\Omega}a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\in\Omega}b_n\right).$$

定理 3.1。存在

$$W^{1,p}(\Omega;V^*)\subset W^{1,p}_*(\Omega;V^*).$$

此外，若 $g\in L^p(\Omega)$ 是 $f\in W^{1,p}(\Omega;V^*)$ 的 Reshetnyak 上梯度，则 f 存在一个 j 阶弱弱*导数 $f^j\in L^p_*(\Omega;V^*)$，使得对几乎处处的 $x\in\Omega$，都有 $\|f^j(x)\|\le g(x)$。

证明。令 f 为引理 2.6 中的 f 的一个代表元。我们固定一个正实数序列 (δ_n)，使得当 $n\to\infty$ 时，$\delta_n\to 0$。对于 $x\in\Omega$，我们通过如下方式定义 $f^j(x):\ V\to\mathbb{R}$

$$\langle v,f^j(x)\rangle:=\begin{cases}\lim_{n\in\Omega}\frac{\widetilde{f}_v(x+\delta_n\cdot e_j)-\widetilde{f}_v(x)}{\delta_n} & \text{, if } \mathrm{m}\partial_j\widetilde{f}(x) \text{ exists}\\ 0 & \text{, otherwise.}\end{cases}$$

注意到

$$\left|\widetilde{f}_v(x+\delta_n\cdot e_j)-\widetilde{f}_v(x)\right|\le\|v\|\cdot\|\widetilde{f}(x+\delta_n\cdot e_j)-\widetilde{f}(x)\|. \tag{4}$$

由 (4)，函数 $f^j(x):\ V\to\mathbb{R}$ 是良定义的，且若 $\mathrm{m}\partial_j\widetilde{f}(x)$ 存在，则

$$\langle v,f^j(x)\rangle\le\|v\|\cdot\mathrm{m}\partial_j\widetilde{f}(x). \tag{5}$$

此外，由于超极限的线性性，$f^j(x):\ V\to\mathbb{R}$ 是线性的，因此对于每个 $x\in\Omega$，$f^j(x)\in V^*$。

现在固定 $v\in V$。则

$$f^j_v(x)=\partial_j\widetilde{f}_v(x) \tag{6}$$

对于每个满足 $\mathrm{m}\partial_j f(x)$ 和 $\partial_j f_v(x)$ 存在的 $x\in\Omega$，$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。特别地，我们有 (6) 对几乎每个 $x\in\Omega$ 都成立。因此，f^j_v 是可测的，且是$\widetilde{\ }f_v\in W^{1,p}(\Omega)$的弱导数。

由于 $v\in V$ 是任意的，f^j 是弱*可测的。此外，由 (5) 和命题 2.6 可得

$$\|f^j(x)\|\le g(x)$$

对几乎处处的 $x\in\Omega$ 成立，因此特别地在 $f^j\in L^p_*(\Omega;V^*)$ 中成立。最后，由于对于每个 $v\in V$，f^j_v都是 $\widetilde{f}_v$ 的 j 阶弱导数，这意味着 f^j 是 f 的 j 阶弱弱*$\widetilde{\ }$导数，因此也是 f 的导数。□

3.2. 包含关系 $W^{1,*,p}(\Omega;V^*)\subset W^{1,p}(\Omega;V^*)$。这一包含关系可直接由 [10] 中定理 1.4 的证明推出。不过，在 [10] 中我们采用了稍微更严格的 $L^p_*(\Omega;V^*)$ 定义，因此有 $W^{1,*,p}(\Omega;V^*)$。为方便读者，我们在此简要回顾关键步骤。为此，我们需要以下结果，它是 [10, 命题 3.4] 和 [20, 命题 2.16] 的直接推论。

命题 3.2. 设 $f\in L^p(\Omega;V^*)$。那么 $f\in W^{1,p}(\Omega;V^*)$ 当且仅当
(A*) 对每个 $v\in V$，函数 f_v 都属于 $W^{1,p}(\Omega)$，并且 (B*) 存在函数 $g\in L^p(\Omega)$，使得对每个 $v\in V$，都有

$$|\nabla(f_v)(x)|\le\|v\|\cdot g(x)\quad\text{for a.e. } x\in\Omega.$$

为了得出 $W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,V^*) \subset W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)$，我们按照 [10] 中命题 3.5 证明第一部分的思路进行：取 $f \in W^{1,\,*\,p}(\Omega;\,V^*)$，并对 $j \in \{1,\dots,n\}$，选取 f 的 j 阶弱弱*导数 $f^j \in L^p_*(\Omega;\,V)$。根据上积分的定义，存在函数 $g^j \in L^p(\Omega)$，使得对每个 $x \in \Omega$，都有 $\|f^j(x)\| \le g^j(x)$。由于 $f \in L^p(\Omega;V^*)$，对每个 $v \in V$，函数 f_v 都属于 $L^p(\Omega)$。此外，对于 $j \in \{1,\dots,n\}$ 和 $v \in V$，函数 f_v^j 是 f_v 的 j 阶弱偏导数。因此 $f_v \in W^{1,\,p}(\Omega)$，并且

$$|\nabla f_v(x)| = \left(\sum_{j=1}^n \left|f_v^j(x)\right|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^n |g^j(x)|^2 \cdot \|v\|^2\right)^{1/2} \le \|v\| \cdot \max_{j\in\{1,\dots n\}} |g^j(x)|$$

对几乎处处的 $x \in \Omega$。令 $g := \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |g^j| \in L^p(\Omega)$，由命题 3.2 可得 $f \in W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)$。

3.3. 弱弱*导数和 Sobolev 范数的唯一性。我们称 $g\colon \Omega \to V^*$ 是 $f\colon \Omega \to V^*$ 的弱*代表元，并记作 $f \equiv_* g$，如果对每个 $v \in V$ 都有 $f_v \equiv g_v$。显然，$f \equiv g$ 蕴含 $f \equiv_* g$。关于逆蕴含是否成立，我们有以下例子和反例。

例 3.3。 (i) 如果 V 是可分的，那么 $f \equiv_* g$ 蕴含对于函数 f、$g\colon \Omega \to V^*$ 有 $f \equiv g$。事实上，如果 $f \equiv_* g$ 且 $S \subset V$ 是一个可数稠密子集，那么对每个 $v \in S$，存在一个零测集 $N_v \subset \Omega$，使得在 $\Omega \setminus N_v$ 上有 $f_v = g_v$。特别地，对于零测集 $N := \bigcup_{v\in S} N_v$，可得

$$\langle v, f(x)\rangle = \langle v, g(x)\rangle \tag{7}$$

对于每个 $v \in S$ 和 $x \in \Omega \setminus N$。由于 S 稠密，由 (7) 可得 $f = g$ 在 $\Omega \setminus N$ 上成立，从而有 $f \equiv g$。

(ii) 给定函数 $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$，我们可以通过定义如下来定义 $h^\Phi\colon \Omega \to \ell^\infty(\Omega)$

$$h^\Phi(x) := \Phi(x) \cdot \chi_{\{x\}}.$$

于是 $h_\Phi \equiv_* 0$，因为任意 $g \in \ell^1(\Omega)$ 的支集都包含在一个可数集 S 上，且

$$\langle g, h^\Phi(x)\rangle = 0$$

对于每个 $x \in \Omega \setminus S$。另一方面， $h_\Phi \equiv 0$ 当且仅当 $\Phi \equiv 0$。

事实证明，弱弱*导数并非仅在代表元的选择意义下唯一，而只在弱*代表元的选择意义下唯一。

引理 3.4. 设 $f \in L^1(\Omega;\,V^*)$。进一步设 $f^j\colon \Omega \to V^*$ 是 f 的一个 j 阶弱弱*导数，且 $h\colon \Omega \to V^*$。那么， $h \equiv_* f^j$ 当且仅当 h 是 f 的一个 j 阶弱弱*导数。

证明。假设 $h \equiv_* f^j$。那么对每个 $v \in V$，都有 $h_v \equiv f_v^j$。特别地，$h_v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 可测，且

$$\int_\Omega \varphi(x) h_v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x) f_v^j(x)\,\mathrm{d}x$$

对每个 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都成立。因此我们得出， h 是弱*可测的，且是 f 的第 j 阶弱弱*导数。

对于另一个方向，假设 h 是 f 的 j 阶弱弱*导数。那么，对于每个 $v \in V$， f_v^j 和 h_v 都是 f_v 的弱导数。因此，由弱导数的唯一性

（适用于实值函数）可得 $h_v \equiv f_v^j$。由于这对每个 $v \in V$ 都成立，我们得出 $h \equiv_* f^j$。□

由例 3.3(ii) 和引理 3.4 可知，即使是常值映射，也可能具有弱弱*导数 h，使得函数 $x \mapsto \|h(x)\|$ 不可测，或者$\int_\Omega \|h(x)\|^p \, \mathrm{d}x$ 可以任意大（甚至为无穷大）。尽管如此，仍然可以通过以下方式在 $W^1_{,*}{}^p(\Omega; V^*)$ 上定义一个（半）范数：

$$\|f\|_{W^{1,p}_*(\Omega;V^*)} := \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \inf\left(\int_\Omega \left|\left(f^1(x), f^2(x), \ldots, f^n(x)\right)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中 $|.|$ 表示 $(V^*)^n$ 上的乘积范数，而下确界分别取遍 f 的所有偏弱弱*导数 f^j。第 3.1 节和第 3.2 节中的估计表明，

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|f\|_{W^{1,p}} \leq \|f\|_{W^{1,p}_*} \leq \sqrt{n} \cdot \|f\|_{W^{1,p}}$$

对于每个 $f \in W^{1,p}(\Omega; V^*)$ 都成立。这里，按照通常的定义，$W^{1,p}(\Omega; V^*)$ 上的 Sobolev 范数定义为

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \inf\left(\int_\Omega |g(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中下确界取遍 f 的所有 Reshetnyak 上梯度。特别地，Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{W^{1,\,p}(\Omega;\,V^*)}$ 和 $\|\cdot\|_{W^{1,\,*}{}^{p}(\Omega;\,V^*)}$ 是等价的。

3.4. 弱弱*导数范数的可测性。我们再次指出，与 [10] 相比，我们不假设函数 $f \in L^1_*(\Omega; V^*)$ 的 $x \mapsto \|f(x)\|$ 可测性。特别地，我们无法证明存在具有这一性质的弱弱*导数。然而，下面的引理表明，在一维情形下确实可以做到这一点。

引理 3.5. 设 $\gamma\colon (a,b) \to V^*$ 是绝对连续的。则存在 γ 的一个弱弱*导数 $\eta \in L^1_*((a,b); V^*)$，使得 $t \mapsto \|\eta(t)\|$ 可测，并且

$$\|\eta(t)\| = \mathrm{md}\gamma(t) \tag{8}$$

对于几乎每个 $t \in (a,b)$。

证明。由定理 3.1 的证明可知，γ 存在一个弱弱*导数 η，使得

$$\|\eta(t)\| \leq \mathrm{md}\gamma(t)$$

对于每个 $t \in (a,b)$，若 γ 在该点度量可微。对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们选择 $a < t_k^1 < t_k^2 \cdots < t_k^{n_k} < b$，使得

$$\sum_{l=1}^{n_k-1} \|\gamma(t_k^l) - \gamma(t_k^{l+1})\| \geq \ell(\gamma) - \frac{1}{k}$$

并且相应地，$v^{kl} \in V$ 与 $\|v^{kl}\| \leq 1$ 满足

$$\langle v^{kl}, \gamma(t_k^l) - \gamma(t_k^{l+1})\rangle \geq \|\gamma(t_k^l) - \gamma(t_k^{l+1})\| - \frac{1}{k \cdot n_k}.$$

我们定义 $\nu\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ 为

$$\nu(t) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{l\in\{1,\ldots,n_k\}} |\eta_{v^{kl}}(t)|\,.$$

则 ν 是可测的，并且对于几乎处处的 $t \in (a,b)$，有

$$\nu(t) \leq \|\eta(t)\| \leq \mathrm{md}\gamma(t). \tag{9}$$

此外，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b \nu(t)\ \mathrm{d}t &\geq \sum_{l=1}^{n_k-1} \int_{t_k^l}^{t_k^{l+1}} |\eta_{v^{kl}}(t)|\ \mathrm{d}t \\ &\geq \sum_{l=1}^{n_k-1} \langle v^{kl}, \gamma(t_k^l) - \gamma(t_k^{l+1})\rangle \\ &\geq \ell(\gamma) - \frac{2}{k}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b \nu(t)\ \mathrm{d}t = \ell(\gamma) = \int_a^b \mathrm{md}\gamma(t)\ \mathrm{d}t.$$

结合 (9)，可推出对于几乎处处的 $t \in (a,b)$，有 $\nu(t) = \mathrm{md}\gamma(t)$，从而得到 (8)。由于 $t \mapsto \mathrm{md}\gamma(t)$ 是可测的，我们得出 $t \mapsto \|\eta(t)\|$ 也是可测的。□

遗憾的是，似乎无法从引理 3.5 推导出，在高维定义域 Ω 上定义的 Sobolev 映射 f 的 $x \mapsto \|f^j(x)\|$ 的可测性。问题在于，如果集合 $S \subset \Omega$ 的一维截线是 $\mathcal{H}^1$-零测集，这并不意味着 S 是 $\mathcal{L}^n$-可测的，参见例如 [15, 例 10.21]。

3.5. 逐点弱*导数。若存在 $\partial_j f(x) \in V^*$，使得对于映射 $f\colon \Omega \to V^*$，在 $x \in \Omega$ 处沿 x_j-方向弱*可微，则称该映射在此处沿该方向弱*可微：

$$\frac{1}{h} \cdot (f(x + h \cdot e_j) - f(x)) \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_j f(x) \quad \text{as } h \to 0.$$

对于对偶可分 Banach 空间，在 [5, 10] 中证明 $W^{1,*\,p}(\Omega; V^*)$ 与 $W^{1,p}(\Omega; V^*)$ 相等，主要依赖于这样一个观察：对偶可分 Banach 空间中的绝对连续曲线几乎处处都是弱*可微的。下面的例子表明，对于任意对偶空间 V^*，这一点并不成立。

例 3.6. (i) 我们断言，在例 2.3.(i) 中定义的单位区间$\kappa = \kappa^{(0,1)}\colon (0,1) \to \ell^\infty((0,1))$ 的 Kuratowski 嵌入处处都不是弱*可微的。为此，固定 $t_0 \in (0,1)$。于是

$$\big\langle \chi_{\{t_0\}}, \kappa(t)\big\rangle = |t - t_0|$$

在 t 处的 $t = t_0$ 不可微。因此，κ 在 t_0处不可能是弱*可微的。

(ii) 类似地，在例 2.3.(i) 中定义的 $\Psi = \Psi^{(0,1),0}\colon (0,1) \to \mathcal{F}((0,1),0)$ 处处都不是弱*可微的。事实上，对于每个 $t_0 \in (0,1)$，都存在一个函数$f \in \mathrm{Lip}_0((0,1))$，使得 f在 t_0处不可微（例如 $f(t) = |t-t_0| - t_0$）。然而这意味着

$$\Psi_f(t) = f(t)$$

在 t $t = t_0$ 处不可微，因此在 Ψ t_0 处也不是弱*可微。

为了刻画具有如下性质的对偶空间 V^*：其中的绝对连续曲线都是弱*可微的，我们提出以下定义。

定义 3.7。我们称函数 $f \in L^1_*((0,1);V^*)$ 满足弱* 勒贝格密度定理，如果对几乎所有 $t \in (0,1)$，都有

$$\fint_t^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}s \overset{*}{\rightharpoonup} f(t) \quad \text{as } h \to 0.$$

如果对每个 $f \in L^\infty_*((0,1);V^*)$，都存在一个满足弱* 勒贝格密度定理的弱*代表元，我们就称 V^* 具有弱* 勒贝格密度性质。

下面给出具有勒贝格密度性质的空间的两类例子。

例 3.8. (i) 若 V可分，则 V^* 具有弱* 勒贝格密度性质。为证明这一点，我们固定 $f \in L^\infty_*((0,1);V^*)$，并选取一个可数稠密集$S \subset V$。对于 $v \in S$，令 $N_v \subset (0,1)$ 为一个零测集，使得 f_v 在 $(0,1)\setminus N_v$上近似连续。令 $N := \bigcup_{v\in S} N_v$，由引理 2.1 可得

$$\fint_t^{t+h} f(s)\,\mathrm{d}s \overset{*}{\rightharpoonup} f(t) \quad \text{as } h \to 0$$

对每个 $t \in (0,1)\setminus N$。特别地，f满足弱* 勒贝格密度定理，因此 V^* 具有勒贝格密度性质。

(ii) 如果 V^* 具有拉东–尼科迪姆性质，那么 V^* 具有弱* 勒贝格密度性质。事实上，每个函数 $f \in L^\infty_*((0,1);V^*)$ 都定义了一个连续泛函 $T_f\colon L^1((0,1)) \to V^*$，定义方式如下：

$$T_f(h) := \int_0^1 h(s)\cdot f(s)\,\mathrm{d}s.$$

现在，如果 V^* 具有拉东–尼科迪姆性质，那么 [23, 定理 1.3。16] 蕴含存在 $g \in L^\infty((0,1);V^*)$ 使得 $T_f = T_g$。特别地，此时 g是 f 的弱*代表元，并且由于它是可测的，满足勒贝格密度定理。

定理 3.9。以下条件等价：

(i) V^* 具有弱* 勒贝格密度性质。(ii) 每条绝对连续曲线 $\gamma\colon (a,b) \to V^*$ 几乎处处都是弱*可微的。

证明。为证明 (i) 蕴含 (ii)，我们假设 V^* 具有弱* 勒贝格密度性质。令 $\gamma\colon (a,b) \to V^*$为一条 Lipschitz曲线。于是 $\gamma \in W^{1,\infty}((a,b);V^*)$，因此根据定理 3.1，$\gamma$具有弱弱*导数 $\eta \in L^\infty_*((a,b);V^*)$。特别地，对于每个 $v \in V$，都有 $\eta_v = \gamma_v'$ 几乎处处成立，因此对于每个 s，$t \in (a,b)$ 有

$$\gamma(t) - \gamma(s) = \int_s^t \eta(r)\,\mathrm{d}r.$$

由于 V^* 具有弱* 勒贝格密度性质，不妨假设 η 满足弱* 勒贝格密度定理。于是对于几乎处处的 $t \in (a,b)$，有

$$\frac{1}{h}\cdot(\gamma(t+h)-\gamma(t)) = \fint_t^{t+h} \eta(s)\,\mathrm{d}s \overset{*}{\rightharpoonup} \eta(t).$$

特别地，对于这样的 t Lipschitz曲线 γ，它在 t 处弱*可微，且其弱*导数为 $\eta(t)$。

现在，设 $\gamma\colon (a,b) \to V^*$ 是一个一般的绝对连续曲线。令 $L := b+\ell(\gamma)$，并定义 $\Phi\colon (a,b) \to (a,L)$如下：

$$\Phi(t) := t + \ell(\gamma|_{(a,t)}).$$

那么， Φ 是一个绝对连续的同胚，且 Φ^{-1} 是1-利普希茨的。此外

$$\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \le \ell\left(\gamma|_{[s,t]}\right) \le |\Phi(t) - \Phi(s)|$$

对于每个 s， $t \in (a,b)$，从而 $\bar\gamma \colon = \gamma \circ \Phi^{-1}$ 是1-利普希茨的。注意，当 Φ 在 t 处可微且$\bar\gamma$ 在 $\Phi(t)$处弱*可微时，曲线$\gamma = \bar\gamma \circ \Phi$ 在 $t \in (a,b)$处弱*可微。由于 Φ 几乎处处可微， $\bar\gamma$ 几乎处处弱*可微，并且 Φ 和 Φ^{-1} 都保持零测集不变，我们推得 γ 几乎处处弱*可微。

接下来我们证明(ii)蕴含(i)。设 V^* 中的绝对连续曲线几乎处处弱*可微，并令 $\eta \in L^\infty_*((0,1);\, V^*)$。那么存在 $L \in \mathbb{R}$ ，使得 $\|\eta(t)\| \le L$ 对几乎所有 $t \in (0,1)$成立。我们通过令曲线$\gamma\colon (0,1) \to V^*$ 为以下形式来定义它

$$\gamma(t) := \int_a^t \eta(s)\ \mathrm{d}s$$

那么，对于每个 $s,t \in (0,1)$ 以及 $v \in V$，都有

$$\langle v, \gamma(t) - \gamma(s)\rangle = \int_s^t \eta_v(r)\ \mathrm{d}r \le L \cdot |t-s|,$$

因此 γ 是 L-Lipschitz 的。由此， γ 几乎处处弱*可微，并且可以通过在 x 存在时令 $\nu(x) := \gamma'(x)$ 来定义弱弱*导数 $\nu \in L^\infty_*((0,1);\, V^*)$。于是 $\nu \equiv_* \eta$ ，并且对于每个 t ，只要 γ 弱*可微，

$$⨍_t^{t+h} \nu(s)\ \mathrm{d}s = ⨍_t^{t+h} \eta(s)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{h} \cdot (\gamma(t+h) - \gamma(t)) \overset{*}{\rightharpoonup} \nu(t)$$

便有 $h \to 0$。 □

如果 V^* 是对偶可分的，或者具有 Radon–Nikod´ym 性质，那么（如先前在 [20, 5, 10] 和 [6, 12] 中所观察到的）映射 $f \in W^{1,\,p}(\Omega;\, V^*)$ 存在几乎处处弱*可微的代表元。目前尚不清楚更一般地，弱* 勒贝格密度性质是否也能推出这一结论。与第3.4节一样，问题在于 Ω 上某种不可测性质可能沿几乎每条线段几乎处处成立。

References

[1] 斯蒂芬妮·亚历山大、维塔利·卡波维奇和安东·彼得鲁宁。《亚历山德罗夫几何：基础》。预印本 arXiv:1903.08539v5，2009年。[2] 路易吉·安布罗西奥、尼古拉·吉利和 Giuseppe Savar´e。《度量测度空间中 Lipschitz 函数的稠密性与弱梯度的等价性》。《 *Rev. Mat. Iberoam.*》，29(3):969–996，2013年。[3] 沃尔夫冈·阿伦特和马塞尔·克罗伊特。《向量值函数 Sobolev 空间的映射定理》。《 *Studia Math.*》，240(3):275–299，2018年。[4] Zolt´an M. Balogh、罗伯托·蒙蒂和 Jeremy T. Tyson。《Sobolev 维数畸变与拟共形维数畸变的频率》。《 *J. Math. Pures Appl. (9)*》，99(2):125–149，2013年。[5] Iv´an Caama˜no、Jes´us ´A. Jaramillo 和 ´Angeles Prieto。《向量值函数 Sobolev 空间的刻画》。《 *J. Math. Anal. Appl.*》，514(1):第126250号论文，18页，2022年。

[6] Iv´an Caama˜no、Jes´us ´A. Jaramillo、 ´Angeles Prieto 和 Alberto Ruiz de Alarc´on。《向量值函数的 Sobolev 空间》。《 *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RAC-SAM*》，115(1):第19号论文，14页，2021年。[7] Thierry Cazenave 和 Alain Haraux。《 *An introduction to semilinear evolution equations.*》，第 卷。牛津: *Transl. by Yvan Martel. Revised ed.* 13 Clarendon 出版社，修订版，1998年。[8] Jeff Cheeger 和 Bruce Kleiner。《从度量测度空间到巴拿赫空间的 Lipschitz 映射的可微性》。载于《 *Inspired by S. S. Chern. A Memorial Volume in Honor of A*》，第 卷，页码–。 *Great Mathematician* 11 *Nankai Tracts Math.* 129 152 World Scientific 出版社，新泽西州哈肯萨克，2006年。[9] PAUL CREUTZ。《Pu 不等式的刚性与赋范空间的二次等周常数》。《 *Rev. Mat. Iberoam.*》，38(3):705–729，2022年。[10] PAUL CREUTZ 和 NIKITA EVSEEV。《通过弱*导数研究度量空间值 Sobolev 映射的方法》。预印本 arXiv:2106.15449，2021年。[11] Stephen J. Dilworth、Denka Kutzarova 和 Mikhail I. Ostrovskii。《有限度量空间上的 Lipschitz 自由空间》。《 *Canad. J. Math.*》，72(3):774–804，2020年。[12] NIKITA EVSEEV。《基于 Banach 函数空间的向量值 Sobolev 空间》《 *Nonlinear Anal.* 211 》，：第112479号论文，2021年。[13] Herbert Federer。《 *Geometric measure theory*》。数学科学基础丛书，第153卷。Springer，纽约，1969年。[14] D. H. Fremlin。《 *Measure theory. Vol. 2. Broad foundations*》。Torres Fremlin，科尔切斯特，2003年。2001年原版的修订第二次印刷。[15] Bernard R. Gelbaum 和 John M. H. Olmsted。《 *Counterexamples in analysis*》。The Mathesis Series。Holden-Day, Inc.，旧金山、伦敦、阿姆斯特丹，1964年。[16] G. Godefroy 和 N. J. Kalton。《Lipschitz 自由 Banach 空间》。《 *Studia Math.*》，159 141，2003 1 121( ): –。[17] Robert Goldblatt。《 *Lectures on the hyperreals*》， *Graduate Texts in Mathematics*第188卷。Springer，纽约，1998年。[18] Piotr Haj lasz。《流形与度量空间之间的 Sobolev 映射》。载于《 *Sobolev spaces in mathematics. I* 8 *Int. Math. Ser. (N. Y.)* 185 222 》，第 卷，页码–。 Springer，纽约，2009年。[19] Piotr Haj lasz、Armin Schikorra 和 Jeremy T. Tyson。《球面的同伦群与 Heisenberg 群的 Lipschitz 同伦群》。《 *Geom. Funct. Anal.*》，24(1):245–268，2014年。[20] Piotr Haj lasz 和 Jeremy T. Tyson。《Sobolev Peano 立方体》。《 *Michigan Math. J.*》，56 702，2008 3 687( ): –。[21] Juha Heinonen。《 *Geometric embeddings of metric spaces* 90 *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics*》，第 卷， *Geometric embeddings of metric spaces* 90 *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics* 。于韦斯屈莱大学，于韦斯屈莱，2003年。[22] Juha Heinonen、Pekka Koskela、Nageswari Shanmugalingam 和 Jeremy T. Tyson。《 *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients* 27 *New Mathematical Monographs*》，第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015年。[23] Tuomas Hyt *Analysis in Banach spaces.* onen、Jan van *Vol. I. Martingales and Littlewood-Paley theory* 63 Neerven、Mark Veraar 和 Lutz Weis。《 *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge* 2016 》第 卷。Springer，Cham， *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge* 2016 。[24] Yu. G. Reshetnyak。《取值于度量空间的函数的 Sobolev 型函数类》。《 *Sib. Math.*》，( ): –。[25] Yu. G. Reshetnyak。《取值于度量空间的函数的 Sobolev 函数类 II》。《 *Sib. Math.*》，( ): –。[26] Hans-J *Seminar analysis of the Karl-Weierstraß-Institute of Mathematics 1985/86* 96 *Teubner-Texte Math.* urgen Schmeißer。《向量值 Sobolev 空间与 Besov 空间》。载于《》，第 卷，页码4–44。Teubner，莱比锡，1987年。[27] Hans-J¨urgen Schmeißer 和 Winfried Sickel。《向量值 Sobolev 空间与 Gagliardo-Nirenberg 不等式》。载于《 *Nonlinear elliptic and parabolic problems*》， *Progr.*第64卷，*Nonlinear Differential Equations Appl.*，页码463–472。Birkh¨auser，巴塞尔，2005年。[28] S. L. Sobolev。《嵌入定理的一些推广》。《 *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*》，30 295: –344，1963年。[29] Nik Weaver。《 *Lipschitz algebras*》。World Scientific Publishing Co., Inc.，新泽西州里弗埃奇，1999年。

[30] 凯文·威尔德里克和 Thomas Z ¨ *Illinois J. Math.* 53 2 365 378, 2009
urcher. 关于导数属于洛伦兹空间的皮亚诺立方体. , ( ): – .

Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
Email address: Paul.Creutz@ish.de

Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technology, 150006 Harbin, China, and Sobolev Institute of Mathematics, 4 Academic Koptyug av-enue, 630090 Novosibirsk, Russia.
Email address: evseev@math.nsc.ru