arXiv:2303.17319v2 [math.CV] 6 Dec 2023

# CR流形上Toeplitz算子的半经典谱渐近

HENDRIK HERRMANN、CHIN-YU HSIAO、GEORGE MARINESCU 和 WEI-CHUAN SHE N

摘要。设 $X$ 是一个紧致严格伪凸可嵌入CR流形，令$T_P$ 为定义在$X$ 上的Toeplitz算子，它与一个一阶伪微分算子$P$相关。我们考虑通过$T_P$的函数演算定义的算子 $\chi_k(T_P)$，其中 $\chi$ 是正实轴上具有紧支集的光滑函数，而 $\chi_k(\lambda) := \chi(k^{-1}\lambda)$。我们证明，当 $k \to +\infty$ 时， $\chi_k(T_P)$ 具有完整渐近展开。作为应用，我们获得了复几何中关于线丛高次幂结果的若干CR类比。特别地，我们建立了Kodaira型嵌入定理、Tian收敛定理，以及将严格伪凸CR流形嵌入扰动球面的一个嵌入定理。

目录

1. 引言 2 2. 预备知识 9 2.1. 记号 9 2.2. Boutet de Monvel–Sj¨ostrand 对 Szeg˝o 核的分析 12 2.3. 定理 1.1 的证明策略 18 3. Toeplitz算子的性质与依赖于z的演算 19 3.1. Toeplitz 算子 $T_P$ 及其函数演算 19 3.2. $(z - T_P)^{-1}\Pi$ 21 的渐近展开 4. $\chi_k(T_P)$ 的完整渐近展开 27 5. 应用与例子 36 5.1. 迹公式、缩放谱测度与 Weyl 定律估计 36 5.2. 关于 Grauert 管的一些相关结果 37 6. 半经典 CR 嵌入及其应用 45 6.1. CR Kodaira 嵌入 45 6.2. $T^{\lambda(k)}$ 与几乎等变嵌入 52 6.3. $\omega^{\lambda(k)}$ 与近似球面嵌入 53 参考文献 57

日期：2023年12月7日。CHIN-YU HSIAO 部分获得台湾科学技术部项目 108-2115-M-001-012-MY5、109-2923-M-001-010-MY4 的资助。GEORGE MARINESCU 和 WEI-CHUAN SHEN 部分获得德国研究基金会资助的项目 SFB/TRR 191“几何、代数与动力学中的辛结构”（项目编号 281071066-TRR 191）以及 ANR-DFG项目QuaSiDy（项目编号 490843120）的资助。HENDRIK HERRMANN 部分获得 ANR-DFG项目QuaSiDy（项目编号 490843120）的资助。

## 1. 引言

再生核的研究在数学的多个领域中发挥着重要作用。Szeg˝o 核是 CR 流形上平方可积 CR 函数空间的再生核。我们的出发点是 Boutet de Monvel–Sj¨ostrand [5, (1.5) Th´eor`eme], 指出，紧致严格伪凸 CR 流形的维数大于或等于五时，其 Szeg˝o 核是一个复傅里叶积分算子（见（1.7））。这一结果在复几何和几何量子化中有许多应用。它可用于构造许多光滑 CR 函数，并且与 Boutet de Monvel 的全局 CR 嵌入定理有关 [3], 另见 [8, §12], 该定理指出，对于维数大于或等于五的紧致严格伪凸 CR 流形 $X$，存在全局光滑 CR 函数 $f_1, \ldots, f_N$，使得映射

$$\Phi : X \to \mathbb{C}^N, \quad x \in X \to (f_1(x), \ldots, f_N(x)) \in \mathbb{C}^N, \tag{1.1}$$

是一个嵌入。Boutet de Monvel 的嵌入定理具有非常一般的性质。为了研究特定的 CR 几何问题，例如 CR 结构的稳定性或球形 CR 嵌入的存在性，我们需要细化嵌入定理，并寻找适配的嵌入（1.1）。在 K¨ahler 几何中，类似问题已通过半经典 Bergman 核渐近展开得到深入研究 [6, 9,30, 41, 47] 以及 Kodaira 嵌入定理。因此，我们认为，研究 Boutet de Monvel 和 Sj¨ostrand 结果的半经典版本，以及适用于严格伪凸 CR 流形的 Kodaira 型嵌入定理，十分重要。本文通过研究一阶椭圆自伴 Toeplitz 算子的加权谱投影，实现了这些半经典定理；这些投影涉及由半经典参数 $k$ 索引的一组特征值，它们在实轴上随 $k \to +\infty$向右漂移，参见定理 1.1。下面我们将陈述最重要的结果。

设 $(X, T^{1,0}X)$ 是一个可定向、紧的严格伪凸超曲面型柯西–黎曼（CR）流形，其维数为 $2n+1$，$n \geq 1$，其中 $T^{1,0}X$ 表示 $X$ 的 CR 结构。设 $J \in \mathrm{End}(HX)$ 是与 Levi 分布 $HX = \mathrm{Re}\,(T^{1,0}X) \oplus T^{0,1}X$ 相关的复结构映射。设 $\xi \in \mathscr{C}^\infty(X, T^*X)$ 是 $X$ 上的接触形式，使得 Levi 形式 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} d\xi(\cdot, J\cdot)$ 正定，且 $dV_\xi := 2^{-n} n!\, \xi \wedge (d\xi)^n$ 是由 $\xi$ 诱导的体积形式。设 $\xi_x := \xi(x)$，$x \in X$。设 $dV$ 为 $X$ 上任意体积形式，并考虑 $L^2(X) = L^2(X, dV)$，即相应的平方可积函数空间。

设 $\overline{\partial}_b$ 为作用在 $X$上的切向 Cauchy–Riemann 算子。我们假设 Kohn 拉普拉斯算子 $\Box^{(0)}_b = \overline{\partial}^*_b \overline{\partial}_b$ 在 $L^2$中具有闭值域。在此情形下，根据 Boutet de Monvel 的证明 [2, 3] 和 Kohn 的论证 [34], ，对于所有紧致严格伪凸 CR 流形，闭值域条件等价于 $X$ 可嵌入某个 $\mathbb{C}^N$。我们还回顾一下，当 $n \geq 2$ 时，任意紧致严格伪凸 CR 流形都满足闭值域条件，参见 [3], ；或者当 $n = 1$ 且 $X$ 具有一个横截 CR $\mathbb{R}$- 作用时，该条件也成立，参见 [38, 42]。

我们将平方可积 CR 函数空间记为

$$H^0_b(X) := \{u \in L^2(X) : \overline{\partial}_b u = 0\}, \tag{1.2}$$

其中 $\overline{\partial}_b u$ 在流的意义下定义。它等于 $\mathrm{Ker}\,\Box^{(0)}_b$，并且是$L^2(X)$的闭子空间。Szeg˝o 投影是正交投影 $\Pi : L^2(X) \to H^0_b(X)$，其对应的 Schwartz 核 $\Pi(x, y) \in \mathscr{D}'(X \times X)$ 称为 Szeg˝o 核。如果

$\Box_b^{(0)}$ 在$L^2$,中有闭值域，则 $\Pi$ 将 $\mathscr{C}^\infty(X)$ 映射到 $\mathscr{C}^\infty(X)$，参见 [24,定理 1。2] 例如。

设 $P \in L^1_{\mathrm{cl}}(X)$ 是一阶形式自伴经典伪微分算子，并设 $T_P := \Pi P \Pi : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ 是与 $P$ 相关联的 Toeplitz 算子。如果 $P$ 的主符号 $\sigma_P$ 在辛锥上

$$\Sigma := \{(x, t\xi_x) : x \in X,\ t > 0\} \subset T^*X \tag{1.3}$$

处处为正，则称 $T_P$ 为椭圆的。于是，$T_P$ 具有一个自伴 $L^2$-延拓，参见定理 3.3；其谱 $\mathrm{Spec}(T_P) \subset \mathbb{R}$ 仅由孤立特征值组成，有下界，并且只有 $+\infty$ 作为聚点。此外，对于每个 $\lambda \in \mathrm{Spec}(T_P)\setminus\{0\}$，特征子空间 $\mathrm{Ker}(T_P - \lambda I)$ 是 $H_b^0(X) \cap \mathscr{C}^\infty(X)$ 的有限维子空间（见定理 3.4）。

本文的主要分析对象是一个谱算子及其 Schwartz 核。我们考虑一个满足 $\mathrm{supp}\ \chi \subset (0, +\infty)$ 的函数 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，并对 $k > 0$ 定义函数

$$\chi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \chi_k(t) = \chi\left(k^{-1}t\right). \tag{1.4}$$

于是 $\chi_k \in \mathscr{C}^\infty{}_c(\mathbb{R})$，$\mathrm{supp}\,\chi_k = k\,\mathrm{supp}\ \chi \subset (0, +\infty)$。我们将研究通过函数演算构造的谱算子$\chi_k(T_P)$。$\chi_k(T_P)$ 的核为

$$\chi_k(T_P)(x, y) = \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_k(\lambda_j) f_j(x) \overline{f_j}(y) \in \mathscr{C}^\infty(X \times X), \tag{1.5}$$

其中 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_j \le \ldots$ 是$T_P$ 的非零特征值序列，按递增顺序排列并按重数计数；$\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$是$H_b^0(X) \cap \mathscr{C}^\infty(X)$ 的一组标准正交系，由$T_P$ 的特征函数组成，分别对应于特征值序列 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$。算子 $\chi_k(T_P)$ 的值域包含$T_P$ 对应于集合$k\,\mathrm{supp}\ \chi$中特征值的特征子空间；该集合随$k \to +\infty$向右移动并增大。我们考虑一个支集包含于$(0, +\infty)$的函数 $\chi$，以避开$T_P$的零特征值；该特征值具有无限重数，其对应的特征函数不一定是 CR 函数。

我们的第一个结果描述了谱算子 $\chi_k(T_P)$ 的核，它模去$k$阶可忽略的光滑核后，是一个半经典傅里叶积分算子。为陈述这一结果，我们回顾 Boutet de Monvel–Sj¨ ostrand 关于 Szegő 核结构的基本定理 [5] (另见 [24, 32])，参见定理 2.10。对于$X$上的任意坐标图$(D,x)$，存在一个光滑函数 $\varphi : D \times D \to \mathbb{C}$，使得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,\varphi(x, y) \ge 0, \\ &\varphi(x, y) = 0 \text{ if and only if } y = x, \\ &d_x\varphi(x, x) = -d_y\varphi(x, x) = \xi(x), \end{aligned} \tag{1.6}$$

在$D \times D$上，Szeg˝ő 投影可以用一个傅里叶积分算子近似

$$\Pi(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} s(x, y, t)\, dt + F(x, y), \tag{1.7}$$

其中 $F(x, y) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D)$，且 $s(x, y, t) \in S^n_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$ 是一个经典的 H¨ ormander 符号，满足 $s(x, y, t) \sim \sum^{+\infty} j=0\, s_j(x, y)t^{n-j}$ in $S^n_{1,0}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，并且

$$s_0(x, x) = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \frac{dV_\xi}{dV}(x). \tag{1.8}$$

定理 *1.1*。设 $(X, T^{1,0}X)$ 是一个维数为 $2n+1$、$n \geq 1$ 的可定向紧致严格伪凸柯西–黎曼流形，且 $X$ 上的 *Kohn* 拉普拉斯算子在 $L^2(X)$ 中具有闭值域。设 $\xi$ 是 $X$ 上的一个接触形式，使得 *Levi* 形式 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}d\xi(\cdot, J\cdot)$ 正定。设 $(D, x)$ 是任意坐标图，并设 $\varphi : D \times D \to \mathbb{C}$ 是满足 *(1.6)* 和 *(1.7)* 的相位函数。则对于任意形式自伴的一阶伪微分算子 $P \in L^1_{\mathrm{cl}}(X)$，其在 $X$ 上满足 $\sigma_P(\xi) > 0$，以及任意 $\chi \in \mathscr{C}^\infty_c((0,+\infty))$、$\chi \not\equiv 0$，$\chi_k(T_P)$ 的 *Schwartz* 核 $\chi_k(\lambda) := \chi\left(k^{-1}\lambda\right)$ 在 $k$ 足够大时可表示为

$$\chi_k(T_P)(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\varphi(x,y)} A(x,y,t,k)dt + O\left(k^{-\infty}\right) \text{ on } D \times D, \tag{1.9}$$

其中 $A(x,y,t,k) \in S^{n+1}{}_{\mathrm{loc}}(1; D \times D \times \mathbb{R}_+)$，

$$\begin{aligned} &A(x,y,t,k) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} A_j(x,y,t)k^{n+1-j} \text{ in } S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1; D \times D \times \mathbb{R}_+), \\ &A_j(x,y,t) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D \times \mathbb{R}_+),\ j = 0,1,2,\ldots, \\ &A_0(x,x,t) = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \frac{dV_\xi}{dV}(x)\, \chi(\sigma_P(\xi_x)t)\, t^n \not\equiv 0, \end{aligned} \tag{1.10}$$

并且存在某个紧区间 $I \Subset \mathbb{R}_+$，

$$\mathrm{supp}_t\, A(x,y,t,k),\ \mathrm{supp}_t\, A_j(x,y,t) \subset I,\ \ j = 0,1,2,\ldots. \tag{1.11}$$

此外，对于任意满足 $\mathrm{supp}(\tau_1) \cap \mathrm{supp}(\tau_2) = \emptyset$ 的 $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{C}^\infty(X)$，我们有

$$\tau_1 \chi_k(T_P) \tau_2 = O\left(k^{-\infty}\right). \tag{1.12}$$

核 $\chi_k(T_P)$ 的表示（1.9）可视为 Boutet de Monvel 和 Sj¨ostrand 定理的半经典版本。它表明，$\chi_k(T_P)$ 是一个具有复相位的半经典傅里叶积分算子，其典范关系由相位 $\varphi(x,y)t$生成。由于 $t$ 在有界区间 $I$ 内变化，（1.9）中的积分是一个光滑核。项 $O(k^{-\infty})$ 表示可忽略至 k 阶的光滑核（参见定义 2.2）。空间 $S^{n+1}\,\mathrm{loc}\,(1; D \times D \times \mathbb{R}_+)$ 的定义见（ 2.12 ）。

已在 [4, 引理 12。2] 中证明，存在一个经典椭圆伪微分算子$Q$ 作用于$X$ 使得

$$Q\Pi \equiv \Pi Q,\ \ T_P \equiv \Pi Q \Pi. \tag{1.13}$$

由（1.13），我们可以验证

$$\chi_k(T_P) = \Pi \circ \chi_k(Q) \circ \Pi + O(k^{-\infty}). \tag{1.14}$$

虽然可以利用 $\chi_k$（$T_P$）结合$k$ 的较大取值以及（1.13）和（1.14来研究其行为，本文采用另一种方法。具体而言，我们构建一个$z$依赖的带复相位傅里叶积分算子演算，以获得（$z - T_P$）$^{-1}\Pi$的展开，参见定理3.12；并利用 Helffer–Sj¨östrand 公式（参见 [10, §2] 或 [11, §8]）将对 $\chi_k$（$T_P$）的研究归结为其渐近展开

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} \Pi \, \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i}, \tag{1.15}$$

当 $k \to +\infty$时，其中 $\widetilde{\chi}_k$ 是 $\chi_k$的几乎解析延拓。关于证明定理 1.1的策略，详见第 2.3节；而证明见定理 4.11和4.12 。任意函数 $\chi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ 情形下的谱渐近结果将在定理 4.13中给出。

虽然可以利用 $(z-T_P)^{-1}\Pi$ 中的 Hermite 型傅里叶积分算子演算来研究其展开，见[4, §2-11], 但目前尚不清楚如何利用这类演算得到相位函数（1.6）和半经典符号（1.10），以便像（$\chi_k(T_P)$ 中那样描述 1.9）。本文所采用的演算不仅为算子 $(z-T_P)^{-1}\Pi$给出了展开公式，还导出了适用于探究 CR 几何的半经典傅里叶积分算子（1.9）。

我们稍后将探讨这一结果在 CR 嵌入问题中的应用。此外，(1.9) 或可助力 CR 流形几何量子化的进一步研究，延续 [27, 29] 的工作。

定理 1.1 的一个直接推论如下。

**推论 1.2.** 在定理*1.1*的情形下，算子 $\chi_k(T_P)$ 的核在对角线上的渐近展开为

$$\chi_k(T_P)(x,x)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}\mathcal{A}_j(x)k^{n+1-j}\ in\ S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;X), \tag{1.16}$$

其中 $\mathcal{A}_j\in\mathscr{C}^\infty(X)$ 以及

$$\mathcal{A}_0(x)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_{\xi}(x)}{\sigma_P(\xi_x)^{n+1}dV(x)}\int_{\mathbb{R}_+}\chi(t)t^n dt. \tag{1.17}$$

$\chi_k(T_P)$ 的迹具有如下渐近行为，当 $k\to+\infty$,

$$\mathrm{Tr}\,\chi_k(T_P)=\int_X\chi_k(T_P)(x,x)dV=\frac{k^{n+1}}{2\pi^{n+1}}\int_X\frac{dV_{\xi}(x)}{\sigma_P(\xi_x)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}_+}\chi(t)t^n dt+O(k^n)\,. \tag{1.18}$$

我们可以用几何术语改写（1.18）中的积分。记 $dV_\Sigma$ 为 $\Sigma\subset T^*X$ 上的辛体积形式。由（1.3）可立即得到

$$\int_X\frac{dV_{\xi}(x)}{\sigma_P(\xi_x)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}_+}\chi(t)t^n dt=\int_\Sigma\chi(\sigma_P|_\Sigma)dV_\Sigma\,, \tag{1.19}$$

因此，公式（1.18）变为

$$\mathrm{Tr}\,\chi_k(T_P)=\frac{k^{n+1}}{2\pi^{n+1}}\int_\Sigma\chi(\sigma_P|_\Sigma)dV_\Sigma+O(k^n)\,,\quad k\to+\infty\,. \tag{1.20}$$

我们将通过三个例子阐释定理 1.1。首先，我们将在定理 5.5 中直接给出圆丛上 $\chi_k(T_P)(x,x)$ 在 $k\to+\infty$ 时的渐近展开。在定理 5.7 中，我们还将计算当 $\chi\in\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R})$、$\chi\geq 0$ 和 $\chi(0)\neq 0$ 时，$\chi_k(T_P)$ 在对角线上的谱渐近，并由此看到定理 4.13 中的余项是最优的。最后，我们将在定理 5.10 中明确计算环面上方 Grauert 管上的一个 Toeplitz 算子的谱。

接下来我们介绍定理 1.1 的若干应用。第一个应用涉及缩放谱测度的 Szeg˝o 型极限定理。Szeg˝o 极限定理给出了关于算子族参数的谱测度的弱渐近行为，参见 [20]。当截断规模趋于无穷时，Szeg˝o 首先对截断的无穷 Toeplitz 矩阵获得了这样的结果。设 X 和 P 如定理 1.1 中所述。设 $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是 $T_P:\mathrm{Dom}\,T_P\to H^0_b(X)$ 的非零特征值序列，并按重数计数。$T_P$ 的谱计数测度为$\mu=\sum_{j=1}^{+\infty}\delta_{(t-\lambda_j)}$，其中 $\delta$ 表示在零点处的狄拉克测度。根据 $T_P$的 Weyl 定律（参见 [4, 定理 13.1]），谱计数函数 $N(k)=\#\{j\in\mathbb{N}:\lambda_j\leq k\}$ 具有

渐近行为 [1]

$$N(k) = \frac{\mathrm{vol}(\Sigma_1)}{2\pi^{n+1}} k^{n+1} + O(k^n), \quad k \to +\infty, \tag{1.21}$$

其中，$\mathrm{vol}(\Sigma_1)$ 是子集 $\Sigma_1 \subset \Sigma$ where $\sigma_P \leq 1$ 的辛体积。注意，$N(k) = \langle \mu, \mathbb{1}_{(-\infty,k]} \rangle$。为了更精细地描述 $T_P$ 的特征值分布，我们考虑 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，并用函数 $\chi_k$ 检验测度 $\mu$（参见（1.4））；当 $k \to +\infty$ 时，这些函数的支集沿实轴向右漂移。我们有 $\langle \mu, \chi_k \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \chi(k^{-1}\lambda_j) = \langle \sum_{j=1}^{+\infty} \delta(t - k^{-1}\lambda_j), \chi \rangle$。因此，我们需要考虑如下给出的缩放谱测度 $\mu_k$

$$\mu_k = k^{-n-1} \sum_{j=1}^{+\infty} \delta\left(t - k^{-1}\lambda_j\right). \tag{1.22}$$

**定理 1.3**。在定理 1.1的情形下，缩放谱测度 $\mu_k$ 当 $k \to +\infty$ 时弱收敛于连续测度 $\mu_\infty$，该测度定义在 $(0, +\infty)$ 上，定义如下：

$$\mu_\infty = C_P\, t^n dt, \quad with\ C_P := \frac{1}{2\pi^{n+1}} \int_X \frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+1}}, \tag{1.23}$$

其中，$dt$ 是 $\mathbb{R}$上的勒贝格测度。

注意，由（1.19）可得

$$\mu_\infty = \frac{1}{2\pi^{n+1}} (\sigma_P)_*(dV_\Sigma), \tag{1.24}$$

其中 $(\sigma_P)_*(dV_\Sigma)$ 是由符号映射 $\sigma_P : \Sigma \to (0, +\infty)$ 将由辛体积形式 $dV_\Sigma$ 在 $\Sigma$上定义的测度推前得到的测度。关于 Toeplitz算子的缩放谱测度的相关结果可见 [4, §13]。

接下来，我们给出一个 Kodaira 型 CR 嵌入定理，这是 Boutet de Monvel 的 CR 嵌入定理的改进。应用定理 1.1 并按照 [24, 第一部分，第 8] 章中的坐标 来计算 $\varphi$ 的切向 Hessian（参见定理2.15），我们可以利用 [25, 26, 28] 中的相关要素，在 $k$充分大时得到如下 CR 嵌入。

定理 *1.4.* 设有一个 *CR* 流形 $(X, T^{1,0}X)$ 和一个 *Toeplitz* 算子 $T_P$，如定理 *1.1* 所述。我们将 $T_P$ 的正特征值按重数计为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$，并设 $f_1, f_2 \ldots$ 是 $H_b^0(X)$ 中的一个正交归一集，满足对所有 $j \in \mathbb{N}$，$T_P f_j = \lambda_j f_j$。令 $0 < \delta_1 < \delta_2$ 和 $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty((\delta_1, \delta_2))$。令 $N_k = \#\{j \in \mathbb{N} : 0 < \lambda_j \leq k\delta_2\}$。则映射 $G_k : X \to \mathbb{C}^{N_k}$,

$$G_k(x) = \left(\chi(k^{-1}\lambda_1) f_1, \ldots, \chi(k^{-1}\lambda_{N_k}) f_{N_k}\right). \tag{1.25}$$

当 $k$ 充分大时，是一个 *CR*嵌入。

在定理 1.4的情形下，对于 $k > 0$，我们考虑 CR映射

$$F_k : X \to \mathbb{C}^{N_k}, \quad F_k(x) = \sqrt{\frac{2\pi^{n+1}}{k^{n+1}}} G_k(x). \tag{1.26}$$

定理 1.4蕴含$F_k$ 在（1.26）中对于充分大的$k$ 而言也是一个 CR嵌入。我们来考察 $\mathbb{C}^N$ 上的以下结构。对于 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in (\mathbb{R}_+)^N, N \geq 2$,

[1]归一化常数与 [4] 不同，因为我们对体积形式 $dV_\xi$采用了不同的归一化方式。

在 $\mathbb{C}^N$ 上的全纯 $\mathbb{R}$ 作用由 $\mathrm{t}t \circ (z_1, \ldots, z_N) = (e^{i\beta_1 t} z_1, \ldots, e^{i\beta_N t} z_N)$ 给出。无穷小作用于是由向量场给出

$$\mathcal{T}_\beta = \sum_{j=1}^{N} i\beta_j \left( z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \overline{z}_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \right), \quad (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N, \tag{1.27}$$

并且我们考虑由 $\omega_\beta$ 在 $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 上定义的光滑 1-形式

$$\omega_\beta = \frac{1}{2i} \frac{\sum_{j=1}^{N} (\overline{z}_j dz_j - z_j d\overline{z}_j)}{\sum_{j=1}^{N} \beta_j |z_j|^2}. \tag{1.28}$$

由此可得 $\omega_\beta(\mathcal{T}_\beta) = 1$ 对所有 $z \neq 0$均成立。令 $S^{2N-1} \subset \mathbb{C}^N$ 为一个以零为中心、半径为正的球面，并将包含映射记为 $\iota: S^{2N-1} \to \mathbb{C}^N$。于是，$S^{2N-1}$是一个紧的、可定向的、严格伪凸的余维一 CR 流形，其中 CR 结构由 $\mathbb{C}^N$的复结构诱导。我们发现，$\mathcal{T}_\beta$ 在 $S^{2N-1}$ 上定义了一个横截向量场，它是一个 CR 向量场，这意味着 $\mathcal{T}_\beta$的流保持 CR 结构。$S^{2N-1}$ 上湮灭 CR 结构的相应实 1-形式由 $\iota^* \omega_\beta$给出。

现在我们将考察映射 $F_k$ 在何种程度上保持 $\mathcal{T}_\beta$ 和 $\omega_\beta$，其中 $\beta = \lambda(k) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_k})$。

**定理 1.5**。考虑定理 *1.1* 中的情形以及 $F_k$ 如(1.26)所示。取体积形式和伪微分算子分别为 $dV := dV_\xi$ 和 $P := -i\mathcal{T}$，其中$\mathcal{T}$ 是由 $\iota_\mathcal{T} d\xi = 0$ 和 $\iota_\mathcal{T} \xi = 1$确定的 ***Reeb*** 向量场。于是，在$\mathscr{C}^\infty$-拓扑中，当 $k \to +\infty$时，我们有：

$$\begin{aligned} |k^{-1} dF_k \mathcal{T}|^2 &= C'_\chi + O(k^{-1}), \\ |k^{-1} \mathcal{T}_{\lambda(k)} \circ F_k|^2 &= C'_\chi + O(k^{-1}), \\ |k^{-1} \mathcal{T}_{\lambda(k)} \circ F_k - k^{-1} dF_k \mathcal{T}|^2 &= O(k^{-1}), \end{aligned} \tag{1.29}$$

其中 $C'_\chi = \int_0^{+\infty} t^{n+2} |\chi|^2(t) dt$。

如果 $\mathcal{T}$此外还是 CR 向量场，则 $F_k$ 关于 $\mathcal{T}$在 $X$ 上的流以及 $\mathcal{T}_{\lambda(k)}$ 在 $\mathbb{C}^{N_k}$ 上的流分别是等变的。因此，在这种情况下，我们得到 $(F_k)_* \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\lambda(k)}$。一般而言，等式 $(F_k)_* \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\lambda(k)}$ 可能不成立。不过，仍有定理 1.5所述的渐近等式。

**定理 1.6**。在定理 *1.1* 的假设下，并令 $F_k$ 如 (1.26) 所示，则 $F_k^* \omega_{\lambda(k)}$ 对所有充分大的 $k$ 都定义良好，$> 0$ 且有

$$F_k^* \omega_{\lambda(k)} = \sigma_P(\xi)^{-1} \xi + O(k^{-1}), \quad k \to +\infty, \tag{1.30}$$

在 $X$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中。

**推论 1.7**。在定理 *1.6* 的情形下，令 $P = -i\mathcal{T}$如定理 *1.5*所示，则有

$$F_k^* d\omega_{\lambda(k)} = d\xi + O(k^{-1}), \quad k \to +\infty, \tag{1.31}$$

在 $X$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中。

我们注意到，在定理 1.6 的情形下，$d^{\omega_{\lambda_k}}$ 在以零点为中心的任意正半径球面$S^{2N_k-1} \subset \mathbb{C}^{N_k}$ 上诱导出一个 Levi 形式。此外，关于 X以及 $\xi$ 的 Levi 形式由 $d\xi$ 诱导（见定义 2.4）。因此，推论 1.7 可以看作

CR版本的Tian定理， [45] Tian证明了，在复流形上正全纯线丛的高次张量幂所对应的Kodaira映射下， $\mathbb{CP}^N$ 上Fubini–Study度量的拉回逼近线丛曲率。我们还指出，（1.30）和（1.31在将映射$F_k$ 乘以常数因子进行缩放时保持不变，并且首项与 $\chi$的选择无关。此外，定理 1.6对满足定理 1.1中假设的任意伪微分算子 $P$ 均成立。

定理 1.6 表明，$X$ 上的 CR 与接触结构，与 $\mathbb{C}^{N_k}$ 中的球面的结构通过映射 $F_k$ 密切相关，其中 $k$ 变得很大。现在我们将证明，通过对算子 $T_P$ 作出适当选择，可以使得当 $F_k(X)$ 在 $k$ 变得很大时，实际上除一个小扰动外位于某个球面上。我们注意到，研究严格伪凸CR流形能否嵌入球面，是 CR 几何和复分析中的一个重要课题。Fornaess [13] 对一大类严格伪凸CR流形，获得了将其嵌入复欧几里得空间中严格凸域边界的结果。Faran [12] （另见 Forstneric [14]）证明了，复欧几里得空间中存在一些实解析严格伪凸超曲面，无法 CR 嵌入有限维球面。然而，Lempert [37] （另见 [36]）证明了，复欧几里得空间中的每个紧的、实解析的严格伪凸超曲面，都可以 CR 嵌入无限维球面。Forstneric [14] 和 Løw [40] 分别独立证明，任何具有充分光滑边界的有界严格伪凸域，都可以适当地全纯嵌入某个有限维单位球中；此外，他们还证明，这种嵌入可以选择为延拓至边界连续。定理 1.8 给出了将严格伪凸 CR 流形嵌入球面的任意小扰动中的结果，并且渐近地保持 Reeb 向量场。

令$S^{2N-1} \subset \mathbb{C}^N$ 为以原点为中心、半径为一的球面。给定一个光滑函数$f\colon S^{2N-1} \to (-1,\infty)$，我们将扰动球面$S^{2N-1}(f)$ 定义为

$$S^{2N-1}(f) := \left\{ z \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\} \colon |z| = 1 + f\left(\frac{z}{|z|}\right) \right\}. \tag{1.32}$$

投影$z \mapsto z/|z|$ 定义了$S^{2N-1}(f)$ 与$S^{2N-1}$之间的微分同胚。此外，$S^{2N-1}(f)$ 作为 $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 中的实超曲面，带有诱导的 CR 结构。给定 $\beta \in \mathbb{R}^N_+$，我们在 $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 上定义一个 1-形式 $\alpha_{f,\beta}$：

$$\alpha_{f,\beta} = -\frac{i(\partial - \overline{\partial})\rho(z)}{\sum_{j=1}^N \beta_j |z_j|^2}, \tag{1.33}$$

其中 $\rho$ 是<style id='定义函数'>定义函数，对应于 $S^{2N-1}(f)$，其表达式为 $\rho(z) = |z| - f(z/|z|) - 1$。事实证明，通过包含映射将 $\alpha_{f,\beta}$ 拉回到 $S^{2N-1}(f)$ 后，所得形式是一个处处非零的实 1-形式，并且湮灭 $S^{2N-1}(f)$ 的 CR 结构 $T^{1,0}S^{2N-1}(f)$。我们现在将证明，定理 1.1 中的任意紧致严格伪凸 CR 流形都可以 CR 嵌入到一个扰动球面中，且扰动可以任意小。这一现象可视为近似球面嵌入。

**定理 1.8**。考虑定理 *1.1*中的情形，并将相对于由 $\iota_T d\xi = 0$ 和 $\iota_T \xi = 1$确定的 $\xi$ 的 *Reeb* 向量场记为 $T$。在 $X$ 上固定任意一个 *Hermitian* 度量和一族 $\mathscr{C}^m$-范数 $m \geq 0$。对于任意 $\varepsilon > 0$ 及任意 $m \in \mathbb{N}$，存在 $N \in \mathbb{N}$、一个扰动球面 $S^{2N-1}(f) \subset \mathbb{C}^N$，其中 $f\colon S^{2N-1} \to (-1,\infty)$ 是光滑的，$\beta \in (\mathbb{R}_+)^N$，以及一个 *CR* 嵌入 $F\colon X \to \mathbb{C}^N$，满足以下性质：

*(i)* $F(X) \subset S^{2N-1}(f)$。*(ii)* $\sup_{S^{2N-1}} |f| \leq \varepsilon$。*(iii)* 存在 $\{\tilde{F}(x) : x \in X\}$ 在 $S^{2N-1}$ 中的一个开邻域 $U$，其中 $\tilde{F}(x) := F(x)/|F(x)|$，对 $x \in X$ 成立，且 $\sup_U |df| \leq \varepsilon$。*(iv)* $\|f \circ F|_{\mathscr{C}^m}(X) \leq \varepsilon$，*(v)* $|F^*\alpha_{f,\beta} - \xi| \leq \varepsilon$。*(vi)* 对 $F(X)$ 中任意一点，$F_*\mathcal{T}$ 均与 $T^{1,0}S^{2N-1}(f) \oplus T^{0,1}S^{2N-1}(f)$ 横截。*(vii)* 我们有

$$\left\|1 - \frac{|F_*\mathcal{T}|}{|\mathcal{T}_\beta \circ F|}\right\|_{\mathscr{C}^m(X)} \leq \varepsilon, \quad \left\|1 - \frac{\langle F_*\mathcal{T}, \mathcal{T}_\beta \circ F\rangle}{|F_*\mathcal{T}||\mathcal{T}_\beta \circ F|}\right\|_{\mathscr{C}^m(X)} \leq \varepsilon, \quad \|F^*\omega_\beta - \xi\|_{\mathscr{C}^m(X)} \leq \varepsilon.$$

请注意，$\varepsilon > 0$ 的选择可能会影响维数$N$。作为定理1.8的直接推论，任何维数大于或等于五的严格伪凸、可定向紧致 CR 流形$X$ 都可以嵌入扰动球面中。

文献 [44] 证明了，任何紧致萨斯基安流形都存在一个 CR 嵌入，映入一个与球面微分同胚的萨斯基安流形。若进一步假设$X$ 的第一德拉姆上同调群消失，则文献[46]证明了，$X$ 可以 CR 嵌入到一个带有横向变形萨斯基安结构的球面中。另请参阅 [39]中萨斯基安几何的相关结果。我们指出，定理1.8 也可以表述为关于嵌入到具有非标准 CR 结构的球面中的 CR 嵌入结果。精确表述请参见定理6.5 。

## 2. 预备知识

**2.1. 记号。** 本文中我们始终采用以下记号：$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ 表示自然数集，并令 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$；$\mathbb{R}$表示实数集。此外，$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ 且 $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$。对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ 以及$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$，我们定义

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \\ \partial_{x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

令$z = (z_1, \ldots, z_n)$、$z^j = x_{2j-1} + ix^{2j}$、$j = 1$、…、$n$为 $\mathbb{C}^n$上的坐标。记

$$\begin{aligned} z^\alpha &= z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}, \quad \overline{z}^\alpha = \overline{z}_1^{\alpha_1} \ldots \overline{z}_n^{\alpha_n}, \\ \partial_{z_j} &= \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} - i\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\Big), \quad \partial_{\overline{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}} + i\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\Big), \\ \partial_z^\alpha &= \partial_{z_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{z_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha}, \quad \partial_{\overline{z}}^\alpha = \partial_{\overline{z}_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{\overline{z}_n}^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \overline{z}^\alpha}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于$j, s \in \mathbb{Z}$，令 $\delta_{js} = 1$，若$j = s$；若$j \neq s$，则 $\delta_{js} = 0$。

设 $U \subset \mathbb{R}^{n_1}$ 和 $V \subset \mathbb{R}^{n_2}$ 为开集。设 $\mathscr{C}_c^\infty(V)$ 和 $\mathscr{C}^\infty(U)$ 分别为 V 中具有紧支集的光滑函数空间和 U 上的光滑函数空间；$\mathscr{D}'(U)$ 和 $\mathscr{E}'(V)$ 分别为 U 上的分布空间和 V 中具有紧支集的分布空间。对于所有 $s \in \mathbb{R}$，我们考虑 $\mathbb{R}^{n_1}$上的 s 阶索博列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^{n_1})$，并定义 $H^s_{loc}(U) := \{u \in \mathscr{D}'(U) : \rho u \in H^s(\mathbb{R}^{n_1})$，其中 $\rho \in \mathscr{C}^\infty c(U)\}$，以及 $H^s_{comp}(U) := H^s_{loc}(U) \cap \mathscr{E}'(U)$。设 M 为光滑紧流形。通过使用单位分解，我们以标准方式定义 M 上的 s 阶索博列夫空间 $H^s(M)$，$s \in \mathbb{R}$。我们用 $\|\cdot\|_{H^s}$ 表示 $H^s(M)$ 上的一个索博列夫范数。

设 F : $\mathscr{C}^\infty$c (V) $\to \mathscr{D}'$(U) 为连续算子，且 F(x, y) $\in \mathscr{D}'$(U $\times$V) 为 F 的 Schwartz 核，参见 [22, §5.2]。在本文中，我们将 F 与 F(x, y) 等同。若 F(x, y) $\in \mathscr{C}^\infty$ (U $\times$ V)，则称 F 为平滑算子。注意，以下条件彼此等价。

$$\begin{aligned} &F(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(U \times V).\\ &F : \mathscr{E}'(V) \to \mathscr{C}^\infty(U) \text{ is continuous.}\\ &F : H^{-s}_{\mathrm{comp}}(V) \to H^s_{\mathrm{loc}}(U) \text{ 对所有} s \in \mathbb{N}_0 \text{均连续。} \end{aligned} \tag{2.3}$$

对于两个连续线性算子 A, B : $\mathscr{C}^\infty$c (V) $\to \mathscr{D}'$(U)，若 A $\equiv$B（在 U $\times$ V 上）或 A(x, y) $\equiv$ B(x, y)（在 U $\times$ V 上）是平滑算子，则记作 A $\equiv$B（在 U $\times$ V 上）或 A(x, y) $\equiv$ B(x, y)（在 U $\times$ V 上）；其中 A(x, y), B(x, y) $\in \mathscr{D}'$(U $\times$ V) 分别是 A 和 B 的分布核。

设 g $\in \mathscr{C}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ 是正的连续函数，且 G : $\mathscr{C}^\infty$c (V) $\to \mathscr{D}'$(U) 是一个可能依赖于参数 z $\in \mathbb{C}$ 的算子。我们采用记号 G $=$ O$_{H^s(V)\to H^\ell(U)}$(g)，其中 s, $\ell \in \mathbb{R}$，若对任意 $\tau \in \mathscr{C}^\infty_c$(V)，$\widehat{\tau} \in \mathscr{C}^\infty_c$(U)，$\widehat{\tau}$G$\tau$ : H$^s$($\mathbb{R}^{n_2}$) $\to$H$^\ell$($\mathbb{R}^{n_1}$) 有界，且存在某个常数 C$_s$, $\ell > 0$（与 z 无关），使得 $\widehat{\tau}$G$\tau$ : H$^s$($\mathbb{R}^{n_2}$) $\to$H$^\ell$($\mathbb{R}^{n_1}$) 的算子范数不超过 C$_{s,\ell}$g；若 U $=$ V，则简记为 G $=$ O$_{H^s\to H^\ell}$(g)。

对于光滑函数 $f \in \mathscr{C}^\infty(U \times U)$，记 $f(x,y) = O\left(|x-y|^{+\infty}\right)$，如果对于所有多重指标 $\alpha$、$\beta \in \mathbb{N}^{n_1}_0$、$\partial^\alpha_x \partial^\beta_y$，都有 $f(x,x) = 0$，且对于所有 $x \in U$。

我们介绍本文中使用的微局部分析的一些概念。设 $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ 为一个开集。

**定义 2.1**。对于任意 $m \in \mathbb{R}$、$S^m_1$、0$(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$s(x$、$y$、$t) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D \times \mathbb{R}_+)$ 是满足如下条件的所有函数空间：对于任意紧集 $K \Subset D \times D$、所有 $\alpha$、$\beta \in \mathbb{N}^{2n+1}_0$和 $\gamma \in \mathbb{N}_0$，存在常数 $C_K$、$_\alpha$、$_\beta$、$_\gamma > 0$，使得估计式成立

$$\left|\partial^\alpha_x \partial^\beta_y \partial^\gamma_t a(x,y,t)\right| \leq C_{K,\alpha,\beta,\gamma}(1+|t|)^{m-|\gamma|}, \text{ for all } (x,y,t) \in K \times \mathbb{R}_+, |t| \geq 1. \tag{2.4}$$

记 $S^{-\infty}(D \times D \times \mathbb{R}_+) := \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_1$、0$(D \times D \times \mathbb{R}_+)$。

令$s^j \in S^{m_j}_{1\,0},(D \times D \times \mathbb{R}_+), j = 0, 1, 2, \ldots,$ 其中$m^j \to -\infty$ 随$j \to +\infty$趋于无穷。根据博雷尔构造的论证，总存在$s \in S^{m_0}_{1\,0},(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，在$S^{-\infty}$ 模意义下唯一，使得

$$s - \sum_{j=0}^{\ell-1} s_j \in S^{m_\ell}_{1,0}(D \times D \times \mathbb{R}_+) \tag{2.5}$$

对所有 $\ell = 1$、2、.....。若$s$ 和$s^j$ 具有上述性质，则记作

$$s(x,y,t) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} s_j(x,y,t) \text{ in } S^{m_0}_{1,0}(D \times D \times \mathbb{R}_+). \tag{2.6}$$

此外，我们采用记号

$$s(x,y,t) \in S^m_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+) \tag{2.7}$$

如果 $s(x,y,t) \in S^m_1$,0$(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，并且我们可以找到 $s^j(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D), j \in \mathbb{N}_0$，使得

$$s(x,y,t) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} s_j(x,y) t^{m-j} \text{ in } S^m_{1,0}(D \times D \times \mathbb{R}_+). \tag{2.8}$$

对于光滑仿紧流形 $M_1$,$M_2$,，我们定义符号空间

$$S^m_{1,0}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}_+), \quad S^m_{\mathrm{cl}}(M_1 \times M_2 \times \mathbb{R}_+)$$

及其渐近和，均按标准方式[23, 19]。

对于$m \in \mathbb{R}$，令$L^m_{\mathrm{cl}}(D)$ 表示$D$上阶为$m$ 的经典伪微分算子空间。对于$P \in L^m_{\mathrm{cl}}(D)$，我们用 $\sigma_P$ 表示$P$的主符号。在流形的情形下，我们也采用类似的记号。

我们回顾一些半经典分析中的记号。令$U$ 为 $\mathbb{R}^{n_1}$ 中的一个开集，并令$V$ 为 $\mathbb{R}^{n_2}$中的一个开集。

**定义 2.2**。 若一个$k$依赖的连续线性算子$F_k$：$\mathscr{C}^\infty_c(V) \to \mathscr{D}'(U)$满足以下条件，则称其为$k$-可忽略的：当$k$ 充分大时，$F_k$ 是一个平滑算子；并且对于$U \times V$中的任意紧集$K$，对于任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n_1}$、 $\beta \in \mathbb{N}_0^{n_2}$和$N \in \mathbb{N}_0$，存在常数$C_{K,\alpha,\beta,N} > 0$，使得

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta F_k(x,y)\right| \le C_{K,\alpha,\beta,N} k^{-N}, \tag{2.9}$$

对所有$x$、$y \in K$ 以及充分大的$k$ 均成立。若$F_k$ 是$k$-可忽略的，我们记$F_k(x,y) = O(k^{-\infty})$（在$U \times V$上），或$F_k = O(k^{-\infty})$（在$U \times V$上）。

接下来，我们回顾半经典符号空间。设$W$ 是 $\mathbb{R}^N$中的一个开集，我们定义空间

$$S(1;W) := \{a \in \mathscr{C}^\infty(W) : \sup_{x\in W} |\partial_x^\alpha a(x)| < \infty \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}. \tag{2.10}$$

考虑空间$S^0_{\mathrm{loc}}(1;W)$，它包含所有具有实参数$k$ 的光滑函数$a(x,k)$，使得对于任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$及任意截断函数 $\chi \in \mathscr{C}^\infty_c(W)$，都有

$$\sup_{\substack{k\in\mathbb{R}\\ k\ge 1}} \sup_{x\in W} |\partial_x^\alpha(\chi(x)a(x,k))| < +\infty. \tag{2.11}$$

对于一般的$m \in \mathbb{R}$，我们也可以考虑

$$S^m_{\mathrm{loc}}(1;W) := \{a(x,k) : k^{-m}a(x,k) \in S^0_{\mathrm{loc}}(1;W)\}. \tag{2.12}$$

换言之，$S^m_{\mathrm{loc}}(1;W)$ 包含所有带参数$k \in \mathbb{R}$并满足以下估计的光滑函数$a(x,k)$。对于任意紧集$K \Subset W$和任意多重指标$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，存在一个与$k$ 无关的常数$C_{K,\alpha} > 0$，使得

$$|\partial_x^\alpha(a(x,k))| \le C_{K,\alpha} k^m, \text{ for all } x \in K,\ k \ge 1. \tag{2.13}$$

对于一个$a_j \in S^{m_j}\mathrm{loc}(1;W)$ 序列，其中 $m_j \searrow -\infty$，且 $a \in S^{m_0}\mathrm{loc}(1;W)$，我们称

$$a(x,k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,k) \text{ in } S^{m_0}_{\mathrm{loc}}(1;W), \tag{2.14}$$

若对于所有 $l \in \mathbb{N}$，都有

$$a - \sum_{j=0}^{\ell-1} a_j \in S^{m_\ell}_{\mathrm{loc}}(1;W). \tag{2.15}$$

事实上，对于任意如上所述的序列 $a_j$，都存在一个渐近和 $a$，如式（2.14）所示，其在模 $S^{-\infty}\mathrm{loc}(1;W)$ 的意义下唯一$= \cap_m S^m_{\mathrm{loc}}(1;W)$。关于半经典分析的详细讨论，请参见[11]。上述引入的所有记号均可推广到仿紧流形上。

2.2. **Boutet de Monvel–Sj ¨ostrand 对 Szeg˝o 核的分析**。 设$X$是一个实维数为 $2n$ $+1$、$n \geq 1$的光滑可定向流形。若$X$ 具有 CR 结构$T^{1,0}X$，且$T^{1,0}X \subset \mathbb{C}TX$ 是一个子丛，则称$X$ 为（余维一）柯西-黎曼流形（简称 CR 流形），其中

(i) 对任意 $p \in X$，$\dim_{\mathbb{C}} T^{1\,0}_p X = n$。 (ii) 对任意 $p \in X$，$T^{1\,0}_p X \cap T^{0\,1}_p X = \{0\}$，其中 $T^{0\,1}_p X := \overline{T^{1\,0}_p X}$。 (iii) 对于 $V_1, V_2 \in \mathscr{C}^\infty(X, T^{1,0}X)$，有 $[V_1, V_2] \in \mathscr{C}^\infty(X, T^{1,0}X)$，其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示向量场之间的李括号。

在复化切丛 $\mathbb{C}TX$ 上固定一个光滑的 Hermitian 度量 $\langle \cdot | \cdot \rangle$，使得 $T^{1,0}X$ 与 $T^{0,1}X$ 正交。于是局部存在一个实向量场 $\mathcal{T}$，满足$|\mathcal{T}|^2 := \langle \mathcal{T} | \mathcal{T} \rangle = 1$，且在每一点都与 $T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ 正交。注意，$\mathcal{T}$除符号选择外是唯一的。记 $T^{*1,0}X$ 和 $T^{*0,1}X$ 为 $\mathbb{C}T^*X$ 中分别消去 $\mathbb{C}\mathcal{T} \bigoplus T^{0,1}X$ 和 $\mathbb{C}\mathcal{T} \bigoplus T^{1,0}X$ 的对偶丛。定义 (0, q) 形式丛为 $T^{*0,q}X := \wedge^q T^{*0,1}X$。$\mathbb{C}TX$ 上的 Hermitian 度量通过对偶性诱导出 $\mathbb{C}T^*X$ 上的 Hermitian 度量，也诱导出所有 $q \in \{0, \ldots, n\}$ 时 $T^{*0,q}X$ 上的 Hermitian 度量。我们也将所有这些诱导度量记作 $\langle \cdot | \cdot \rangle$。对于 X 的任意开集 $D \subset$，记 $\Omega^{0,q}(D)$ 为 D 上 $T^{*0,q}X$ 的光滑截面空间，并令 $\Omega^{0,q}_c(D)$ 为 $\Omega^{0,q}(D)$ 中那些在 D 内具有紧支集的元素所成的子空间。

令 $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ $T^{*1,0}X$ 为一个局部标准正交标架。实$(2n)$-形式

$$\omega := i^n \omega_1 \wedge \overline{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n \wedge \overline{\omega}_n$$

与标准正交标架的选择无关，因此它在全局上有定义。在局部上，存在一个实 1-形式 $\xi$，满足 $|\xi|^2 := \langle \xi | \xi \rangle = 1$，并且与$T^{*1,0}X \oplus T^{*0,1}X$正交。该 $\xi$ 除符号选择外是唯一的。由于$X$ 是可定向的，因此在$(2n+1)$上存在处处不为零的形式 $\Theta$。于是，可以通过要求$\omega \wedge \xi = f\Theta$来唯一确定 $\xi$，其中$f$ 是一个正的光滑函数。

**定义 2.3**。 如此选取的 1-形式 $\xi$ 在全局上有定义，我们称其为$X$上的特征形式。

CR 流形$X$ 的 Levi 分布$HX$ 是$T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$的实部，即$TX$ 的唯一子丛$HX$，满足

$$\mathbb{C}HX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X. \tag{2.16}$$

设 $J : HX \to HX$ 是由 $J(u + u) = iu - iu$ 给出的复结构，其中 $u \in T^{1,0}X$。若将 J 复线性延拓至 $\mathbb{C}HX$，则有 $T^{1,0}X = \{V \in \mathbb{C}HX : JV = iV\}$。因此，CR 结构 $T^{1,0}X$ 由 Levi 分布和 J 确定。湮灭子 $(HX)^\perp \subset T^*X$ 由 $(HX)^\perp = \mathbb{R}\xi$ 给出，因此对于任意 $u \in H_xX$、$x \in X$，我们有 $\langle \xi(x), u \rangle = 0$（我们也用记号 $\xi_x$ 表示 $\xi(x)$）。$d\xi$ 在 HX 上的限制是一个 (1, 1)-形式。

**定义 2.4.** $X$ 在 $x \in X$ 处与 $\xi$ 相关联的 Levi 形式 $\mathcal{L}_x = \mathcal{L}^\xi_x$ 是对称双线性映射

$$\mathcal{L}_x : H_xX \times H_xX \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_x(u, v) = \frac{1}{2} d\xi(u, Jv), \quad \text{for } u, v \in H_xX. \tag{2.17}$$

它诱导出一个厄米形式

$$\mathcal{L}_x : T^{1,0}_x X \times T^{1,0}_x X \to \mathbb{C}, \ \mathcal{L}_x(U, V) = \frac{1}{2i} d\xi(U, \overline{V}), \ U, V \in T^{1,0}_x X. \tag{2.18}$$

**定义 2.5.** 若存在一个特征 1-形式 $\xi$，使得对于每个 $x \in X$，Levi 形式 $\mathcal{L}_x^\xi$ 都是正定的，则称 CR 流形 $X$ 为严格伪凸。在这种情况下，这样的 1-形式 $\xi$ 也称为接触形式，因为 $\xi \wedge (d\xi)^n \neq 0$，其中 $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n + 1$。

从现在起，我们假设 $(X, T^{1,0}X)$ 是一个维数为 $2n+1$ 的紧致严格伪凸 CR 流形，并固定一个特征 1-形式 $\xi$ 在 $X$ 上，如定理1.1中所述，使得 $\mathcal{L}_x^\xi$ 在每个 $x \in X$处均为正定。

**定义 2.6** ([17, 引理/定义 1.1.9])。与接触形式 $\xi$ 相关联的 Reeb 向量场 $T = T(\xi)$ 是由方程$\iota_T \xi = 1, \iota_T d\xi = 0$唯一确定的向量场。

我们取 $\langle \cdot | \cdot \rangle$，使得 $|T| = 1, |\xi| = 1$ 在 $X$ 上成立。相对于给定的 Hermitian 度量 $\langle \cdot | \cdot \rangle$，我们考虑正交投影

$$\pi^{(0,q)} : \Lambda^q \mathbb{C} T^* X \to T^{*0,q} X. \tag{2.19}$$

切向 Cauchy–Riemann 算子定义为

$$\overline{\partial}_b := \pi^{(0,q+1)} \circ d : \Omega^{0,q}(X) \to \Omega^{0,q+1}(X). \tag{2.20}$$

根据 Cartan 公式，我们可以验证

$$\overline{\partial}_b^2 = 0. \tag{2.21}$$

在本文中，我们在 $X$ 上使用两种体积形式：

(i) 一个给定的光滑正 $(2n+1)$-形式 $dV(x)$。 (ii) $(2n+1)$-形式 $dV_\xi := 2^{-n} n! \ \xi \wedge (d\xi)^n$ 由接触形式 $\xi$ 给出。

**注记 2.7**。通过变量替换 $t \mapsto \sigma_P(\xi)^{-1} t$，定理 1.1 可以改写为使相位函数变为 $\sigma_P(\xi)^{-1}\varphi$，且符号的首项变为

$$\frac{1}{2\pi^{n+1}} \frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+1} dV} \chi(t) t^n. \tag{2.22}$$

1-形式 $\sigma_P(\xi)^{-1}\xi$ 不依赖于接触形式 $\xi$ 的选择。我们称$\alpha_P := \sigma_P(\xi)^{-1}\xi$ 为关于 $P$ 的 $X$ 的特征形式。它是一个光滑、不处处为零的实 1-形式，并且满足 $\mathbb{C} \otimes \operatorname{Ker} \alpha_P = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$。可以得到

$$\frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+1}} = \frac{2^{-n}}{n!} \alpha_P \wedge (d\alpha_P)^n. \tag{2.23}$$

这给出了由（2.22）表示的首项，且与 $\xi$无关。

取由$dV$ 和 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 在 $\Omega^{0,q}(X)$ 上诱导的$L^2$-内积 $(\cdot | \cdot)$，其定义为

$$(f|g) := \int_X \langle f | g \rangle dV, \ f, g \in \Omega^{0,q}(X). \tag{2.24}$$

我们将 $\Omega^{0,q}(X)$ 关于 $(\cdot|\cdot)$的完备化记作 $L^2_{(0,q)}(X)$，并记$L^2(X) := L^2_{(0,0)}(X)$。令 $\| \cdot \|$ 表示 $L^2_{(0,q)}(X)$ 上的相应$L^2$-范数，并令 $\overline{\partial}^*{}_b$表示关于$(\cdot|\cdot)$的 $\overline{\partial}_b$ 的形式伴随算子。Kohn 拉普拉斯算子 $\Box^{(0)}{}_b$ 定义为

$$\Box_b^{(0)} := \overline{\partial}_b^* \overline{\partial}_b : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X). \tag{2.25}$$

它不是椭圆算子，因为其主符号 $\sigma(\Box_b^{(0)})(x,\xi) \in \mathscr{C}^\infty(T^*X)$ 的特征集 $\{(x,\eta) \in T^*X : \eta = \lambda\xi(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ 非空。辛锥 (1.3) 是由 $\lambda > 0$ 定义的特征集的连通分支。事实上，$\Box_b^{(0)}$ 甚至可能不是亚椭圆的，即 $\Box_b^{(0)} u \in \mathscr{C}^\infty(X)$ 并不一定意味着 $u \in \mathscr{C}^\infty(X)$。我们通过以下方式将 $\overline{\partial}_b$ 扩展到 $L^2$-空间：

$$\begin{aligned} &\overline{\partial}_b : \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}_b \subset L^2(X) \to L^2_{(0,1)}(X),\\ &\mathrm{Dom}\,\overline{\partial}_b := \left\{u \in L^2(X) : \overline{\partial}_b u \in L^2_{(0,1)}(X)\right\}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 $\overline{\partial}_b u$ 是按分布的意义计算的。此延拓的核 $\overline{\partial}_b$是空间 $H_b^0(X)$，即平方可积 CR 函数构成的空间（1.2）。

令 $\overline{\partial}^*_{b,H} : \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}^*_{b,H} \subset L^2_{(0,1)}(X) \to L^2(X)$ 为 $L^2$伴随算子。令 $\Box_b^{(0)} : \mathrm{Dom}\,\Box_b^{(0)} \subset L^2(X) \to L^2(X)$，其中

$$\mathrm{Dom}\,\Box_b^{(0)} = \left\{u \in L^2(X) : u \in \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}_b, \overline{\partial}_b u \in \mathrm{Dom}\,\overline{\partial}^*_{b,H}\right\}, \tag{2.27}$$

和 $\Box_b^{(0)} u = \overline{\partial}^*_{b,H}\overline{\partial}_b u$，$u \in \mathrm{Dom}\,\Box_b^{(0)}$。

可以验证 $H_b^0(X) = \mathrm{Ker}\,\Box_b^{(0)} = \{u \in \mathrm{Dom}\,\Box_b^{(0)} : \Box_b^{(0)} u = 0\}$。由[3, 33] 得到以下定理。

**定理2.8**。设 $(X,T^{1,0}X)$ 是一个紧致严格伪凸柯西–黎曼流形，且 $X$ 上的 *Kohn* 拉普拉斯算子在 $L^2(X)$ 中具有闭值域。那么 维数 $H_b^0(X) = +\infty$ 且$\Box_b^{(0)}$ 不是亚椭圆的。

**定义2.9**。X 上的 Szeg˝o 投影是正交投影

$$\Pi : L^2(X) \to H_b^0(X). \tag{2.28}$$

$\Pi(x,y) \in \mathscr{D}'(X\times X)$ 的 Schwartz 核 $\Pi$ 称为 Szeg˝o 核。

Szeg˝o 核的奇点通过微局部分析在 [5], 中进行了描述，另见 [24, 32]。这里我们采用 [24, 第一部分、定理1.2]中的表述。

**定理 2.10**。设 $(X,T^{1,0}X)$ 以及 $\xi$ 如定理 *1.1*中所述。那么 $\Pi(x,y)$ 在 $X\times X$ 的对角线之外是光滑的，并且在 $X$ 上的任意坐标图 $(D,x)$ 中，它都可以表示为一个振荡积分，

$$\begin{aligned} &\Pi(x,y) \equiv \Pi_\varphi(x,y)\ on\ X\times D,\\ &\Pi_\varphi(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} s^\varphi(x,y,t)dt, \end{aligned} \tag{2.29}$$

其中

$$\begin{aligned} &\varphi(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(D\times D),\\ &\mathrm{Im}\,\varphi(x,y) \geq 0,\\ &\varphi(x,y) = 0\ \textit{if and only if}\ y = x,\\ &d_x\varphi(x,x) = -d_y\varphi(x,x) = \xi(x), \end{aligned} \tag{2.30}$$

*and*

$$
\begin{aligned}
&s^{\varphi}(x,y,t)\in S^{n}_{1,0}(D\times D\times\mathbb{R}_{+}),\\
&s^{\varphi}(x,y,t)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}s^{\varphi}_{j}(x,y)t^{n-j}\ \textit{in}\ S^{n}_{1,0}(D\times D\times\mathbb{R}_{+}),\\
&s^{\varphi}_{j}(x,y)\in\mathscr{C}^{\infty}(D\times D),\ j=0,1,2,\ldots,\\
&s^{\varphi}(x,y,t),\ s^{\varphi}_{j}(x,y)\ \textit{are properly supported on}\ D\times D,\ j=0,1,\ldots,\\
&s^{\varphi}_{0}(x,x)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_{\xi}}{dV}(x)\neq 0.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

注 2.11。最初， [24, 第一部分定理 1.2] 的表述使得 (2.29) 在 D × D 上成立，其中 $s^{\varphi}$ (x, y, t) 和 $s^{\varphi}$ j (x, y)，j = 0、1、.....，不一定是适当支撑的。然而，由于 Π 在 X 上对角线外光滑，我们总可以利用适当支撑的单位分解 [19, p。28-29] 对这些函数进行调整。因此，我们可以确保 (2.29) 在 X ×D 上成立，而不仅仅是在 D × D 上成立。这样的设置使得稍后讨论傅里叶积分算子的复合更加容易。

**定义 2.12**。 设 $(X,T^{1,0}X)$ 和 $\xi$ 如定理 1.1 中所述。对于 $X$ 上的任意坐标图$(D,x)$ 以及任意 $\Lambda\in\mathscr{C}^{\infty}(X,\mathbb{R}_{+})$，记 $\mathrm{Ph}(\Pi,\Lambda\xi,D)$ 为满足以下条件的所有相位函数$\psi(x,y)\in\mathscr{C}^{\infty}(D\times D)$ 的集合

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\psi(x,y)\geq 0,\\
&\psi(x,y)=0\ \text{if and only if}\ y=x,\\
&d_{x}\psi(x,x)=-d_{y}\psi(x,x)=\Lambda(x)\xi(x),
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

使得存在一个符号 $s^{\psi}(x,y,t)\in S^{n}_{\mathrm{cl}}(D\times D\times\mathbb{R}_{+})$，满足

$$
\Pi(x,y)\equiv\int_{0}^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}s^{\psi}(x,y,t)dt.
\tag{2.33}
$$

对于任意 $\psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\Lambda\xi,D)$，以下将 $s^{\psi}(x,y,t)$ 记为 $S^{n}_{\mathrm{cl}}(D\times D\times\mathbb{R}_{+})$ 中的全符号，模去 $S^{-\infty}(D\times D\times\mathbb{R}_{+})$，使得 $\Pi\equiv\Pi_{\psi}$，

$$
\Pi_{\psi}(x,y):=\int_{0}^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}s^{\psi}(x,y,t)dt,
\tag{2.34}
$$

并且 $s^{\psi}(x,y,t)$ 和 $s^{j}(x,y)$ 在 $D\times D$上适当支撑，$j\in\mathbb{N}_{0}$。对于 $s^{\psi}_{0}(x,x)$，有如下公式。

**T定理 2.13**。 对于任意 $\psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\Lambda\xi,D)$，$\Pi_{\psi}$ 的首项 $s^{\psi}_{0}(x,y)$ 满足 s

$$
s^{\psi}_{0}(x,x)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_{\xi}}{dV}(x)\Lambda(x)^{n+1}.
\tag{2.35}
$$

证明。 我们首先回顾经典公式 [5, (1.6)] 对于 $x\neq 0$，$\operatorname{Re}x\geq 0$ 和 $m\in\mathbb{Z}$。在分布的意义下，我们有：

$$
\int_{0}^{+\infty}e^{-tx}t^{m}dt=m!(x+i0)^{-m-1},\ \text{for}\ m\geq 0,
\tag{2.36}
$$

其中，分布 $(x+i0)^{-m-1}$ 的定义见 [22, §3.2]。此外，对于有限部分（F. P.）分布，我们有（参见 [22, §3.2],

(2.37)
$$\text{F. P.}\int_0^{+\infty} e^{-tx}t^m dt = \frac{(-1)^m}{(-m-1)!}(x+i0)^{-m-1}\left(\log(x+i0)+\gamma-\sum_{j=1}^{-m-1}\frac{1}{j}\right),\ \text{for } m<0,$$

其中 $\gamma := \text{极限}_{m\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}-\text{对数}m\right)$ 为欧拉常数。将这些公式与定理 2.10结合可得

$$\begin{aligned}
&\Pi_\varphi(x,y) = \frac{F_\varphi(x,y)}{(-i(\varphi(x,y)+i0))^{(n+1)}} + G_\varphi(x,y)\log(-i(\varphi(x,y)+i0)),\\
&F_\varphi(x,y) = \sum_{j=0}^{n}(n-j)!s_j^\varphi(x,y)(-i\varphi(x,y))^j + F(x,y)\varphi(x,y)^{n+1},\\
&G_\varphi(x,y) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j!}s_{n+j}^\varphi(x,y)(-i\varphi(x,y))^j,
\end{aligned}\tag{2.38}$$

其中 F(x, y)、Fφ(x, y)、Gφ(x, y) $\in \mathscr{C}^\infty$(D × D)。根据 [32, 定理 5.4]，存在一个光滑函数 f (x, y)，满足 f (x, x) $\neq 0$，使得

$$\varphi(x,y) = f(x,y)\psi(x,y) + O(|x-y|^{+\infty}).\tag{2.39}$$

对于任意点 $p \in D$，我们可以取一组局部坐标 $x$，使其 $p$ 周围满足 $\mathcal{T} = \partial_{x_{2n+1}}$ ~~将 $p$~~ 对应到 $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$，（2.30）意味着

$$f((0,x_{2n+1}),0) = \Lambda(0)^{-1} + O(|x_{2n+1}|).\tag{2.40}$$

结合 $\Pi_\varphi \equiv \Pi_\psi$、(2.38)、(2.39)、(2.40) 以及 $0 \neq \psi((0,x^{2n+1}),\ 0) = O(|x_{2n+1}|)$，我们可以验证

$$s_0^\varphi((0,x_{2n+1}),0) = \Lambda(0)^{-n-1}s_0^\psi((0,x_{2n+1}),0) + O(|x_{2n+1}|),\tag{2.41}$$

因此 $s_0^\varphi(0,0) = \Lambda(0)^{-n-1}s_0^\psi(0,0)$ 由连续性可知。上述论证适用于 $D$中的所有点，因此首项的变换规则（2.35）成立。□

我们指出，对于（2.31），我们采用首项的全局描述 $s_0(x,x)$。在局部图景中，任取一点 $p \in X$，设 $\{W_j\}_{j=1}^n$ 为$T^{1,0}X$ 在$p$ 的某个邻域内的标准正交标架，使得 $\mathcal{L}_p(W_j, W_s) = \delta_{js}\mu_j$，其中 $\mu_j > 0$ 和$j$，$s \in \{1,.....,\ n\}$。定义

$$\det\mathcal{L}_p := \Pi_{j=1}^n\mu_j(p).\tag{2.42}$$

若设$g^{jk} = \langle\frac{\partial}{\partial x_j}|\frac{\partial}{\partial x_k}\rangle$ 以及$g = (g^{jk})_{j,k=1}^{2n+1}$，则

$$dV_\xi(x) = \det\mathcal{L}_x\sqrt{\det(g)}\,dx.\tag{2.43}$$

注 2.14。结果 [24, 定理 1.2] 针对一般的 (0, q)-形式陈述并证明，其假设是 Levi 形式处处非退化，且具有常数签名 (n−, n+)。在这种情况下，Kohn 的条件 Y(q) 成立，当且仅当 q / ∈ {n−, n+}。特别地，严格拟凸性意味着条件 Y(0) 不成立。$\omega_0$ 第一部分] 中的特征形式对应于我们的 $-\xi$（当 q = 0时），以便自然地指定 q = n− 和 q = n+ 的情形。如果 $\varphi_+$ 和 $\varphi_-$ 是描述 (0, n+)-形式上的 Szeg˝o 投影的傅里叶积分算子的相位函数，并且

$(0,n_-)$-形式，分别如此，那么 $\omega_0$ 的选取使得 $d_x\varphi_\pm(x,x)=\pm\omega_0(x)$。约定 $\omega_0=-\xi$ 适用于论文系列 [30, 31, 32, 26, 16, 15]。此处我们采用这样的约定： $\xi$ 满足 (2.17)，以便与 [4]的约定保持一致。

当 $X$ 如定理 1.1所述时，据 [5, 24, 32], 可知， $\Pi$ 是一个 $(\frac{1}{2}$ 型 0 阶伪微分算子, $\frac{1}{2})$。因此，根据 Calderon–Vaillancourt 定理 [23,定理 18.6。6]我们有

$$\Pi = O_{H^s\to H^s}(1),\quad s\in\mathbb{Z}. \tag{2.44}$$

我们以相位函数切向海森矩阵的如下局部描述结束本小节。这种局部图景对于计算 Szeg˝o 核展开的首项系数 [5, 24, 32]至关重要。此外，它也被证明对我们证明 CR 嵌入定理（定理 1.4）至关重要。

**定理 2.15** ([24, 第一部分，定理 1。4])。 对于任意给定的点 $p\in X$，设 $\{W_j\}_{j=1}^n$ 是在 $p$ 的某邻域内 $T^{1,0}X$ 的标准正交标架，使得 $\mathcal{L}_p(W_j,W_s)=\delta_{js}\mu_j$ 对于某个 $\mu_j>0$ 和 $j$, $s\in\{1,\ldots,n\}$。在 $p$ 附近存在局部坐标，使得

$$x(p)=0,\quad \xi(p)=dx_{2n+1},\quad T=\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \tag{2.45}$$

*and*

$$W_j=\frac{\partial}{\partial z_j}+i\mu_j\overline{z}_j\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}-d_jx_{2n+1}+\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}+\sum_{\ell=1}^{2n}e_{j\ell}(x)\frac{\partial}{\partial x_\ell}, \tag{2.46}$$

其中 $d_j\in\mathbb{C}$、$e^{j\ell}=O(|x|)$、$e_{j\ell}\in\mathscr{C}^\infty$、$j\in\{1,\ldots\ldots,n\}$、$\ell\in\{1,\ldots\ldots,2n\}$。在这些坐标下，对于任意 $\Phi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\xi,D)$，

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)&=x_{2n+1}-y_{2n+1}+i\sum_{j=1}^n\mu_j|z_j-w_j|^2+\sum_{j=1}^n i\mu_j(\overline{z}_jw_j-z_j\overline{w}_j)\\&+\sum_{j=1}^n\Big(d_j(z_jx_{2n+1}-w_jy_{2n+1})+\overline{d}_j(\overline{z}_jx_{2n+1}-\overline{w}_jy_{2n+1})\Big)\\&+(x_{2n+1}-y_{2n+1})f(x,y)+O\left(|(x,y)|^3\right),\end{aligned} \tag{2.47}$$

其中 $f\in\mathscr{C}^\infty(D\times D)$ 满足 $f(x,y)=f(y,x)$，且 $f(0,0)=0$。

根据 [24, 第一部分命题7.16], 存在 $C>0$，使得在足够小的邻域内，我们在这些坐标下有:

$$\mathrm{Im}\Phi(x,y)\geq C|z-w|^2. \tag{2.48}$$

**注 2.16**。 我们可以通过使用下面这个特定的相位函数，使第§3节中的计算更加简单。令 $\varphi$ 为定理 2.10 中所描述的，并令 $(D,x)$ 为定理 2.15中的坐标。通过使用 Malgrange 准备定理 [22,定理7.5。5] 以及 Melin–Sj¨ostrand 相位函数等价性 [43, 定义4.1 & 定理4。2],我们可以对 $\varphi$，作如下选择:

$$\varphi(x,y)=x_{2n+1}+\widehat{\varphi}(x',y), \tag{2.49}$$

其中 $\widehat{\varphi}\in\mathscr{C}^\infty(\mathrm{D}\times\mathrm{D})$，$\mathrm{x}'=(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_{2n})$。若 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{Ph}(\Pi,\xi,\mathrm{D})$ 满足 (2.49)，则由 [32, 定理 5.4] 可知 $\varphi_1-\varphi_2=\mathrm{O}(|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^{+\infty})$。除非另有说明，以下我们均采用满足 (2.49) 的相位函数 $\varphi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\xi,\mathrm{D})$。注意， $\varphi$ 在误差为 $\mathrm{O}(|\mathrm{x}-\mathrm{y}|^{+\infty})$ 的范围内唯一确定。

2.3. **定理 1.1证明的策略**。 我们来说明证明定理 1.1所采用的策略。我们通过考察 $\chi_k(T_P)$ 来研究

$$\chi_k(T_P) = \chi_k(T_P)\circ\Pi = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}\circ\Pi\,\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2\pi i}, \tag{2.50}$$

其中 $\widetilde{\chi}_k$ 是 $\chi_k$的几乎解析延拓。上面的最后一个等式由 Helffer–Sj¨ostrand 公式成立，并应用于 [15, 定理 1。1] 以研究零阶椭圆自伴 Toeplitz 算子的函数演算。

在我们的方法中，$T_P$被视为 ( 12 , 12 ) 型的伪微分算子，同时也是具有复相位的经典傅里叶积分算子；我们无法直接通过伪微分算子的演算 [23]得到 $(z - T_P)^{-1}$ 关于参数 z 的渐近展开。相反，我们运用 Melin–Sj ¨ostrand [43]和 Boutet de Monvel–Sj¨ ostrand [5]的演算与分析，研究 $(z - T_P)^{-1}\Pi$的渐近展开。该方法对于零阶算子 [15]，已经得到了充分确立；然而，对于我们的一阶情形，仍有必要进行进一步研究。粗略地说，在定理 3.12 中，对于所有 $N \in \mathbb{N}_0$ ，我们可以找到 $\psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \sigma_P(\xi)^{-1}\xi, D)$ 以及依赖于 z 的傅里叶积分算子 $B_z^{(0)}$、...、$B_z^{(N)}$和 $R^{(N+1}$ )

其 *Schwartz* 核为

$$B_z^{(j)}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)}\frac{\sum_{h=0}^{p_j} b_h^{(j)}(x,y,t)z^h}{(z-t)^{\ell_j}}t^{n-j-1}dt,\ j=0\ldots,N, \tag{2.51}$$

and

$$R_z^{(N+1)}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)}\frac{\sum_{h=0}^{p_{N+1}} r_h^{(N+1)}(x,y,t)z^h}{(z-t)^{\ell_{N+1}}}t^{n-N-1}dt, \tag{2.52}$$

分别满足 $\Pi B_z^{(j)} \equiv B_z^{(j)}\Pi \equiv B_z^{(j)}$模 $\mathscr{C}^\infty{}_z$， $j = 0$， ....., N</style}，且

$$(z-T_P)\sum_{j=0}^{N} B_z^{(j)} \equiv \Pi + R_z^{(N+1)} \mod \mathscr{C}_z^\infty, \tag{2.53}$$

其中

$$p_j \le \ell_j, j=0,\ldots,N+1, b_h^{(j)}(x,y,t) \in S_{\mathrm{cl}}^{\ell_j-h}(D\times D\times\mathbb{R}_+), j=0,\ldots,N,$$
$$r_h^{(N+1)}(x,y,t) \in S_{\mathrm{cl}}^{\ell_{N+1}-h}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$$

且 $\mathscr{C}_z^\infty$是定义 3.9 中引入的依赖于 z 的平滑算子类；对于式 (2.51) 中的 j = 0 ，我们有 $\ell_0 = 1$， $p_0 = 0$ ，并且 $b_0^{(0)}(x, y, t) \sim \sum_{h=0}^{\infty} b^{(0)} h (x, y)t^{1-h}$ 属于 $S_{1,0}^1(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，其中 $b_0^{(0)}(x, x) = s_0^{\varphi}(x, x)$ 由式 (2.31) 给出。在引理 4.2 中，我们将看到，对于每个 j = 0， ....., N，

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}B_z^{(j)}(x,y)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2\pi i}$$

总可以通过 Cauchy–Pompeiu 公式计算，且结果是一个具有复相位的半经典傅里叶积分算子。然而，对于（2.53），很难定义合适的、依赖于 $z$ 的符号空间来控制如下项:

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}R_z^{(N+1)}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2\pi i}$$

在固定 $k$ 时，对 $\chi_k(T_P)$ 进行近似。为处理这一问题，我们需要关于 $k$ 的半经典估计。在第 4 节中，当 $k$ 足够大时，利用适当的截断以及以下事实

即 $T_P$ 具有离散谱，我们建立了.....的半经典估计

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} R_z^{(N+1)} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i}$$

在定理 4.6中，作为一个推论，我们还可以控制

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} F_z^{(N+1)} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i}, \quad F_z^{(N+1)} \in \mathscr{C}_z^{\infty},$$

在$O(k^{-\infty})$ 定理 4.10中。由此，我们可以在定理 $\chi_k(T_P)$ **4.11** 中用复相位半经典傅里叶积分算子对其进行近似。此外，利用复相位半经典傅里叶积分算子的全局理论，我们将在定理 4.11中看到，对于这种近似，可以选取任意合适的相位函数，并且首项满足显式的变换规则。特别地，我们得出定理 4.12 的结论，即定理 1.1。

## 3. Toeplitz 算子的性质与依赖于z的演算 S

本节为证明定理 1.1准备所需材料。

**3.1. Toeplitz 算子 $T_P$ 及其函数演算。** 我们回顾一下，在定理1.1中，我们考虑了一个形式自伴的一阶伪微分算子$P \in L^1_{\mathrm{cl}}(X)$，其主符号为 $\sigma_P \in \mathscr{C}^{\infty}(T^*X)$，满足

$$\sigma_P(\xi) > 0. \tag{3.1}$$

这意味着 $\sigma_P|_{\Sigma} > 0$ 在辛锥 $\Sigma$ （1.3）中处处成立；该辛锥是 Kohn 拉普拉斯算子特征集的一个连通分支。我们考虑一阶椭圆Toeplitz算子

$$T_P := \Pi P \Pi : \mathscr{C}^{\infty}(X) \to \mathscr{C}^{\infty}(X), \tag{3.2}$$

并将其 Schwartz 核记为$T_P$（$x$，$y$）。在$D \times D$的对角线附近引入适当支撑的截断函数后，利用 Melin–Sj¨ostrand 复驻相位公式 [43, 定理 2。3] 和定理2.10，我们可以按照 [16, 定理 4。4]描述$T_P$ 的奇点如下。

**定理 3.1**。在定理*1.1* 的情形下，核 $T_P$（$x$，$y$）在 $X$ 上的任意坐标图（$D$，$x$）中都可以表示为如下振荡积分：

$$\begin{aligned} &T_P(x,y) \equiv T_\varphi(x,y) \text{ on } X \times D, \\ &T_\varphi(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} a(x,y,t)dt, \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\varphi$ 如备注*2.16* 所述，且

$$\begin{aligned} &a(x,y,t) \in S^{n+1}_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+), \\ &a(x,y,t) \sim \textstyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x,y) t^{n+1-j} \text{ in } S^n_{1,0}(D \times D \times \mathbb{R}_+), \\ &a_j(x,y) \in \mathscr{C}^{\infty}(D \times D),\ j = 0,1,2,\ldots, \\ &a_0(x,x) = s_0^{\varphi}(x,x)\sigma_P(\xi_x)\,, \\ &a(x,y,t),\ a_j(x,y) \text{ are properly supported on } D \times D,\ j = 0,1,\ldots, \end{aligned} \tag{3.4}$$

和 $s_0^{\varphi}$（$x$，$x$）是 $\Pi$ 如(2.31)中的首项。

$P$ 和 $\Pi$ 的连续性性质意味着，$T_P$ 是有界算子，在所有 $s \in \mathbb{R}$ 下，均为$H^{s+1}$ 与 $H^s$ 之间的有界算子，

$$T_P = O_{H^{s+1}\to H^s}(1). \tag{3.5}$$

U奇 [4, 引理 12.2]和标准的椭圆估计，我们得到如下结论。

**定理3.2.** 在定理 1.1的情形下，对每个 $s \in \mathbb{R}$ 都存在 $C_s > 0$ 使得

$$\|u\|_{H^{s+1}} \leq C_s(\|T_P u\|_{H^s} + \|u\|_{H^s}) \tag{3.6}$$

对所有满足 $u \in H^{s+1}(X)$ 且 $u = \Pi u$ 的情形。特别地，给定 $T_P$,$\widehat{\ }$ 的一个特征值 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$，则对任意 $s \in \mathbb{Z}$，存在常数 $C_s > 0$，使得

$$\|u\|_{H^s} \leq \widehat{C}_s(1 + |\lambda|)^s \|u\| \tag{3.7}$$

对所有 $u \in$ 核$(T_P - \lambda I)$。此外，(3.7) 对所有 $u \in$ 属于核 $T_P \cap H^0_b(X)$且 $\lambda = 0$ 的情形均成立。

由定理 3.2我们立即推得：

**The定理 3.3**。 在定理 1.1的情形下，$T$ 的最大延拓$_P$ 定义为

$$T_P : \mathrm{Dom}\, T_P \subset L^2(X) \to L^2(X),\ \mathrm{Dom} T_P := \{u \in L^2(X) : T_P u \in L^2(X)\}, \tag{3.8}$$

其中 $T_P u = \Pi P \Pi u$ 是在分布的意义下定义的，是一个自伴算子。

此外，我们还有如下结论。

**定理 3.4**。 在定理 1.1的情形下，谱 Spec$(T_P) \subset \mathbb{R}$ 由 $T_P$ 的孤立特征值组成，具有下界，并且仅有 $+\infty$ 作为聚点。此外，对于每个 $\lambda \in \mathrm{Spec}(T_P) \setminus \{0\}$，特征子空间 Ker$(T_P - \lambda I)$ 是 $H^0_b(X) \cap \mathscr{C}^\infty(X)$ 的有限维子空间。

证明。根据 [4, 命题 2.14] 算子 $T^P|_{H^0_b(X)} : H^0_b(X) \to H^0_b(X)$ 的谱仅由有限重数的孤立特征值组成，具有下界，并且仅有 $+\infty$ 作为聚点。结论源于以下事实：$\mathrm{Spec}(T_P) \setminus \{0\} = \mathrm{Spec}(T^P|_{H^0_b(X)}) \setminus \{0\}$，并且 $T_P$ 与 $T^P|_{H^0_b(X)}$ 的谱测度在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上的限制相一致。□

结合定理 3.2 和3.4，通过自伴算子的函数演算，我们可以定义算子 $\chi_k(T_P)$，并且（1.5）成立。事实上，使用（1.5）中所采用的相同记号，对于任意 $\epsilon > 0$以及示性函数 $\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}$，我们还有

$$\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)(x,y) = \sum_{\lambda_j \in [k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]} f_j(x)\overline{f_j(y)}. \tag{3.9}$$

该公式将在第 4 节中使用。

本文的主要分析目标是研究 $T_P$在半经典极限下的谱渐近行为，方法是将 Helffer–Sj¨ostrand 公式（参见 [10, §2] 或 [11, §8]）应用于 $T_P$，并使用一列重标度截断函数。对于任意固定的 $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$，以及一个固定的 $\chi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}_+)$，满足 $\mathrm{supp}(\chi) \subset (\delta_1, \delta_2)$，$\chi \neq 0$，我们令 $\chi_k(\lambda) := \chi\left(k^{-1}\lambda\right)$。Helffer–Sj¨ostrand 公式意味着

$$\chi_k(T_P) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}}(z - T_P)^{-1} dz \wedge d\overline{z}, \tag{3.10}$$

其中 $\widetilde{\chi}_k$ 是 $\chi_k$的几乎解析延拓。积分（3.10）是从 $L^2(X)$ 到 $L^2(X)$的良定义算子。注意，$\mathrm{supp}(\chi_k) \cap \{0\} = \emptyset$，因此

$$\chi_k(T_P) = \chi_k(T_P)\Pi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}}(z - T_P)^{-1}\Pi\, dz \wedge d\overline{z}. \tag{3.11}$$

**注 3.5**。 下面的观察将在第 4 节中频繁使用。设 $\operatorname{supp}\chi \subset(\delta_1,\delta_2)$。由于对每个 $k$ 都有

$$\chi_k(T_P)=\chi\left(k^{-1}T_P\right)=\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial\overline{z}}(z-k^{-1}T_P)^{-1}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2\pi i}, \tag{3.12}$$

它与几乎解析延拓的选择无关，因此在（ $\widetilde{\chi}$中，我们可以取3.11）中 $\chi_k$ 的几乎解析延拓为 $\widetilde{\chi_k}$ （z） $=\widetilde{\chi}$ （$\frac{z}{k}$），带有特殊的 $\widetilde{\chi}$，从而 supp （$\widetilde{\chi}$）$\subset\{z\in\mathbb{C}:\ \delta_1/2<|z|<2\delta_2\}$，并且对于充分大的 $k$，有

$$\operatorname{supp}\widetilde{\chi_k}\subset\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{k\delta_1}{2}<|z|<2k\delta_2\right\}. \tag{3.13}$$

3.2. （z $-T_P$）$^{-1}\Pi$**的渐近展开**。 受 CR 流形上零阶椭圆自伴 Toeplitz 算子的函数演算 [15, 定理 1.1],本节将说明如何通过一系列依赖于 $z$ 的傅里叶积分算子，建立（$z-T_P$）$^{-1}\Pi$的渐近展开。

我们首先定义依赖于z的平滑算子类，它们出现在（$z-T_P$）$^{-1}\Pi$的展开余项中。此外，在第 4 节中，我们将证明，当把（$z-T_P$）$^{-1}\Pi$ 的展开代入 Helffer– Sj¨ ostrand 公式时，它们仅贡献$O(k^{-\infty})$项。我们需要一个截断函数 $\tau$，以避免渐近展开中$t$ 的负次幂在 0 附近可能发生发散:

$$\tau\in\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}),\ \tau(t)=0\ \text{ for } t\le 1,\ \tau(t)=1\ \text{ for } t\ge 2. \tag{3.14}$$

令 $\varepsilon>0$ 固定但任意。

~**定义 3.6.** 我们用 $\mathcal{R}_z$ 表示由算子的有限线性组合构成的集合

$$\int_0^{+\infty}\mathcal{S}(x,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\tau(\varepsilon t)dt \tag{3.15}$$

在 $\mathbb{C}$ 上，其符号为 $\mathcal{S}\in S^{-\infty}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$ 在 $D\times D$ 上适当支撑，并且$M_1$,$M_2\in\mathbb{N}_0$。

^**定义 3.7.** 我们用 $\mathcal{R}_z$ 表示由算子的有限线性组合构成的集合

$$\int_0^{+\infty}\mathcal{S}(x,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\tau(\varepsilon t)dt \tag{3.16}$$

在 $\mathbb{C}$ 上，其符号为 $\mathcal{S}\in S^{-\infty}(X\times D\times\mathbb{R}_+)$，$M_1,M_2\in\mathbb{N}_0$。

**定义 3.8.** 我们用 $\mathcal{R}_z$ 表示由算子的有限线性组合构成的集合

$$\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\mathscr{S}(x,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\tau(\varepsilon t)dt \tag{3.17}$$

其中 $\mathscr{S}$(x, y, t) $=$ O(|x $-$ y|$^{+\infty}$) 是 $S^m_{\mathrm{cl}}$(D $\times$ D $\times\mathbb{R}_+$) 中的一个符号，m $\in\mathbb{R}$, $\mathscr{S}$(x, y, t) 在 D $\times$ D 上适当支撑，$M_1,M_2\in\mathbb{N}_0$，且 $\psi\in$ Ph(Π, Λξ, D)（参见定义 2.12）。

**定义 3.9.** 我们定义集合

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_z&:=\{\sum_{j\in J}c_ju_j:c_j\in\mathbb{C},\ u_j\in\widetilde{\mathcal{R}}_z\cup\mathcal{R}_z,|J|<+\infty\},\\ \mathscr{C}_z^{\infty}&:=\{\sum_{j\in J}c_ju_j:c_j\in\mathbb{C},\ u_j\in\widetilde{\mathcal{R}}_z\cup\widehat{\mathcal{R}}_z\cup\mathcal{R}_z,|J|<+\infty\}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

其次，我们引入另一类$z$依赖的傅里叶积分算子，它是$(z-T_P)^{-1}\Pi$展开的主要部分。从现在起，我们固定$X$中的一个开集$D$，它在$D$上具有局部坐标$x=(x_1,\ldots,x_{2n+1})$。

**定义 3.10.** 设 $\psi\in \mathrm{Ph}(\Pi,\Lambda\xi,D)$ (参见定义 2.12) 且 $m\in\mathbb{Z}$。令 $\widehat{S}^{(m)}_{\psi}[z]$表示所有适当支撑的$z$依赖连续算子$E_z:\mathscr{C}^\infty_c(D)\to\mathscr{C}^\infty(X)$ 的集合，其中$E_z$ 的分布核满足

$$E_z(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\frac{\sum_{j=0}^{p}e_j(x,y,t)z^j}{(z-t)^{\ell}}\tau(\varepsilon t)t^{n-m}dt+F(x,y), \tag{3.19}$$

其中 F $\in\mathscr{R}_z$, $\ell\in\mathbb{N}$, p $\in\mathbb{N}_0$, p $\leq\ell$, e$_j$(x, y, t) $\in$ S$^{\ell-j}$ cl (D $\times$ D $\times\mathbb{R}_+$), e$_j$(x, y, t) $\sim\sum^{+\infty}$ h$=$0 e$_{j,h}$(x, y)t$^{\ell-j-h}$ 属于 S$^{\ell-j}_{1\,0}$, (D $\times$ D $\times\mathbb{R}_+$), e$_j$(x, y, t) 和 e$_{j,h}$(x, y) 在 D $\times$ D 上适当支撑，j $=0,1,\ldots,$ p, h $\in\mathbb{N}_0$，且 $\tau$ 如 (3.14) 中所述。

最后，根据[16, 引理4的1], 证明，我们可以推导出以下关键引理，本节将频繁使用该引理。

**引理3.11。** 设 $m\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\Lambda\xi,D)$ 和 $I^{(m)}_{\psi}$,$q$ 是由下式给出的傅里叶积分算子

$$I^{(m)}_{\psi,q}(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}q(x,y,t)dt, \tag{3.20}$$

其中 $q(x,y,t)\sim\sum^{+\infty}j=0\,q^j(x,y)t^{m-j}$ 属于 $S^m_{1,0}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$，且 $q(x,y,t)$ 和 $q^j(x,y)$ 在 $D\times D$ 上适当支撑，$j\in\mathbb{N}_0$。假设 $q_0(x,x)=0$ 并且存在某个$\Phi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\xi,D)$ 使得

$$I^{(m)}_{\psi,q}\equiv\Pi_\Phi I^{(m)}_{\psi,q}\Pi_\Phi, \tag{3.21}$$

那么我们可以找到在 $D\times D$ 上适当支撑的光滑函数 $h(x,y)$ 和 $\rho(x,y)$，满足 $h(x,x)\neq0$ 且 $\rho(x,y)=O(|x-y|^{+\infty})$ 使得

$$q_0(x,y)=h(x,y)\psi(x,y)+\rho(x,y). \tag{3.22}$$

现在我们可以陈述并证明本节的主要结果。

**定理 3.12.** 在定理 1.1的情形下，对每个 $N\in\mathbb{N}_0$，都存在 $B^{(j)}_z\in\widehat{S}^{(j+1)}_{\psi}[z]$,$j=0,1,\ldots,N$、$R^{(N+1)}_z\in\widehat{S}^{(N+1)}_{\psi}[z]$ 以及 $F^{(N+1)}_z\in\mathscr{C}^\infty z$，使得在 $X\times D$

$$(z-T_P)\sum_{j=0}^{N}B^{(j)}_z(x,y)=\Pi(x,y)+R^{(N+1)}_z(x,y)+F^{(N+1)}_z(x,y), \tag{3.23}$$

其中 $\psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\sigma_P(\xi)^{-1}\xi,D)$ 以及

$$\begin{aligned}
B^{(0)}_z(x,y)&=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\frac{b_0(x,y,t)}{z-t}\tau(\varepsilon t)t^n dt,\\
b_0(x,y,t)&\sim\sum_{j=0}^{+\infty}b_{0,j}(x,y)t^{n-j}\in S^0_{1,0}(D\times D\times\mathbb{R}_+),\\
b_{0,0}(x,x)&=\sigma_P(\xi_x)^{-n-1}s^{\varphi}_0(x,x)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{dV}(x)\sigma_P(\xi_x)^{-n-1}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

证明。对于每个平滑算子 F： $\mathscr{E}'(D) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ 和每个 $E_z \in \widehat{S}^{(m)}_{\psi}[z],m \in \mathbb{Z}$，显然有 $FE_z \in \mathscr{C}^\infty_z$。根据这一观察以及注 2.16 中的记号，我们可以分别将 (3.23) 中的 $T_P$ 和 $\Pi$ 替换为 (3.3) 中的 $T^\varphi$ 和 (2.34) 中的 $\Pi_\varphi$。我们先证明 $N = 0$ 时的 (3.23)。设 $\mathfrak{b}^{(0)}(x, y, t) \in S^0_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$ 是一个适当支撑符号，并设 $\mathfrak{b}^{(0)}_0(x, y)$ 是 $\mathfrak{b}^{(0)}(x, y, t)$ 的首项。令

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}^{(0)}_z(x,y) &:= \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} \frac{\mathfrak{b}^{(0)}(x,y,t)}{z - t\sigma_P(\xi_x)} \tau(\varepsilon t) t^n dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} \frac{t\mathfrak{b}^{(0)}(x,y,t)}{z - t\sigma_P(\xi_x)} \tau(\varepsilon t) t^{n-1} dt \in \widehat{S}^{(1)}_{\varphi}[z].\end{aligned} \tag{3.25}$$

符号 $\mathfrak{b}^{(0)}(x,y,t)$ 稍后确定。首先，我们注意到，在振荡积分的意义下，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{B}^{(0)}_z \Pi_\varphi(x,y) \\ &= \int_{D\times\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+} e^{it\varphi(x,w)+i\sigma\varphi(w,y)} \frac{\tau(\varepsilon t)t^n}{z - t\sigma_P(\xi_x)} \mathfrak{b}^{(0)}(x,w,t) s^\varphi(w,y,\sigma) dV(w) d\sigma dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{D\times\overline{\mathbb{R}}_+} e^{it(\varphi(x,w)+i\sigma\varphi(w,y))} \mathfrak{b}^{(0)}(x,w,t) s^\varphi(w,y,t\sigma) dV(w) d\sigma \frac{\tau(\varepsilon t)t^{n+1}}{z - t\sigma_P(\xi_x)} dt.\end{aligned} \tag{3.26}$$

注意，在 $w = x = y$ 和 $\sigma = 1$ 处，复相位函数 $\varphi(x, w) + i\sigma\varphi(w, y)$ 满足 $d_{w,\sigma}(\varphi(x, w) + i\sigma\varphi(w, y)) = 0$，且 $\det \mathrm{Hess}_{w,\sigma}(\varphi(x, w) + i\sigma\varphi(w, y)) \neq 0$。不难看出，$\widetilde{\varphi}(x, \widetilde{w}) + i\widetilde{\sigma}\,\widetilde{\varphi}(\widetilde{w}, y)$ 的临界值可以取为形如（2.49）的形式，其中 $\widetilde{\varphi}$，$\widetilde{w}$ 和 $\widetilde{\sigma}$ 分别是 $\varphi$、$w$ 和$\sigma$的几乎解析延拓。由此观察以及 Melin–Sj¨ostrand 的复驻相位公式，直接可得

$$\mathfrak{B}^{(0)}_z \Pi_\varphi(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} \frac{\tau(\varepsilon t)t^n}{z - t\sigma_P(\xi_x)} \beta^{(0)}_0(x,y,t) dt + F_{1,z}(x,y), \tag{3.27}$$

其中 $F1,_z \in \mathscr{C}^\infty_z$。这里，$\beta^{(0)}_0(x、y、t) \in S^0_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$ 的首项为

$$\beta^{(0)}_0(x,x) = \mathfrak{b}^{(0)}_0(x,x). \tag{3.28}$$

现在，我们来处理这一项

$$(z\Pi_\varphi - T_\varphi)\mathfrak{B}^{(0)}_z \Pi_\varphi. \tag{3.29}$$

令 $a(x, y, t) \in S^{n+1}\,\mathrm{cl}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$、$a_0(x, y) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D)$ 如 (3.4) 中所述。注意到，对于某个 $\alpha \in S^n_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，有 $a(x, y, t) = t\alpha(x, y, t) \bmod S^{-\infty}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，其中 $\alpha(x, y, t) \sim \sum^{+\infty}_{j=0} \alpha_j(x, y)t^{n-j}$ 属于 $S^n_{1,0}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$\alpha(x, y, t)$ 和 $\alpha_j(x, y)$ 在 $D \times D$ 上适当支撑，$j \in \mathbb{N}_0$，且 $\alpha_0(x, x) = a_0(x, x) = s^\varphi_0(x, x)\sigma_P(\xi_x)$。因此可写为

$$\begin{aligned}&(z\Pi_\varphi - T_\varphi)\left(\mathfrak{B}^{(0)}_z \Pi_\varphi\right)(x,y) \\ &= \int_{D\times\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+} e^{i\sigma\varphi(x,w)+it\varphi(w,y)} \left(zs^\varphi(x,w,\sigma) - \sigma\alpha(x,w,\sigma)\right) \\ &\quad \times \frac{\tau(\varepsilon t)t^n}{z - t\sigma_P(\xi_w)} \beta^{(0)}(w,y,t) dV(w) d\sigma dt + F_{2,z}(x,y),\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中 $F2,z \in \mathscr{C}_z^\infty$。我们进行变量替换

$$t = \sigma_P(\xi_w)^{-1}\widehat{t},\ \sigma = \sigma_P(\xi_w)^{-1}\widehat{t}\,\widehat{\sigma} \tag{3.31}$$

对于振荡积分

$$\begin{aligned}&\int_{D\times\overline{\mathbb{R}}_+\times\overline{\mathbb{R}}_+} e^{i\sigma\varphi(x,w)+it\varphi(w,y)}\left(zs^{\varphi}(x,w,\sigma)-\sigma\alpha(x,w,\sigma)\right)\\&\times\frac{\tau(\varepsilon t)t^n}{z-t\sigma_P(\xi_w)}\beta^{(0)}(w,y,t)dV(w)d\sigma dt.\end{aligned} \tag{3.32}$$

为方便起见，后续计算中我们仍使用 $t$ 和 $\sigma$ 代替 $\widehat{t}$ 和 $\widehat{\sigma}$。对 $w$ 和 $\sigma$ 应用 Melin–Sj¨ostrand 复驻相位公式后，式 (3.32) 化为

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\int_{D\times\overline{\mathbb{R}}_+}\exp\left(it\frac{\sigma\varphi(x,w)+\varphi(w,y)}{\sigma_P(\xi_w)}\right)\\&\times\left(zs^{\varphi}\left(x,w,t\frac{\sigma}{\sigma_P(\xi_w)}\right)-\frac{t\sigma}{\sigma_P(\xi_w)}\alpha\left(x,w,t\frac{\sigma}{\sigma_P(\xi_w)}\right)\right)\\&\times\beta^{(0)}\left(w,y,\frac{t}{\sigma_P(\xi_w)}\right)\frac{t}{\sigma_P(\xi_w)^{2+n}}\tau_\varepsilon\left(\frac{t}{\sigma_P(\xi_w)}\right)dV(w)d\sigma\frac{t^n}{z-t}dt\\&=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\left(z\beta^{(0),s^{\varphi}}(x,y,t)-t\beta^{(0),\alpha}(x,y,t)\right)\frac{\widehat{\tau}(\varepsilon t)t^n}{z-t}dt+\int_0^{+\infty}\frac{1}{z-t}\varepsilon_z(x,y,t)dt,\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中 $\psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\sigma_P(\xi)^{-1}\xi,D)$，$\beta^{(0),s^{\varphi}}(x,y,t)$，$\beta^{(0),\alpha}(x,y,t)\in S^0_{\mathrm{cl}}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$，

$$\beta^{(0),s^{\varphi}}(x,y,t)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}\beta_j^{(0),s^{\varphi}}(x,y)t^{-j},\quad \beta^{(0),\alpha}(x,y,t)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}\beta_j^{(0),\alpha}(x,y)t^{-j}$$

在 $S^0_{1,0}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$ 中，$\beta^{(0),s^{\varphi}}(x,y,t)$，$\beta^{(0),\alpha}(x,y,t)$，$\beta^{(0),s^{\varphi}}_j(x,y)$ 和 $\beta^{(0),\alpha}_j(x,y)$ 均适当地支撑在 $D\times D$ 上，其中 $j\in\mathbb{N}_0$；此外，对于某个常数 $c_2>c_1>0$，当 $t\le c_1$ 时，$\widehat{\tau}(t)\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$、$\widehat{\tau}(t)=0$；当 $t\ge c_2$ 时，$\widehat{\tau}(t)=1$。并且，$\varepsilon_z(x,y,t)$ 是关于 $z$ 的一次多项式，其系数属于 $S^{-\infty}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$。因此，我们可以将式 (3.32) 整理为

$$\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\frac{z\beta^{(0),s^{\varphi}}(x,y,t)-t\beta^{(0),\alpha}(x,y,t)}{z-t}\tau(\varepsilon t)t^n dt+F_{3,z}(x,y), \tag{3.34}$$

其中 $F3,z\in\mathscr{C}_z^\infty$。此外，通过计算.....的海森矩阵

$$\frac{\sigma\varphi(x,w)+\varphi(w,y)}{\sigma_P(\xi_w)}$$

利用定理 2.15 以及符号的首项公式

$$s^{\varphi}\left(x,w,t\frac{\sigma}{\sigma_P(\xi_w)}\right)\quad\frac{t\sigma}{\sigma_P(\xi_w)}\alpha\left(x,w,t\frac{\sigma}{\sigma_P(\xi_w)}\right)$$

不难验证

$$\beta_0^{(0),s^{\varphi}}(x,x)=\beta_0^{(0),\alpha}(x,x)=\sigma_P(\xi_x)^{-n-1}\beta_0^{(0)}(x,x)=\sigma_P(\xi_x)^{-n-1}\mathfrak{b}_0^{(0)}(x,x). \tag{3.35}$$

按照之前的约定（2.34），我们记作

$$\Pi_\psi(x,y):=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}s^{\psi}(x,y,t)dt, \tag{3.36}$$

其中 $s^{\psi}$ $(x,\ y,\ t)\ \sim\sum^{+\infty}{}_{j=0}s^{\psi}{}_{j}\ (x,\ y)\ t^{n-j}$ 属于 $S^{n}_{\mathrm{cl}}\ (D\times D\times\mathbb{R}_{+})$，而对于（3.25），现在我们取

$$\mathfrak{b}^{(0)}(x,y,t):=\sigma_{P}(\xi_{x})^{n+1}s_{0}^{\psi}(x,y). \tag{3.37}$$

令 $\tilde{}B_{z}^{(0)}:=\Pi_{\varphi}\mathfrak{B}_{z}^{(0)}\Pi_{\varphi}$。由上述讨论可知，存在 $B_{z}^{(0)}\in\hat{}S_{\psi}^{(1)}[z]$以及 $F_{z}\in\mathscr{C}_{z}^{\infty}$使得 $\tilde{}B_{z}^{(0)}=B_{z}^{(0)}+F_{z}$，$B_{z}^{(0)}$满足（3.24），并且

$$\begin{aligned}&A(z,x,y)\\ :=&(z-T_{\varphi})B_{z}^{(0)}(x,y)-\Pi_{\psi}(x,y)\\ =&\int_{0}^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\frac{(z\beta_{0}^{(0),s^{\varphi}}(x,y)-t\beta_{0}^{(0),\alpha}(x,y))-(z-t)s_{0}^{\psi}(x,y)}{z-t}\tau(\varepsilon t)t^{n}dt\\ &+\widehat{R}_{z}^{(1)}(x,y)+\widehat{\zeta}_{z}(x,y),\end{aligned} \tag{3.38}$$

其中 $\hat{}\mathrm{R}_{z}^{(1)}\in\hat{}\mathrm{S}_{\psi}^{(1)}[\mathrm{z}]$, $\widehat{\zeta}_{z}\in\mathscr{C}_{z}^{\infty}$。我们考虑 A(0, x, y)，并令 A(0) 为适当支撑的连续算子 $\mathrm{A(0)}:\ \mathscr{C}^{\infty}\mathrm{c}\ (\mathrm{D})\ \to\mathscr{C}^{\infty}(\mathrm{X})$，其分布核为 A(0, x, y)。由（3.38）可得 $\Pi_{\varphi}\mathrm{A(0)}\ \Pi_{\varphi}\equiv\mathrm{A(0)}$，并且

$$A(0,x,y)\equiv\int_{0}^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\widehat{a}(x,y,t)dt, \tag{3.39}$$

其中 $\hat{}\mathrm{a(x,\ y,\ t)}\ \in\mathrm{S}^{n}_{\mathrm{cl}}(\mathrm{D}\ \times\mathrm{D}\ \times\mathbb{R}_{+})$，$\hat{}\mathrm{a(x,\ y,\ t)}\ \sim\sum^{+\infty}\mathrm{j}{=}0\ \hat{}\mathrm{a}j\mathrm{(x,\ y)t}^{n-j}$ 属于 $\mathrm{S}^{n}_{1}$, $0(\mathrm{D}\ \times\mathrm{D}\ \times\mathbb{R}_{+})$，$\hat{}\mathrm{a(x,\ y,\ t)}$ 和 $\hat{}\mathrm{a}j\mathrm{(x,\ y)}$ 在 $\mathrm{D}\ \times\mathrm{D}$ 上适当支撑，$\mathrm{j}\ \in\mathbb{N}_{0}$，且

$$\widehat{a}_{0}(x,y)=\beta_{0}^{(0),\alpha}(x,y)-s_{0}^{\psi}(x,y). \tag{3.40}$$

由 (3.35) 和 (3.37)，我们推得 $\hat{}\mathrm{a}_{0}\mathrm{(x,\ x)}\ =0$。因此，我们可以应用引理3.11，找到一些在 $\mathrm{D}\ \times$ D 上适当支撑的光滑函数 $\mathrm{h}_{0}\mathrm{(x,\ y)}$ 和 $\rho_{0}\mathrm{(x,\ y)}$，使得 $\mathrm{h}_{0}\mathrm{(x,\ x)}\ \neq0$ 且 $\rho_{0}\mathrm{(x,\ y)}\ =\mathrm{O}(|\mathrm{x}\ -\mathrm{y}|^{+\infty})$，从而

$$\widehat{a}_{0}(x,y)=h_{0}(x,y)\psi(x,y)+\rho_{0}(x,y). \tag{3.41}$$

这一关系使我们能够对 $t$ 在 (3.38) 中进行分部积分，并且有

$$\begin{aligned}A(z,x,y)=&(z-T_{\varphi})B_{z}^{(0)}(x,y)-\Pi_{\psi}(x,y)\\ =&\int_{0}^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\frac{z\beta_{0}^{(0),s^{\varphi}}(x,y)-zs_{0}^{\psi}(x,y)}{z-t}\tau(\varepsilon t)t^{n}dt+\widetilde{R}_{z}^{(1)}(x,y)+\widetilde{\zeta}_{z}(x,y),\end{aligned} \tag{3.42}$$

其中 $\tilde{}R_{z}^{(1)}\in\hat{}S_{\psi}^{(1)}[z]$, $\widetilde{\zeta}_{z}\in\mathscr{C}_{z}^{\infty}$。接下来，我们考虑

$$B(x,y):=\frac{\partial}{\partial z}A(z,x,y)\Big|_{z=0} \tag{3.43}$$

并设 $B$ 为适当支撑的连续算子 $B:\ \mathscr{C}^{\infty}{}_{c}(D)\ \to\mathscr{C}^{\infty}(X)$ 其分布核为 $B(x,y)$。由 (3.42)，可验证 $\Pi_{\varphi}B\Pi_{\varphi}\equiv B$ 以及

$$B(x,y)\equiv\int_{0}^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\widehat{b}(x,y,t)dt, \tag{3.44}$$

$\hat{}\mathrm{b(x,\ y,\ t)}\ \in\mathrm{S}^{n-1}\,\mathrm{cl}\,(\mathrm{D}\ \times\mathrm{D}\ \times\mathbb{R}_{+})$，$\hat{}\mathrm{b(x,\ y,\ t)}\ \sim\sum^{+\infty}\mathrm{j}{=}0\ \hat{}\mathrm{b}j\mathrm{(x,\ y)t}^{n-1-j}\,\mathrm{in}\,\mathrm{S}^{n-1}_{1\,0}$, $(\mathrm{D}\ \times\mathrm{D}\ \times\mathbb{R}_{+})$，$\hat{}\mathrm{b(x,\ y,\ t)}$ 和 $\hat{}\mathrm{b}j\mathrm{(x,\ y)}$ 在 $\mathrm{D}\ \times\mathrm{D}$ 上适当支撑，$\mathrm{j}\ \in\mathbb{N}_{0}$，并且

$$\widehat{b}_{0}(x,y)=-\beta_{0}^{(0),s^{\psi}}(x,y)+s_{0}^{\psi}(x,y). \tag{3.45}$$

$\widehat{}$由 (3.35) 和 (3.37)，我们推得 $b_0(x,x) = 0$。因此，我们再次可以应用引理3.11，并找到一些光滑函数 $h_1(x,y)$、$\rho_1(x,y)$，它们在 $D \times D$ 上适当支撑，且 $h_1(x,x) \neq 0$ 和 $\rho_1(x,y) = O(|x-y|^{+\infty})$，使得

$$\widehat{b}_0(x,y) = h_1(x,y)\psi(x,y) + \rho_1(x,y). \tag{3.46}$$

该关系使我们能够相对于 $t$ 在（3.42）中进行分部积分，并且可以得出

$$(z - T_P)B_z^{(0)}(x,y) - \Pi_\psi(x,y) = R_z^{(1)}(x,y) + F_z^{(1)}(x,y), \tag{3.47}$$

其中 $R_z^{(1)} \in \widehat{}S_\psi^{(1)}[z]$, $F_z^{(1)} \in \mathscr{C}_z^\infty$。根据讨论开头的观察以及（3.47），我们完成了（3.23）对于 $N = 0$的证明。

现在，假设（3.23）对于 $N \leq N_0$, 成立，其中 $N_0 \in \mathbb{N}_0$。我们将证明（3.23）对于 $N = N_0 + 1$成立。根据归纳假设，我们可以找到 $B_z^{(j)} \in \widehat{}S_\psi^{(j+1)}[z], j = 0, 1, \ldots, N_0,$，其中 $\psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \sigma_P(\xi)^{-1}\xi, D)$，$B_z^{(0)}$满足（3.24），使得

$$(z - T_P)\sum_{j=0}^{N_0} B_z^{(j)}(x,y) - \Pi_\psi(x,y) = R_z^{(N_0+1)}(x,y) + F_z^{(N_0+1)}(x,y), \tag{3.48}$$

$R^{(N_0+1)}{}_z \in \widehat{}S^{(N_0+1)}{}_\psi$ $[z], F^{(N_0+1)}{}_z \in \mathscr{C}_z^\infty$。我们记作

$$R_z^{(N_0+1)}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} \frac{\sum_{j=0}^p r_j(x,y)t^{\ell-j}z^j}{(z-t)^\ell}\tau(\varepsilon t)t^{n-N_0-1}dt + \widehat{R}_z(x,y), \tag{3.49}$$

其中 $\ell, p \in \mathbb{N}_0, p \leq \ell, r^j(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D), r^j(x,y)$ 在 $D \times D$上适当支撑，$j = 0, 1, \ldots, p$，$\widehat{}R_z \in \widehat{}S^{(N_0+2)}{}_\psi$ $[z]$。现在，我们令

$$\mathfrak{B}_z^{(N_0+1)}(x,y) := \int_0^{+\infty} e^{it\varphi(x,y)} \frac{-\sum_{j=0}^p r_j(x,y)t^{\ell-j}z^j\sigma_P(\xi_x)^{(\ell-j)-N_0+n}}{(z - t\sigma_P(\xi_x))^{\ell+1}}\tau(\varepsilon t)t^{n-N_0-1}dt \tag{3.50}$$

并且 $\widetilde{}B^{(N_0+1)}z\,(x,y) := (\Pi_\varphi \circ \mathfrak{B}^{(N_0+1)}z \circ \Pi_\varphi)(x,y)$。我们可以像之前一样重复过程 (3.33)– (3.38)，并推得存在 $B^{(N_0+1)}z\,(x,y) \in \widehat{}S^{(N_0+2)}{}_\psi$ $[z]$ 和 $F_z \in \mathscr{C}_z^\infty$，使得 $\widetilde{}B^{(N_0+1)}z = B^{(N_0+1)}z + F_z$ 并且

$$\begin{aligned}(z - T_\varphi)B_z^{(N_0+1)}(x,y) + R_z^{(N_0+1)}(x,y) \\ = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} \frac{-\sum_{j=0}^{p+1}\widehat{r}_j(x,y)t^{\ell+1-j}z^j + \sum_{j=0}^{p+1}\mathring{r}_j(x,y)t^{\ell+1-j}z^j}{(z-t)^{\ell+1}}\tau(\varepsilon t)t^{n-N_0-1} \\ + \widehat{\gamma}_z(x,y) + \widehat{F}_z(x,y),\end{aligned} \tag{3.51}$$

其中

$$\frac{\sum_{j=0}^p r_j(x,y)t^{\ell-j}z^j}{(z-t)^\ell} = \frac{(z-t)\sum_{j=0}^p r_j(x,y)t^{\ell-j}z^j}{(z-t)^{\ell+1}} = \frac{\sum_{j=0}^{p+1}\mathring{r}_j(x,y)t^{\ell+1-j}z^j}{(z-t)^{\ell+1}}, \tag{3.52}$$

$\widehat{}r^j(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D), \widehat{}r^j(x,x) = \mathring{}r^j(x,x), j = 0, 1, \ldots, p+1, \widehat{\gamma}_z \in \widehat{}S^{(N_0+2)}{}_\psi$ $[z], \widehat{}F_z \in \mathscr{C}^\infty z$。令 $Q(z,x,y) := (z - T\varphi)B^{(N_0+1)}z\,(x,y) + R^{(N_0+1)}z\,(x,y)$。由 (3.48) 及 $B^{(N_0+1)}z$ 的构造可得，对于每个 $h = 0, 1, \ldots, p+1$，都有 $\Pi_\varphi(\frac{\partial^h}{\partial^h}z\,Q(z,x,y)|_{z=0}) \Pi_\varphi \equiv \frac{\partial^h}{\partial}z^h\,Q(z,x,y)|_{z=0}$，因此，按照 (3.47) 的论证稍作修改后，我们可以迭代地

^应用引理3.11 于 (3.51)，并找出一些光滑函数 $h_j(x,y)$ 和 $\widehat{\rho}_j(x,y)$，它们在 $D\times D$ 上具有适当的支集，且满足 $\widehat{h}_j(x,x)\neq 0$ 且 $\widehat{\rho}_j = O(|x-y|^{+\infty}), j=0,1,\dots,p+1$，使得

$$\widehat{r}_j(x,y)-\mathring{r}_j(x,y)=\widehat{h}_j(x,y)\psi(x,y)+\widehat{\rho}_j(x,y),\ j=0,1,\dots,p+1. \tag{3.53}$$

这些关系允许我们关于$t$ 对（3.51）进行分部积分，从而得到

$$(z-T_P)\sum_{j=0}^{N_0+1}B_z^{(j)}(x,y)-\Pi_\psi(x,y)=R_z^{(N_0+2)}(x,y)+F_z^{(N_0+2)}(x,y), \tag{3.54}$$

$R^{(N_0+2)}{}_z\ (x,\ y)\in \widehat{\ }S^{(N_0+2)}{}_\psi\qquad [z], F^{(N_0+2)}{}_z\ (x,\ y)\ \in \mathscr{C}_z^\infty$。因此，我们通过归纳证明了（3.23）。□

4. $\chi_k$（$T_P$）的完整渐近展开

本节的目标是证明定理 1.1。从现在起，我们固定一个数$\epsilon>0$，并令 $\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}$ 为 $[k^{1-\epsilon}$ 的示性函数，$k^{1+\epsilon}]$。我们还固定 X 上的一个坐标图 $(D, x=(x_1,\dots,x_{2n+1}))$，并假设 $\chi$、$\chi_k$、$\widetilde{\chi}_k$ 满足定理 1.1 和备注 3.5 中的条件。

**定义4.1.** 设 $m\in\mathbb{Z}$ 且 $\psi\in \mathrm{Ph}(\Pi,\Lambda\xi,D)$。令 $\mathcal{I}_\psi^{(m)}[k]$ 为所有$k$-依赖连续算子 $H_k:\mathscr{C}_c^\infty(D)\to\mathscr{C}^\infty(X)$ 构成的集合，满足$H_k$ 的分布核满足

$$H_k(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{ikt\psi(x,y)}h(x,y,t,k)dt+G_k, \tag{4.1}$$

其中 $G_k=O(k^{-\infty})$ 在 $X\times D$ 上，$h(x,y,t,k)\sim\sum^{+\infty}{}_{j=0}h_j(x,y,t,k)$ 属于 $S^{n+1-m}\mathrm{loc}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+)$，$h_j(x,y,t,k)\in S^{n+1-m-j}\mathrm{loc}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+)$，$h_j(x,y,t,k_0)\in S^{n-m-j}_{1\,0}$，$(D\times D\times\mathbb{R}_+)$ 对每个固定的 $k_0>0$ 都成立；$h(x,y,t,k)$ 和 $h_j(x,y,t,k)$ 在 $D\times D$ 上适当支撑，$j\in\mathbb{N}_0$。

**引理 4.2**。对于定理 3.12 中的 $m\in\mathbb{N}_0$ 和 $B_z^{(m)}$，我们可以找到某个$\psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\sigma_P(\xi)^{-1}\xi,D)$ 的 $A^{(m)}\ k\in\mathcal{I}_\psi^{(m)}[k]$，使得在 $X\times D$ 上

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}B_z^{(m)}(x,y)dz\wedge d\overline{z}=A_k^{(m)}(x,y), \tag{4.2}$$

*where* $A_k^{(m)}(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{ikt\psi(x,y)}a^{(m)}(x,y,t,k)dt,$

$$a^{(m)}(x,y,t,k)\sim\textstyle\sum_{j=0}^{+\infty}a_j^{(m)}(x,y,t)k^{n+1-m-j}\ \textit{in}\ S^{n+1-m}_{\mathrm{loc}}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+), \tag{4.3}$$

*and*

$$\mathrm{supp}_t\,a^{(m)}(x,y,t,k)\subset\mathrm{supp}\,\chi,\ \mathrm{supp}_t\,a_j^{(m)}(x,y,t)\subset\mathrm{supp}\,\chi,\ j\in\mathbb{N}_0. \tag{4.4}$$

此外，对于 $m=0$，

$$a_0^{(0)}(x,x,t)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{dV}(x)\ \sigma_P(\xi_x)^{-n-1}\ \chi(t)t^n. \tag{4.5}$$

证明。我们记

$$B_z^{(m)}(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}\frac{\sum_{j=0}^p r_j(x,y,t)z^j}{(z-t)^\ell}\tau(\varepsilon t)t^{n-m-1}dt, \tag{4.6}$$

其中 $\ell$、$p \in \mathbb{N}_0$、$p \leq \ell$、$r_j(x,y,t) \sim \sum_{h=0}^{+\infty} r_{j,h}(x,y)t^{\ell-j}$ 属于 $S^{\ell-j}_{1,0}$，$(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$r_j(x,y,t)$ 和 $r_{j,h}(x,y)$ 在 $D \times D$ 上适当支撑，$j = 0、1、\ldots\ldots、p$，且 $h \in \mathbb{N}_0$。根据振荡积分理论，对 $t$ 进行分部积分并应用 Cauchy–Pompeiu 公式，当 $k > 0$ 足够大时，我们有

(4.7)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} B_z^{(m)}(x,y)dz\wedge d\overline{z}\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\left(\int_{\overline{\mathbb{R}}_+} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} e^{it\psi(x,y)}\frac{\sum_{j=0}^{p} r_j(x,y,t)z^j}{(z-t)^\ell}\tau(\varepsilon t)t^{n-m-1}dt\right)dz\wedge d\overline{z}\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{\mathbb{R}}_+}\left(\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}}\frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell-1}\left(e^{it\psi}\tau(\varepsilon t)t^{n-m-1}\sum_{j=0}^{p} r_j(x,y,t)z^j\right)\frac{1}{z-t}dz\wedge d\overline{z}\right)dt\\
=&\int_{\mathbb{R}_+}\chi(k^{-1}t)\sum_{q=0}^{\ell-1} e^{it\psi}\psi^q \widehat{r}_q(x,y,t)dt\\
=&k\int_{\mathbb{R}_+}\chi(t)\sum_{q=0}^{\ell-1} e^{ikt\psi(x,y)}\psi^q \widehat{r}_q(x,y,kt)dt,
\end{aligned}$$

其中 $\widehat{r}_q(x,y,t) \in S^{n-m+q}_{\mathrm{cl}}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$q = 0,1,\ldots,\ell-1$。由（4.7）并再次对 $t$ 进行分部积分，可得引理。□

**引理 4.3**。对于 $m \in \mathbb{N}_0$ 和 $B_z^{(m)}$在定理 3.12中，在 $X \times D$

$$(\Pi - \mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P))\circ\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}B_z^{(m)}dz\wedge d\overline{z} = O(k^{-\infty}). \tag{4.8}$$

证明。由引理4.2，可得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z)B_z^{(m)}dz\wedge d\overline{z} = A_k^{(m)}, \tag{4.9}$$

其中

$$A_k^{(m)}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\psi(x,y)}a^{(m)}(x,y,t,k)dt, \tag{4.10}$$

$\psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \sigma_P(\xi)^{-1}\xi, D)$，$a^{(m)}(x,y,t,k) \sim \sum_{h=0}^{+\infty} a^{(m)}_h(x,y,t)k^{n+1-m-h}$ 属于 $S^{n+1-m}_{\mathrm{loc}}(1; D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$a^{(m)}(x,y,t,k)$ 和 $a^{(m)}_h(x,y,t)$ 在 $D \times D$，$h \in \mathbb{N}_0$ 上适当支撑，并且 $\mathrm{supp}_t\, a^{(m)}(x,y,t,k) \subset \mathrm{supp}\ \chi$。因此，我们只需证明

$$(\Pi - \mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P))\circ A_k^{(m)} = O(k^{-\infty}). \tag{4.11}$$

由定理3.4，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&((\Pi - \mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P))\circ A_k^{(m)})(x,y) = I(x,y) + II(x,y),\\
&I(x,y) = \sum_{\lambda_j > k^{1+\varepsilon}} f_j(x)\int A_k^{(m)}(u,y)\overline{f}_j(u)dV(u),\\
&II(x,y) = \sum_{\lambda_j < k^{1-\varepsilon}} f_j(x)\int A_k^{(m)}(u,y)\overline{f}_j(u)dV(u).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

我们可以假设 $\partial_{x_{2n+1}}\psi \neq 0$ 在$D \times D$ 上。我们有

$$
\begin{aligned}
& II(x,y) \\
&= \sum_{\lambda_j<k^{1-\epsilon}} f_j(x) \int\int e^{ikt\psi(u,y)} a^{(m)}(u,y,t,k)\overline{f}_j(u)dV(u)dt \\
&= \sum_{\lambda_j<k^{1-\epsilon}} f_j(x) \int\int \frac{\partial}{\partial u_{2n+1}}(e^{ikt\psi(u,y)})\frac{1}{ikt\partial_{u_{2n+1}}\psi} a^{(m)}(u,y,t,k)\overline{f}_j(u)dV(u)dt \\
&= \sum_{\lambda_j<k^{1-\varepsilon}} -f_j(x) \int\int e^{ikt\psi(u,y)} \frac{\partial}{\partial u_{2n+1}}\Big(\frac{1}{ikt\partial_{u_{2n+1}}\psi} a^{(m)}(u,y,t,k)\overline{f}_j(u)\Big)dV(u)dt.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

定理 3.2我们得出结论：存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $\ell \in \mathbb{N}_0$，我们可以找到一个常数 $C_\ell > 0$，满足

$$
\|f_j(x)\|_{\mathscr{C}^\ell(X)} \leq C_\ell(1+|\lambda_j|)^{n_0+\ell}, \tag{4.14}
$$

对于所有 $j \in \mathbb{N}$。由（4.13）和（4.14），我们可以多次分部积分，从而推得 $II(x, y) = O(k^{-\infty})$ 在 $X \times D$ 上。

接下来，我们固定一个足够大的数 $N \in \mathbb{N}$，并注意到

$$
I = \sum_{\lambda_j>k^{1+\epsilon}} \lambda_j^{-N} f_j(x) \int ((T_P)^N A_k)(u,y)\overline{f}_j(u)dV(u). \tag{4.15}
$$

根据梅林–舍斯特兰德复驻相位公式，很容易验证我们可以找到某个 $A^{(m-N)}{}_k \in \mathcal{I}_\psi^{(m-N)}[k]$，使得在 $X \times D$ 上

$$
((T_P)^N A_k^{(m)})(x,y) = A_k^{(m-N)}(x,y) + O(k^{-\infty}) \tag{4.16}
$$

其中

$$
A_k^{(m-N)}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\widehat{\psi}(x,y)} r(x,y,t,k)dt, \tag{4.17}
$$

$r(x, y, t, k) \in S^{n+1-m+N}_{\mathrm{loc}}(1; D \times D \times \mathbb{R}_+)$ 在 $D \times D$ 上适当支撑；对于某个区间 $I \Subset \mathbb{R}_+$，当 $t \notin I$ 时，$r(x, y, t, k) = 0$；并且 $\widehat{\psi} \in \mathrm{Ph}(\Pi, \Lambda\xi, D)$。由 (4.14) 和 (4.15) 可知，对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$、每个 $K \Subset D$，都存在一个与 $k$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$
\|I(x,y)\|_{\mathscr{C}^\ell(X\times K)} \leq C \sum_{\lambda_j>k^{1+\varepsilon}} \lambda_j^{-N}\lambda_j^{2n_0+\ell}k^{n+1-m+N+\ell}. \tag{4.18}
$$

由（4.18）可推得，在 $X \times D$ 上有 $I = O(k^{-\infty})$。 □

**定理 4.4。** 对于定理 3.12 中的 $m \in \mathbb{N}_0$ 和 $B_z^{(m)}$，我们可以找到某个 $\mathscr{B}^{(m)}{}_k \in \mathcal{I}_\psi^{(m)}[k]$，使得 $\psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \sigma_P(\xi)^{-1}\xi, D)$，并且在 $X \times D$ 上

$$
\Big(\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P) \circ \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z)B_z^{(m)}dz \wedge d\overline{z}\Big)(x,y) = \mathscr{B}_k^{(m)}(x,y) + O(k^{-\infty}), \tag{4.19}
$$

其中 $\mathscr{B}^{(m)}{}_k(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\psi(x,y)} b^{(m)}(x,y,t,k)dt,$

$$
b^{(m)}(x,y,t,k) \sim \textstyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_j^{(m)}(x,y,t)k^{n+1-m-j} \text{ in } S^{n+1-m}_{\mathrm{loc}}(1; D\times D\times\mathbb{R}_+), \tag{4.20}
$$

$$
\mathrm{supp}_t\, b^{(m)}(x,y,t,k) \subset \mathrm{supp}\,\chi,\ \mathrm{supp}_t\, b_j^{(m)}(x,y,t) \subset \mathrm{supp}\,\chi,\ j \in \mathbb{N}_0. \tag{4.21}
$$

此外，对于 $m = 0$,

$$b_0^{(0)}(x,x,t) = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \frac{dV_\xi}{dV}(x)\, \sigma_P(\xi_x)^{-n-1}\, \chi(t) t^n. \tag{4.22}$$

证明。 由引理 4.3，我们在 $X \times D$

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{[k^{1-\varepsilon}, k^{1+\varepsilon}]}(T_P) \circ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} B_z^{(m)}(x,y) dz \wedge d\overline{z} \\ =&\Pi \circ \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}}(z) B_z^{(m)}(x,y) dz \wedge d\overline{z} + O(k^{-\infty}). \end{aligned} \tag{4.23}$$

由定理 2.10、引理 4.2、(4.23) 以及使用梅林–斯约斯特兰德的复驻相公式，¨我们得到 (4.19)。计算很直接，我们省略细节。 □

**引理 4.5**。 对于 $A_z \in \widehat{S}_\psi^{(N)}[z], N \in \mathbb{N}$，以及固定数 $\lambda \in [k^{1-\epsilon}, k^{1+\epsilon}]$，其中 $k > 0$ 足够大，我们定义

$$A_{k,\lambda}(x,y) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-\lambda} A_z(x,y) dz \wedge d\overline{z}. \tag{4.24}$$

那么，对于任意足够小的 $\delta > 0$、任意满足 $n - N + \nu + 1 < 0$ 的 $\nu \in \mathbb{N}$、任意 $K \Subset D$ 以及任意足够大的 $k > 0$，都存在一个与 $k$ 和 $\lambda$ 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\|A_{k,\lambda}(x,y)\|_{\mathscr{C}^\nu(X\times K)} \leq C k^{1+\delta}. \tag{4.25}$$

证明。令

$$A_z(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} \frac{\sum_{j=0}^p r_j(x,y,t) z^j}{(z-t)^\ell} t^{n-N} \tau(\varepsilon t) dt, \tag{4.26}$$

其中 p, $\ell \in \mathbb{N}_0$, p $\leq \ell$, r$_j$(x, y, t) $\in$ S$^{\ell-j}$ cl (D $\times$ D $\times \mathbb{R}_+$), r$_j$(x, y, t) 在 D $\times$ D 上适当支撑，j $= 0, 1, \ldots,$ p。为简便起见，我们假设 r$_j$(x, y, t)z$^j$ $=$ r$_j$(x, y)t$^{\ell-j}$z$^j$, r$_j$ $\in$ $\mathscr{C}^\infty$ (D $\times$ D), j $= 0, 1, \ldots,$ p。利用展开式 t$^{\ell-j}$ $=$(z $-$(z $-$t))$^{\ell-j}$，不失一般性地，设

$$A_z(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} \frac{r(x,y) z^\ell}{(z-t)^\ell} t^{n-N} \tau(\varepsilon t) dt, \tag{4.27}$$

$r(x,y) \in \mathscr{C}^\infty(D \times D)$。固定一个足够小的数 $\delta_0 > 0$。我们有

$$\begin{aligned} &A_{k,\lambda}(x,y) = I(x,y) + II(x,y), \\ &I(x,y) = \int_0^{+\infty} \int_{|\operatorname{Im} z| \leq k^{1-\delta_0}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} \frac{r(x,y) z^\ell}{(z-\lambda)(z-t)^\ell} e^{it\psi(x,y)} \tau(\varepsilon t) t^{n-N} dt \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i}, \\ &II(x,y) = \int_0^{+\infty} \int_{|\operatorname{Im} z| \geq k^{1-\delta_0}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} \frac{r(x,y) z^\ell}{(z-\lambda)(z-t)^\ell} e^{it\psi(x,y)} \tau(\varepsilon t) t^{n-N} dt \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

由 $|\frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial z}(z)| \leq C_Q |\operatorname{Im} z|^Q$，对每个 $Q \in \mathbb{N}$，其中 $C_Q > 0$ 是一个与 $k$ 无关的常数，不难验证 $I = O(k^{-\infty})$。

我们只需证明 $II$ 满足（4.25）。为简单起见，我们仅对$\nu = 0$证明（4.25）。对于一般的 $\nu \in \mathbb{N}$ 其中 $n - N + \nu + 1 < 0$，证明类似。我们有

$$
\begin{aligned}
&|II(x,y)| \\
\leq &\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{|\mathrm{Im}\, z|\geq k^{1-\delta_0}} \left|\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}\right| \frac{|z^\ell|}{|(z-\lambda)(z-t)^\ell|}|r(x,y)|\tau(\varepsilon t)t^{n-N}idtdz\wedge d\overline{z} \\
\leq &C\int_0^{+\infty}\int_{|\mathrm{Im}\, z|\geq k^{1-\delta_0},|z|\leq \widehat{C}k} \frac{|z^\ell|}{|\mathrm{Im}\, z|^{\ell+1}}|r(x,y)|\tau(\varepsilon t)t^{n-N}idtdz\wedge d\overline{z},
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

其中 $C$，$\widehat{C} > 0$ 是与$k$ 和 $\lambda$无关的常数。设$K \Subset D$。由（4.29），我们有

$$
|II(x,y)| \leq C_K\frac{k^{\ell+2}}{(k^{1-\delta_0})^{\ell+1}}\int t^{n-N}\tau(\varepsilon t)dt \leq \widehat{C}_K k^{1+(\ell+1)\delta_0},
\tag{4.30}
$$

其中 $C_K$，$C_K > 0$ 是与 $k$ 及 $\lambda$ 无关的常数。引理得证。□

**定理4.6**。在定理1.1的情形下，对于任意充分大的 $Q \in \mathbb{N}$ 以及 $\nu \in \mathbb{N}$，存在一个 $N_0 \in \mathbb{N}$，使得对每个 $N \in \mathbb{N}$，$N \geq N_0$，均有如下性质：对于 $A_z \in \widehat{S}^{(N)}_\psi[z]$和

$$
\widehat{A}_k := \mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}A_z\, dz\wedge d\overline{z},
\tag{4.31}
$$

于是，对每个 $K \Subset D$ 以及充分大的 $k > 0$，存在一个与 $k$ 无关的常数 $C_K > 0$，使得

$$
\|\widehat{A}_k(x,y)\|_{\mathscr{C}^\nu(X\times K)} \leq C_K k^{-Q}.
\tag{4.32}
$$

证明。我们有

$$
\widehat{A}_k(x,y) = \sum_{\lambda_j\in[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]} f_j(x)\int A_{k,\lambda_j}(u,y)\overline{f}_j(u)dV(u),
\tag{4.33}
$$

其中$A_{k,\lambda_j}$ 如式（4.24）所示。对任意$M \in \mathbb{N}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\widehat{A}_k(x,y) &= \sum_{\lambda_j\in[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]} \lambda_j^{-M}f_j(x)\int A_{k,\lambda_j}(u,y)\overline{((T_P)^M f_j)}(u)dV(u) \\
&= \sum_{\lambda_j\in[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]} \lambda_j^{-M}f_j(x)\int ((T_P)^M A_{k,\lambda_j})(u,y)\overline{f}_j(u)dV(u).
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

由 [4, 命题 12。1], 当$k$ 充分大时，我们有$\sum_{\lambda_j\leq k_{1+\epsilon}} 1 \leq k^{(1+\epsilon)(n+1)}$。将该估计与引理4.5、（4.34）以及 $\lambda^{-M}{}_j \leq k^{-M(1-\epsilon)}$结合起来，即得本定理。□

设$s(x,y,t) \in S^{-\infty}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$ 在$D\times D$上适当支撑。设$F$ 为由该 Schwartz 核确定的算子

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}s(x,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\tau(\varepsilon t)dtdz\wedge d\overline{z},
\tag{4.35}
$$

其中 $M_1$,$M_2 \in \mathbb{N}_0$，且

$$
R_k(x,y) := \Big(\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ F\Big)(x,y).
\tag{4.36}
$$

我们有

$$\begin{aligned} &R_k(x,y)\\ &=\sum_{\lambda_j\in[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}\frac{f_j(x)}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-\lambda_j)^{-1}s(u,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\tau(\varepsilon t)\overline{f}_j(u)\\ &\qquad\times dV(u)dtdz\wedge d\overline{z}\\ &=\sum_{\lambda_j\in[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}\lambda_j^{-M}\frac{f_j(x)}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\int_0^{+\infty}\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-\lambda_j)^{-1}\big((T_P)^Ms\big)(u,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\\ &\qquad\times\tau(\varepsilon t)\overline{f}_j(u)dV(u)dtdz\wedge d\overline{z}, \end{aligned}\tag{4.37}$$

对每个 $M\in\mathbb{N}$。由（4.37）以及 $(T_P)^Ms\in S^{-\infty}(X\times D\times\mathbb{R}_+)$，我们可推出 $R_k=O(k^{-\infty})$ 在 $X\times D$ 上成立。综上，我们得到如下结论。

**定理 4.7**。在定理 1.1 的情形下，对于给定的 $F_z\in\mathcal{R}_z$，在 $X\times D$ 上有

$$\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}F_z\,dz\wedge d\overline{z}=O(k^{-\infty}).\tag{4.38}$$

我们可以稍作修改，重复定理 4.7 的证明，从而推出如下结论。

**定理 4.8**。在定理 1.1 的情形下，对于给定的 $F_z\in\mathcal{R}_z$，在 $X\times D$ 上有

$$\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}F_z\,dz\wedge d\overline{z}=O(k^{-\infty}).\tag{4.39}$$

**定理 4.9**。在定理 1.1 的情形下，对于给定的 $F_z\in\mathcal{R}_z$，在 $X\times D$ 上有

$$\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}F_z\,dz\wedge d\overline{z}=O(k^{-\infty}).\tag{4.40}$$

证明。写

$$F_z(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{it\psi(x,y)}a(x,y,t)\frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}}\tau(\varepsilon t)dt,\tag{4.41}$$

其中 $a(x,y,t)\in S^m_{\mathrm{cl}}(D\times D\times\mathbb{R}_+)$ 在 $D\times D$ 上适当支撑，$a(x,y,t)=O(|x-y|^{+\infty})$，$M_1,M_2\in\mathbb{N}_0$。取 $p\in D$，并假设 $\partial^{\partial\psi}y_{2n+1}(p,p)\neq 0$。由 Malgrange 准备定理可得

$$\psi(x,y)=(y_{2n+1}+\widehat{\psi}(x,y'))g(x,y)\tag{4.42}$$

在 $(p,p)$ 附近，其中 $\widehat{\psi}$，$g\in\mathscr{C}^\infty$，$y'=(y_1,\ldots,y_{2n})$。当 $D$ 足够小时，我们可以假设式（4.42）在 $D\times D$ 上成立，并且根据式（2.48）我们还有

$$\operatorname{Im}\psi(x,y)\geq C|x'-y'|^2\ \text{ on } D\times D,\tag{4.43}$$

其中 $C>0$ 是一个常数。令 $\widetilde{a}$ 为关于 $y$ 变量的 $a$ 的几乎解析延拓。对于每个 $N\in\mathbb{N}$，通过在 $y_{2n+1}=-\widehat{\psi}(x,y')$ 处进行泰勒展开，我们得到

$$\begin{aligned} a(x,y,t)&=\widetilde{a}(x,y,t)\\ &=\sum_{j=0}^n b_j(x,y',t)(y_{2n+1}+\widehat{\psi}(x,y'))^j+(y_{2n+1}+\widehat{\psi}(x,y'))^{N+1}r(x,y,t), \end{aligned}\tag{4.44}$$

其中 $b_j(x, y', t) \in S^m_{cl}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$r(x, y, t) \in S^m_{cl}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$，$j = 0, 1, \ldots, N$。由于 $a(x, y, t) = O(|x - y|^{+\infty})$，我们有

$$b_j(x, y', t) = O(|x' - y'|^{+\infty}), \quad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{4.45}$$

令 $s(x, y, t) := e^{it\psi(x,y)} \sum_{j=0}^{N} (y_{2n+1} + \widehat{\psi}(x, y'))^j b_j(x, y', t)$。由 (4.43) 和 (4.45)，可验证 $s(x, y, t) \in S^{-\infty}(D \times D \times \mathbb{R}_+)$。由此观察及定理 4.7，我们得出在 $X \times D$ 上

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon}, k^{1+\epsilon}]}(T_P) \circ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} \\ &\Big( \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} \sum_{j=0}^{N} ((y_{2n+1} + \widehat{\psi}(x, y'))^j b_j(x, y', t) \frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}} \tau(\varepsilon t) dt \Big) dz \wedge d\overline{z} \\ &= O(k^{-\infty}) \end{aligned} \tag{4.46}$$

通过对$t$进行分部积分，我们可以证明

$$\begin{aligned} \zeta_z := \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} (y_{2n+1} + \widehat{\psi}(x, y'))^{N+1} r(x, y, t) \frac{(1+z)^{M_2}}{(z-t)^{M_1}} \tau(\varepsilon t) dt \\ = \int_0^{+\infty} e^{it\psi(x,y)} r(x, y, z, t) \widehat{\tau}_\varepsilon(t) dt, \end{aligned} \tag{4.47}$$

其中 $r(x, y, z, t) \in \widehat{\ } S^{M_2+}{}_{m\psi}{}^{-}{}^{1-}{}_{[M(N+1)\, z]}$，$\widehat{\tau}_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$，$\widehat{\tau}_\varepsilon = 1$ 在 supp $\tau_\varepsilon$ 附近，且 $\widehat{\tau} = 0$ 在 0 附近。令

$$\widehat{\zeta}_k := \mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon}, k^{1+\epsilon}]}(T_P) \circ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} \zeta_z \, dz \wedge d\overline{z}. \tag{4.48}$$

固定 $Q$，$\nu \in \mathbb{N}$。由定理 4.6，可知我们可以取足够大的 $N$，使得对于每个 $K \Subset D$，都存在一个常数 $C_K > 0$，它与 $k$ 无关，使得

$$\|\widehat{\zeta}_k(x, y)\|_{\mathscr{C}^\nu(X \times K)} \leq C_K k^{-Q}. \tag{4.49}$$

由（4.46）和（4.49，定理得证。 □

定理4.7、定理4.9 和定理4.8 可得如下结论。

**定理4.10.** 在定理*1.1* 的情形下，对于给定的 $F_z \in \mathscr{C}^\infty_z$在 $X$ 上 $\times D$,

$$\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon}, k^{1+\epsilon}]}(T_P) \circ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} F_z \, dz \wedge d\overline{z} = O(k^{-\infty}). \tag{4.50}$$

定理1.1现由下面两个定理推出。

**定理4.11.** 在定理*1.1*的情形下，我们可以找到某个 $\widehat{\mathcal{A}}_k \in \mathcal{I}^{(0)}_\psi[k]$ 使得在 $X$ 上 $\times D$

$$\chi_k(T_P)(x, y) = \widehat{\mathcal{A}}_k(x, y) + O\left(k^{-\infty}\right) \tag{4.51}$$

其中

$$\psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \sigma_P(\xi)^{-1}\xi, D), \tag{4.52}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_k(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\psi(x,y)} A(x, y, t, k) dt, \tag{4.53}$$

$$
\begin{aligned}
&A(x,y,t,k)\in S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+),\\
&A(x,y,t,k)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}A_j(x,y,t)k^{n+1-j}\ \text{in}\ S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+),\\
&A_j(x,y,t)\in\mathscr{C}^\infty(D\times D\times\mathbb{R}_+),\ \ j=0,1,\ldots,\\
&A_0(x,x,t)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{dV}(x)\,\sigma_P(\xi_x)^{-n-1}\,\chi(t)t^n\not\equiv 0,\\
&\operatorname{supp}_t A(x,y,t,k)\subset\operatorname{supp}_t\chi,\ \ \operatorname{supp}_t A_j(x,y,t)\subset\operatorname{supp}\chi,\ \ j=0,1,\ldots.
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

证明。 取足够大的 $N\in\mathbb{N}$。由定理 3.12 以及 Helffer–Sj¨ostrand 公式可知，当 $k$ 充分大且在 $X\times D$ 上，有

$$
\begin{aligned}
&\chi_k(T_P)\\
=&\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}\Pi\,dz\wedge d\overline{z}\\
=&\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}\sum_{j=0}^{N}B_z^{(j)}dz\wedge d\overline{z}\\
&-\mathbb{1}_{[k^{1-\epsilon},k^{1+\epsilon}]}(T_P)\circ\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\partial\widetilde{\chi}_k}{\partial\overline{z}}(z-T_P)^{-1}(R_z^{(N+1)}+F_z^{(N+1)})dz\wedge d\overline{z},
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

其中 $R_z^{(N+1)}\in\widehat{\ }S^{(N+1)}_{\psi}[z]$ 且 $F_z^{(N+1)}\in\mathscr{C}^\infty_z$。对于定理 4.4 中的 $b^{(j)}(x,y,t,k)$，$j=0,1,\ldots$，取 $A(x,y,t,k)\sim\sum^{+\infty}j=0\,b^{(j)}(x,y,t,k)\in S^{n+1}\,\mathrm{loc}\,(1;D\times D\times\mathbb{R}_+)$。显然，$\operatorname{supp}_t A(x,y,t,k)\subset\operatorname{supp}\chi$。此外，由 (4.55)、定理 4.4、定理4.6 和定理4.10 可得本定理。□

**定理 4.12**。 在定理 1.1 的情形下，对于任意 $\Psi\in\mathrm{Ph}(\Pi,\ \Lambda\xi,\ D)$，我们可以找到某个 $\widehat{\mathcal{B}}_k\in\mathcal{I}^{(0)}_\Psi[k]$，使得在 $X\times D$ 上

$$
\chi_k(T_P)(x,y)=\widehat{\mathcal{B}}_k(x,y)+O\left(k^{-\infty}\right),
\tag{4.56}
$$

其中

$$
\widehat{\mathcal{B}}_k(x,y)=\int_0^{+\infty}e^{ikt\Psi(x,y)}B(x,y,t,k)dt,
\tag{4.57}
$$

$$
\begin{aligned}
&B(x,y,t,k)\in S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+),\\
&B(x,y,t,k)\sim\sum_{j=0}^{+\infty}B_j(x,y,t)k^{n+1-j}\ \text{in}\ S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;D\times D\times\mathbb{R}_+),\\
&B_j(x,y,t)\in\mathscr{C}^\infty(D\times D\times\mathbb{R}_+),\ j=0,1,2,\ldots,\\
&B_0(x,x,t)=\frac{1}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{dV}(x)\,\Lambda(x)^{n+1}\,\chi\left(\sigma_P(\xi_x)\Lambda(x)t\right)t^n\not\equiv 0,
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

并且对于某个紧区间 $I\Subset\mathbb{R}_+$，

$$
\operatorname{supp}_t B(x,y,t,k),\ \operatorname{supp}_t B_j(x,y,t)\subset I,\ \ j=0,1,\ldots.
\tag{4.59}
$$

此外，对于任意 $\tau_1,\ \tau_2\in\mathscr{C}^\infty(X)$，只要 $\operatorname{supp}(\tau_1)\cap\operatorname{supp}(\tau_2)=\emptyset$，我们有

$$
\tau_1\chi_k(T_P)\tau_2=O\left(k^{-\infty}\right).
\tag{4.60}
$$

证明。 我们首先证明（4.60）。不妨设 $\operatorname{supp}\tau_2\subset D$ 且 $\operatorname{supp}\ \tau_1\cap D=\emptyset$。由于（4.51）在 $X\times D$ 上成立，并且$A(x,y,t,k)$ 在（4.53）中是$D\times D$上的适当支撑，容易看出 $\tau_1\chi_k(T_P)\tau_2=O(k^{-\infty})$。

设 $\Psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \Lambda\xi, \mathrm{D})$，并令 $\psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \sigma_P(\xi)^{-1}\xi, \mathrm{D})$ 如定理4.11中所述。由 [26,定理2.4], 可找到 $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}, \mathrm{k}) \in \mathrm{S}^{n+1}\,\mathrm{loc}\,(1; \mathrm{D} \times \mathrm{D} \times \mathbb{R}_+)$，其中 $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{t}, \mathrm{k})$ 满足（4.59），使得

$$\int_0^{+\infty} e^{ikt\Psi(x,y)} B(x,y,t,k)dt = \int_0^{+\infty} e^{ikt\psi(x,y)} A(x,y,t,k)dt + O(k^{-\infty}) \tag{4.61}$$

在 $D \times D$中，其中 $A(x,y,t,k)$ 如定理 4.11所述。此外，我们可以重复 [26, 引理 6 的证明8]，并得出 $B$ 的首项满足（4.58）中的最后一个等式。由此观察及（4.61），定理得证。□

现在，我们在更一般的假设下推广定理 1.1，即假设 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，而非 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$。

**定理 4.13**。在定理 *1.1* 的情形下，考虑 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$。那么，对于任意 $\Psi \in \mathrm{Ph}(\Pi, \Lambda\xi, D)$，存在 $\widehat{\mathcal{B}}_k \in \mathcal{I}_\Psi^{(0)}[k]$，使得在 $X \times D$

$$\Pi \circ \chi_k(T_P)(x,y) = \widehat{\mathcal{B}}_k(x,y) + \widehat{\mathcal{R}}_k(x,y), \tag{4.62}$$

其中，对于任意 $\delta > 0$ 和 $\ell \in \mathbb{N}_0$,

$$|\widehat{R}_k(x,y)|_{\mathscr{C}^\ell(X\times D)} = O(k^{\delta+\ell}); \tag{4.63}$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\Psi(x,y)} \tau(\varepsilon kt) \widehat{B}(x,y,t,k)dt, \tag{4.64}$$

$$\widehat{B}(x,y,t,k) \in S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1; D \times D \times \mathbb{R}_+),$$

$$\widehat{B}(x,y,t,k) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{B}_j(x,y,t) k^{n+1-j} \ in\ S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1; D \times D \times \mathbb{R}_+), \tag{4.65}$$

$$\widehat{B}_0(x,x,t) = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \frac{dV_\xi}{dV}(x)\, \Lambda(x)^{n+1}\, \chi\left(\sigma_P(\xi_x)\Lambda(x)t\right) t^n \not\equiv 0,$$

其中 $\tau$ 与(3.14)中相同。此外，对于任意满足$\mathrm{supp}(\tau_1) \cap \mathrm{supp}(\tau_2) = \emptyset$的 $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{C}^\infty(X)$，以及任意 $\delta > 0$ 和 $\ell \in \mathbb{N}_0$，我们有

$$|\tau_1 \chi_k(T_P) \tau_2(x,y)|_{\mathscr{C}^\ell(X\times X)} = O\left(k^{\delta+\ell}\right). \tag{4.66}$$

证明。 我们注意到

$$\Pi \circ \chi_k(T_P) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \widetilde{\chi}_k}{\partial \overline{z}} (z - T_P)^{-1} \Pi \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i}. \tag{4.67}$$

因此，我们可以像之前一样应用 $(z - T_P)^{-1}\Pi$ 的展开来研究 $\Pi \circ \chi_k(T_P)$，这里我们仅说明如何修改定理 4.11 的证明以得到我们的定理。

首先，对于任意 $\delta > 0$，我们有如下分解

$$\Pi \circ \chi_k(T_P)(x,y) = \sum_{\lambda_j < k^\delta} \chi_k(\lambda_j) f_j(x) \overline{f}_j(y) + \sum_{\lambda_j \geq k^\delta} \chi_k(\lambda_j) f_j(x) \overline{f}_j(y), \tag{4.68}$$

其中 $\{\mathrm{f}_j\}_{=1}^{+\infty}$ j 是光滑的正交归一 CR 特征函数。对于 (4.68) 右侧的第二个求和，除了 (4.7) 外，类似于 (4.34) 的论证在 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 的情形下仍然适用。当 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 时，诸如 $\chi(\mathrm{t})\tau(\varepsilon\mathrm{kt})$ 这样的项在 k 充分大时总是等于 $\chi(\mathrm{t})$。但当 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 时，即使 k 充分大，我们也不总能将 $\tau(\varepsilon\mathrm{kt})\chi(\mathrm{t})$ 化简为 $\chi(\mathrm{t})$。因此，我们只能推出在 $\mathrm{X} \times \mathrm{D}$ 上，

$$\sum_{\lambda_j \geq k^\delta} \chi_k(\lambda_j) f_j(x) \overline{f}_j(y) = \widehat{B}_k(x,y) + O(k^{-\infty})$$

结合（4.64）和（4.65）。对于（4.68）右侧的第一个求和，我们只能应用 $\sum_{\lambda_j<k_\delta} 1 \leq k^{(n+1)\delta}$ 中的估计命题 12。1] 和（3.7），从而得知该项的$\mathscr{C}^\ell$-范数有界于 $O(k^{(n+1)\delta+\ell})$。结合以上论证即可得到结论。□

我们用两个有用的性质结束本节，稍后将用到它们。

**引理4.14.** 在定理 *1.1* 的情形下，我们在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中有，当 $k \to +\infty$，(4.69)

$$d_x\chi_k(T_P)(x,y)|_{y=x} = i\xi(x)\frac{k^{n+2}}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{dV}(x)\sigma_P(\xi_x)^{-n-2}\int_0^{+\infty} t^{n+1}\chi(t)dt + O(k^{n+1}),$$

*and*

$$(d_x\otimes d_y)\,\chi_k(T_P)(x,y)|_{y=x} = \xi(x)\otimes\xi(x)\frac{k^{n+3}}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{dV}(x)\sigma_P(\xi_x)^{-n-3}\int_0^{+\infty} t^{n+2}\chi(t)dt + O(k^{n+2}). \tag{4.70}$$

证明。 根据定理 1.1 中的记号和结果，可得

$$\begin{aligned} &d_x\chi_k(T_P)(x,y)\\ &= \int_0^{+\infty} ikt(d_x\varphi(x,y))e^{ikt\varphi(x,y)}A(x,y,t,k)dt \mod O\left(k^{-\infty}\right)\\ &+ \int_0^{+\infty} e^{ikt\varphi(x,y)}(d_xA)(x,y,t,k)dt \mod O\left(k^{-\infty}\right). \end{aligned} \tag{4.71}$$

由于 $(d_xA)(x,y,t,k)|_{y=x} = O(k^{n+1})$、$d_x\varphi(x,y)|_{y=x} = \xi(x)$ 以及 $A_0(x,x,t,k)$ 的公式，通过变量替换 $t \mapsto \sigma_P(\xi_x)^{-1}t$，陈述的第一部分得证。类似地，我们得到

$$\begin{aligned} &(d_x\otimes d_y)\,\chi_k(T_P)(x,y)\\ &= \int_0^{+\infty} -k^2t^2(d_x\varphi(x,y))\otimes(d_y\varphi(x,y))e^{ikt\varphi(x,y)}A(x,y,t,k)dt + R(x,y,k) \end{aligned} \tag{4.72}$$

其中 $R(x,x,k) = O(k^{n+2})$。由于 $d_y\varphi(x,y)|_{y=x} = -d_x\varphi(x,y)|_{y=x}$，并且再次通过变量替换 $t \mapsto \sigma_P(\xi_x)^{-1}t$，陈述的第二部分也得证。□

引理*4.15.* 在定理 *1.1* 的情形下，设 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ 是 $T_P = \Pi P\Pi$ 的正特征值，并具有相应的标准正交系特征函数 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_b^0(X)$，满足 $T_Pf_j = \lambda_jf_j$、$(f_j,f_j) = 1$ 以及 $(f_j,f_\ell) = 0$ 对所有 $\ell$、$j \in \mathbb{N}$ 且 $j \neq \ell$ 成立。考虑由 $g_{k,m}: X \to \mathbb{R}$ 定义的函数 $g_{k,m}(x) = \sum_{j\geq1}\lambda_j^m\chi\left(k^{-1}\lambda_j\right)|f_j(x)|^2$，其中 $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ 且 $m \in \mathbb{N}$。则在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中，

$$g_{k,m}(x) = \frac{k^{n+1+m}}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+1}dV}(x)\int_{\mathbb{R}} t^{n+m}\chi(t)dt + O(k^{n+m}). \tag{4.73}$$

证明。 令 $\tau(t) = t^m\chi(t)$。那么 $\tau \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 且 $g_{k,m}(x) = k^m\tau_k(T_P)(x,x)$。因此，结论立即由定理 4.11 得出。□

## 5. 应用与例子

**5.1. 迹公式、缩放谱测度与 Weyl 定律估计。** 我们首先证明推论 1.2。

推论 1.2的证明。 我们注意到，(1.18) 可由 (1.16) 和 (1.17) 直接推出。对于 (1.16)，在任意坐标图 $(D,x)$ 上，由于 $\varphi(x,x) = 0$,

$$\chi_k(T_P)(x,x) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{A}_j(x)k^{n+1-j} \text{ in } S^{n+1}_{\text{loc}}(1;D), \tag{5.1}$$

其中 $\mathcal{A}_j \in \mathscr{C}^\infty(D)$ 且

$$\mathcal{A}_j(x) = \int_0^{+\infty} A_j(x,x,t)dt, \tag{5.2}$$

其中 A*j*(x, x, t) 如 (1.10) 所示。设 (D′, y) 是另一个坐标图，满足 D ∩ D′ ≠ ∅，且 $\chi_k$ ($T_P$)(y, y) ∼ $\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{B}_j$(y)$k^{n+1-j}$ 属于 $S^{n+1}$ loc (1; D′)，其中 $\mathcal{B}_j \in \mathscr{C}^\infty$(D′)。那么在 D ∩ D′ 上,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{A}_j(\cdot)k^{n+1-j} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{B}_j(\cdot)k^{n+1-j} \text{ in } S^{n+1}_{\text{loc}}(1;D\cap D'). \tag{5.3}$$

关系 (5.3) 表明 $\mathcal{A}_j = \mathcal{B}_j$ 在 $D\cap D'$ 因此存在全局函数$\mathcal{A}_j \in \mathscr{C}^\infty(X)$，$j \in \mathbb{N}_0$，使得 (1.16) 成立。□

定理 1.3 的证明。缩放谱测度 $\mu_k$ 已在 (1.22) 中定义。我们可以选取 $H^0_b$(X) ∩ $\mathscr{C}^\infty$(X) 中关于 $T_P$ 的正特征值 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ 的标准正交系特征函数 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，即对所有 $\ell$、j ∈ ℕ，均有 $T_P f_j = \lambda_j f_j$，$(f_j|f_\ell) = \delta_{j\ell}$。给定 $\chi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}_+)$，$\chi_k$(T_P) 的核由 (1.5) 给出，因此

$$\int_X \chi_k(T_P)(x,x)dV = \int_X \sum_{j=1}^{+\infty} \chi(k^{-1}\lambda_j)|f_j(x)|^2 dV = \sum_{j=1}^{+\infty} \chi(k^{-1}\lambda_j) = k^{n+1}\langle \mu_k, \chi\rangle. \tag{5.4}$$

定理1.3的结论现在由推论1.2 推出，因为对于$k \to +\infty$,

$$\langle \mu_k, \chi\rangle = \frac{1}{k^{n+1}}\int_X \chi_k(T_P)(x,x)dV \longrightarrow \frac{1}{2\pi^{n+1}}\int_X \frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi_x)^{n+1}}\int_{\mathbb{R}_+}\chi(t)t^n dt\,. \tag{5.5}$$

□

**注 5.1**。注意到，定理 4.13 和（1.19）立即给出 Weyl 定律的一种弱形式。也就是说，在定理 1.1的假设下，Toeplitz 算子 $T_P = \Pi P \Pi$ 的谱计数函数 $N(k) = \#\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j \le k\}$ 具有如下渐近行为

$$N(k) = \frac{\text{vol}(\Sigma_1)}{2\pi^{n+1}}k^{n+1} + o(k^{n+1}), \quad k \to +\infty, \tag{5.6}$$

其中 vol(Σ1) 是子集 $\Sigma_1 \subset \Sigma$ 中 $\sigma_P \le 1$ 的辛体积。与[4, 定理 13。1] 相比，余项并非最优，参见（1.21）。

5.2. **关于格劳特管的一些相关结果**。下文将介绍一系列有趣的例子，其中定理 1.1 适用。

例 5.2. 与接触形式 $\xi$ 相关联的是所谓的 Reeb 向量场$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\xi)$，它由方程 $\iota_{\mathcal{T}}\xi = 1, \iota_{\mathcal{T}}$d $\xi = 0$唯一确定，参见 [17, 引理/定义 1.1.9]。由此可知，dV$^\xi$ := $^{2^-}$n n! $\xi \wedge$(d$\xi$)$^n$ 是 X 上的一个体积形式，并且在 $\mathcal{T}$的流作用下保持不变。因此，我们发现算子 $-i\mathcal{T}$: $\mathscr{C}^\infty$(X) → $\mathscr{C}^\infty$(X) 关于由该体积形式诱导的 $L^2$-内积是形式上自伴的

$dV := dV_\xi$。我们可以令 $P := -i\mathcal{T}$，应用定理 1.1 来研究 $T_P = \Pi(-i\mathcal{T})\Pi$ 的谱渐近性；在此情形下，它与 CR 函数的 Reeb 流动力学直接相关。此外，在这种情况下，渐近展开中 $\chi_k(T_P)(x,x)$ 的首项系数 $\mathcal{A}_0(x)$ 在 X 上为常数，并且等于 $k^{\frac{n+1}{2\pi^{n+1}}}\int \chi(t)t^n dt$。我们注意到，在该情形下有 $\alpha_P = \xi$。在这一设定中，若再假设 $\mathcal{T}$ 的流保持 CR 结构，则 $\chi_k(T_P)$ 在对角线上的渐近展开归因于 Herrmann–Hsiao–Li [21, 定理 1.2]。

例 5.3。例 5.2 的一个特殊情形由 Boutet de Monvel–Guillemin [4] 引入，对 Kähler 几何与量子化极为重要。设 M 是一个紧 Kähler 流形，且 $(L, h^L) \to M$ 是一个正 Hermitian 全纯线丛，也就是说，$(L, h^L)$ 的 Chern 曲率 $i\overline{2\pi}R^L$ 表示 M 上的一个 Kähler 度量。则主圆丛 $X = \{v \in L^* : |v|_{h^*} = 1\}$ 是一个严格伪凸 CR 流形，称为 Grauert 管 [18]，并在奇异空间的 Kodaira嵌入定理中有重要应用。与 Chern 联络 $\nabla^L$ 相对应的 X 上的联络 1-形式 $\xi$ 是 X 上的接触形式，相应的 Reeb 向量场 $\mathcal{T}$ 是 X 上 $S^1$-作用的无穷小生成元 $\partial_\vartheta$。在此情形下，$\xi(-i\partial_\vartheta) = 1$ 与 $\overline{\partial}_b$ 和 $\Pi$ 对易，且 $\mathrm{Spec}(-i\partial_\vartheta) = \mathbb{Z}$。因此，算子 $P = -i\partial_\vartheta$ 限制在 $H^0_b(X)$ 上后，是一个一阶椭圆自伴 Toeplitz 算子。此外，其正谱由有限重数的 $m \in \mathbb{N}$ 构成，而对应于 m 的特征子空间可识别为 $L^m$ 的 m 次幂 $L^m$ 的全纯截面空间 $H^0(M, L^m)$（参见 [4, 引理 14.14]）。此外，充分大的 m 会以重数 $\rho(m)$ 出现在谱中，其中 $\rho$ 是 (M, L) 的 Hilbert 多项式。关于此背景下 Toeplitz 算子的谱渐近的相关结果，请参见 [1]。

例 5.4. 设 M 是一个实维数为 $\dim_{\mathbb{R}} M = n + 1$ 的紧致实解析流形，配备实解析黎曼度量 g。零截面附近 TX 上的邻域中的适配复结构，在 $X = \{v \in TX : g(v, v) = r\}$上诱导出一个 CR 结构；当 $r > 0$ 足够小时，该结构是强拟凸的。TX 上的典范一形式 $\lambda$，以及由函数 $v \mapsto \sqrt{g(v, v)}$ 和辛形式 $d\lambda$ 所对应的哈密顿向量场，在 X 上诱导出满足例 5.2 中条件的 $\omega_0$ 和 $\overline{T}$。因此，定理 1.1 在这种情况下适用。我们注意到，在这一特定设定下，Chang–Rabinowitz [7, 定理 1.1] 以另一种方法给出了与定理 1.1 相关的缩放渐近结果，该结果针对另一类截断函数 $\chi$ 以及半经典参数 k 的不同增长阶。

例 5.3 中的情形实际上能让我们更深入地理解定理 1.1 和定理 4.13。设 $B_m : L^2(M, L^m) \to H^0(M, L^m)$ 为 Bergman 投影。与 $B_m$ 相关的光滑 Schwartz 核 $B_m(p', p'')$ 称为 Bergman 核，而 $B_m(p') := B_m(p', p')$ 称为 Bergman 核函数。众所周知，$B_m(p', p'')$ 具有完整渐近展开，参见 [41, 30] 及其中的参考文献。特别地，

$$B_m(p') \sim \sum_{j=0}^{+\infty} m^{n-j} b_j(p') \text{ in } S^n_{\mathrm{loc}}(1; M),\ n := \dim_{\mathbb{C}} M,\ m \to +\infty. \tag{5.7}$$

现在，我们考虑动力 Toeplitz 算子

$$T_\vartheta := \Pi(-i\partial_\vartheta)\Pi \tag{5.8}$$

o在$M$ 上的圆丛（见例 5.3。对于 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，我们可以验证 th at

$$(\Pi \circ \chi_k(T_\vartheta))(x,x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi\left(\frac{m}{k}\right) B_m(\pi_M(x)), \tag{5.9}$$

其中 $\pi_M : X \to M$ 是自然投影。

**定理 5.5**。 在例 5.3的情形下，当 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\chi_k(T_\vartheta)(x,x) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_j(x) k^{n+1-j} \text{ in } S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;X), \tag{5.10}$$

其中 $a^j(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \chi(t) t^{n-j} dt\right) b^j(\pi_M(x))$ 和 $b^j$ 在 (5.7)中给出，其中 $j \in \mathbb{N}_0$。

证明。 当 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$时，我们有 $\Pi \circ \chi_k(T_\vartheta) = \chi_k(T_\vartheta)$。此外，当 $k > 0$ 较大时，根据（5.7）和 $\operatorname{supp}\chi \subset \mathbb{R}_+$，对于每个 $N \in \mathbb{N}_0$，存在常数 $c_N > 0$ 使得

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi\left(\frac{m}{k}\right) B_m(\pi_M(x)) - \sum_{j=0}^{N} k^{n+1-j} \sum_{m\in\mathbb{Z}} k^{-1} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \left(\frac{m}{k}\right)^{n-j} b_j(\pi_M(x)) \right| \\ &\qquad \le c_N \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\chi\left(\frac{m}{k}\right)\right| m^{n-N-1} = O(k^{n-N}). \end{aligned} \tag{5.11}$$

根据泊松求和公式，参见 [22, 定理 7.2。1], 对于任意 $\tau \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，我们有

$$k^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tau\left(\frac{m}{k}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(2\pi km)} \tau(t) dt. \tag{5.12}$$

在上述等式的右侧，当 $m \neq 0$ 时，我们可以对 $t$ 任意多次进行分部积分；当 $m = 0$ 时，我们只有一个数 $\int_{\mathbb{R}} \tau(t)dt$。因此，对于任意 $N \in \mathbb{N}$，我们都可以找到一个常数 $C_N > 0$，使得

$$\left| k^{-1} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tau\left(\frac{m}{k}\right) - \int_{\mathbb{R}} \tau(t)dt \right| < C_N k^{-N}. \tag{5.13}$$

我们的定理可由这个近似和（5.11）立即推出。 □

**注 5.6**。 尽管本例中的渐近展开也可直接由更一般的定理 1.1 得出，但（5.10）为 $\chi_k(T_P)(x,x)$ 的低阶系数的一般公式提供了线索：这些系数可以选取得与 $\chi$ 的导数无关。

当 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 时，情况则更为微妙，正如定理 4.13 所示。

**定理 5.7**。 在例 5.3 的情形下，对于满足 $\chi \ge 0$ 且 $\chi(0) \neq 0$ 的 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，我们有

$$(\Pi \circ \chi_k(T_\vartheta))(x,x) = \widehat{\mathcal{B}}_k(x) + \widehat{\mathcal{R}}_k(x), \tag{5.14}$$

其中

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{B}}_k(x) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} k^{n+1-j} \widehat{b}_j(x) \text{ in } S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;X), \\ &\widehat{b}_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \chi(t) t^n dt\right) b_0(\pi_M(x)), \end{aligned} \tag{5.15}$$

其中 $b_0$ 与(5.7) 并且

$$\begin{aligned} &\text{when } b_{n+1} \not\equiv 0,\ \lim_{k\to+\infty} |\widehat{\mathcal{R}}_k| = +\infty,\ \lim_{k\to+\infty} k^{-\delta}|\widehat{\mathcal{R}}_k| = 0 \text{ for all } \delta > 0;\\ &\text{when } b_{n+1} \equiv 0,\ \widehat{\mathcal{R}}_k = O(1). \end{aligned} \tag{5.16}$$

特别地，当 $\chi(0) \neq 0$ 时，定理 4.13 中对 $\chi_k(T_P)$ 的近似里，关于 $k$ 的误差项大小是精确的。

在这种情况下，对于每个 $m \in \mathbb{Z}$，我们无法像之前那样得到（5.11），因此需要考虑

$$\varepsilon_m(x) := B_m(\pi_M(x)) - \mathbb{1}_{\{s\geq 0\}}(m)\sum_{j=0}^{n} m^{n-j} b_j(\pi_M(x)) - \mathbb{1}_{\{s\geq 1\}}(m) m^{-1} b_{n+1}(\pi_M(x)). \tag{5.17}$$

公式（5.7）表明，我们可以找到一些常数 $m_0, c_0 > 0$，使得对于所有 $m \geq m_0$，$|\varepsilon_m(x)| < c_0\, m^{-2}$。现在，我们写出

$$\begin{aligned} &(\Pi \circ \chi_k(T_\vartheta))(x,x)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi\left(\frac{m}{k}\right) B_m(\pi_M(x))\\ &= \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi\left(\frac{m}{k}\right) B_m(\pi_M(x)) + \sum_{m=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \varepsilon_m(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) m^{-1} b_{n+1}(\pi_M(x))\\ &\quad + \sum_{m=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \sum_{j=0}^{n} m^{n-j} b_j(\pi_M(x)). \end{aligned} \tag{5.18}$$

显然，

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi\left(\frac{m}{k}\right) B_m(\pi_M(x)) + \sum_{m=0}^{m_0-1} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \varepsilon_m(x) \right| = O(1),\\ &\left| \sum_{m=m_0}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \varepsilon_m(x) \right| = O\left( c_0 \sum_{m=m_0}^{+\infty} m^{-2} \right) = O(1). \end{aligned} \tag{5.19}$$

此外，根据经典公式 $\sum_{m=1}^{k} m^{-1} = \log k + \gamma + \frac{1}{2k} - \epsilon_k$，其中 $\gamma$ 是欧拉常数，且 $0 \leq \epsilon_k \leq \frac{1}{8k^2}$，当 $\chi \geq 0$ 时，我们有

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) m^{-1} = +\infty, \tag{5.20}$$

并且对任意 $\delta > 0$

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-\delta} \sum_{m=1}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) m^{-1} = 0. \tag{5.21}$$

然而，我们不能像之前那样应用（5.12）来研究 $\sum_{m\in\mathbb{N}_0} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \sum_{j=0}^{n} m^{n-j} b_j(\pi_M(x))$，

并且我们需要以下近似。

**引理 5.8**。对于任意 $\tau \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ 以及每个 $N \in \mathbb{N}_0$，我们可以找到一个常数 $C_N > 0$ 和函数 $\tau_\ell \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$、$\ell = 0, 1, \ldots, N$，$\tau_0 = \tau$，使得

$$\left| \sum_{m\in\mathbb{N}_0} k^{-1} \tau\left(\frac{m}{k}\right) - \sum_{\ell=0}^{N} k^{-\ell} \int_0^{+\infty} \tau_\ell(t)\, dt \right| \leq C_N\, k^{-N-1},\ k \to +\infty. \tag{5.22}$$

证明。我们从黎曼和的估计开始证明：对于任意 $\tau \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$，存在一个常数 $C_0 > 0$，它只依赖于 $\tau$，使得

$$\left| \sum_{m\in\mathbb{N}_0} k^{-1}\tau\left(\frac{m}{k}\right) - \int_0^{+\infty} \tau(t)dt \right| \le C_0\, k^{-1}. \tag{5.23}$$

若假设（5.22）（$\tau \in \mathscr{C}_c^\infty$）$\mathbb{R}$在某个$N_0 \in \mathbb{N}_0$处对所有情形成立，那么对于任意$\tau \in \mathscr{C}_c^\infty$（$\mathbb{R}$），当$k \to +\infty$时，我们可以应用泰勒公式，使得

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{N}_0} k^{-1}\tau\left(\frac{m}{k}\right) - \int_0^{+\infty} \tau(t)dt \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \int_{\frac{m}{k}}^{\frac{m+1}{k}} \left(\tau\left(\frac{m}{k}\right) - \tau(t)\right) dt \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0 \\ m\in k\,\mathrm{supp}\,\tau}} \int_{\frac{m}{k}}^{\frac{m+1}{k}} \left( -\sum_{j=1}^{N_0} \frac{d^j\tau}{dt^j}\left(\frac{m}{k}\right) \frac{(t-\frac{m}{k})^j}{j!} dt + O(k^{-N_0-1}) \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{N_0} \sum_{m\in\mathbb{N}_0} \frac{k^{-j}}{(j+1)!} k^{-1} \frac{d^j\tau}{dt^j}\left(\frac{m}{k}\right) + O(k^{-N_0-1}).
\end{aligned} \tag{5.24}$$

将归纳假设应用于（5.24）最后一行中的$k^{-1}\, d^j\tau\, dt^j\left(m\, k\right)$，可知（5.22）在$N_0+1$处对任意 $\tau \in \mathscr{C}_c^\infty$（$\mathbb{R}$）均成立，由此通过归纳法得出我们的结论。□

定理5.7的证明。引理5.8 意味着

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \sum_{j=0}^{n} m^{n-j} b_j(\pi_M(x)) &= \sum_{j=0}^{n} k^{n+1-j} \sum_{m=0}^{+\infty} k^{-1}\chi\left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m}{k}\right)^{n-j} b_j(\pi_M(x)) \\
&\sim \sum_{j=0}^{+\infty} k^{n+1-j}\widehat{b}_j(x) \text{ in } S^{n+1}_{\mathrm{loc}}(1;X), \\
b_0(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \chi(t)t^n dt\right) b_0(\pi_M(x)).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

根据（5.18）、（5.19）、（5.20）、（5.21）、（5.25），并取

$$\widehat{\mathcal{B}}_k(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \sum_{j=0}^{n} m^{n-j} b_j(\pi_M(x)) \tag{5.26}$$

and

$$\widehat{\mathcal{R}}_k(x) := \sum_{m=-\infty}^{-1} \chi\left(\frac{m}{k}\right) B_m(\pi_M(x)) + \sum_{m=0}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) \varepsilon_m(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \chi\left(\frac{m}{k}\right) m^{-1} b_{n+1}(\pi_M(x)), \tag{5.27}$$

我们的定理得证。 □

注 5.9。当 $0 \notin \mathrm{supp}\,\chi$ 时，$(\Pi \circ \chi_k(\mathrm{T}_\vartheta))(\mathrm{x},\mathrm{x}) = \chi_k(\mathrm{T}_\vartheta)(\mathrm{x},\mathrm{x})$ 仍具有完整渐近展开，因为这里引理 5.8 适用于 $\sum^{+\infty} \mathrm{m}{=}1\, \mathrm{k}^{-1}\chi\left(\mathrm{m}\ \mathrm{k}\right)\left(\frac{m}{\mathrm{k}}\right)^{-1}$。同时我们注意到，对于定理 5.5 和 5.7，当 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 时，通过取半经典极限 $\mathrm{k} \to +\infty$，我们当然有$\mathrm{j}(\mathrm{x}) = \mathrm{b}j(\mathrm{x}), \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}$。但实际上

这个关系也可以直接由引理 5.8 推导出来。为简单起见，我们仅展示

$$a_1(x) = \widehat{b}_1(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} \chi(t)t^{n-1}dt\right) b_1(\pi_M(x)), \tag{5.28}$$

其余情形的证明也类似。由引理 5.8 的证明可知，

$$2\pi\widehat{b}_1(x) = \left(\int_0^{+\infty} \chi(t)t^{n-1}dt\right) b_1(\pi_M(x)) - \left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(\chi(t)t^n)dt\right) b_0(\pi_M(x)), \tag{5.29}$$

并且利用分部积分，我们总有 $\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(\chi(t)t^n)dt = 0$ 对任意 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$。这一观察也表明，对定理 5.7 的一般证明稍作修改后，同样适用于定理 5.5。

最后，我们对环面上 Grauert 管上的 Toeplitz 算子的谱作一个显式计算。考虑 $\mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯作用，$n \geq 2$ 由 $t \circ z = z + t$ 给出。由于子群 $2\pi\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ 的作用是自由、离散且适当不连续的，$M := \mathbb{C}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ 是一个维数为 $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ 的复流形。

定义函数 $\rho\colon M \to \mathbb{R}$ 由 $\rho([z]) = y_1^2 + \ldots\ldots + y_n^2$ 给出，其中 $z = x + iy$，且 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$，$y = (y_1, \ldots\ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$。那么 $\rho \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ 是严格多重次调和函数，且任何非零值都是 $\rho$ 的正则值。因此，对于某个固定的 $\varepsilon > 0$，我们有 $X := \rho^{-1}(\{\varepsilon^2\})$ 是一个余维一的严格伪凸 CR 流形，其 CR 结构由 $T^{1,0}X = T^{1,0}M \cap \mathbb{C}TX$ 给出。此外，X 是紧的（事实上，它同胚于一个 n 维环面与一个 $(n-1)$ 维球面的笛卡尔积），并且对于所有 $n \geq 2$，$\overline{\partial}_b$ 在 X 上的 $L^2$ 中具有闭值域，[3]。

我们考虑由 M 和 $\mathbb{C}^n$ 上的标准度量和体积形式分别诱导到 X 上的度量和体积形式。于是，$T = \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ 在 X 上定义了一个横截向量场，该向量场不是 CR，满足 $T \perp T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ 和 $|T| = \varepsilon$。此外，$iT\colon \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ 是对称的。我们记 $A := \Pi i_\varepsilon T \Pi$，其中 $\Pi\colon L^2(X) \to L^2(X)$ 表示 Szeg˝o 投影。我们注意到，X 实际上是带有平坦黎曼度量的 n 维环面的 Grauert 管的边界。在这一背景下，此类例子曾在 [7, 35] 中得到研究。我们将以一种能够导出特征值显式表达式的方式计算 A 的谱；当 n 为偶数时，该表达式与贝塞尔函数直接相关。

定义 $\gamma_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma_n(t) = \int_0^\pi e^{t\cos(\alpha)} \sin^{n-2}(\alpha)d\alpha$。则 $\gamma_n$ 满足方程 $\gamma_{n+2}(t) = (n-1)t^{-1}\gamma_n'(t)$，对所有 $n \geq 2$ 均成立。

如果 $n \geq 2$ 为偶数，则有

$$\gamma_n(t) = \frac{\pi(n-2)!}{2^{n-1}(\frac{n}{2}-1)!}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2j}}{j!(j+\frac{n-2}{2})!} = \frac{\pi(n-2)!}{2^{n-1}t^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(it), \tag{5.30}$$

其中 $J_\alpha$, $\alpha \geq 0$ 是第一类贝塞尔函数。如果 $n$ 为奇数，则得到

$$\gamma_n(t) = 2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)!\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\frac{n-1}{2}+j)!}{j!(n-1+2j)!}t^{2j}. \tag{5.31}$$

例如 $\gamma_3(t) = 2t^{-1}$ 双曲正弦函数（$t$）。对于 $m \in \mathbb{Z}^n$，我们令 $s_m\colon X \to \mathbb{C}$,

$$s_m([z]) = \frac{e^{i\langle m,z\rangle}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\varepsilon^{n-1}\gamma_n(2\varepsilon|m|)\,\mathrm{vol}(S^{n-2})}}. \tag{5.32}$$

由此可得，对于所有 $m \in \mathbb{Z}^n$，$s_m \in H_b^0(X) \cap \mathscr{C}^\infty(X) \subset L^2(X)$ 成立。

**定理 5.10**。 采用上述记号，有 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ 是 $H_b^0(X)$ 的标准正交基，满足

$$As_m = |m|\frac{\gamma_n'(2\varepsilon|m|)}{\gamma_n(2\varepsilon|m|)}s_m, \text{ for all } m \in \mathbb{Z}^n. \tag{5.33}$$

因此，$A$ 的谱为

$$\mathrm{Spec}(A) = \left\{|m|\frac{\gamma_n'(2\varepsilon|m|)}{\gamma_n(2\varepsilon|m|)} : m \in \mathbb{Z}^n\right\}. \tag{5.34}$$

对于 $k > 0$，令 $\phi_k$ 为定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的测度

$$\phi_k(t) = k^{-n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^m}\delta\left(t - k^{-1}|m|\frac{\gamma_n'(2\varepsilon|m|)}{\gamma_n(2\varepsilon|m|)}\right), \tag{5.35}$$

其中 $\delta(t)$ 表示在零点处的狄拉克测度。应用定理 1.3，我们得到如下结果。

**定理 5.11**。 对于任意 $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$，有

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\phi_k(t)\chi(t)dt = \mathrm{vol}(S^{n-1})\int_{\mathbb{R}} t^{n-1}\chi(t)dt. \tag{5.36}$$

在证明下面的引理 5.10 之前，我们需要做一些准备。对于 $m \in \mathbb{Z}^n$，令$\tilde{}s_m([z]) = e^{i\langle m,z\rangle}$。我们有 $\tilde{}s_m$ 是一个光滑 CR 函数，因为它是定义在$M$上的全纯函数的限制。我们用 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ 表示实$n$维环面，用$S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$ 表示半径为$r > 0$的$(n-1)$维球面。

**引理 5.12.** 对于所有 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\int_{S_1^{n-1}} e^{ty_1}dS_1^{n-1}(y) = \gamma_n(t)$ 体积$(S_1^{n-2})$。

证明。 考虑映射$F$: $[0,\pi]\times S_1^{n-2} \to S_1^{n-1}$，

$$F(\alpha, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)x_1, \ldots, \sin(\alpha)x_{n-1}). \tag{5.37}$$

由于

(5.38)

$$\begin{aligned} dS_1^{n-1}(y) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}y_j dy_1 \ldots \widehat{dy_j} \ldots dy_n \\ &= y_1 dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_n + dy_1 \wedge \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j y_{j+1}dy_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dy_{j+1}} \wedge \ldots \wedge dy_n, \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &(F^* dS_1^{n-1})(\alpha, x) \\ &= \cos^2(\alpha)\sin^{n-2}(\alpha)d\alpha \wedge dS_1^{n-2}(x) + \cos(\alpha)\sin^{n-1}(\alpha)dx_1 \ldots dx_{n-1} \\ &+ \sin^n(\alpha)d\alpha \wedge dS_1^{n-2}(x). \end{aligned} \tag{5.39}$$

因此，根据变量替换和 Fubini 定理，我们得到

$$\int_{S_1^{n-1}} e^{ty_1}dS_1^{n-1}(y) = \int_0^\pi e^{t\cos(\alpha)}\sin^{n-2}(\alpha)d\alpha \cdot \int_{S_1^{n-2}} dS_1^{n-2} = \gamma_n(t)\,\mathrm{vol}(S_1^{n-2}). \tag{5.40}$$

□

**引理 5.13**。 给定 $m$，$m' \in \mathbb{Z}^n$ 我们有

$$(\widetilde{s}_m, \widetilde{s}_{m'}) = \begin{cases} (2\pi)^n \varepsilon^{n-1} \gamma_n(2\varepsilon|m|) \operatorname{vol}(S_1^{n-2}) & , \text{if } m = m' \\ 0 & , \text{else.} \end{cases} \tag{5.41}$$

*and*

$$(\widetilde{s}_m, iT\widetilde{s}_{m'}) = \begin{cases} (2\pi)^n \varepsilon^n |m| \gamma_n'(2\varepsilon|m|) \operatorname{vol}(S_1^{n-2}) & , \text{if } m = m', \\ 0 & , \text{else.} \end{cases} \tag{5.42}$$

证明。我们有

$$\int_{X_\varepsilon} \widetilde{s}_m \overline{\widetilde{s}_{m'}} dV_{X_\varepsilon} = \int_{x \in \mathbb{T}^n} e^{i\langle m-m', x\rangle} d\mathbb{T}^n(x) \int_{y \in S_\varepsilon^{n-1}} e^{-\langle m+m', y\rangle} dS_\varepsilon^{n-1}(y). \tag{5.43}$$

and

$$\int_{X_\varepsilon} \widetilde{s}_m \overline{iT\widetilde{s}_{m'}} dV_{X_\varepsilon} = -\int_{x \in \mathbb{T}^n} e^{i\langle m-m', x\rangle} d\mathbb{T}^n(x) \int_{y \in S_\varepsilon^{n-1}} \langle m', y\rangle e^{-\langle m+m', y\rangle} dS_\varepsilon^{n-1}(y). \tag{5.44}$$

由于

$$\int_{x \in \mathbb{T}^n} e^{i\langle m-m', x\rangle} d\mathbb{T}^n(x) = \begin{cases} (2\pi)^n & , \text{if } m = m', \\ 0 & , \text{else,} \end{cases} \tag{5.45}$$

我们需要计算 $\int_{S_\varepsilon^{n-1}} e^{-2\langle m, y\rangle} dS_\varepsilon^{n-1}(y)$ 以及 $\int_{S_\varepsilon^{n-1}} \langle m, y\rangle e^{-2\langle m, y\rangle} dS_\varepsilon^{n-1}(y)$。通过缩放以及 $dS_1^{n-1}$ 在正交变换下的不变性，我们得到

$$\int_{S_\varepsilon^{n-1}} e^{-2\langle m, y\rangle} dS_\varepsilon^{n-1}(y) = \varepsilon^{n-1} \int_{S_1^{n-1}} e^{2|m|\varepsilon y_1} dS_1^{n-1}(y), \tag{5.46}$$

而论断的第一部分由引理 5.12得出。此外，使用相同的论证，我们观察到

$$\begin{aligned} \varepsilon^n |m| \operatorname{vol}(S_1^{n-2}) \gamma_n'(2\varepsilon|m|) &= \varepsilon^{n-1} \int_{S_1^{n-1}} \varepsilon |m| y_1 e^{2\varepsilon|m| y_1} dS_1^{n-1}(y) \\ &= \int_{S_\varepsilon^{n-1}} -\langle m, y\rangle e^{-2\langle m, y\rangle} dS_\varepsilon^{n-1}(y), \end{aligned} \tag{5.47}$$

这证明了该陈述的第二部分。 □

由引理 5.13 的第一部分可知，$\{s_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n} \subset H_b^0(X)$ 是一个正交归一系。现在我们将证明它是一个基。

**引理 5.14.** 设 $v \in H_b^0(X)$ 是一个 *CR* 函数。存在 $a_m \in \mathbb{C}$、$m \in \mathbb{Z}^n$，使得 $v = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m s_m$，其中该级数在 $L^2$-范数下收敛。

我们指出，引理 5.14 可由一般 Grauert 管上解析函数的全纯延拓相关结果推出，该结果见 [35]。为求完备起见，我们针对这一特定情形给出一个初等证明。

引理的证明 *5.14*。 由于光滑 CR 函数在 $H_b^0(X)$ 中稠密，只需在 $v$ 为光滑 CR 函数时证明该命题。注意，环面 $\mathbb{T}^n$ 在 $X$ 上给出了一个李群作用，该作用由 $[t] \circ [z] = [z + t]$给出。因此，根据傅里叶变换，我们可以将 $v$ 写成一个在 $L^2$ 中收敛的级数 $v = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} v_m$，其中 $v_m$、$m \in \mathbb{Z}^n$为光滑函数，由下式给出

$$v_m([z]) = (2\pi)^{-n} \int_{[t] \in \mathbb{T}^n} v([z + t]) e^{-i\langle m, t\rangle} d\mathbb{T}^n([t]). \tag{5.48}$$

固定 $m \in \mathbb{Z}^n$。$\mathbb{T}^n$-作用是 CR 的，因为它是 M 上全纯作用的限制。因此，$v_m$ 是光滑 CR 函数，因为 v 光滑且为 CR 函数。此外，我们可以通过映射 $([x],y) \mapsto [x + iy]$，将 $\mathbb{T}^n \times S_\varepsilon^{n-1}$与 X 微分同胚识别，我们将此映射记为 F。因此，对于某个光滑函数 $f_m$: $X \to \mathbb{C}$，$v_m$ 可写为 $v_m = f_m s_m$，且 $\partial_b^m x_j = 0, 1 \le j \le n$。我们将证明 $f_m$ 是常数。因此，取一点 $[x + iy] \in X$，并考虑分解 $T_{[x+iy]}X = W_1 \oplus W_2$，其中 $W_1 = dF(T_{[x]}\mathbb{T}^n)$, $W_2 = dF(T_y S_\varepsilon^{n-1})$。对于所有 $\mathcal{X} \in W_1$，我们有 $\mathcal{X}(f_m) = 0$。所以我们需要证明，对于所有 $Y \in W_2$，$Y(f_m) = 0$。注意，$J(W_2) \subset W_1$，其中 $T \perp J(W_2)$，而 J 是 CR 结构的定义端omorphism。因此，对于 $Y \in W_2$，有 $Z := Y - iJY \in T^{1,0}X$。由于 $v_m$ 和 $s_m$ 是光滑 CR 函数，我们在 $[x + iy]$ 处得到

$$0 = \overline{Z}(v_m) = \overline{Z}(f_m)s_m = Y(f_m)\widetilde{s}_m \tag{5.49}$$

成立。我们有 $\widetilde{s}_m$ 处处非零，因此对于所有$V \in T^{[x+iy]}X$，$V(f_m) = 0$。由此可得，$v = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m s_m$，其中 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n} \subset \mathbb{C}$为某个数。□

定理 5.10 的证明。由引理 5.14 和引理 5.13 的第一部分可知，集合 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ 构成 $H_b^0(X)$ 的一组标准正交基。因此，对于任意光滑 CR 函数 f，我们有 $Af = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}(iTf, s_m)s_m$。取 $f = s_m, m \in \mathbb{Z}^n$，由引理 5.13 的第二部分即可得证。□

## 6. 半经典 CR 嵌入及其应用

6.1. CR Kodaira 嵌入。我们将证明定理 1.4。设 $(X, T^{1,0}X)$ 是定理 1.1 中的紧致可定向严格拟凸 CR 流形。记 $\xi$为接触形式，$\mathcal{T}$为相应的 Reeb 向量场。设 $T_P$ ba 是定理 1.1 中的 Toeplitz 算子。我们用 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ 表示其按重数计的正特征值，并令 $f_1, f_2 \dots$ 为 $H_b^0(X)$ 中相应的特征函数标准正交系。从现在起，取 $\chi \in \mathscr{C}^\infty c((\delta_1, \delta_2))$, $\chi \not\equiv 0$，作为某个$0 < \delta_1 < \delta_2$ 的截断函数，并设 $\eta(t) := |\chi|^2(t), t \in \mathbb{R}$。在定理 1.1 的情形和记号下，我们注意到局部渐近展开

$$\eta_k(T_P)(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{ikt\varphi(x,y)} A(x,y,t,k)dt + O\left(k^{-\infty}\right) \tag{6.1}$$

成立且

$$A_0(x,x,t) = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \frac{dV_\xi}{dV}(x)\, |\chi(\sigma_P(\xi_x)t)|^2 t^n \tag{6.2}$$

满足 $\int_0^{+\infty} A_0(x, x, t)dt \in \mathscr{C}^\infty(D, ]0, \infty[)$。

令 $N_k = \#\{j \in \mathbb{N} : 0 < \lambda_j \le \delta_2 k\}$，我们定义

$$G_k : X \to \mathbb{C}^{N_k}, \quad G_k(x) = \left(\chi(\lambda_1 k^{-1})f_1, \dots, \chi(\lambda_{N_k}k^{-1})f_{N_k}\right). \tag{6.3}$$

我们将证明，对于所有充分大的$k$，$G_k$ 是一个CR嵌入。

**引理 6.1.** 存在 $k_0 > 0$，使得对所有满足 $k \ge k_0$ 的 $k$，$G_k(X) \subset \mathbb{C}^{N_k} \setminus \{0\}$。

证明。我们有 $|G_k(x)|^2 = \eta_k(T_P)(x, x)$。由定理 1.1 利用 $\eta \ge 0$，$\eta \not\equiv 0$，我们得到存在 $C$，$k_0 > 0$，使得 $|G_k|^2 \ge C$ 对所有满足 $k \ge k_0$。□

**引理 6.2**。存在 $k_0 > 0$ 使得 $G_k$ 对所有 $k \ge k_0$均为浸入。

证明。令 $H=\{H_x\}_{x\in X}$，$H_x:=\mathrm{Re}(T^{1,0}_x X)$，并定义同构 $L_k\colon TX\to TX$，使得 $L_k(\mathcal{T})=\frac{1}{k}\mathcal{T}$，且对于 $V\in H$，有 $L_k(V)=\frac{1}{\sqrt{k}}V$。记 h 为 H 上由 Levi形式诱导的正对称双线性型。将 h 延拓为 TX 上的对称双线性型，使得 $h(\mathcal{T},\cdot)\equiv 0$。此外，令 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_X$ 为 $\mathbb{C}TX$ 上如第 2.2 节所述的光滑度量。我们将证明存在正的光滑函数 $a、b: X\to\mathbb{R}_+$，使得

$$k^{-n-1}L_k^*(G_k^*g_{\mathrm{eucl}})=a\xi\otimes\xi+bh+O(k^{-\frac{1}{2}}) \tag{6.4}$$

其中 $g_{\mathrm{eucl}}$ 表示由其标准 Hermitian 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$所诱导的 $\mathbb{C}^{N_k}$ 上的黎曼度量。更确切地说，存在常数 $C>0$ 使得

$$\left|k^{-n-1}L_k^*(F_k^*g_{\mathrm{eucl}})(V,W)-a\xi(V)\xi(W)-bh(V,W)\right|\leq\frac{C}{\sqrt{k}}|V|_X|W|_X \tag{6.5}$$

对所有 $k\geq 1$、$V、W\in T^pX$、$p\in X$均成立。由此可知，当 $G_k$ 下的 $\mathbb{C}^{N_k}$ 上的黎曼度量的拉回成为$X$ 上的黎曼度量时，$k$ 足够大。因此，对于所有充分大的$k$，$G_k$ 都是浸入。

下面证明（6.5）成立。由定理 1.1 和引理 4.14 可得

$$\begin{aligned}&k^{-n-1}L_k^*(G_k^*g_{\mathrm{eucl}})(\mathcal{T},\mathcal{T})\\&=k^{-n-2}\mathrm{Re}\left((d_x\otimes d_y\eta_k(T_P)(x,y)|_{x=y})(\mathcal{T}\otimes\mathcal{T})\right)\\&=a+O(k^{-1})\end{aligned} \tag{6.6}$$

对于某个正的光滑函数 $a\colon X\to\mathbb{R}_+$。因此存在$C_1>0$ 使得

$$|k^{-n-1}L_k^*(G_k^*g_{\mathrm{eucl}})(\mathcal{T},\mathcal{T})-a|\leq C_1k^{-1},\ \text{for all } k\geq 1. \tag{6.7}$$

由引理 4.14，对于 $V\in H_x$，我们还有

$$k^{-n-1}(d_x\otimes d_y\eta_k(T_P)(x,y)|_{x=y})(\mathcal{T}\otimes V)=O(k). \tag{6.8}$$

我们得出，存在$C_2>0$ 使得

$$|k^{-n-1}L_k^*(G_k^*g_{\mathrm{eucl}})(\mathcal{T},V)|\leq C_2k^{-\frac{1}{2}}|V|_X \tag{6.9}$$

对所有$V\in H$ 以及所有$k\geq 1$均成立。我们在$H$ 上定义一个对称双线性形式$R_k=\{(R_k)_x\}_{x\in X}$，$(R_k)_x: H_x\times H_x\to\mathbb{C}$，

$$(R_k)_x(V_1,V_2):=k^{-n-1}G_k^*g_{\mathrm{eucl}}(V_1,V_2)=k^{-n-1}\mathrm{Re}\langle V_1G_k(x),V_2G_k(x)\rangle. \tag{6.10}$$

由定理1.1 可知，存在双线性形式$r_j=\{(r^j)_x\}_{x\in X}$，$(r^j)_x: H_x\times H_x\to\mathbb{R}$，$j=0,1$，以及常数 $C_3>0$，使得

$$|R_k(V_1,V_2)-k^2r_0(V_1,V_2)-k^1r_1(V_1,V_2)|\leq C_3|V_1|_X|V_2|_X \tag{6.11}$$

对所有 $k\geq 1$、$x\in X$ 和 $V_1,V_2\in H_x$，均有此结论。由引理4.14可得 $r_0\equiv 0$。因此，我们将计算 $r_1$。给定 $x\in X$ 和 $V_1,V_2\in H_x$，我们可以找到光滑截面 $Z_j\in\Gamma(U,T^{1,0}X)$，使得 $2\mathrm{Re}(Z_j)_x=V_j$，$j=1,2$，且定义在 x 周围的开邻域 U 上。在 $x\in X$ 处，由于 $G_k$ 是一个 CR映射，我们得到

$$\begin{aligned}&\langle(\chi(k^{-1}\lambda_1)V_1f_1,\ldots,\chi(k^{-1}\lambda_{N_k})V_1f_{N_k})),(\chi(k^{-1}\lambda_1)V_2f_1,\ldots,\chi(k^{-1}\lambda_{N_k})V_2f_{N_k}))\rangle\\&=:\langle V_1G_k,V_2G_k\rangle=\langle Z_1G_k,Z_2G_k\rangle\\&=\overline{Z_2}(Z_1\langle G_k,G_k\rangle)-\langle\overline{Z_2}(Z_1G_k),G_k\rangle\\&=\overline{Z_2}(Z_1\langle G_k,G_k\rangle)+\langle[Z_1,\overline{Z_2}]G_k,G_k\rangle.\end{aligned} \tag{6.12}$$

我们有

$$k^{-n-1}\overline{Z_2}(Z_1\eta_k(T_P)(x,x))=O(1) \tag{6.13}$$

and

$$k^{-n-1}(d_x\eta_k(T_P)(x,y)|_{x=y})([Z_1,\overline{Z_2}]) - i\left(\frac{k}{2\pi^{n+1}}\frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+2}dV}\int_0^{+\infty}t^{n+1}\eta(t)dt\right)\xi([Z_1,\overline{Z}_2]) = O(1). \tag{6.14}$$

我们发现，对于某个正的光滑函数 $b\colon X\to\mathbb{R}_+$，有 $\xi([Z_1,Z_2])=-2i\mathcal{L}(Z_1,Z_2)$，且 $r_1(V_1,V_2)=bh(V_1,V_2)$。因此我们得出结论，存在一个常数 $C_4>0$，使得

$$|k^{-n-1}L_k^*(G_k^*g_{\mathrm{eucl}})(V_1,V_2)-bh(V_1,V_2)|\le C_4k^{-1}|V_1|_X|V_2|_X \tag{6.15}$$

对所有 $k\ge 1$ 以及所有 $V_1,V_2\in H_x$、$x\in X$ 均成立。该结论随即得证。 □

现在我们将证明，对于所有充分大的 k，$G_k$ 都是单射。给定一点 $p\in X$，我们在 $(p,p)\in X\times X$ 附近固定坐标 $(x,y)$，以原点为中心，如定理 2.15 中所述。记 $x'=(x_1,\dots,x_{2n})$、$z=(z_1,\dots,z_n)$、$y'=(y_1,\dots,y_{2n})$、$w=(w_1,\dots,w_n)$，其中 $z^j=x_{2j-1}+ix^{2j}$，$w^j=y_{2j-1}+y^{2j}$。根据定理 2.15，对于任意相位函数 $\varphi\in \mathrm{Ph}(\Pi,\xi,D)$，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=&x_{2n+1}-y_{2n+1}+i\sum_{j=1}^n\mu_j|z_j-w_j|^2+\sum_{j=1}^n i\mu_j(\overline{z}_jw_j-z_j\overline{w}_j)\\&+\sum_{j=1}^n\left(d_j(z_jx_{2n+1}-w_jy_{2n+1})+\overline{d}_j(\overline{z}_jx_{2n+1}-\overline{w}_jy_{2n+1})\right)\\&+(x_{2n+1}-y_{2n+1})f_\varphi(x,y)+O\left(|(x,y)|^3\right).\end{aligned} \tag{6.16}$$

此外，对于这些坐标，存在一个常数 $C>0$，使得 $\mathrm{Im}\varphi(x,y)\ge C|z-w|^2$。

**引理 6.3**。存在 $k_0>0$，使得 $\widetilde{G}_k\colon X\to\mathbb{C}^{N_k}\setminus\{0\}$，$\widetilde{G}_k(x)=G_k(x)/|G_k(x)|$ 对所有 $k\ge k_0$ 均定义良好且为单射。

证明。由引理 6.1 可立即得出，对于所有充分大的 k，$G_k$ 定义良好。我们沿用定理 4.8 中的方法，通过反证法证明单射性。假设可以找到整数序列 $\{k_j\}_{j=1}^\infty$、点序列 $\{x_{k_j}\}_{j=1}^\infty,\{y_{k_j}\}_{j=1}^\infty$，其中各点属于 X，且满足 $\lim_{j\to+\infty}k_j=+\infty$，使得 $x_{k_j}\neq y^{k_j}$，并且对每个 $j\ge 1$ 都有 $G^{k_j}(x^{k_j})=G^{k_j}(y^{k_j})$。为简便起见，我们用 k 代替 $k_j$。由于 X 是紧的，我们可以通过取子序列，假设当 $k\to+\infty$ 时，$x_k\to p\in X$ 且 $y_k\to q\in X$。由于 $\langle G_k(x),G_k(y)\rangle=\eta_k(T_P)(x,y)$，且 $|G_k(x)|=\sqrt{\eta_k(T_P)(x,x)}$，这里有

$$\frac{\eta_k(T_P)(x_k,y_k)}{\sqrt{\eta_k(T_P)(x_k,x_k)}\sqrt{\eta_k(T_P)(y_k,y_k)}}=\frac{|G_k(x_k)|^2}{|G_k(x_k)||G_k(x_k)|}=1 \tag{6.17}$$

对于所有充分大的 $k>0$。由定理 1.121.1 中的（1.1）以及上式，我们得出 $p=q$ 必然成立。我们针对 $x_k$ 和 $y_k$ 向 $p$ 的收敛速度考虑几种情形。当 $k>0$ 足够大时，在 $p$ 附近的局部坐标中，如上所述记 $x_k=(z^k,x_{2n+1}^k)$ 和 $y_k=(w^k,y_{2n+1}^k)$。我们将 $p$ 认作 $0\in\mathbb{R}^{2n+1}$，并令 $\mathscr{M}\ge 0$ 为一个常数，使得

$$k|z^k-w^k|^2\ge\mathscr{M} \tag{6.18}$$

对于无穷多个充分大的 $k > 0$。
情形I： $\mathscr{M} > 0$。由定理1.9中的（1.1）和 Fatou 引理可知，对某个子序列有

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty} k^{-n-1}|\eta_k(T_P)(x_k,y_k)| &\leq \limsup_{k\to+\infty} k^{-n-1}\int e^{-kt\,\mathrm{Im}\,\varphi(x_k,y_k)}|A(x_k,y_k,t,k)|dt\\ &\leq \limsup_{k\to+\infty} k^{-n-1}\int e^{-Ck|z^k-w^k|^2t}|A(x_k,y_k,t,k)|dt\\ &= \int e^{-C\mathscr{M}t}A_0(0,0,t)dt < \int A_0(0,0,t)dt.\end{aligned} \tag{6.19}$$

然而，我们还有

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-n-1}\eta_k(T_P)(x_k,x_k) = \lim_{k\to+\infty} k^{-n-1}\eta_k(T_P)(y_k,y_k) = \int A_0(0,0,t)dt > 0, \tag{6.20}$$

因此

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{|\eta_k(T_P)(x_k,y_k)|}{\sqrt{\eta_k(T_P)(x_k,x_k)}\sqrt{\eta_k(T_P)(y_k,y_k)}} < 1 \tag{6.21}$$

这与（6.17）矛盾。因此，必有

$$\lim_{k\to+\infty} k|z^k-w^k|^2 = 0. \tag{6.22}$$

现在，取一个子序列，使得

$$\lim_{k\to+\infty} k|\langle \partial_x\varphi(y_k,y_k), x_k-y_k\rangle| = \mathscr{N} \tag{6.23}$$

对于某个 $\mathscr{N} \in [0,+\infty]$。
情形II：$\lim_{k\to+\infty} k|z^k-w^k|^2 = 0$ 且 $\mathscr{N} \in (0,+\infty]$。由泰勒公式，(1.6) 以及$\partial_x \mathrm{Im}\varphi(x,x) = 0$ 可得

$$\begin{aligned}|\varphi(x_k,y_k) - \langle \partial_x\varphi(y_k,y_k), x_k-y_k\rangle| &\leq C_1|x_k-y_k|^2\\ |\mathrm{Re}\varphi(x_k,y_k) - \langle \partial_x\varphi(y_k,y_k), x_k-y_k\rangle| &\leq C_2|x_k-y_k|^2\end{aligned} \tag{6.24}$$

and

$$|x^k_{2n+1}-y^k_{2n+1}| \leq C_3(|\langle \partial_x\varphi(y_k,y_k), x_k-y_k\rangle| + |z^k-w^k|) \tag{6.25}$$

对于某些与 $k > 0$无关的常数 $C_1, C_2, C_3 > 0$。由于 $\lim_{k\to+\infty}\langle \partial_x\varphi(y_k、y_k)、x_k-y_k\rangle = 0$我们得到

$$\begin{aligned}|\varphi(x_k,y_k)| &\geq |\mathrm{Re}\varphi(x_k,y_k)| \geq c(|\langle \partial_x\varphi(y_k,y_k), x_k-y_k\rangle| - |z_k-w_k|^2)\\ |\varphi(x_k,y_k)| &\leq \frac{1}{c}(|\langle \partial_x\varphi(y_k,y_k), x_k-y_k\rangle| + |z_k-w_k|^2)\end{aligned} \tag{6.26}$$

当 $k > 0$对于某个常数 $c > 0$足够大时。假设 $\mathscr{N} = \infty$。由于我们有 $\lim_{k\to+\infty} k|z^k-w^k|^2 = 0$，由（6.26）可得 $\lim_{k\to+\infty} k\,|\varphi(x_k,y_k)| = \infty$。我们

得到

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{k\to+\infty} k^{-n-1}|\eta_k(T_P)(x_k,y_k)| \\
=&\limsup_{k\to+\infty} k^{-n-1}\left|\int e^{ikt\varphi(x_k,y_k)}A(x_k,y_k,t,k)dt\right| \\
\le&\limsup_{k\to+\infty} k^{-n-1}\int\left|e^{ikt\varphi(x_k,y_k)}\frac{1}{ik\varphi(x_k,y_k)}\frac{d}{dt}A(x_k,y_k,t,k)\right|dt \\
=&\limsup_{k\to+\infty}\int e^{-kt\,\mathrm{Im}\,\varphi(x_k,y_k)}\frac{1}{k|\varphi(x_k,y_k)|}\left|\frac{d}{dt}A(x_k,y_k,t,k)\right|k^{-n-1}dt \\
\le&\int\limsup_{k\to+\infty}\left(e^{-Ctk|z^k-w^k|^2}\frac{1}{k|\varphi(x_k,y_k)|}\left|\frac{d}{dt}A(x_k,y_k,t,k)\right|k^{-n-1}\right)dt \\
=&0.
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

由（6.20）可得

$$
\limsup_{k\to+\infty}\frac{|\eta_k(T_P)(x_k,y_k)|}{\sqrt{\eta_k(T_P)(x_k,x_k)}\sqrt{\eta_k(T_P)(y_k,y_k)}}=0,
\tag{6.28}
$$

这与（6.17）矛盾。

若 $\mathscr{N}\in(0,+\infty)$，则由（6.26）可知 $k|\varphi(x_k,y_k)|$ 有界。此外，当 k 足够大且 $\mathrm{Im}\varphi(x_k,y_k)\ge 0$时，$k|\mathrm{Re}\varphi(x_k,y_k)|$ 被一个正常数从下方界定。因此，取一个子序列后，不妨设 $\lim_{k\to+\infty} k\varphi(x_k,y_k)=a+ib$，其中 $a>0$ 且 $b\ge 0$。令 $A_0(0,0,t)\ge 0$ 且 $A_0(0,0,\cdot)\not\equiv 0$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to+\infty} k^{-n-1}|\eta_k(T_P)(x_k,y_k)| \\
=&\lim_{k\to+\infty}\left|\int e^{itk\,\mathrm{Re}\,\varphi(x_k,y_k)}e^{-tk\,\mathrm{Im}\,\varphi(x_k,y_k)}k^{-n-1}A(x_k,y_k,t,k)dt\right| \\
=&\left|\int e^{ita}e^{-tb}A_0(0,0,t)dt\right|<\left|\int e^{-tb}A_0(0,0,t)dt\right| \\
\le&\int A_0(0,0,t)dt.
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

由（6.20）可知

$$
\limsup_{k\to+\infty}\frac{|\eta_k(T_P)(x_k,y_k)|}{\sqrt{\eta_k(T_P)(x_k,x_k)}\sqrt{\eta_k(T_P)(y_k,y_k)}}<1
\tag{6.30}
$$

这与（6.17）矛盾。因此可以写成

$$
\lim_{k\to+\infty} k|\langle\partial_x\varphi(y_k,y_k),x_k-y_k\rangle|=0.
\tag{6.31}
$$

情形I II：当$k|z^k-w_k|^2=0$趋于极限，且当$k|\langle\partial_x\varphi(y_k、y_k)$趋于极限时，$x_k-y_k\rangle|=0$。定义

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}_k(u):=|\eta_k(T_P)(ux_k+(1-u)y_k,y_k)|^2 \\
&\mathscr{G}_k(u):=\eta_k(T_P)(y_k,y_k)\eta_k(T_P)(ux_k+(1-u)y_k,ux_k+(1-u)y_k), \\
&\mathscr{H}_k(u):=\frac{\mathscr{F}_k(u)}{\mathscr{G}_k(u)}.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

由（6.17）及基本不等式，

$$
0\le\mathscr{H}_k(u)\le 1.
\tag{6.33}
$$

此外，由于 $\mathscr{H}_k(0) = \mathscr{H}_k(1) = 1$，我们可以找到一个$u_k \in (0,1)$使得

$$\mathscr{H}_k''(u_k) \geq 0. \tag{6.34}$$

我们计算

$$\mathscr{H}_k''(u_k) = \frac{\mathscr{F}_k''(u_k)}{\mathscr{G}_k(u_k)} - 2\frac{\mathscr{F}_k'(u_k)\mathscr{G}_k'(u_k)}{\mathscr{G}_k^2(u_k)} - \frac{\mathscr{F}_k(u_k)\mathscr{G}_k''(u_k)}{\mathscr{G}_k^2(u_k)} + 2\frac{\mathscr{F}_k(u_k)\mathscr{G}_k'^2(u_k)}{\mathscr{G}_k^3(u_k)}. \tag{6.35}$$

为简便起见，我们记

$$\alpha_k(u) := \eta_k(T_P)(ux_k + (1-u)y_k, y_k). \tag{6.36}$$

Then

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k(u) &= |\alpha_k(u)|^2, \\ \mathscr{F}_k'(u) &= \alpha_k'(u)\overline{\alpha}_k(u) + \alpha_k(u)\overline{\alpha}_k'(u), \\ \mathscr{F}_k''(u) &= \alpha_k''(u)\overline{\alpha}_k(u) + 2|\alpha_k'(u)|^2 + \alpha_k(u)\overline{\alpha}_k''(u), \end{aligned} \tag{6.37}$$

且 (1.9) 在定理 1.1 意味着

$$\alpha_k(u) = \int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k,t)} A(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k) + \gamma_k(u), \tag{6.38}$$

对于某个 $\gamma_k(u) = O(k^{-\infty})$。同样，为简便起见，我们记

$$\beta_k(u) := \int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k,t)} A(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k)dt. \tag{6.39}$$

我们有

$$\begin{aligned} \beta_k'(u) = &\int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k)} ikt \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(ux_k + (1-u)y_k, y_k), (x_k - y_k) \right\rangle \\ &A(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k)dt \\ &+ \int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k)} \left\langle \frac{\partial A}{\partial x}(ux_k + (1-u)y_k, y_k), (x_k - y_k) \right\rangle dt, \end{aligned} \tag{6.40}$$

(6.41)

$$\begin{aligned} \beta_k''(u) = &\int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k)} (ikt)^2 \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(ux_k + (1-u)y_k, y_k), (x_k - y_k) \right\rangle^2 \\ &A(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k)dt \\ &+ \int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k,t)} ikt \sum_{j,l} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_l}(ux_k + (1-u)y_k, y_k)(x_k^j - y_k^j)(x_k^l - y_k^l) \\ &A(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k)dt \\ &+ \int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k,t)} ikt \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(ux_k + (1-u)y_k, y_k), (x_k - y_k) \right\rangle \\ &\frac{\partial A}{\partial x}(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k)dt \\ &+ \int e^{ikt\varphi(ux_k+(1-u)y_k,y_k,t)} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 A}{\partial x_j \partial x_l}(ux_k + (1-u)y_k, y_k, t, k)(x_k^j - y_k^j)(x_k^l - y_k^l). \end{aligned}$$

通过上述计算，我们得到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k''(u_k) =&2|\beta_k'(u_k)|^2+\beta_k''(u_k)\overline{\beta}_k(u_k)+\beta_k(u_k)\overline{\beta_k}''(u_k)\\ &+2\beta_k'(u_k)\overline{\gamma}_k'(u_k)+2\gamma_k'(u_k)\overline{\beta}_k'(u_k)\\ &+\beta_k''(u_k)\overline{\gamma}_k(u_k)+\gamma_k(u_k)\overline{\beta}_k''(u_k)+\overline{\beta}_k(u_k)\gamma_k''(u_k)+\beta_k(u_k)\overline{\gamma}_k''(u_k)\\ &+\gamma_k''(u_k)\overline{\gamma}(u_k)+\gamma_k(u_k)\overline{\gamma}_k''(u_k)+2|\gamma_k'(u_k)|^2.\end{aligned}\tag{6.42}$$

直接应用泰勒公式，我们可以写出

$$\begin{aligned}&2|\beta_k'(u_k)|^2+\beta_k''(u_k)\overline{\beta}_k(u_k)+\overline{\beta_k''(u_k)}\beta_k(u_k)\\ =&2k^{2n+4}\left(\left|\int tA_0(0,0,t)dt\right|^2-\int t^2A_0(0,0,t)\int A_0(0,0,t)dt\right)|\langle\partial_x\varphi(y_k,y_k),x_k-y_k\rangle|^2\\ &-2k^{2n+3}\int\sum_{j,l=1}^{2n}\frac{\partial^2\mathrm{Im}\varphi}{\partial x_j\partial x_l}(0,0)(x_k^j-y_k^j)(x_k^l-y_k^l)A_0(0,0,t)dt\int A_0(0,0,t)dt\\ &+o(k^{2n+2})O\left(\left(\sqrt{k}\sum_{j=1}^{2n}|x_k^j-y_k^j|+k\left|\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x}(y_k,y_k),y_k-x_k\right\rangle\right|\right)^2\right).\end{aligned}\tag{6.43}$$

注意，根据 H¨older 不等式，

$$\left|\int tA_0(0,0,t)dt\right|^2<\int t^2A_0(0,0,t)dt\int A_0(0,0,t)dt,\tag{6.44}$$

因此，我们可以找到一个常数 $c_1>0$，使得

$$\begin{aligned}&\left(\left|\int tA_0(0,0,t)dt\right|^2-\int t^2A_0(0,0,t)\int A_0(0,0,t)dt\right)|\langle\partial_x\varphi(y_k,y_k),x_k-y_k\rangle|^2\\ &<-c_1|\langle\partial_x\varphi(y_k,y_k),x_k-y_k\rangle|^2.\end{aligned}\tag{6.45}$$

此外，我们可以找到一个常数 $c_2>0$，使得

$$-\int\sum_{j,l=1}^{2n}\frac{\partial^2\mathrm{Im}\varphi}{\partial x_j\partial x_l}(0,0)(x_k^j-y_k^j)(x_k^l-y_k^l)A_0(0,0,t)dt<-c_2\sum_{j=1}^{2n}|x_k^j-y_k^j|^2.\tag{6.46}$$

据此，我们可以找到一个常数 $c_0>0$，使得

$$\limsup_{k\to+\infty}\left(\sqrt{k}\sum_{j=1}^{2n}|x_k^j-y_k^j|+k|\langle\partial_x\varphi(y_k,y_k),y_k-x_k\rangle|\right)^{-2}\frac{\mathscr{F}_k''(u_k)}{\mathscr{G}_k(u_k)}\le-c_0<0.\tag{6.47}$$

可以验证

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to+\infty}\left(\sqrt{k}\sum_{j=1}^{2n}|x_k^j-y_k^j|+k|\langle\partial_x\varphi(y_k,y_k),y_k-x_k\rangle|\right)^{-2}\\ &\left(-2\frac{\mathscr{F}_k'(u_k)\mathscr{G}_k'(u_k)}{\mathscr{G}_k^2(u_k)}-\frac{\mathscr{F}_k(u_k)\mathscr{G}_k''(u_k)}{\mathscr{G}_k^2(u_k)}+2\frac{\mathscr{F}_k(u_k)\mathscr{G}_k'^2(u_k)}{\mathscr{G}_k^3(u_k)}\right)=0.\end{aligned}\tag{6.48}$$

成立。因此，我们得到

$$\limsup_{k\to+\infty}\left(\sqrt{k}\sum_{j=1}^{2n}|x_k^j-y_k^j|+k|\langle\partial_x\varphi(x_k,x_k),y_k-x_k\rangle|\right)^{-2}\mathscr{H}_k''(u_k)\leq -c_1<0. \tag{6.49}$$

这与式（6.34）矛盾。 □

定理 1.4 的证明。由引理 6.2 和引理 6.3 可知，对于所有充分大的 k，$G_k$ 是单射浸入。由于 X 是紧的，因此存在 $k_0>0$，使得对于所有 $k\geq k_0$，$G_k$ 是嵌入。根据定义可知，对于任意 $k>0$，$G_k$ 是 CR映射。由于 X 是余维一 CR 流形，我们得出，对于所有 $k\geq k_0$，$G_k$ 是 CR嵌入。□

6.2. $T^{\lambda(k)}$ **与几乎等变嵌入**。我们考虑与第 6.1 节相同的设置，但将映射 $F_k$ 重新缩放为依赖于 $k$ 的因子。因此，从现在起我们令

$$F_k(x):=\sqrt{\frac{2\pi^{n+1}}{k^{n+1}}}\left(\chi(k^{-1}\lambda_1)f_1(x),\ldots,\chi(k^{-1}\lambda_{N_k})f_{N_k}(x)\right) \tag{6.50}$$

其中 $\lambda_j$，$f_j,\chi$、$N_k$ 如第 6.1 节所述。回顾 (1.27) 中 $\mathcal{T}_{\lambda(k)}$ 的定义，其中 $\lambda(k)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{N_k})$。

定理 1.5 的证明。 首先，我们注意到在这种情况下有

$$\sigma_P(\xi)=\frac{dV_\xi}{dV}=1. \tag{6.51}$$

将 $|dF_k\mathcal{T}|^2=\frac{2\pi^{n+1}}{k^{n+1}}\sum_{j=1}^{N_k}|\chi(k^{-1}\lambda_j)|^2|\mathcal{T}f_j|^2$ 写出，并利用引理 4.14 中的第二个关系，我们在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中得到 $|k^{-1}dF_k\mathcal{T}|^2=C'_\chi+O(k^{-1})$。我们还有

$$\frac{k^{n+1}}{2\pi^{n+1}}|\mathcal{T}_{\lambda(k)}\circ F_k|^2=\sum_{j=1}^{N_k}\lambda_j^2|\chi(k^{-1}\lambda_j)|^2|f_j|^2. \tag{6.52}$$

因此，$|k^{-1}\mathcal{T}_{\lambda(k)}\circ F_k|^2=C'_\chi+O(k^{-1})$ 在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中，由引理 4.15 可知。此外，

$$\frac{k^{n+1}}{2\pi^{n+1}}\langle\mathcal{T}_{\lambda(k)}\circ F_k,dF_k\mathcal{T}\rangle=\sum_{j=1}^{N_k}i\lambda_j f_j\mathcal{T}\overline{f_j}=ik(\mathcal{T}_y\tau_k(T_P)(x,y))|_{y=x}. \tag{6.53}$$

因此，再次利用引理 4.14，我们在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中得到

$$\mathrm{Re}\langle\mathcal{T}_{\lambda(k)}\circ F_k,dF_k\mathcal{T}\rangle=k^2C'_\chi+O(k^1). \tag{6.54}$$

于是，该定理中的第三个关系式可由下式推出

$$|k^{-1}T_{\lambda(k)}\circ F_k-k^{-1}dF_k\mathcal{T}|^2=|k^{-1}\mathcal{T}_{\lambda(k)}|^2+|k^{-1}dF_k\mathcal{T}|^2-2k^{-2}\,\mathrm{Re}\langle\mathcal{T}_{\lambda(k)},dF_k\mathcal{T}\rangle). \tag{6.55}$$

□

由于等式 $(F_k)_*\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\lambda(k)}\circ F_k$ 成立将意味着映射 $F_k$ 是等变的，因此定理 1.5 可视为一个几乎等变嵌入结果。

6.3. $\omega_{\lambda(k)}$ **与一个近似球面嵌入。** 我们考虑与第 6.2 节相同的情形，其中 $F_k$ 由（6.50）给出。令 $\alpha$ 为定义在 $\mathbb{C}^N$ 上的光滑 1-形式，定义为

$$\alpha = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{N}(\overline{z}_j dz_j - z_j d\overline{z_j}), \tag{6.56}$$

由 $\eta = |\chi|^2$ 引理 4.14，我们得到，在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑

$$\frac{k^{n+1}}{2\pi^{n+1}}F_k^*\alpha = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{N_k}|\chi(k^{-1}\lambda_j)|^2(\overline{f_j}df_j - f_j d\overline{f_j}) = \mathrm{Im}(d_x\eta_k(T_P)(x,y)|_{y=x}), \tag{6.57}$$

因此

$$k^{-1}F_k^*\alpha(x) = C_\chi\frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+2}dV}(x)\xi(x) + O(k^{-1}), \tag{6.58}$$

当 $k \to +\infty$ 时，$C_\chi = \int_0^{+\infty} t^{n+1}|\chi(t)|^2 dt$。回忆一下（1.28）中 $\omega_{\lambda(k)}$ 的定义，其中$\lambda(k) = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{N_k})$。

$T$ 的证明 定理 1.6。 考虑函数 $g\colon \mathbb{C}^{N_k} \to \mathbb{R}$，$g(z) = \sum^{N_k}_{j=1}\lambda_j|z_j|^2$。我们得到 n

$$\frac{k^{n+1}}{2\pi^{n+1}}F_k^* g = \sum_{j=1}^{N_k}\lambda_j|\chi(k^{-1}\lambda_j)|^2|f_j|^2. \tag{6.59}$$

因此，根据引理 4.15，

$$F_k^* g = kC_\chi\frac{dV_\xi}{\sigma_P(\xi)^{n+1}dV} + O(1), \tag{6.60}$$

在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中，当 $k \to +\infty$ 时可得 $F_k^* g > 0$ 对所有充分大的 $k$ >0。我们有 $\omega_{\lambda(k)} = g^{-1}\alpha$，其中 $\alpha$ 如（6.56）所示。因此，$F_k^*\omega_{\lambda(k)}$ 对所有充分大的 $k > 0$ 都有良好定义，并利用（6.58）即可得到该结论。□

设$S^{2N-1} \subset \mathbb{C}^N$ 为以零点为中心、半径为一的球面。给定一个光滑函数$f\colon S^{2N-1} \to (-1, +\infty)$，我们回顾一下，扰动球面$S^{2N-1}(f)$ 定义为

$$S^{2N-1}(f) := \left\{z \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}\colon |z| = 1 + f\left(\frac{z}{|z|}\right)\right\}. \tag{6.61}$$

我们注意到，$S^{2N-1}(f)$ 自然地带有余维一 CR 流形的结构，作为实超曲面嵌入于 $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ 中；并回忆，对于 $\beta \in \mathbb{R}^N_+$所诱导的 CR 结构，$T^{1,0}S^{2N-1}(f)$ 在 $S^{2N-1}(f)$ 上被实 1-形式 $\alpha_f$ annihilate,$\beta$其定义见（1.33）。

定理 1.8 的证明。 我们选择 $dV = dV_\xi$ 以及 $P = -i\mathcal{T}$使得 $\sigma_P(\xi) = dVdV_\xi = 1$。考虑映射 $\mathcal{F}_k$ 如（6.50）所示，并且

$$F_k\colon X \to \mathbb{C}^{N_k},\ F_k(x) = \left(\int_0^{+\infty} t^n|\chi(t)|^2 dt\right)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}_k. \tag{6.62}$$

经过这样的重标度，我们得到在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中 $|F_k|^2 = 1 + O(k^{-1})$，因此对于 $u_k(x) := |F_k(x)| - 1$，可得 $u_k = O(k^{-1})$ 在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中，当 $k \to +\infty$ 时成立。我们将构造一个函数序列 $v_k\colon S^{2N_k-1} \to (-1, \infty)$，使得对于任意充分大的 $k$，都有 $F_k(X) \subset S^{2N_k-1}(v_k) > 0$。通过考察 $v_k$ 对 $k$ 的依赖关系，我们将通过取 $f = v_k$（其中 $k$ 足够大）来推出~该结论。考虑映射 $F_k\colon X \to$

$S^{2N_k-1}$，$\widetilde{F}_k(x) = F_k(x)/|F_k(x)|$。由引理 6.3 可知，当 k 足够大时，$\widetilde{F}_k$ 是良定义且单射的。根据我们的选择，$|\chi|_k^2(T_P)(x,x)$ 的首项系数是一个常数。因此 $d|F_k| = O(k^{-1})$，结合 (6.5) 可知，对于所有充分大的 k，$\widetilde{F}_k$是一个浸入。由此可得，存在 $k_0 > 0$，使得对于所有 $k \geq k_0$，$\widetilde{F}_k$ 都是将 X 作为实流形嵌入 $S^{2N_k-1}$ 的嵌入。固定 $k \geq k_0$。

定义 $\widetilde{v}_k\colon F_k(X) \to \mathbb{R}$，满足 $\widetilde{v}_k(F_k(x)) = |F_k(x)| - 1 = u_k(x)$。我们将 $\widetilde{v}_k$ 延拓为函数 $v_k\colon S^{2N_k-1} \to \mathbb{R}$，如下所述。令 $\widetilde{X}_k = \widetilde{F}_k(X)$，并令 $N\widetilde{X}_k$ 为 $\widetilde{X}_k \subset S^{2N_k-1}$ 的法丛，其投影映射为 Pr。$S^{2N_k-1} \subset \mathbb{C}^{N_k}$ 上的标准度量在 $N\widetilde{X}_k$上诱导出纤维度量 h。令 $N^\delta\widetilde{X}_k$ 为关于 h 的 $N\widetilde{X}_k$ 中的一个 $\delta$-管。取 $\delta$足够小，我们可以通过指数映射将 $N^\delta\widetilde{X}_k$ 与 $S^{2N_k-1}$中 $\widetilde{X}_k$ 的一个小开邻域 U 识别。令 $\nu \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R},[0,1])$ 为一个支集包含于 $[-\delta/2,\delta/2]$ 中的函数，并且 $\nu \equiv 1$ 在 0 的某个邻域内。于是，我们在 $S^{2N_k-1}$ 上定义 $v_k$：当 $z \notin U$ 时，$v_k(z) = 0$；当 $z \in U$ 时，$v_k(z) = \nu(h(z,z))\widetilde{v}_k(\mathrm{Pr}(z))$。由此构造得到一个函数族 $\{v_k\}_{k\geq k_0}$，使得对于每个 $k \geq k_0$，$v_k\colon S^{2N_k-1} \to \widetilde{(}-1,\infty)$ 是光滑的，并且在 $X_k$ 上有 $v_k = \widetilde{v}_k$，且 $\sup_{S^{2N_k-1}}|v_k| \leq \sup_{\widetilde{X}_k}|\widetilde{v}_k|$。此外，对于 $k \geq k_0$ 且 $x \in X$，令 $V_1, \ldots, V_{2N_k-1}$ 为 $T_{\widetilde{F}_k}(x)S^{2N_k-1}$ 的一个标准正交基，使得 $V_1, \ldots, V_{2n+1} \in T_{\widetilde{F}_k}(x)\widetilde{X}_k$。我们得到 $|(dv_k)_{\widetilde{F}_k}(x)|^2 = |V_1(v_k)|^2 + \ldots + |V_{2n+1}(v_k)|^2$。再次使用 $d|F_k| = O(k^{-1})$，根据下述引理 6.4，我们可以找到一个与 k 无关的常数 $C > 0$，使得对于所有 $V \in T\widetilde{X}_k$ 以及所有充分大的 $k \geq k_0$，都有 $|(d\widetilde{F}_k)^{-1}V|^2 \leq Ck^{-1}|V|^2$。由于 $V_j(v_k) = ((d\widetilde{F}_k)^{-1}V_j)(u_k)$，$j = 1, \ldots, 2n+1$，因此当 $k \to +\infty$ 时，我们在 $\widetilde{X}_k$上得到 $|(dv_k)|^2 = O(k^{-1})$。现在考虑映射 $H\colon \mathbb{C}^{N_k} \setminus \{0\} \to S^{2N_k-1}$，$H(z) = z/|z|$。我们得到$\|dH\|_{\mathrm{op}} \leq |z|^{-1} + 1$。由定理 1.6，我们有

$$F_k^*\alpha_{\lambda_{(k)},v_k} = \frac{F_k^*\omega_{\lambda_{(k)}}}{|F_k|^3} + \frac{\gamma_k}{g(F_k)} = \xi + \frac{\gamma_k}{g(F_k)} + O(k^{-1}), \tag{6.63}$$

其中 $\gamma_k := F_k^*i(\partial(v_k\circ H) - \overline{\partial}(v_k\circ H))$ 且 $g(z) = \sum_{j=1}^{N_k}\lambda_j|z|^2$。由 (6.5) 可知，存在常数 $C > 0$，使得对所有 $V \in TX$ 以及所有充分大的 $k > 0$，均有 $|dF_kV| \leq Ck|V|$。由于 $\gamma_k = dv_k\circ dH\circ J\circ d\underline{F}_k$，其中 J 表示 $\mathbb{C}^{N_k}$ 的复结构，因此我们有 $\gamma_k = O(\sqrt{k})$。回忆一下，根据 (6.60)，对于某个与 $k > 0$ 无关的常数 c，$g(F_k) = ck + O(1)$。因此可得 $F_k^*\alpha_{\lambda_{(k)},v_k} - \xi = O(k^{-\frac{1}{2}})$。

现在，给定 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathbb{N}$，我们可以选取足够大的 $k \geq k_0$，使得 $\sup|v_k| \leq \varepsilon$、$\sup_{\widetilde{X}_k}|dv_k| \leq \varepsilon/2$，$\|v_k\circ F_k\|_{\mathscr{C}^m(X)} = \|u_k\|_{\mathscr{C}^m(X)} \leq \varepsilon$ 以及 $|F_k^*\alpha_{\lambda_{(k)},v_k} - \xi| \leq \varepsilon$。此外，利用定理 1.5 和定理 1.6，我们还可以使 (vii) 成立。根据构造，我们有 $F_k(X) \subset S^{2N_k-1}(v_k)$；由于 $|dv_k|$ 连续，因此可在 $S^{2N_k-1}$ 中找到 $X_k$ 周围的一个开邻域，使 $|dv_k| \leq \varepsilon$ 在其中成立。通过选取 $\varepsilon < 1$，即可由 (v) 推出断言 (vi)。□

**引理 6.4.** 在定理 1.1 的假设下，取 $dV = dV_\xi$ 以及 $P = -i\mathcal{T}$ 其中 $\mathcal{T}$ 是相对于 $\xi$ 令 $F_k$ 如 (6.50)所示。存在常数 $c > 0$使得 $|dF_kV|^2 \geq ck|V|^2$ 对所有 $V \in TX$ 以及所有充分大的 $k$ 均成立，$> 0$ 其中我们在 $X$ 上选取一个 *Hermitian* 度量，如第 2.2 节所述。

证明。令 $H = \mathrm{Re}(T^{1,0}X)$。由（6.5）可知，存在一个常数 $c_0 > 0$ 使得$|dF_kV|^2 \geq c_0k|V|^2$，并且对于所有 $V \in H$ 以及所有充分大的 $k > 0$，都有 $|dF_k\mathcal{T}|^2 \geq c_0k$。为了证明该命题，只需证明存在一个

常数 $C > 0$使得

$$|\mathrm{Re}\langle dF_k\mathcal{T}, dF_kV\rangle| \leq C|V| \tag{6.64}$$

对所有$V \in H$ 以及所有充分大的$k$。对于每个$V \in H$，我们找到唯一的$Z \in T^{1,0}X$ 满足 $V = Z + \overline{Z}$。通过在$X$ 上选取 Hermitian 度量，我们进一步有 $|V|^2 = |Z|^2 + |Z|^2$。因此，利用 $\mathcal{T}$是一个实向量场这一点，（6.64）可由证明存在某个常数$C_1 > 0$ 使得

$$|\langle dF_k\mathcal{T}, dF_kZ\rangle| \leq C_1|Z| \text{ for all } Z \in T^{1,0}X \tag{6.65}$$

以及所有充分大的 $k$。我们有

$$|\langle dF_k\mathcal{T}, dF_kZ\rangle| = |(F_k^*d\alpha)(\mathcal{T}, Z)| = |(\iota_{\mathcal{T}}d(F_k^*\alpha))(Z)| \tag{6.66}$$

其中 $\alpha$ 如（6.56）中所示。令 $\sigma_P(\xi) \equiv 1$ 并令$dV = dV^{\xi}$，由（6.58）我们得到 at

$$F_k^*\alpha = kC_\chi\xi + O(1) \tag{6.67}$$

在 $\mathscr{C}^\infty$拓扑中成立，其中$k \to +\infty$，且$C_\chi = \int_0^{+\infty} t^{n+1}|\chi|^2(t)\,dt > 0$。对（6.67）两边应用外微分，并利用 $\iota_{\mathcal{T}}d\xi = 0$，由（6.66）可知，存在一个常数$C_1 > 0$ 使得（6.65）对所有充分大的$k$ 成立，从而验证了该陈述。□

由定理 1.8 可知，任何满足定理 1.1 中假设的 CR 流形 $(X, T^{1,0}X)$ 都可以 CR 嵌入到一个球面中，且其 CR 结构可以任意接近标准 CR 结构。为更精确地陈述这一事实，我们引入以下记号。给定一个黎曼流形 M 和两个秩相同的光滑复子丛 E、E′ of $\mathbb{C}$T M，对于任意 $x \in$ M，我们用 $\mathrm{dist}(E_x, E'_x)$ 表示相对于由 M 上的黎曼度量在 $\mathbb{C}$T M 上诱导的度量，$E_x$ and $E'_x$ 之间的格拉斯曼距离。对于 $U \subset\subset$ M，令 $\mathrm{dist}_U(E, E') := \sup_{x\in U}\mathrm{dist}(E_x, E'_x)$。由定理 1.8 可得以下结论。

**定理 6.5**。 在定理1.8 所述情形下，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$、$S^{2N-1}$ 上的一个 *CR* 结构$\mathcal{C}^{1,0}$、一个开集 $U \subset S^{2N-1}$, $\beta \in (\mathbb{R}_+)^N$ 以及一个 *CR* 嵌入 $F\colon (X, T^{1,0}X) \to (S^{2N-1}, \mathcal{C}^{1,0})$，即 $F$ 是一个光滑嵌入，满足 $dFT^{1,0}X = \mathbb{C}TF(X) \cap \mathcal{C}^{1,0}$，使得

(i) $F(X) \subset U$ *and* $\mathrm{dist}_U(T^{1,0}S^{2N-1}, \mathcal{C}^{1,0}) \leq \varepsilon$.

(ii) $\left|1 - \frac{|F_*\mathcal{T}|}{|\mathcal{T}_\beta\circ F|}\right| \leq \varepsilon$ *and* $\left|1 - \frac{\langle F_*\mathcal{T}, \mathcal{T}_\beta\circ F\rangle}{|F_*\mathcal{T}||\mathcal{T}_\beta\circ F|}\right| \leq \varepsilon$.

(iii) $\mathrm{dist}_X(T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X, \mathbb{C}\mathrm{Ker}\, F^*\omega_\beta) \leq \varepsilon$.

为了证明定理 6.5 我们需要线性代数中的两个结果。

**引理 6.6**。 设 $E$ 是一个有限维复厄米向量空间，且 $V, W \subset E$ 是两个维数相同的子空间。假设存在 $0 \leq \delta < 1$ 使得

$$|\langle v, w\rangle| \leq \delta|v||w| \text{ for all } v \in V, w \in W^\perp, \tag{6.68}$$

$$|\langle v, w\rangle| \leq \delta|v||w| \text{ for all } v \in V^\perp, w \in W. \tag{6.69}$$

那么，对于 $V$ 与 $W$ 之间的格拉斯曼距离，有 $\mathrm{dist}(V, W) \leq \sqrt{2\delta}$。

证明。 令 $P_V$ 和 $P_W$ 分别表示到 $V$ 和$W$ 的正交投影。给定$a \in E$，我们得到

$$\begin{aligned} &|(P_V - P_W)a|^2 \\ =&\langle P_Va, a\rangle + \langle P_Wa, a\rangle - \langle P_Va, P_Wa\rangle - \langle P_Wa, P_Va\rangle \\ =&\langle P_Va, (1 - P_W)a\rangle + \langle P_Wa, (1 - P_V)a\rangle. \end{aligned} \tag{6.70}$$

由假设可知 $|(P_V - P_W)a|^2 \leq 2\delta|a|^2$，因此

$$\operatorname{dist}(V,W) := \|P_V - P_W\|_{\mathrm{op}} \leq \sqrt{2\delta}. \tag{6.71}$$

□

**引理 6.7.** 设 $E = \mathbb{C}^n$ 为配备标准 *Hermitian* 度量的 $n$ 维复欧几里得空间，$A,D \in$ 矩阵 $_{m\times n}(\mathbb{C})$ 为两个矩阵，其中 $m < n$。假设存在 $c,\varepsilon > 0$ 使得 $|A^*v| \geq c|v|$ 对所有 $v \in \mathbb{C}^m$ 以及 $\|D\|_{op} \leq \varepsilon$ 成立，其中 $c > 2\varepsilon$。令 $V =$ 核 $A$，$W =$ 核 $(A+D)$。我们有

$$|\langle v,w\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{c-2\varepsilon}|v||w| \text{ for all } v \in V, w \in W^{\perp}, \tag{6.72}$$

$$|\langle v,w\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{c-2\varepsilon}|v||w| \text{ for all } v \in V^{\perp}, w \in W. \tag{6.73}$$

证明. 令 $B = A + D$，并取任意的 $v \in V$ 和 $w \in W^{\perp}$。我们有 $Av = 0$，且$w \in$ 属于$B^*$ 的值域。因此，存在 $b \in \mathbb{C}^m$ 使得 $w = A^*b + D^*b$。由此得到

$$|\langle v,w\rangle| = |\langle v,A^*b\rangle| + |\langle v,D^*b\rangle| \leq |v||D^*b| \leq \varepsilon|v||b|. \tag{6.74}$$

于是，第一个不等式由 $|\mathrm{w}| \geq |\mathrm{A^*b}| - |\mathrm{D^*b}| \geq (\mathrm{c} - \varepsilon)|\mathrm{b}|$ 得出。类似地，利用 $\mathrm{A} = \mathrm{B} + (-\mathrm{D})$ 以及对所有 $\mathrm{v} \in \mathbb{C}^m$ 均有 $|\mathrm{B^*v}| \geq (\mathrm{c} - \varepsilon)|\mathrm{v}|$，可得第二个不等式。□

定理 6.5 中的第一个断言可由以下引理推出。

引理 *6.8.* 设 $S^{2N+1}(f)$ 为一个扰动球面，其中 $f: S^{2N+1} \to (-1,+\infty)$ 是一个光滑函数，并令 $H: S^{2N+1}(f) \to S^{2N+1}, H(w) = w|w|$. 我们有 $\mathcal{C}^{1,0} := dHT^{1,0}S^{2N+1}(f)$ 在 $S^{2N+1}$ 上定义了一个（余维一）*CR* 结构。此外，给定 $p \in S^{2N+1}$ *and* $0 < \varepsilon < 1$，且满足 $|df_p|(1+f(p))^{-1} < \varepsilon/2$，则有

$$\operatorname{dist}(C_p^{1,0}, T_p^{1,0}S^{2N+1}) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \tag{6.75}$$

证明。由于$H$是$S^{2N+1}(f)$与$S^{2N+1}$之间的微分同胚，因此 $\mathcal{C}^{1,0}$ 在$S^{2N+1}$上定义了一个 CR 结构。给定$w \in S^{2N+1}(f)$，我们有$v \in \mathbb{C}T_wS^{2N+1}(f)$属于$T^{1,0}S^{2N+1}(f)$的元素，当且仅当

$$d\overline{w}_j(v) = 0, \text{ for all } j = 0,\dots,N \tag{6.76}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \overline{w}_j dw_j(v) = 2|w|d(f\circ H)v. \tag{6.77}$$

我们注意到 $H^{-1}(z) = (1+f(z))z$。因此，给定 $z \in S^{2N+1}$，我们有 $v \in \mathbb{C}T_zS^{2N+1}$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的元素，当且仅当

$$\begin{gathered}\left(d\overline{z}_j + \frac{\overline{z}_j df_z}{1+f(z)}\right)(v) = 0, \text{ for all } j = 0,\dots,N \\ \Big(\sum_{j=0}^{N}\overline{z}_j dz_j\Big)(v) - \frac{df_z(v)}{1+f(z)} = 0.\end{gathered} \tag{6.78}$$

回忆一下，$v \in \mathbb{C}T_zS^{2N+1}$ 是$T_z^{1\,0}$、$S^{2N+1}$ 中的一个元素，当且仅当

$$\begin{gathered}d\overline{z}_j(v) = 0, \text{ for all } j = 0,\dots,N \\ \Big(\sum_{j=0}^{N}\overline{z}_j dz_j\Big)(v) = 0.\end{gathered} \tag{6.79}$$

经过酉变换后，不妨设$p = (1, 0, \ldots, 0)$。使用$z^j = x_j + y^j$、$x^j$、$y_j \in \mathbb{R}$、$j = 0$、...、$N$，我们可以利用标准正交基将 $\mathbb{C}TS^{2N+1}$ 等距识别为 $\mathbb{C}^{2N+1}$

$$\frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}, \frac{\partial}{\partial y_N}. \tag{6.80}$$

由 (6.78) 和 (6.79) 可知，对于某些矩阵 A、$D \in \mathrm{Mat}^{(N+1)\times(2N+1)}$，有 $T_p^{1,0}$、$S^{2N+1} = \mathrm{Ker}\, A$、$\mathcal{C}^1$、$_p{}^0 = \mathrm{Ker}\,(A + D)$，使得 $|Av| \geq |v|$ 以及 $\|D\|_{op} \leq \varepsilon/2$。于是，根据引理 6.6 和引理 6.7，结论成立。□

定理 6.5 的证明。为验证断言 (ii) 和断言 (iii)，考虑定理 1.8 的证明中，对于充分大的 $k > 1$所涉及的映射序列 $F_k$、$\widetilde{F}_k$ 以及向量 $\lambda(k) \in (\mathbb{R}_+)^{N_k}$。由于 $|F_k| = 1 + O(k^{-1})$ 在 $\mathscr{C}^\infty$-拓扑中，我们注意到存在一个常数$\widetilde{C}_1 > 0$，使得对于所有 $v \in \mathbb{C}TX$ 以及所有充分大的 $k > 1$，都有 $|dF_k v - dF_k v| \leq C_1$。此外，当 k 足够大时，有 $|\mathcal{T}_{\lambda(k)} \circ F_k| \geq C_2 k$、$|\mathcal{T}_{\lambda(k)} \circ F_k - \mathcal{T}_{\lambda(k)} \circ F_k| \leq \widetilde{C}_3$，其中常数 $C_2, C_3 > 0$ 与 $k > 1$ 无关。同样地，由定理 1.6 可得 $|F_k^* \omega_{\lambda(k)} - \xi| = O(k^{-1})$。注意到 $T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X = \mathbb{C}\mathrm{Ker}\ \xi$。于是，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，令 $F = F_k$ 和 $\beta = \lambda(k)$（当 k 足够大时），即可由定理 1.5 推出断言 (ii)，而断言 (iii) 则由引理 6.6 和引理 6.7 得出。

此外，我们可以选择足够大的 $k$ 满足定理 1.8 中关于 $\varepsilon' > 0$ 的条件 $\widehat{F} := F_k$ 是一个 CR 嵌入

$$\varepsilon' := \frac{1}{3} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)}. \tag{6.81}$$

我们注意到

$$\frac{|df_p|}{1 + f(p)} \leq \frac{\varepsilon'}{1 - \varepsilon'} \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)} \tag{6.82}$$

对所有$p \in U$，其中$U$如定理1.8中所述。令$H\colon S^{2N-1}(f) \to S^{2N-1}$，$H(w) = w/|w|$。由引理6.8可知，$\mathcal{C}^{1,0} := dHT^{1,0}S^{2N-1}(f)$ 在$S^{2N-1}$ 上定义了一个（余维一）CR 结构，使得

$$\mathrm{dist}(C_p^{1,0}, T_p^{1,0} S^{2N+1}) \leq \varepsilon \tag{6.83}$$

对所有$p \in U$均成立。这表明，取$F := H \circ F = F_k$时，断言 (i) 成立。□

## 参考文献

[1] D. BORTHWICK, T. PAUL, AND A. URIBE, *Toeplitz*算子的半经典谱估计, Ann. Inst. Fourier（格勒诺布尔），48（1998年），第1189–1229页。[2] L. BOUTET DE MONVEL, 具有双特征的亚椭圆算子及相关伪微分算子, Comm. Pure Appl. Math., 27（1974年），第585–639页。[3] L. BOUTET DE MONVEL, 对诱导形式*Cauchy-Riemann*方程的积分, 载于 S´eminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975年：´线性与非线性偏´微´分方程，´Ecole Polytech., Centre de Math., 巴黎，1975年，第9号报告，14页。[4] L. BOUTET DE MONVEL AND V. GUILLEMIN, *Toeplitz*算子的谱理论,《数学研究年刊》第99卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿；东京大学出版社，东京，1981年。[5] L. BOUTET DE MONVEL AND J. SJ¨OSTRAND, 关于*Bergman*核与*Szeg´o*核的奇点, 载于《专题研讨会：雷恩偏微分方程》（1975年），Ast´erisque，第34–35期，法国数学学会，巴黎，1976年，第123–164页。[6] D. CATLIN, *Bergman*核与*Tian*定理, 载于《多复变量分析与几何》（片田，1997年），Trends Math., Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，1999年，第1–23页。

[7] R. CHANG AND A. RABINOWITZ, Szeg˝o核的渐近行为与特征函数Husimi分布的集中性, arXiv:2202.14013, （2022年）。[8] S.-C. CHEN AND M.-C. SHAW, 《多复变量偏微分方程》, AMS/IP高级数学研究丛书第19卷, 美国数学学会, 罗德岛州普罗维登斯; International Press, 马萨诸塞州波士顿, 2001年。[9] X. DAI, K. LIU, AND X. MA, 关于Bergman核的渐近展开, J. Differential Geom., 72（2006年）, 第1–41页。[10] E. B. DAVIES, 《谱理论与微分算子》, 剑桥高级数学研究丛书第42卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1995年。[11] M. DIMASSI AND J. SJ ¨OSTRAND, 《半经典极限中的谱渐近》, 伦敦数学学会讲义丛书第268卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1999年。[12] J. J. FARAN, V, 球面中实超曲面的不可嵌入性, Proc. Amer. Math. Soc., 103（1988年）, 第902–904页。[13] J. E. FORNAESS, 将严格伪凸域嵌入凸域, Amer. J. Math., 98（1976年）, 第529–569页。[14] F. FORSTNERI ˇC, 将严格伪凸域嵌入球中, Trans. Amer. Math. Soc., 295（1986年）, 第347–368页。[15] A. GALASSO AND C.-Y. HSIAO, CR流形上Toeplitz算子的函数演算与量子化和约化可交换, arXiv:2112.11257, （2021年）。[16] A. GALASSO AND C.-Y. HSIAO, CR流形上的Toeplitz算子与群作用, J. Geom. Anal., 33（2023年）, 论文第21号, 共55页。[17] H. GEIGES, 《接触拓扑导论》, 剑桥高级数学研究丛书第109卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2008年。[18] H. GRAUERT, ¨关于修改与例外解析集, Math. Ann., 146（1962年）, 第331–368页。[19] A. GRIGIS AND J. SJ ¨OSTRAND, 《微分算子的微局部分析》, 伦敦数学学会讲义丛书第196卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1994年。导论。[20] V. GUILLEMIN, 谱理论中若干经典定理的再探, 载于《线性偏微分方程解的奇点研讨会》（高等研究院, 普林斯顿, 新泽西州, 1977/78年）, 《数学研究年刊》第91卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1979年, 第219–259页。[21] H. HERRMANN, C.-Y. HSIAO, AND X. LI, 强伪凸CR流形上环面等变Szeg˝o核的渐近行为, Acta Math. Vietnam., 45（2020年）, 第113–135页。[22] L. H ¨ORMANDER, 《线性偏微分算子分析》第一卷, 数学经典丛书, Springer-Verlag, 柏林, 2003年。分布理论与傅里叶分析; 重印自第二版（1990年） [Springer, 柏林; MR1065993（91m:35001a）]。[23] L. H ¨ORMANDER, 《线性偏微分算子分析》第三卷, 数学经典丛书, Springer, 柏林, 2007年。伪微分算子; 重印自1994年版。[24] C.-Y. HSIAO, 《多复变量中的投影》, M´em. Soc. Math. Fr.（新辑）, （2010年）, 第131页。[25] C.-Y. HSIAO, Bergman核渐近行为与Kodaira嵌入定理的纯解析证明, 载于《复分析与几何》, Springer数学与统计学论文集第144卷, Springer, 东京, 2015年, 第161–173页。[26] C.-Y. HSIAO, 高次幂CR线丛的Szeg˝o核渐近行为与CR流形上的Kodaira嵌入定理, 《美国数学学会回忆录》, 254（2018年）, 第v+142页。[27] C.-Y. HSIAO AND R.-T. HUANG, G不变Szeg˝o核渐近行为与CR约化, Calc. Var. Partial Differential Equations, 60（2021年）, 论文第47号, 共48页。[28] C.-Y. HSIAO, X. LI, AND G. MARINESCU, 具有圆群作用的CR流形的等变Kodaira嵌入, Michigan Math. J., 70（2021年）, 第55–113页。[29] C.-Y. HSIAO, X. MA, AND G. MARINESCU, CR流形上的几何量子化, Commun. Con- temp. Math., 25（2023年）, 第73页, 论文第2250074号。[30] C.-Y. HSIAO AND G. MARINESCU, 低能形式的谱函数与半正大线丛的Bergman核的渐近行为, Comm. Anal. Geom., 22（2014年）, 第1–108页。[31] C.-Y. HSIAO AND G. MARINESCU, 低能形式的Berezin-Toeplitz量子化, Comm. Partial Differential Equations, 42（2017年）, 第895–942页。[32] C.-Y. HSIAO AND G. MARINESCU, 低能形式上Szeg˝o投影的奇点, J. Differential Geom., 107（2017年）, 第83–155页。

[33] J. J. KOHN，《伪凸 CR 流形上的 $\partial_b$ 估计》，载于《伪微分算子及其应用》（美国印第安纳州圣母大学，1984），《纯数学研讨会论文集》第43卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1985年，第207–217页。[34] J. J. KOHN，《切向柯西-黎曼算子的值域》，《杜克数学杂志》，53（1986），第525–545页。[35] G. LEBEAU，《L. Boutet de Monvel 结果的一个证明》，载于《代数与解析微局部分析》，Springer 数学与统计学论文集第269卷，Springer，Cham，2018年，第541–574页。[36] L. LEMPERT，《将严格伪凸域嵌入球中》，《美国数学杂志》，104（1982），第901–904页。[37] L. LEMPERT，《将柯西-黎曼流形嵌入球面》，《国际数学杂志》，1（1990），第91–108页。[38] L. LEMPERT，《关于三维柯西-黎曼流形》，《美国数学会杂志》，5（1992），第923–969页。[39] A. LOI 和 G. PLACINI，《任意萨斯基安结构都可由嵌入球面来逼近》，arXiv:2210.00790，（2022年）。[40] E. LØW，《将严格伪凸域嵌入多圆盘与球中，以及到多圆盘与球中的适当全纯映射》，《数学杂志》，190（1985），第401–410页。[41] X. MA 和 G. MARINESCU，《全纯Morse不等式与 Bergman 核》，《数学进展》第254卷，Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，2007年。[42] G. MARINESCU 和 N. YEGANEFAR，《某些强伪凸CR流形的可嵌入性》，《美国数学会汇刊》，359（2007），第4757–4771页。[43] A. MELIN 和 J. SJ ¨OSTRAND，《具有复值相位函数的傅里叶积分算子》，载于《傅里叶积分算子与偏微分方程》（国际学术会议，尼斯大学，尼斯，1974），《数学讲义》，第459卷，Springer，柏林，1975年，第120–223页。[44] L. ORNEA 和 M. VERBITSKY，《紧Sasakian流形的嵌入》，《数学研究快报》，14（2007），第703–710页。[45] G. TIAN，《代数流形上一组极化 K¨ahler 度量》，《微分几何杂志》，32（1990），第99–130页。[46] C. VAN COEVERING，《渐近锥形 Ricci 平坦 K¨ahler 流形的例子》，《数学杂志》，267（2011），第465–496页。[47] S. ZELDITCH，《Szeg˝o 核与 Tian定理》，《国际数学研究通知》，（1998年），第317–331页。伍珀塔尔大学，第四学院——数学与自然科学，Gaussstraße 20，42119 伍珀塔尔，德国 电子邮箱：hherrmann@uni-wuppertal.de 或 post@hendrik-herrmann.de 中央研究院数学研究所，天文数学大楼，罗斯福路四段1号，台北10617，台湾 电子邮箱：chsiao@math.sinica.edu.tw 或 chinyu.hsiao@gmail.com 科隆大学，数学研究所，魏耶尔塔尔86-90，50931 科隆，德国 “西米翁·斯托伊洛”数学研究所，罗马尼亚科学院，布加勒斯特，罗马尼亚 电子邮箱：gmarines@math.uni-koeln.de 科隆大学，数学研究所，魏耶尔塔尔86-90，50931 科隆，德国 电子邮箱：wshen@uni-koeln.de