arXiv:2303.17344v1 [math.AT] 30 Mar 2023

# 拓扑 Hochschild 同调、截断 Brown-Peterson 谱与拓扑 Sen 算子

S. K. Devalapurkar

摘要。本文研究截断 Brown-Peterson 谱的 $E_3$-形式相对于某些 Thom 谱 $X(p^n)$ 的拓扑 Hochschild 同调（这些 Thom 谱由 Ravenel 引入，并由 Devinatz-Hopkins-Smith 用于幂零性定理的证明）。我们证明了 Bökstedt 的计算 $\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p) \simeq \mathbf{F}_p[\Omega S^3]$ 和 $\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p) \simeq \mathbf{Z}_p[\Omega S^3\langle 3\rangle]$ 的拓扑类比。我们还构造了 Bhatt-Lurie-Drinfeld 的 Sen 算子的拓扑类比，并研究一种高色数扩张。这些“拓扑 Sen 算子”的行为由 Cohen-Moore-Neisendorfer 纤维化的 Serre 谱序列中的微分决定。

目录

1. 引言 3 1.1. 概述 3 1.2. 一些补充 9 1.3. 致谢 10 2. THH 的计算 11 2.1. 回顾 $X(p^n)$ 11 2.2. 相对于 $X(p^n)$ 计算 THH 12 2.3. 变体：在更深的底空间上计算 THH 25 3. 拓扑 Sen 算子 33 3.1. 构造拓扑 Sen 算子 33 3.2. 一些相对于 $X(p)$ 和 $\Theta$ $41$ 的 THH 计算 3.3. 与 $\widetilde{p}$-德拉姆复形的关系 51 3.4. 附带讨论：Segal猜想 58 3.5. 附带讨论：Cartier 同构 60 4. 与形式群模叠的关系 65 4.1. 拓扑 Sen 算子在 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ $65$上的体现 4.2. 比较相对于 $T(n)$ 和 $T(n+1)$ 的 THH 69 附录 A. 实 K 理论谱和 tmf 的类比 76 附录 B. $\widehat{\Omega}^{\mathbb{p}}$ 整数环$/p^n$ $84$ 的另一种计算

本工作的部分内容是在作者获得 PD Soros Fellowship 和 NSF DGE-2140743 资助期间完成的。
本文远非最终版本，因此非常欢迎大家提出任何评论和改进建议。我会将重大更新发布到 arXiv，而较小的修订则上传到我的个人网站；请前往该网站查看最新版本。

附录 C. $W[F^n]$和 $W^\times[F^n]$的卡蒂埃对偶参考文献 88
96

## 1. 引言

**1.1. 概述**。固定一个素数 $p$。Bökstedt 的一项基本计算[**Bö85**] 表明，$\pi_*$THH($\mathbb{F}_p$) 同构于一个多项式环 $\mathbb{F}_p[\sigma]$，其中含有 $|\sigma| = 2$。Hahn-Wilson 最近的研究表明，只要改为相对于复 bordism 谱 MU 而非球谱进行计算，这种多项式现象在更高高度上依然存在。具体而言，[**HW20** 的定理 E] 指出，若 BP⟨$n$⟩ 是截断 Brown-Peterson 谱的一个 $\mathbb{E}_3$-形式，则 $\pi_*$THH(BP⟨$n$⟩/MU) 是定义在 $\pi_*$BP⟨$n$⟩ 上、由偶数次生成元生成的多项式代数。此外，第一个这样的生成元是二重悬挂 $\sigma^2(v_{n+1})$。

本文将证明，若改为考虑相对于 Ravenel 谱 $X(p^n)$ 的 THH，“多项式 THH”现象依然成立。该谱由[**Rav84**] 引入，并由 [**DHS88**] 用于幂零性定理的证明。受 [**Dev23a**], 启发，本文的核心论点是：许多涉及相对于球谱研究 $\mathbb{F}_p$- 代数或 $\mathbb{Z}_p$-代数的陈述，在研究相对于 $X(p^n)$ 的 BP⟨$n-1$⟩-代数或 BP⟨$n$⟩-代数时，都有自然的推广。本文提出的许多结果，源于这样一种观点：应当存在整数 $p$-进霍奇理论的色层类比（其中以色层元素 $v_n$替代 $p$；见图 1）[1]。

$\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环 $X(p^n)$ 是 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-映射 ΩSU($p^n$) $\to$ ΩSU $\simeq$BU 的 Thom 谱，因此 $X(1) = S^0$ 和 $X(\infty)$ = 复 bordism 谱 MU。正如 MU$^{(p)}$ 分裂为 BP 的移位直和一样，谱 $X(p^n)^{(p)}$ 也分裂为一个以 [2] $T(n)$ 表示的 $\mathbb{E}_1$-环的移位直和。若 $\mathscr{C}$ 是一个左 $X(p^n)$-线性 $\infty$-范畴，那么 [**DHL**$^+$**23**的推论 2.9 和推论 3.7] 保证了定义相对拓扑 Hochschild 同调 THH($\mathscr{C}/X(p^n)$) 是有意义的；此外，THH($\mathscr{C}/X(p^n)$) 还具有一个 $S^1$-作用。[3]

我们的主要结果是 Bökstedt 的计算的一个类比。若 $R$ 是一个环谱，令 $R[B\Delta_n]$ 表示自由的 $R$-模，其同伦群同构于除幂代数 $\pi_*(R)\langle y_i | 1 \le i \le p^n - 1,\ i \neq p^k\rangle$ 其中 $|y_j| = 2j$。[4] 从直观上说，$R[B\Delta_n]$ 是“$\prod_{i=1}^{n}$SU($p^i$ −1)/SU($p^{i-1}$) 的分类空间”上的 $R$-链；因此，若 $X$ 是另一个空间，我们将用 $R[B\Delta_n \times X]$ 表示$R[B\Delta_n] \otimes_R R[X]$。固定截断 Brown-Peterson 谱 BP⟨$n-1$⟩ 的一个 $\mathbb{E}_3$-形式（由 [**HW20** 的定理 A]保证存在）。受[**Dev23a**], 的结果启发，并利用 [**AR05, BR05**], 的计算，我们证明：

**定理** (定理 2.2.4(a))。存在一个 $p$-完备等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n \times \Omega S^{2p^n+1}]$$

[1]我还想请读者参阅 https://www.royalacademy.org.uk/art-artists/work-of-art/prismatic-colour-wheel；不过我希望我们的图 1 在数学上更有启发性！[2]这不是 $v_n$-自映射的望远镜！参见警告 2.1.6。[3]我们提醒读者，即使 $\mathscr{C}$ 具有幺半 $\infty$-范畴的结构，THH($\mathscr{C}/X(p^n)$) 也很少能从 $\mathscr{C}$ 继承任何乘法结构，因为 $X(p^n)$ 不具有 $\mathbb{E}_3$-环的结构（见注 2.1.3）。[4]贡献 $B\Delta_n$ 在本文中基本不发挥任何实际或有意义的作用。如果 $T(n) \subseteq X(p^n)^{(p)}$ 具有 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数的结构，那么它在下文等价中的出现便可移除。我们坚信这是可能的（甚至足以将其表述为猜想 2.1.9！），因此建议读者初读时忽略 $B\Delta_n$ ——同时将 $X(p^n)$ 替换为 $T(n)$。

$\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-模；特别地，存在一个 $p$-完备同构

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \simeq \pi_*\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n][\theta_n],$$

其中 $\theta_n \in \pi_{2p^n}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 是 $\sigma^2(v_n)$。

此外，存在 $p$-完备同构

$$\pi_*\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \cong \pi_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n])[\![\hbar]\!][\theta_n]/(\theta_n\hbar - v_n),$$

$$\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \cong \pi_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n]),$$

其中 $\hbar \in \pi_{-2}\mathrm{BP}\langle n\rangle^{hS^1}$。在映射 $\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \to \mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU})$ 下，$v_n \in \pi_{2p^n-2}\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的像可识别为映射 $\mathrm{MU}^{tS^1} \to \mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU})$ 下 $v_n \in \pi_{2p^n-2}\mathrm{MU}^{tS^1}$ 的像。

**注释 1.1.1.** 如果 $T(n) \subseteq X(p^n)(p)$ 具有 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数结构（猜想 2.1.9），那么定理 2.2.4 将给出更简洁的表述：$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\Omega S^{2p^n+1}]$，且 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \cong \pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}$。映射$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \to \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU})$ 是单射，并将源识别为 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU})$ 的子模 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\sigma^2(v_n)]$。

定理 2.2.4 推出以下结果；对于 $n=0$，这是 [**PV19**] 主要结果的一个非常特殊的情形：

**推论 (**命题 3.3.8**).** 令 $R = \mathrm{BP}\langle n\rangle[\mathbf{Z}^j_{\geq 0}]$ 为 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 上的平坦多项式环，并将其视为一个 $\mathbf{Z}^j_{\geq 0}$-分次的 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-$\mathrm{BP}\langle n\rangle$-代数。那么，存在一个 $p$-完备的 $\mathbf{Z}^j_{\geq 0}$-分次模同构，并配备一个来自 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n] \cong \pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的映射：

$$\pi_*\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}((R/v_n)/X(p^n)) \cong \pi_*\mathrm{HP}^{\mathrm{gr}}(R/\mathrm{BP}\langle n\rangle)[B\Delta_n].$$

这里，上标 gr 表示在 $\mathbf{Z}^j_{\geq 0}$-graded谱中进行的 ***Tate*** 构造。

**注释 1.1.2**。 定理 2.2.4 很快推出了 $K(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$ 的红移（见推论 2.2.9）。当 $n=0$ 时，定理 2.2.4(a) 的第一部分恢复了 Bök- stedt 对 $\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p)$ 的计算，因为 $\mathrm{BP}\langle -1\rangle = \mathbf{F}_p$ 和 $X(0) = S^0$。当 $p=2$ 时，利用 [**Dev23a**，注释 3.1.9]，定理 2.2.4 的陈述可以简化；例如，我们得到以下加法 等价和同构：对于 $n=1$，我们有

$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_2/T(1)) \simeq \mathbf{Z}_2[\sigma^2(v_1)],\ \pi_*\mathrm{TP}(\mathbf{Z}_2/T(1))^\wedge_2 \simeq \pi_*(\mathrm{ku}^{tS^1})^\wedge_2.$$

由于 $\mathrm{tmf}_1(3)$ 是 $\mathrm{BP}\langle 2\rangle$ 的一种形式，且由 [**LN14**]，给出（其中 $n=2$），我们有

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ku}_2^\wedge/T(2)) \simeq \mathrm{ku}_2^\wedge[\sigma^2(v_2)],\ \pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{ku}_2^\wedge/T(2))^\wedge_2 \simeq \pi_*(\mathrm{tmf}_1(3)^{tS^1})^\wedge_2.$$

我们还证明了 Bökstedt 的计算 [**Bö85**] 关于 $\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)$ 的一个类似结果：

**定理 (**定理 2.2.4(b)**).** 存在一个 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$-模的等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))^\wedge_p \cong \mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]^\wedge_p \oplus \left(\bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{2jp^{n+1}-1}\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]/pj\right)^\wedge_p.$$

此外，$\pi_{2p^{n+1}-3}\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))^\wedge_p$ 检测类 $\sigma_n \in \pi_{2p^{n+1}-3}X(p^n)$，该类见于 [**Dev23a**，引理 3.1。12]。

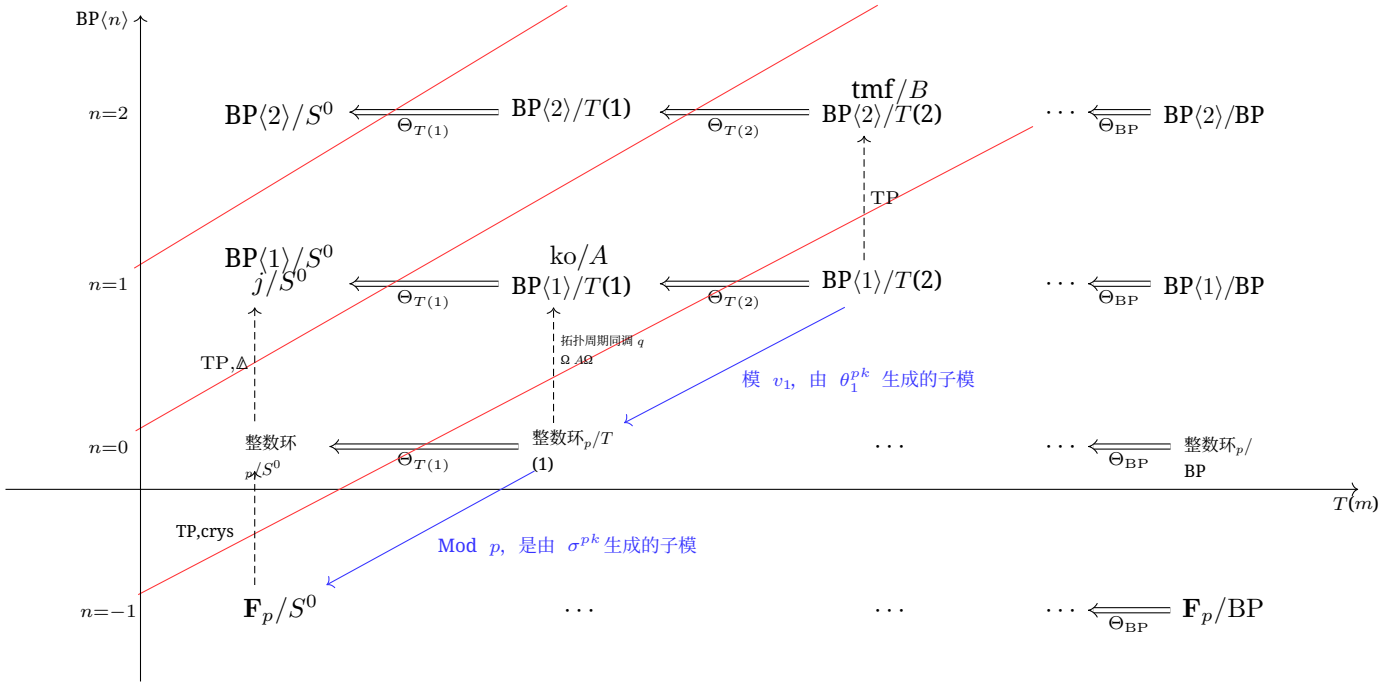



图 1. 本文所提出的启发式图示，其中为简便起见，我们假设 $T(m)$ 具有带框架的 $E_2$-环结构。

• 夹在斜率为 1 的对角线之间（由一条红线划分）的谱呈现出相似的结构行为。这里，$A$ 和 $B$ 在 [**Mah79**] 中进行了研究（其中 $A$ 记作 $X_5$），另见 [**Dev19**，构造 3.1], 和 [**HM02**]。

• 水平双箭头表示定理 3.1.4 的拓扑 Sen 算子，即映射 $\mathrm{THH}(-/T(n-1)) \to \mathrm{THH}(-/T(n))$ 的下降谱序列。这与 Cohen-Moore-Neisendorfer 映射 $\Omega^2 S^{2p^n+1} \to S^{2p^n-1}$ 密切相关。

• 从 $(n, n-1)$ 到 $(n, n)$ 的（略微错开的）竖直虚线表示定理 2.2.4 中的 $p$-完备化同构 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \cong \pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}$。从 (0, 0) 到 (0, 1) 的另一条竖直箭头是将 $\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p)$ 辨识为 $\tau_{\geq 0}(j^{t_{\text{整数环}^{/p}}})$，这将出现在与 Arpon Raksit 的后续工作中。（此处，$j$ 是连通复像 J 谱。）这一等价已由 Bökstedt-Madsen 在 [**BM94**] 中的奠基性工作所预示。

• 向下倾斜的蓝色箭头表示，$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/T(n+1))/v_n$ 是由 $\theta_n^{pk}$for $k \geq 0$ 生成的 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))$ 的子模。有关使用 EHP 序列解释这一现象的内容，请参见例 4.2.2、注 4.2.4 和例 4.2.6。

• 这些列会无限延伸（即，对于 $m > n$，$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(m))$）。不过，图示被截断了，因为这些项无法比 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))$ 本身揭示更多信息。“例外”是最后一列，其中从 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{BP})$ 到 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$ 的下降可以通过 $p$-典型 Witt 环概形从代数几何的角度加以描述。

**注 1.1.3.** 如果将定理 2.2.4(b) 左边的 $X(p^n)$ 替换为 $X(p^{n+1}-1)$，右边唯一的变化就是将 $B\Delta_n$ 替换为 $B\Delta_{n+1}$。我们还提及定理 2.2.4 的以下一个较温和的变体（见 (4)）：$\mathrm{F}_p[v_{n-j},\cdots,v_{n-1}]$-模 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))/(p,\cdots,v_{n-1-j})$ 同构于 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\Omega S^{2p^n+1}\times B\Delta_j]/(p,\cdots,v_{n-1-j})_*$ 与由类 $\lambda_{j+1}$、$\cdots$、$\lambda_n$ 生成的一个外代数的张量积，其中 $|\lambda_m|=2p^m-1$。我们还在附录 A 中证明了定理 2.2.4 对实 K 理论谱 ko 和 tmf 的类似结论。例如，如果谱 $A$ 和 $B$ [**Dev23a** 第 3] 节提升为 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，则存在 2-完备等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ko}/A)\simeq \mathrm{ko}\oplus\left(\bigoplus_{j\geq 1}\Sigma^{8j-1}\mathrm{ko}/2j\right),$$

$$\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}/B)\simeq \mathrm{tmf}\oplus\left(\bigoplus_{j\geq 1}\Sigma^{16j-1}\mathrm{tmf}/2j\right).$$

**注 1.1.4.** 如果猜想 2.1.9（或者更确切地说，只要求 $T(n)$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环结构的较弱版本）成立，那么就可以从定理 2.2.4(b) 中消去 $B\Delta_n$ 的贡献：也就是说，将存在一个 $p$-完备等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/T(n))\simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle\oplus\bigoplus_{j\geq 1}\Sigma^{2jp^{n+1}-1}\mathrm{BP}\langle n\rangle/pj.$$

提醒读者，上述所有已证明的等价都只是加法意义上的，因此不能直接用来研究与 THH 相关的代数栈（通过 [**HRW22**] 的偶过滤定义）。作为这一现象一个或许更易理解的例子（见注 2.3.16），注意到由于 $\mathrm{F}_2$ 是一个由 $\mathrm{E}_1$-映射 $\mathrm{U}(2)\to\mathrm{BGL}_1$(连通 K 理论谱) 所确定的 Thom 谱，因此存在一个等价 $\mathrm{HH}(\mathrm{F}_2/\mathrm{ku})\simeq\mathrm{F}_2[\mathrm{BU}(2)]$；然而，这无法提升为 $\mathrm{F}_2$-代数的等价，因为右侧甚至显然都不是一个环！

在例 4.2.2、注 4.2.4 和例 4.2.6 中，我们使用 EHP 序列来解释定理 2.2.4 给出的 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^{n+1}))$ 和 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 计算中的相似性。事实上，这段讨论揭示了截断 Brown-Peterson 谱中更普遍的结构一致性（直观示意参见图 1）：

**Slogan 1.1.5** （精确表述见注 4.2.3 和注 4.2.5）。如果 $n\geq j-1$，那么 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 作为 $\mathrm{E}_1$-$X(p^j)$- 代数的结构（即 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^j))$ ）映照出 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 作为 $\mathrm{E}_1$-$X(p^{j-1})$-代数的结构（即 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^{j-1}))$）；后者又映照出 $\mathrm{BP}\langle n-j\rangle$ 作为球谱上的 $\mathrm{E}_1$-代数的结构（即 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-j\rangle)$）。

设 $\mathscr{C}$ 是一个左 $X(p^n)$-线性 $\infty$-范畴。那么，从相对于 $X(p^n)$ 的 THH 到相对于 $X(p^n-1)$ 的 THH 的下降谱序列如下：

**定理** (定理 3.1.4)。存在一个映射 $\Theta_{\mathscr{C}}\colon\ \Sigma^{-2p^n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))\to\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))$，使得存在一个余纤维序列

$$(1)\qquad \mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n-1))\xrightarrow{\iota}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))\xrightarrow{\Theta_{\mathscr{C}}}\Sigma^{2p^n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n)),$$

其中映射 $\iota$ 是 $S^1$-等变的，而 $\iota$ 的余纤维（至少在非等变意义下）可识别为 $\Sigma^{2p^n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))$。

**注 1.1.6.** 受 [**BL22a, Dri22**], 的启发，我们将映射 $\Theta_{\mathscr{C}}$ 称为拓扑 *Sen* 算子；其构造受到 [**Dev23a**] 关于 BP⟨$n$⟩与 Cohen-Moore-Neisendorfer 型纤维序列 (11) 之间关系的工作的启发。当 $\mathscr{C}$ =左模$_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle}$时，定理 2.2.4 表明，映射 $\Theta$ 将

$$\Theta : \theta_n^j \mapsto jp\theta_n^{j-1}.$$

当 $n = 1$ 时，它的行为因此类似于作用在 $\mathbb{Z}_p$ 的衍射霍奇复形上的 Sen 算子，该复形计算 $\overline{\mathbb{\Delta}}_{\mathbf{Z}_p}\{*\}$。

**注 1.1.7.** 在附录 A（见注 A.24）中，我们描述了（1）的一个四元数类比：将 $X(n)$ 替换为 Thom 谱 $X_{\mathbf{H}}(n)$。该谱是定义在 $\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n))$ 上的典范辛丛的 Thom 谱，此辛丛由 Bott 周期性给出的映射 $\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)) \to \Omega(\mathrm{SU}/\mathrm{Sp}) \simeq \mathrm{BSp}$ 得到。

在构造 2.3.1 中，我们定义了一个 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环 $J(p)$，它允许一个 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-映射 $J(p) \to X(p)$，使得 $\mathrm{THH}(T(1)/J(p)) \simeq T(1)[J_{p-1}(S^2)]$。$J(p)$ 的底层 $\mathbb{E}_1$-环是 $S[\mathbb{Z}] = S[t^{\pm 1}]$，其中有 $|t| = 0$，但它们作为 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环并不相同。引入 $J(p)$ 的原因在于，$\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p))$ 是由一个次数为 2 的类 $x$ 生成的多项式环，而该类是 $\theta \in \pi_{2p}\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/X(p))$ 的 $p$ 次根。更精确地说，存在一个等价 $\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p)) \simeq \mathbb{Z}_p[\Omega S^3]$，使得映射 $\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/X(p))$ 由 Hopf 映射 $\Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1}$ 的 $\mathbb{Z}_p$-链诱导。在构造 2.3.9 中，我们还构造了两个 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环（分别是 $\Omega\mathrm{U}(2)$ 和 $\Omega\mathrm{Spin}(4)$ 上的 Thom 谱）；当 $p = 2$ 时，它们对 ku 起到 $J(p)$ 的作用。

我们为任意的 $J(p)$-线性$\infty$-范畴 $\mathscr{C}$构造如下与 (1) 类似的余纤维序列：

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)) \xrightarrow{\Theta'_{\mathscr{C}}} \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)).$$

事实证明，将上述余纤维序列模 $p$ 化后，可得到以下重要例子：

**例 1.1.8.** 若 $\mathscr{C}$ 是一个 $\mathbb{Z}_p$-线性 $\infty$-范畴，则存在一个余纤维序列（见变式 3.1.10）

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \xrightarrow{\iota} \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\Theta'} \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p). \tag{2}$$

当 $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}^{\mathbf{Z}_p}$ 时，映射 $\Theta'$ 对同伦的作用由映射 $\mathbb{F}_p[\sigma] \to \Sigma^2\mathbb{F}_p[\sigma]$ 给出，该映射将 $\sigma^j \mapsto j\sigma^{j-1}$ 发送至相应对象。另有一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \xrightarrow{\iota} \mathrm{HP}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p/\mathbf{F}_p) \xrightarrow{\Theta'} \mathrm{HP}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p/\mathbf{F}_p). \tag{3}$$

若对于一个动画 $\mathbb{Z}_p$-代数 $R$，有 $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}_R$，我们预期 (2) 和 (3) 中的映射保持动机滤过。此时取 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}[-2i]$，便会得到以下余纤维序列，其中涉及 $R$ 和 $R/p$ 的棱镜上同调上 Nygaard 滤过的伴随分次部分：

$$(\mathscr{N}^i\hat{\mathbb{\Delta}}_R)/p \to \mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p} \to \mathrm{F}_{i-1}^{\mathrm{conj}}\mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p},$$
$$\overline{\mathbb{\Delta}}_R/p \to \mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p} \to \mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p}.$$

Hodge-Tate 上同调上的此类余纤维序列确实存在，并且可以使用 [**BM22**] 和 [**BL22a** 的方法纯代数地构造，见命题 6.48]；参见（19）和（21）。

我们还通过显式计算证明：

**命题**（具体陈述见例 3.3.3 和命题 3.3.11）。存在一个同构 $\pi_*$拓扑周期同调(Z$_p[t]/X(p)$) $\cong \pi_*$周期循环同调(BP$\langle 1\rangle[t]$/BP$\langle 1\rangle$)。

此外，映射 $\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/X(p^n)) \to \mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 在 $K(n)$-局部化后是一个等价，并且猜想 *2.2.18* 蕴含，经过 *Nygaard* 型完备化（至多如此）后，$L_{K(n)}\mathrm{TP}(-/X(p^n))$是$\mathbf{A}^1$-不变的。

我们还有：

猜想（猜想 *3.1.14* 和猜想 *3.3.5*）。设 $R$ 是一个动画 *Z*$_p$-代数，并令 $F^{\mathrm{conj}}_\star\widehat{\Omega}^{\mathbb{D}}_R$ 表示 [*BL22a* 构造 *4.7*.1]中的共轭滤过（$p$-完备）衍射霍奇复形。那么，*THH*$(R/J(p))$ 带有一个动机滤过，使得 $gr^i_{\mathrm{mot}}$*THH*$(R/J(p)) \simeq (F^{\mathrm{conj}}_i\widehat{\Omega}^{\mathbb{D}}_R)[2i]$，并且映射 $\Theta'_R$*:* *THH*$(R/J(p)) \to \Sigma^2$*THH*$(R/J(p))$ 保持动机滤过，并在 $gr^i_{\mathrm{mot}}$ 上诱导映射 $\Theta + i$*:* $F^{\mathrm{conj}}_i\widehat{\Omega}^{\mathbb{D}}_R \to F^{\mathrm{conj}}_{i-1}\widehat{\Omega}^{\mathbb{D}}_R$。

类似地，*THH*$(R/X(p))$ 带有一个动机滤过，使得 $gr^i_{\mathrm{mot}}$*THH*$(R/X(p)) \simeq (F^{\mathrm{conj}}_{pi}\widehat{\Omega}^{\mathbb{D}}_R)[2pi] \otimes_R R[$*BSU*$(p-1)]$。此外，*TP*$(R/X(p))$ 带有一个动机滤过 $F^\star_{\mathrm{mot}}$*TP*$(R/X(p))$，使得 $gr^i_{\mathrm{mot}}$*TP*$(R/X(p)) \simeq \widehat{\mathbb{\Delta}}_{R/\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]}[2i] \otimes_R \epsilon^R$，其中 $\widehat{\mathbb{\Delta}}_{R/\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]}$ 是 $\widetilde{p}\Omega_R$ 的 *Nygaard* 完备化。

在第 3 节中，我们通过一些例子补充猜想 3.1.14（例如，$R$ 是一个 $p$-完备的完美概形环，$R =$Z$/p^n$ 对于奇数 $p$，$R$ 是一个混合特征 $(0,p)$ 的完备离散赋值环，以及 $R =$ Z$_p[t]$）。

**注 1.1.9**。对于 $R =$ Z$/p^n$ 的情形，我们给出衍射霍奇复形 $\widehat{\Omega}^{\mathbb{D}}\mathbf{z}_{/p^n}$ 的“两种”计算；一种利用衍射霍奇复形的抽象性质（这是 Bhatt 向我们解释的），另一种（见附录 B）则通过环 $W$(Z$_p$) 中的具体计算得到。特别地，在推论 3.2.15 中，我们细化了 [**BL22b** 的例 5.15] 中的计算，证明 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{Z}/p^n} \cong$G$_a^\sharp$/G$_m^\sharp$ 是 Z$/p^n$ 上的代数栈之间的一个等价。

在第3.4节中，我们还研究了相对于 $J$(*p*) 和 $T(n)$ 的 THH 的 Segal 猜想类比。一个有趣的推论（命题 3.4.7）是：若 $R$ 是一个 $p$-挠元自由的离散交换环，且 $R/p$ 正则诺特并且对 $n \gg 0$ 有 $L\Omega^n_R = 0$，那么 [**BL22a**，备注 4.7.4] 和猜想 3.1.14 表明，$R$ 满足相对于 $J$(*p*) 的 THH 的某个版本的 Segal 猜想。

在命题 3.5.3 中，我们证明了任意 E$_2$-环上的平坦多项式代数的 Hochschild 同调中的 Cartier 同构类比，并说明它特化为若干已知 Cartier 同构例子的同伦类比。（这很可能是某些专家熟知的结果，但我们未能找到相关出处。）

命题（命题 *3.5.3*）。设 $R$ 是一个 $E_2$-环。那么存在一个 $S^1$-等变映射 $\mathfrak{C}$*: HH(*$R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}$*)* $\to$*HH(*$R[t]/R$*)*$^{t\mathbf{Z}/p}$，将 $t \mapsto t^p$ 送至其像，其中 $S^1$ 通过剩余的 $S^1/\mu_p$-作用作用于 *HH(*$R[t]/R$*)*$^{t\mathbf{Z}/p}$，而在 *HH(*$R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}$*)* 上，则通过 *Hochschild* 同调上的对角作用以及在 $R^{t\mathbf{Z}/p}$ 上的剩余 $S^1/\mu_p$-作用作用。若将 $t$ 赋予权 *1*，则 $\mathfrak{C}$ 诱导出一个 $S^1$-等变等价 *HH(*$R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}$*)*$_{\mathrm{wt}\le m} \to$*(HH(*$R[t]/R$*)*$^{\mathrm{wt}\le mp}$*)*$^{t\mathbf{Z}/p}$，这是分次 $R^{t\mathbf{Z}/p}$-模之间的等价。

在第4节中，我们从形式群模叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 的角度描述拓扑 Sen 算子。我们首先描述 THH 的一种代数类比。这由 Bökstedt 的 Adams-Novikov 类比

谱序列给出：若 $R$ 是一个 $p$-局部同伦交换环，且 $\mathrm{MU}_*(R)$ 集中在偶数次，则可以定义一个叠 $\mathcal{M}_R$，其相干上同调是 $R$ 的 Adams-Novikov 谱序列的 $E_2$页（参见 [**DFHH14**，第 9]章）。

**命题** (注记4.1.5)。 若$\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(R)$ 表示 [**HRW22**] 在$\mathrm{THH}(R)$ 上的偶过滤的伴随分次（当 $R$ 为拟合成时，它恢复了 [**BMS19**] 的$\mathrm{THH}(R)$ 上的动机滤过），则存在一个谱序列：

$$\pi_*\mathrm{HH}(\mathcal{M}_R/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}) \Rightarrow \pi_*\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(R).$$

相对THH也有类似结果。

在大多数例子中，这个谱序列表现得基本上与 Bökstedt 谱序列相同。特别地，若 $R \to R'$ 是一个 $p$-局部同伦交换环之间的映射，且它们的 MU-同调集中在偶数次，则 $\mathrm{HH}(\mathcal{M}_R/\mathcal{M}_{R'})$ 可视为 $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(R/R')$ 的“Adams-Novikov-Bökstedt 关联分次”。受此观点启发，我们将定理 3.1.4 的拓扑 Sen 算子类比描述为与 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 相关的代数栈上的 Gauss-Manin 联络（见例 4.1.11）：

**定理** (例 4.1.11 和变体 4.1.13)。 叠 $\mathcal{M}_{T(n)}$ 同构于由带有阶数为 $\leq p^n$ 的 $p$-典型坐标的分次 $p$-典型形式群构成的模叠。此外，定理 ***3.1.4*** 的 ***Adams-Novikov*** 类比是一个纤维序列

$$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n-1)}) \to \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n)}) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{mot}}} \Sigma^{2p^n,p^n}\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n)})$$

与任意叠 $X \to \mathcal{M}_{T(n)}$ 相关联，其中 $\Sigma^{n,\,w}$ 表示同调次数为 $n$、权为 $w$ 的移位。

类似地，存在一个纤维序列

$$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}) \to \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{J(p)}) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{mot}}} \Sigma^{2,1}\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{J(p)})$$

与任意叠 $X \to \mathcal{M}_{J(p)}$ 相关联。

**注释 1.1.10**。 在附录 A（命题 A.23 和注释 A.24）中，我们还研究了上述纤维序列的四元数类比。这一描述关键地依赖于扭子纤维化 $\mathbb{C}P^{2n-1} \to \mathbb{H}P^{n-1}$，它在坐标中由映射 $[z_1 : \cdots : z_{2n}] \mapsto [z_1 + z_2\mathbf{j} : \cdots : z_{2n-1} + z_{2n}\mathbf{j}]$ 给出。

**1.2. 一些补充**。 在猜想 2.2.18 中，我们提出，$\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的识别可以扩展为如下谱等价：$\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n]$。

**猜想** (猜想 2.2.18)。 谱 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 具有一个 $S^1$-等变 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$-模结构，且同构 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \cong \pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}$ 提升为谱等价 $\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}$。

这一讨论表明，可以将这一对 $(\pi_0\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}, ({}^{[p]}/_{(\hbar)\hbar}))$ 视为晶体棱柱 $(\mathbb{Z}_p, (p))$ 的高阶色谱类比，其中 $\hbar$ 是 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的复定向，而 $[p](\hbar)$ 是其 $p$-级数。注意，这一对 $(\pi_0\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}, (\frac{[p](\hbar)}{\hbar}))$ 并无理由自然地具有棱镜结构。

最后，一个值得探究的问题是，Slogan 1.1.5 能否用于证明 [**Lee22**猜想 6.1]。朝这个方向迈出的第一步，是证明

在 Slogan 1.1.5 的结构统一性下，THH(BP$\langle n\rangle/X(p^j)$)、THH(BP$\langle n-1\rangle/X(p^{j-1})$)、.....以及 THH(BP$\langle n-j\rangle$) 上的拓扑 Sen 算子也能彼此匹配。（另请参见注 2.2.5。）

本文提出了若干可拓展本文所述工作的方向，并将其记录为猜想 2.1.9、猜想 2.2.18、猜想 2.3.22、与之密切相关的猜想 3.3.5、猜想 3.3.16 以及猜想 A.2。我们希望强调，与 [**Dev23a** 不同，定理 A 和推论 B], 是本文的主要结果，完全不依赖任何条件；在我们看来，这些结果为本文及 [**Dev23a**] 中提出的猜想提供了有力证据。

**1.3. 致谢**。 我谨向 Ben Antieau、Elden Elmanto、Jeremy Hahn、Ishan Levy、Sasha Petrov、Arpon Raksit 和 Andy Senger 致谢，感谢他们与我探讨这些及相关主题；感谢 Bhargav Bhatt 向我解释引理 3.2.11；感谢 Akhil Mathew 告诉我余纤维序列 (21)；感谢 Andy Baker 与我讨论定义 A.18 中的谱 $X_{\mathbf{H}}(n)$。本文中的一些想法始于我于 2022年3月 访问西北大学期间，我尤其感谢 Ben Antieau 给我这次访问的机会；若不是他，我绝不可能理解 [**BL22a**] ——更广泛地说，也无法理解这一研究领域。我也要感谢我的导师 Dennis Gaitsgory 和 Mike Hopkins，感谢他们给予我的建议、支持和影响。

## 2. THH 的计算

### 2.1. $X(p^n)$ 回顾。

**定义 2.1.1** (Ravenel, [**Rav84**, 第 3] 节)。令 $X(n)$ 表示 $E_2$-映射 $\Omega SU(n) \subseteq$ 分类空间 BU $\xrightarrow{J} B\mathrm{GL}_1(S)$ 的 Thom 谱，其中第一个映射来自 Bott 周期性。

**例 2.1.2.** $E_2$-环 $X(1)$ 是球谱，而 $X(\infty)$ 是复 bordism 谱 MU。由于映射 $\Omega SU(n) \to$ 分类空间 BU 在维数 $\leq 2n-2$ 上是等价，同样的结论也适用于映射 $X(n) \to$ MU； $X(n)$ 中有元素在其同伦中未被 MU 检测到的第一个维数是 $2n-1$。换言之，记作$\pi_*\mathrm{MU} =$整数环$[b_1, b_2, \cdots]$，其中 $|b_i| = 2i$，则类 $b_1$、$\cdots$、$b_{n-1}$ 可提升到 $X(n)$；存在一个包含映射 $\mathbb{Z}[b_1, \cdots, b_{n-1}] \subseteq \pi_* X(n)$。

**注 2.1.3.** $X(n)$ 上的 $E_2$-结构不能延拓为 $E_3$-结构（参见 [**Law19**，例 1.5.31]）。

在素数 $p$ 处局部化后，谱 MU 分裂为 BP 的若干悬挂谱的楔和；这一分裂来自 MU 上的 Quillen 幂等元。$X(n)$ 谱也同样如此，详见 [**Rav86** 第 6 节：乘法映射$X(n)_{(p)} \to X(n)^{(p)}$ 由一个多项式 $f(x) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} a_i x^{i+1}$确定，其中$a_0 = 1$ 且 $a_i \in \pi_{2i}(X(n)^{(p)})$。利用这一点，可以在 $X(n)^{(p)}$ 上定义 Quillen 幂等元 $\epsilon_n$ 的截断形式（参见 [**Hop84**，命题 1.3.7]），从而得到 $X(n)^{(p)}$ 的一个直和项。我们在下述定理中概述所需结果。

**定理 2.1.4**。设 $n$ 满足 $p^n \leq k \leq p^{n+1} - 1$。则 $X(k)^{(p)}$ 分裂为谱 $T(n) = \epsilon_{p^n} \cdot X(p^n)^{(p)}$ 的若干悬挂谱的楔和。

- $T(n)$ 具有 $\mathbf{E}_1$-环的结构，使得映射 $T(n) \to X(p^n)$ 是 $\mathbf{E}_1$-环的映射（参见 [**BL21**，第 7 节。5]）。
- 映射 $T(n) \to \mathrm{BP}$ 在维数 $\leq |v_{n+1}| - 2$ 上是一个等价，因此存在一个不可分解元素 $v_i \in \pi_* T(n)$，它映射到 $\pi_*\mathrm{BP}$ 中的不可分解元素（对于 $0 \leq i \leq n$）。特别地，根据 (*a*)，存在包含映射 整数环 $_{(p)}[v_1, \cdots, v_n] \subseteq \pi_* T(n)$。
- 映射 $T(n) \to \mathrm{BP}$ 在 BP-同调上诱导出包含映射 $\mathrm{BP}_* T(n) = \mathrm{BP}_*[t_1, \cdots, t_n] \subseteq \mathrm{BP}_*(\mathrm{BP})$，并分别在模 2 同调和模 $p$ 同调上诱导出包含映射 $\mathbf{F}_2[\zeta_1^2, \cdots, \zeta_n^2] \subseteq \mathbf{F}_2[\zeta_1^2, \zeta_2^2, \cdots]$和 $\mathbf{F}_p[\zeta_1, \cdots, \zeta_n] \subseteq \mathbf{F}_p[\zeta_1, \zeta_2, \cdots]$。

**例 2.1.5**。$E_1$-环 $T(1)$ 是 $E_1$-映射 $\Omega S^{2p-1} \to B\mathrm{GL}_1(S)$ 的 Thom 谱，该映射在 $\Omega S^{2p-1}$ 的底胞腔上检测 $\alpha_1 \in \pi_{2p-2} B\mathrm{GL}_1(S) \cong \pi_{2p-3} S$。由于 $p\alpha_1 = 0$， $p\alpha_1$ 的一个零伦定义了一个类 $v_1 \in \pi_{2p-2} T(1)$。在单位映射 $T(1) \to \mathrm{BP}$ 下，此类被映射为同名类 $v_1 \in \pi_{2p-2}\mathrm{BP}$。

**警告 2.1.6.** 遗憾的是，定理 2.1.4 导致了极其严重的符号冲突，因为 $T(n)$ 也常用于表示有限型 $n$ 谱上的一个 $v_n$-自映射的望远镜。在本文中，我们将仅用 $T(n)$ 表示定理 2.1.4 中的 $E_1$-环。我们建议使用记号 $\mathrm{Tel}(n)$ 表示一个 $v_n$-自映射的望远镜。

**记号 2.1.7.** 若 $R$ 是一个交换环，我们用 $\Lambda_R(x)$ 表示由类 $x$ 生成的外 $R$-代数，并用 $R\langle x\rangle$ 表示由类 $x$ 生成的除幂 $R$-代数。记号 $\gamma_j(x)$ 表示 $x$ 的第 $j$ 个除幂，因此 $j!\gamma_j(x) = x^j$。我们也常用 $R\langle x\rangle$ 表示 $R\langle x\rangle$ 的底层 $R$-模。

**构造 2.1.8.** 定义一个空间 $\Delta_n$ 使得

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{SU}(p^i - 1)/\mathrm{SU}(p^{i-1}),$$

并令 $\overline{\Delta}_i$ 表示该乘积中的第 $i$ 项。若 $R$ 是一个环谱，记作$R[\Omega\Delta_n]$ 表示 $\mathrm{E}_2$-多项式 $R$-代数 $R[x_i | 1 \leq i \leq p^n - 1, i \neq p^k - 1]$，其中 $|x_i| = 2i$。令 $R[B\Delta_n]$ 表示增广 $R[\Omega\Delta_n] \to R$的二重Bar构造，因此它是一个 $\mathrm{E}_2$-$R$-余代数，其同伦群同构于 $\pi_*(R)\langle y_i | 1 \leq i \leq p^n - 1, i \neq p^k\rangle$ 其中 $|y_j| = 2j$。如引言所述，从本质上讲，$R[B\Delta_n]$ 应视为“ $\prod_{i=1}^{n} \mathrm{SU}(p^i-1)/\mathrm{SU}(p^{i-1})$ 的分类空间”上的 $R$-链；为此，若 $X$ 是另一个空间，我们记作 $R[B\Delta_n \times X]$ 表示 $R[B\Delta_n] \otimes_R R[X]$；若 $R$ 是一个离散环，我们通常记 $\mathrm{H}_*(B\Delta_n; R)$ 表示 $\pi_* R[B\Delta_n]$。因子 $R[B\Delta_n]$ 在本文中主要会带来令人遗憾的麻烦。注意 $\Delta_1 = \mathrm{SU}(p-1)$。于是，我们有 $X(p^n) = T(n)[\Omega\Delta_n]$ 以及 $X(p^n - 1) = T(n-1)[\Omega\Delta_n]$，因此

$$\mathrm{H}_*(X(2^n); \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2[\zeta_1^2, \cdots, \zeta_n^2] \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathrm{H}_*(\Omega\Delta_n; \mathbf{F}_p),$$
$$\mathrm{H}_*(X(p^n); \mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p[\zeta_1, \cdots, \zeta_n] \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathrm{H}_*(\Omega\Delta_n; \mathbf{F}_p),$$

对于 $X(p^n - 1)$ 也类似。

人们认为 $T(n)$ 具有更多结构（另见 [**AQ17**] ，其中有一些讨论）：

**猜想 2.1.9.** $\mathscr{Q}_1$-环结构在 $T(n)$ 上可扩展为带框架的 $\mathbf{E}_2$-环结构。

**注记 2.1.10.** 当 $p = 2$ 时，$X(2) = T(1)$ 和 $T(2)$ 都具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数结构，见 [**DHL+23**，注记 3.8]：它们分别是 $\Omega\mathrm{Sp}(1) \simeq \Omega S^3$ 和 $\Omega\mathrm{Sp}(2)$ 上 U丛 的 Thom 谱。这些 U丛由复合映射的二重循环定义：

$$\mathrm{BSp}(n) \to \mathrm{BSU}(2n) \to \mathrm{BSU} \simeq B^3\mathrm{U}.$$

**命题 2.1.11** ([**DHL+23**，推论 2.9 和推论 3.7])。 $X(n)$ 上的 $\mathbf{E}_2$-结构可细化为 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-结构。

**推论 2.1.12**。设 $\mathscr{C}$ 是一个 $X(n)$-线性 $\infty$-范畴。则 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))$ 获得一个 $S^1$-等变谱的结构，并带有一个 $S^1$-等变单位映射 $X(n) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))$。

**2.2.** 相对于 $X(p^n)$**的** THH**计算**。除非另有明确说明，本节（以及后续各节）中的所有纤维序列都将在 $p$ 处局部化。

**回顾 2.2.1**。 存在同构

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_2) &\cong \mathbf{F}_2[\zeta_1^2,\cdots,\zeta_n^2,\zeta_{n+1},\cdots]\\ &\cong \mathrm{H}_*(T(n);\mathbf{F}_2)\otimes_{\mathbf{F}_2}\mathbf{F}_2[\zeta_j|j\geq n+1],\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_p) &\cong \Lambda_{\mathbf{F}_p}[\tau_j|j\geq n]\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{F}_p[\zeta_1,\zeta_2,\cdots]\\ &\cong \mathrm{H}_*(T(n);\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{F}_p[\zeta_j|j\geq n+1]\otimes_{\mathbf{F}_p}\Lambda_{\mathbf{F}_p}[\tau_j|j\geq n], p>2.\end{aligned}$$

注意，H*(BP⟨$n-1$⟩; $\mathbf{F}_2$) 的"$Q_0$-Margolis 同调"（即将 $\mathrm{Sq}^1$ 视为作用于 H*(BP⟨$n-1$⟩; $\mathbf{F}_2$) 上的微分时所得的同调）恰好是 H*($T(n)$; $\mathbf{F}_2$)，因为 $\mathrm{Sq}^1$ 是导子，且 $\mathrm{Sq}^1(\zeta_j) = \zeta_{j-1}^2$。

回顾 2.2.2。我们需要回忆一些来自 [HW**20**] 的结果。首先， [HW20，定理 A] 表明存在 BP⟨$n$⟩ 的一个 $\mathbf{E}_3$-形式。首先， [HW20，定理 2.5.4] 指出， $\pi_*$THH(BP⟨$n-1$⟩/MU) 同构于一个定义在 $\pi_*$BP⟨$n-1$⟩ 上、由无穷多个生成元生成的多项式代数，其中第一个生成元记作 $\sigma^2(v_n)$。类 $\sigma^2(v_n)$ 的次数为 $2p^n$。最后， [HW20，定理 5.0.1]指出，存在一个 $\mathbf{Z}_p[v_1,\cdots,v_{n-1}]$-代数同构 $\pi_*\mathrm{TC}^-$(BP⟨$n-1$⟩/MU) $\simeq(\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU}))[\![\hbar]\!]$。此外，在映射 $\mathrm{MU}^{hS^1}\to\mathrm{TC}^-$(BP⟨$n-1$⟩/MU) 下，类 $v_n\in\pi_*\mathrm{MU}^{hS^1}\cong(\pi_*\mathrm{MU})[\![\hbar]\!]$ 被映射为 $\sigma^2(v_n)\hbar$。特别地， $\pi_*\mathrm{TC}^-$(BP⟨$n-1$⟩/MU) 能检测这些类： $p$、 $v_1$、 $\cdots$、 $v_{n-1}$、 $v_n:=\sigma^2(v_n)\hbar$。类似地，在映射 $\mathrm{MU}^{tS^1}\to$ TP(BP⟨$n-1$⟩/MU) 下， $\pi_*$TP(BP⟨$n-1$⟩/MU) 能检测这些类： $p$、 $\cdots$、 $v_n$；而在映射 $\mathrm{MU}^{t\mathbf{Z}/p}\to$THH(BP⟨$n-1$⟩/MU)$^{t\mathbf{Z}/p}$ 下， $\pi_*$THH(BP⟨$n-1$⟩/MU)$^{t\mathbf{Z}/p}$ 能检测这些类： $p$、 $\cdots$、 $v_{n-1}$。

**记号 2.2.3.** 若 $R$ 是一个复定向环谱，我们用 $\hbar$ 表示 $R$的复定向，并将其视为 $\pi_{-2}R^{hS^1}$中的一个类。该记号的动机来自几何表示论（当 $R$是一个 $\mathbf{Z}_p$-代数时），其中复定向 $\hbar\in\mathrm{H}^2(\mathbf{C}P^\infty;R)$ 起到量子化参数的作用。

本节的主要结果是如下关于 THH($\mathbf{F}_p$) 和 THH($\mathbf{Z}_p$) 的 Bökstedt 定理的类似物。

**定理 2.2.4.** 固定截断 *Brown-Peterson* 谱 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$和$\mathrm{BP}\langle n\rangle$的 $\mathbf{E}_3$-形式。我们有：

（*a*） 存在如下 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-模的一个 $p$-完备等价：

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))\simeq\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n\times\Omega S^{2p^n+1}].$$

记 $\theta_n\in\pi_{2p^n}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 为对应于映射 $E: S^{2p^n}\to\Omega S^{2p^n+1}$ 的类。在 $S^1$-等变映射$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))\to\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU})$下，类 $\theta_n$ 被映到回顾 *2.2.2* 中的类 $\sigma^2(v_n)$ 。此外还存在 $p$-完备同构

$$\begin{aligned}\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/m} &\cong \mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/m}[B\Delta_n]_*,\\ \pi_*\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) &\cong \mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]_*[\![\hbar]\!][\tfrac{v_n}{\hbar}]\\ &\cong \mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]_*[\![\hbar]\!][\theta_n]/(\theta_n\hbar-v_n),\\ \pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) &\cong \mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n]_*\\ &\cong \mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]_*(\!(\hbar)\!).\end{aligned}$$

这里，等式 $\theta_n\hbar = v_n$ 应理解为模去可分解元。这些同构满足以下性质：在映射下

$$\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \to \mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU}),$$
$$\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \to \mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/\mathrm{MU}),$$

左侧的类 $\{v_i\}_{0\le i\le n}$ 被映射到右侧同名的类（通过回顾 *2.2.2*）。

*(b)* 存在一个 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$-模等价：

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))^\wedge_p \cong \mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]^\wedge_p \oplus \left(\bigoplus_{j\ge 1}\Sigma^{2jp^{n+1}-1}\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]/p^{v_p(j)+1}\right)^\wedge_p.$$

特别地，存在一个加法等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))/p \cong \mathrm{BP}\langle n\rangle[S^{2p^{n+1}-1}\times\Omega S^{2p^{n+1}+1}\times B\Delta_n]/p.$$

此外，$\pi_{2p^{n+1}-3}\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))^\wedge_p$ 检测类 $\sigma_n \in \pi_{2p^{n+1}-3}X(p^n)$ 来自 [**Dev23a**，引理 3.1.12]。

**注 2.2.5**。令 $v_{[j,m)}$ 表示 $\pi_*\mathrm{BP}$ 中的正则序列 $v_j$、$\cdots$、$v_{m-1}$。那么，用于证明定理 2.2.4 的论证实际上给出了以下（稍微一般一些的）结果：对于 $j \le n$，存在一个 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*$-模同构

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))/v_{[0,n-j)} \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_j]_*[\theta_n]/v_{[0,n-j)}\otimes_{\mathbf{F}_p}\Lambda_{\mathbf{F}_p}(\lambda_{j+1},\cdots,\lambda_n), \tag{4}$$

其中 $|\lambda_i| = 2p^i - 1$。当 $j = 0$ 时，(4) 恢复了 [**ACH21**，命题 2.9]。为简洁起见，下文仅讨论 $j = n$ 和 $j = n-1$ 的情形。类似地，利用 $T(1)$（分别是 $T(2)$ ⁽²⁾）是 $\Omega S^{2p+1}$（分别是 $\Omega\mathrm{Sp}(2)$）上的 Thom 谱这一事实，可得到等价

$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)/p \simeq \mathbf{F}_p[S^{2p-1}\times\Omega S^{2p+1}],$$
$$\mathrm{THH}(\mathrm{ku})/(2,\beta) \simeq \mathbf{F}_2[\mathrm{Sp}(2)\times\Omega S^9].$$

**注 2.2.6.** 若记 $\pi_*\mathrm{MU}$ = 整数环$[x_1, x_2, \cdots]$，其中 $|x_i| = 2i$，并定义 $\mathrm{MU}\langle n-1\rangle$ = $\mathrm{MU}/(x_n, x_{n+1}, \cdots)$，则可以类似地证明一个与定理 2.2.4 类似的结论，其中以 $\mathrm{MU}\langle n-1\rangle$替换 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$。也就是说，若 $n$ 是$p$的幂，则存在一个等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{MU}\langle n-1\rangle/X(n))^\wedge_p \simeq \mathrm{MU}\langle n-1\rangle[\Omega S^{2n+1}]^\wedge_p$$

的 $\mathrm{MU}\langle n-1\rangle$-模。还存在一个 $p$-完备同构

$$\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{MU}\langle n-1\rangle/X(n))^\wedge_p \cong \pi_*(\mathrm{MU}\langle n\rangle^{tS^1})^\wedge_p.$$

我们预期（见下文的猜想 2.2.18），这可以进一步细化为一个 $p$-完备等价 $\mathrm{TP}(\mathrm{MU}\langle n-1\rangle/X(n))^\wedge_p \simeq (\mathrm{MU}\langle n\rangle^{tS^1})^\wedge_p$。

**例 2.2.7.** 对于 $\mathbf{Z}_p$，可以将定理 2.2.4(a) 写得非常明确（注意，关于 $\mathbf{Z}_p$ 的定理 2.2.4(b) 即 Bök斯泰特结果）。例如，

$$\pi_*\mathrm{TC}^-(\mathbf{Z}_p/T(1)) \cong \mathbf{Z}_p[v_1][\![\hbar]\!][\theta]/(\hbar\theta = v_1).$$

将 $\mathrm{BP}\langle 1\rangle$ 视为 $(\mathrm{ku}^\wedge_p)^{h\mathbf{F}_p^\times}$，并令 $\beta \in \pi_2\mathrm{ku}$ 为 Bott 类。那么，$\pi_*\mathrm{ku}^{tS^1} \cong \mathbf{Z}[\beta]((\hbar))$ 与 $\mathbf{Z}[\![q-1]\!]((\hbar))$ 同构，其中 $q = 1+\beta\hbar$ 的次数为 0。若 $\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]$ 如 **BL22a** 推论 3.8 中所述，则 $\pi_*\mathrm{BP}\langle 1\rangle^{tS^1} \cong \mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]((\hbar))$。如果我们

假设（为简单起见） $T(1)$ 是一个 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数，那么用 $T(1)$ 替换 $X(p)$，可得:

$$\pi_*\mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p/T(1)) \cong \mathbf{Z}_p[\![\tilde{p}]\!]((\hbar)).$$

这里，$\mathbf{F}_p^\times$按照 [**BL22a** 命题 3.8.6]中所述作用于 $\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]$；事实上，$\mathbf{Z}_p^\times$ 对 $\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!] = \pi_0(\mathrm{ku}_p^\wedge)^{tS^1}$ 的作用与 Adams 运算对 $\pi_*(\mathrm{ku}_p^\wedge)^{tS^1}$的作用一致，这一点可通过计算 $CP^\infty$的 $p$-完备复 K 理论上的 Adams 运算来验证。事实上，若 $g \in \mathbf{Z}_p^\times$，则

$$\psi^g(\hbar) = \frac{1}{g}\sum_{j\geq 1}\binom{g}{j}\beta^{j-1}\hbar^j = \frac{1}{g}\frac{(1+\beta\hbar)^g - 1}{\beta},$$

因此

$$\psi^g(q) = \psi^g(1+\beta\hbar) = 1 + g\beta\psi^g(\hbar) = (1+\beta\hbar)^g = q^g.$$

**备注 2.2.8.** 回忆 [**Lur15** 第 3 节，存在一个由剪切给出的 $\mathbf{E}_2$-幺半群函子 $\mathrm{sh}: \mathrm{Sp}^{\mathrm{gr}} \to \mathrm{Sp}^{\mathrm{gr}}$：该函子将 $M_\bullet \mapsto M_\bullet[2\bullet]$发送到。为简单起见，假设 $T(n)$ 具有 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数结构。从这个角度来看，定理 2.2.4(a) 的一部分仅仅表明存在一个非分次 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-模的等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \simeq \mathrm{sh}(\mathrm{gr}_{v_n}\mathrm{BP}\langle n\rangle),$$

其中，$\mathrm{sh}(\mathrm{gr}_{v_n}\mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 表示 $v_n$-进滤过 $\mathrm{F}^\star_{v_n}\mathrm{BP}\langle n\rangle$ on $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的伴随分次的剪切。

定理 2.2.4 直接推出以下结论。

**推论 2.2.9** ([**HW20**，推论 5.0。2])。 固定截断 *Brown-Peterson* 谱 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 的一个 $\mathbf{E}_3$-形式。我们有 $L_{K(n)}K(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle) \neq 0$。

证明。存在一个迹映射 $K(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle) \to \mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$，它是 $\mathbf{E}_2$-环的映射。因此，只需证明存在一个非零的 $L_{K(n)}\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$-模；我们可以取模 $L_{K(n)}\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$，根据定理 2.2.4(a)，它非零。（事实上，定理 2.2.4(a) 蕴含 $\pi_*L_{K(n)}\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 同构于 $\mathbf{Z}_p[v_1,\cdots,v_{n-1},v_n^{\pm 1}]^\wedge_{(p,\cdots,v_{n-1})}((\hbar))$ 与 $B\Delta_n$ 的整数环 $p$-同调的张量积。）□

**注释 2.2.10**。 容易看出，$T(n) \to \mathrm{BP}\langle n\rangle$ 是一个幂零扩张。特别地，根据 Dundas-Goodwillie-McCarthy 定理 [**DGM13**，定理 7.2.21]，这意味着下面的方块是笛卡尔的:

$$\begin{array}{ccc} K(T(n)) & \longrightarrow & K(\mathrm{BP}\langle n\rangle) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TC}(T(n)) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(\mathrm{BP}\langle n\rangle)。 \end{array}$$

请注意，这里还有一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TC}(T(n)) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(\mathrm{BP}\langle n\rangle) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TC}^-(T(n)) & \longrightarrow & \mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n\rangle), \end{array}$$

而定理 2.2.4 和定理 3.1.4 提供了一种归纳方法来计算底行。因此，可以将本文的结果视为完整计算 $K(\mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 的第一步。描述 $\mathrm{TC}(T(n))$ 将非常有趣。例如，我们预期对于一般的奇素数，谱 $\mathrm{TP}(T(1))$ 与 $\mathrm{E}_1$-商 $S/\!\!/\alpha_{p/p}$ 密切相关。（这里，$\alpha_{p/p} \in \pi_{2p(p-1)-1}(S)$ 是 $\alpha$-族中的一个元素。）

然而，关于映射 $T(n) \to \mathrm{BP}\langle n\rangle$，我们还能说得更多：事实上，$\ker(\pi_* T(n) \to \pi_* \mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 中的每个元素都是幂零的。为此，首先注意到该映射是有理等价（确切地说，它在 $Q_0$-Margolis 同调上是等价），因此 $\mathrm{fib}(T(n) \to \mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 是挠元。此外，映射 $T(n) \to \mathrm{BP}\langle n\rangle$ 在同伦上是满射（因为它是一个环映射，且生成元 $p, v_1, \cdots, v_n \in \pi_* \mathrm{BP}\langle n\rangle$ 可提升到 $T(n)$），因此映射 $\mathrm{fib}(T(n) \to \mathrm{BP}\langle n\rangle) \to T(n)$ 在同伦上诱导单射。若 $x \in \pi_* T(n)$ 属于映射 $\mathrm{fib}(T(n) \to \mathrm{BP}\langle n\rangle) \to T(n)$ 的像，则 $x$ 在 Hurewicz 映射 $\pi_* T(n) \to \mathrm{MU}_* T(n)$ 下的像也为挠元；但 $\mathrm{MU}_* T(n) \cong \mathrm{MU}_*[t_1, \cdots, t_n]$ 是无挠的，因此根据 [DHS88][5] 的主定理，$x$ 必为幂零。这正是所需的结论。

更一般地，回忆 [**Dev23a**，表 1], 此处重现为表 1（关于这些谱的定义，参见 [**Mah79**] for $A$，其中记作 $X_5$； [**Dev19**，构造 3.1] and [**HM02**] for $B$； [**MRS01**] for $y(n)$；以及 [**AQ19**] for $y_{\mathbf{Z}}(n)$）。

| 高度 | 0 | 1 | 2 | $n$ | $n$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 基 $\mathrm{E}_1$-环 $R$ | $(S^0)^\wedge_p$ | $A$ | $B$ | $T(n)$ | $y(n)$ | $y_{\mathbf{Z}}(n)$ |
| 设计的色谱 $\Theta(R)$ | $\mathbf{Z}_p$ | bo | tmf | $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ | $k(n)$ | $k_{\mathbf{Z}}(n)$ |

表 1。 $R$ 与 $\Theta(R)$ 之间的关系，类似于 $T(n)$ 与 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 之间的关系。

与上述情形类似，若 $R$ 是一个 $\mathrm{E}_1$-环（如表 1 第二行所示），而 $\Theta(R)$ 是其对应的设计谱，则可以证明 $\ker(\pi_* R \to \pi_* \Theta(R))$ 中的每个元素都是幂零的。因此，例如，存在一个笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} K(R) & \longrightarrow & K(\Theta(R)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{TC}(R) & \longrightarrow & \mathrm{TC}(\Theta(R)). \end{array}$$

此外，定理 2.2.4 的证明表明，若 $R$ 具有 $\mathrm{E}_2$-环结构（通常并非如此[6]），则 $\mathrm{THH}(\Theta(R)/R)$ 将与 $R \oplus \bigoplus_{j \geq 1} \Sigma^{2jp^{n+1}-1} R/pj$ 在 $p$-完备意义下等价（其中 $n$ 是 $R$的“高度”）。若 $R = y(n)$ 或 $y_{\mathbf{Z}}(n)$，那么根据定理 2.2.4，只要假设猜想 2.1.9，并将 $\mathrm{THH}(\Theta(R)/R)$ 理解为 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/T(n)) \otimes_{T(n)} R$，这一结果便确实成立。不过，这并未涵盖 $R = A$、$B$的情形；关于这些情形的进一步讨论，请参见附录 A。

[5]从某种意义上说，这是一个相当反常的论证，因为幂零性定理证明的核心，恰恰依赖于证明 $\ker(\pi_* T(n) \to \pi_* \mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 中的每个元素都是幂零的。[6]例如，由于 Steenberger 恒等式（该恒等式涉及 Dyer-Lashof 运算 $Q_1$ 对对偶Steenrod代数的作用；参见 [**BMMS86**，定理 III.2.2 和 III.2.3]），$y(n)$ 无法具有 $\mathrm{E}_2$-环结构。

**注 2.2.11**。 自然会问，能否将定理 2.2.4 推广，以描述当 $m \neq n$时的 THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^m)$)。对于 $m < n$，我们尚不知道完整的描述（在消去 $p$、$\cdots$、$v_{n-m-1}$之后，参见注 2.2.5）；不过，下面定理 3.1.4 的技巧为解决这一问题提供了一种概念性方法。对于 $m > n$，定理 2.2.4 的证明很容易推出存在一个加法同构

$$\begin{aligned}\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^m)) &\cong \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*} \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*\langle y_i | p^n < i \leq p^m\rangle \\ &\cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\Omega S^{2p^n+1}]_*\langle y_i | 1 \leq i \leq p^m \text{ such that } i \neq p^k \text{ for } 0 \leq k \leq n\rangle.\end{aligned}$$

这里，$y_i$ 位于次数 $2i$。例如，若 $n = 0$，除幂因子就只是 BP⟨$n-1$⟩$_*$[BSU($p^m$)]。例如，当 $m \to \infty$时取极限，我们便恢复了这样的结论：THH($\mathrm{F}_p$/MU) $\simeq \mathrm{F}_p[\mathrm{BSU} \times \Omega S^3]_*$。

**注 2.2.12.** 定理 2.2.4(b) 表明

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n-1)) \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n]_* \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n]_{*-2jp^n+1}/p^{v_p(j)+1}.$$

这可与定理 2.2.4(a) 相比较（我们将在第 3 节对此作进一步研究）：与$\pi_*$THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$)相比，$\pi_*$THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n-1)$)的复杂性可理解为源自映射 THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n-1)$) $\to$ THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$)所对应的下降谱序列。注意，$X(p^n) \otimes_{X(p^n-1)} X(p^n) \simeq X(p^n)[\Omega S^{2p^n-1}]$；利用这一点，可以用与定理 2.2.4 证明中类似的方法计算下降谱序列的 $E_2$ 页，其结果为

$$E_2^{*,*} \cong \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))[\epsilon]/\epsilon^2,$$

其中 $|\epsilon| = 2p^n - 1$。计算这些微分，便可在定理 2.2.4(a) 的基础上给出定理 2.2.4(b) 的一种“替代”证明；我们将在下文的评注 2.2.17 中进一步展开。事实上，对于 $j \leq n$，归纳地研究相对于 $X(p^j)$ 的 BP⟨$n-1$⟩ 的 THH，可以从概念上解释 $\pi_*$THH(BP⟨$n-1$⟩) 的计算中出现的微分族，见 **AR05** 第 8], [ 节 **MS93**], 和 **AHL10**]；另见定理 3.1.4 和例 4.1.11。

定理 2.2.4 的证明将分为若干部分。我们先以 $n = 0$,1 为例，说明定理 2.2.4(a)。

对 $n = 0, 1$ 的定理 2.2.4(a) 的证明。我们需要证明存在谱的等价 THH($\mathrm{F}_p$) $\simeq$ $\mathrm{F}_p[\Omega S^3]$ 和 THH($\mathrm{Z}_p/X(p)$) $\simeq \mathrm{Z}_p[\mathrm{BSU}(p-1) \times \Omega S^{2p+1}]$。第一个等价是经典结果（见 **Bö85**]），因此我们来论证第二个等价。存在一个 $p$-局部空间映射 $f : \mathrm{SU}(p) \to \Omega S^3\langle 3\rangle$，它由以下复合映射给出

$$\mathrm{SU}(p) \to \mathrm{SU}(p)/\mathrm{SU}(p-1) \simeq S^{2p-1} \xrightarrow{\alpha_1} \Omega S^3\langle 3\rangle.$$

在 [**Dev23a** 中，注 4.1.4], 我们描述了一个纤维序列（Toda 在 [**Tod62**] 中也已知晓）

$$S^{2p-1} \xrightarrow{\alpha_1} \Omega S^3\langle 3\rangle \to \Omega S^{2p+1}. \tag{5}$$

这诱导出一个 $\mathrm{E}_1$ 空间的纤维序列

$$\Omega\mathrm{SU}(p) \xrightarrow{f} \Omega^2 S^3\langle 3\rangle \to \mathrm{SU}(p-1) \times \Omega^2 S^{2p+1}.$$

现在我们来计算：

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/X(p)) &\simeq \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)\otimes_{\mathrm{THH}(X(p))} X(p)\\ &\simeq \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)\otimes_{\mathbf{Z}_p\otimes\mathrm{THH}(X(p))}\mathbf{Z}_p.\end{aligned}$$

映射 $X(p)\to \mathrm{Z}_p$ 恰好是由 $f\colon\ \Omega\mathrm{SU}(p)\ \to \Omega^2S^3\langle 3\rangle$ 所诱导的映射，因此所需的张量积为 $\mathrm{Z}_p[\Omega S^{2p+1}\times$特殊酉群分类空间 $\mathrm{SU}(p-1)]$, 。□

注记 2.2.13. 回忆，$\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)\ \simeq\ \mathrm{F}_p[\Omega S^3]$ 的计算可由[BCS10] 以及霍普金斯–马霍瓦尔德定理推出；该定理指出，$\mathrm{F}_p$ 是一个 $\mathrm{E}_2$-映射 $\Omega^2S^3\to \mathrm{BGL}_1(S^\wedge_p)$ 的 Thom 谱，该映射在 $\Omega^2S^3$ 的底胞腔上检测 $1-p\in\pi_1\mathrm{BGL}_1(S^\wedge_p)\ \cong \mathrm{Z}_p^\times$。在 [Dev23a 中，我们在无条件的情况下证明，推论 B], 表明 $\mathrm{Z}_p$ 是映射 $\mu:\Omega^2S^{2p+1}\ \to\ \mathrm{BGL}_1(T(1))$ 的 Thom 谱，该映射在 $\Omega^2S^{2p+1}$ 的底胞腔上检测$v_1\in\pi_{2p-1}\mathrm{BGL}_1(T(1))\ \cong\pi_{2p-2}T(1)$。（不同于经典霍普金斯–马霍瓦尔德定理，映射 $\mu$ 不是 $\mathrm{E}_2$-映射。）这一结果意味着，$\mathrm{Z}_p$ 是映射 $\mathrm{SU}(p-1)\times\Omega^2S^{2p+1}\to\mathrm{BGL}_1(X(p))$ 的 Thom 谱；该结果也可用于证明 $n=1$ 的定理 2.2.4(a)。

现在我们转向一般情形下的定理 2.2.4(a)；策略是计算所考虑的每个谱的同调，并运行 Adams 谱序列。对于 $\mathrm{THH}^{t\mathbf{Z}/m}$、$\mathrm{TC}^-$ 和 TP，我们需要 [**BR05** 的“连续同调”，见方程 2.3]。

**命题 2.2.14.** *(a)* 存在同构

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p)\cong\begin{cases}\mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n];\mathbf{F}_2)[\sigma(\zeta_{n+1})] & p=2,\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n];\mathbf{F}_p)[\sigma(\tau_n)] & p>2.\end{cases}$$

*(b)* 存在同构

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p)\cong\begin{cases}\mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n];\mathbf{F}_2)[\sigma(\zeta_{n+2})]\otimes_{\mathbf{F}_2}\Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma(\zeta_{n+1}^2)) & p=2,\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n];\mathbf{F}_p)[\sigma(\tau_{n+1})]\otimes_{\mathbf{F}_p}\Lambda_{\mathbf{F}_p}(\sigma(\zeta_{n+1})) & p>2.\end{cases}$$

*Moreover, there is a Bockstein $\beta:\sigma(\zeta_{n+2})\mapsto\sigma(\zeta_{n+1}^2)$ for $p=2$, and a Bockstein $\beta:\sigma(\tau_{n+1})\mapsto\sigma(\zeta_{n+1})$ for $p>2$.*

证明. 我们先证明 (a)。我们将使用 Bökstedt 谱序列，其形式为

$$E^2_{*,*}=\mathrm{HH}_*(\mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_p)/\mathrm{H}_*(X(p^n);\mathbf{F}_p))\Rightarrow\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p).$$

由于 $\mathrm{H}_*(X(p^n);\mathrm{F}_p)\ \cong\mathrm{H}_*(T(n);\mathrm{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathrm{H}_*(\Omega\Delta_n;\mathrm{F}_p)$，并且 $\mathrm{H}_*(X(p^n);\mathrm{F}_p)$ 在 $\mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathrm{F}_p)$ 上的作用通过映射 $\mathrm{H}_*(X(p^n);\mathrm{F}_p)\ \to\mathrm{H}_*(T(n);\mathrm{F}_p)$ 分解；该映射由将 $\Omega\Delta_n$ 压缩为一点的映射诱导，因此我们在此讨论中将忽略来自 $\Delta_n$ 的贡献。这些项最终只贡献 $\mathrm{H}_*(B\Delta_n;\mathrm{F}_p)$。（因此，以下内容也可理解为对 $\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n));\mathrm{F}_p)$ 的计算；然而，由于猜想 2.1.9 尚未得到证实，谱 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))$ 目前还无法定义。）我们将继续用 $E^2_{*,*}$ 表示 $\mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathrm{F}_p)$ 关于 $\mathrm{H}_*(T(n);\mathrm{F}_p)$ 的 Hochschild 同调群。

回忆，若 $R$ 是任意离散交换环，则存在同构 $\pi_*\mathrm{HH}(R[x]/R)\ \simeq R[x]\otimes\Lambda_R(\sigma x)$ 和 $\pi_*\mathrm{HH}(\Lambda_R(x))\ \simeq\Lambda_R(x)\ \otimes R\langle\sigma x\rangle$。因此

由回顾 2.2.1 可知，我们有

$$E^2_{*,*} = \begin{cases} \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_2)\otimes_{\mathbf{F}_2}\Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma\zeta_j|j\geq n+1) & p=2,\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\Lambda_{\mathbf{F}_p}(\sigma\zeta_j|j\geq n+1)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{F}_p\langle\sigma\tau_j|j\geq n\rangle & p>2. \end{cases}$$

映射 THH(BP⟨$n-1$⟩) $\to$ THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$) 从计算 H$_*$(THH(BP⟨$n-1$⟩)) 的 Bökstedt 谱序列诱导出一个映射，映至我们的谱序列。计算 H$_*$(THH(BP⟨$n-1$⟩)) 的 Bökstedt 谱序列中的微分在 [**AR05** 的命题 5.6], 中得到了计算，其中证明了对于 $p$ 为奇数、 $j\geq p$ 和 $m\geq n$，存在微分

$$d^{p-1}(\gamma_j(\sigma\tau_m)) = \sigma(\zeta_{m+1})\gamma_{j-p}(\sigma\tau_m). \tag{6}$$

[**AR05** 的命题 5.7] 中的论证蕴含

$$E^\infty_{*,*} = \begin{cases} \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_2)\otimes_{\mathbf{F}_2}\Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma\zeta_j|j\geq n+1) & p=2,\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{F}_p[\sigma\tau_j|j\geq n]/(\sigma\tau_j)^p & p>2. \end{cases}$$

计算 H$_*$(THH(BP⟨$n-1$⟩)) 的 Bökstedt 谱序列 $E^\infty$ 页上的扩张由 [**AR05** 的定理 5.12] 确定：其中证明了对于 $j\geq n+1$，有 $(\sigma\zeta_j)^2=\sigma\zeta_{j+1}$（当 $p=2$ 时），以及 $(\sigma\tau_j)^p=\sigma\tau_{j+1}$。这些结果蕴含了 THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$) 的 Bökstedt 谱序列 $E^\infty$ 页上的扩张，所得结果即为该命题所述。

现在我们转向 (b)。计算与 (a) 类似，唯一的区别在于 g Bökstedt 谱序列的 $E^2$-页现在是

$$E^2_{*,*} = \begin{cases} \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle;\mathbf{F}_2)\otimes_{\mathbf{F}_2}\Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma(\zeta^2_{n+1}),\sigma\zeta_j|j\geq n+2) & p=2,\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle;\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\Lambda_{\mathbf{F}_p}(\sigma\zeta_j|j\geq n+1)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{F}_p\langle\sigma\tau_j|j\geq n+1\rangle & p>2. \end{cases}$$

同样地，计算 H$_*$(THH(BP⟨$n-1$⟩)) 的 Bökstedt 谱序列中的微分会在上述 Bökstedt 谱序列中导出微分，并且我们有

$$E^\infty_{*,*} = \begin{cases} \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle;\mathbf{F}_2)\otimes_{\mathbf{F}_2}\Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma(\zeta^2_{n+1}),\sigma\zeta_j|j\geq n+2) & p=2,\\ \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle;\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathbf{F}_p[\sigma\tau_j|j\geq n+1]/(\sigma\tau_j)^p\otimes_{\mathbf{F}_p}\Lambda_{\mathbf{F}_p}(\sigma\zeta_{n+1}) & p>2. \end{cases}$$

同样地，计算 H$_*$(THH(BP⟨$n-1$⟩)) 的 Bökstedt 谱序列的 $E^\infty$-页上的扩张蕴含上述 $E^\infty$-页上的扩张，所得答案即为该命题的结论。Bockstein 算子由以下事实推出：当 $p$ 为奇数时， $\beta(\tau_i)=\zeta_i$；而对于 $p=2$， $\beta(\zeta_i)=\zeta^2_{i-1}$。□

**命题 2.2.15**。存在同构

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^c_*(\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p) &\cong \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n];\mathbf{F}_p)[\![\hbar]\!]\oplus\hbar\text{-torsion},\\ \mathrm{H}^c_*(\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p) &\cong \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n];\mathbf{F}_p)(\!(\hbar)\!),\\ \mathrm{H}^c_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/m};\mathbf{F}_p) &\cong \mathrm{H}_*(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/m}[B\Delta_n];\mathbf{F}_p)(\!(\hbar)\!). \end{aligned}$$

这里， $|\hbar|=-2$，以及 $\hbar$-挠项将在证明中说明。

证明. 与命题 2.2.14 中一样，来自 $\Delta_n$ 的贡献只是 $B\Delta_n$ 的 F$_p$-同调，我们将在计算中忽略这一项。此外，H$^c_*$(THH(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$)$^{t\mathbf{Z}/p^k}$; F$_p$) 的计算与 H$^c_*$(TC$^-$(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$);F$_p$)（以及 H$^c_*$(TP(BP⟨$n-1$⟩/$X(p^n)$); F$_p$)）的计算类似，因此我们只计算后者。（唯一的区别是，下文中的 F$_p$((ℏ)) 将替换为

$\mathrm{F}_p((\hbar))[\epsilon_k]/\epsilon_k^2$。）同调同伦固定点谱序列的 $E^2$ 页给出了计算 $\mathrm{H}^c_*(\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)); \mathrm{F}_p)$ 的结果：

$$E^2_{*,*} \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)); \mathbf{F}_p) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p[\![\hbar]\!]$$
$$\cong \begin{cases} \mathbf{F}_2[\sigma(\zeta_{n+1}), \hbar, \zeta_1^2, \cdots, \zeta_n^2, \zeta_j | j \geq n+1] & p = 2 \\ \mathbf{F}_p[\sigma(\tau_n), \hbar, \zeta_i | i \geq 1] \otimes_{\mathbf{F}_p} \Lambda_{\mathbf{F}_p}[\tau_j | j \geq n] & p > 2. \end{cases}$$

从计算 $\mathrm{H}^c_*(\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle); \mathrm{F}_p)$ 的同调同伦固定点谱序列到上述谱序列存在一个映射，并且 [**BR05** 的命题 6.1] 计算出，对于每个$x \in \mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)); \mathrm{F}_p)$，都有微分 $d^2(x) = \hbar\sigma(x)$。对于 $j \geq n$，以下类存活到第 $E^3$ 页：

$$\zeta'_{j+1} = \zeta_{j+1} + \zeta_j\sigma(\zeta_j) = \zeta_{j+1} + \zeta_j\sigma(\zeta_{n+1})^{2^{n+1-j}},\ p = 2$$
$$\tau'_{j+1} = \tau_{j+1} + \tau_j\sigma(\tau_j)^{p-1},\ p > 2.$$

此外，位于 $p = 2$ 的类 $\sigma(\zeta_{n+1})$ 和位于 $p > 2$ 的类 $\sigma(\tau_n)$ 的（幂）都是简单的$\hbar$-挠元：例如，$\hbar\sigma(\zeta_{n+1})^{2^{n+1-j}}$ 在 $\zeta_j$ 上被一个 $d^2$ 微分消去，而一般幂次的 $\sigma(\zeta_{n+1})$ 的情形可通过对指数作二进制展开得到。由此可得

$$E^3_{*,*} \cong \mathbf{F}_2[\![\hbar]\!][\zeta_1^2, \cdots, \zeta_n^2, \zeta_{n+1}^2, \zeta'_{j+1} | j \geq n+1],\ p = 2,$$
$$E^3_{*,*} \cong \mathbf{F}_p[\![\hbar]\!][\zeta_i | i \geq 1] \otimes_{\mathbf{F}_p} \Lambda_{\mathbf{F}_p}[\tau'_{j+1} | j \geq n],\ p > 2,$$

以及 $\sigma$ 在零过滤中的像（这些类是简单的 $\hbar$-挠元）。我们断言谱序列在 $E^3$ 页退化，由此即可得到所需结果。（例如，在 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p}$ 的情形中，类 $\epsilon_1\hbar^{1-p^n}$ 在 $\mathrm{H}^c_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p}; \mathrm{F}_p)$ 中扮演 $\tau_n$ 的角色，其中 $p$ 为奇数。）与命题 2.2.14 的证明一样，这可由 **BR05** 的命题 6.1] 得出：如果 $\mathrm{H}_*(\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)); \mathrm{F}_p)$ 的同调同伦固定点谱序列中存在微分，那么 $\mathrm{H}_*(\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle); \mathrm{F}_p)$ 的同调同伦固定点谱序列中也会存在相应的微分。

然而，[**BR05** 的命题 6.1] 假设 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 具有 $\mathrm{E}_\infty$-代数结构；这并非必要，因为他们援引 [**BR05** 的命题 5.1] 时，只用到了 $\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle); \mathrm{F}_p)$ 上的 Dyer-Lashof 运算 $Q_0$ 和 $Q_1$ 的存在，而这些运算在任意 $\mathrm{E}_2$-代数的同调中都已存在。因此，只需知道 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$ 具有 $\mathrm{E}_2$-代数结构，这可由我们的假设推出：$\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 是截断 Brown-Peterson 谱的一种 $\mathrm{E}_3$-形式。□

定理 2.2.4(a) 的证明。我们将忽略 $B\Delta_n$ be- low 的贡献：这一项的贡献就是它的同调。我们将首先通过 Adams 谱序列计算 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)$

$$E_2^{*,*} = \mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathscr{A}_*}(\mathbf{F}_p, \mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)); \mathbf{F}_p)) \Rightarrow \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^\wedge_p.$$

利用命题 2.2.14(a)，存在一个换环同构

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathscr{E}(n-1)_*}(\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p[\sigma(\zeta_{n+1})]) \cong \mathbf{F}_p[\sigma(\zeta_{n+1}), v_j | 0 \leq j \leq n-1],$$

其中 $v_j$ 位于双次数 $(s, t-s) = (1, 2p^j - 2)$。Adams谱序列集中于偶总次数中（因此在第 $E_2$ 页退化）。

次数为 $|\zeta_{n+1}|+1=2p^n$ 的类 $\sigma(\zeta_{n+1})$ 记作 $\theta_n$，因此上述计算表明存在一个同构

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))\simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n]_*[\theta_n].$$

由于 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))\simeq \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)\otimes_{\mathrm{THH}(X(p^n))}X(p^n)$，我们看到 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 具有 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$-模结构。存在一个 $\mathbb{E}_2$-映射 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle\to\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$，因此通过标量限制，$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 获得 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-模结构。因此，$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的每个 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*$-模生成元都提升为从 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 的移位到 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的谱映射。此外，由此得到的映射 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n\times\Omega S^{2p^n+1}]\to\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 按构造在同伦上诱导同构，因此我们得到了定理 2.2.4(a) 的第一部分。

对 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/m}$ 的计算与对 $\pi_*\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$（以及 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$）的计算类似；此外，计算 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 将很有启发性，因为 $\pi_*\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的情形只需对命题 2.2.15 中的 $\hbar$-挠项进行记账。存在一个 Adams谱序列

$$E_2^{*,*}=\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathscr{A}_*}(\mathbf{F}_p,\mathrm{H}^c_*(\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p))\Rightarrow\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^\wedge_p,$$

它通常仅条件收敛，但在此情形下强收敛。（这是因为 $\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n));\mathbf{F}_p)$ 有下界且为有限型。）根据命题 2.2.15，存在一个换环同构

$$E_2^{*,*}\cong\mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathscr{E}(n)_*}(\mathbf{F}_p,\mathbf{F}_p((\hbar)))\cong\mathbf{F}_p[v_j|0\le j\le n]((\hbar)),$$

因此，Adams谱序列集中在偶总次数上（因而在 $E_2$-页退化）；这就得到了所需的计算。□

**注 2.2.16.** $\pi_*\mathrm{TC}^-(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的同伦不动点谱序列的 $E_2$-页为

$$E_2^{*,*}=\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n]_*[\theta_n][\![\hbar]\!].$$

由偶性可知，该谱序列在 $E_2$-页退化。定理 2.2.4(a) 的计算告诉我们，$E_\infty$-页上的类 $\hbar\theta_n$ 表示类 $v_n\in\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle$（模可分解元）。

注意，定理 2.2.4(a) 特别指出 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p}\cong\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p}[B\Delta_n]$。存在一个同构 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p}\cong\pi_*\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}$（这一结果已在 [**AMS98**，命题 2.3]，中得到证明，并在 [**DJK+86**，猜想 1.2] 中被猜想可提升为谱等价），因此 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p}\cong\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n]_*((\hbar))$。注意，除非 $n=0$，这与 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))[\theta_n^{-1}]$ 不同构，因为 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))[\theta_n^{-1}]$ 是 $2p^n$- 周期的，而 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p}$ 是 2- 周期的。

定理 2.2.4(b) 的证明。现在我们计算 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))$，这次使用 Bockstein 谱序列。（类似的论证可见于 [**ACH21**]。）同样，我们将忽略 $B\Delta_n$ 下方项的贡献：该项的贡献就是它的同调。为简便起见，我们记作

$$x=\begin{cases}\sigma(\zeta_{n+1}^2) & p=2,\\ \sigma(\zeta_{n+1}) & p>2\end{cases},\ y=\begin{cases}\sigma(\zeta_{n+2}) & p=2,\\ \sigma(\tau_{n+1}) & p>2,\end{cases}$$

使得 $|x| = 2p^{n+1} - 1$ 和 $|y| = 2p^{n+1}$。若 $M$ 是一个（左）BP$\langle n\rangle$-模，令 THH(BP$\langle n\rangle/X(p^n)$; $M$) 表示 THH(BP$\langle n\rangle/X(p^n)$) $\otimes_{\mathrm{BP}\langle n\rangle} M$，这样我们便可非正式地将 THH(BP$\langle n\rangle/X(p^n)$; $\mathrm{F}_p$) 视为 THH(BP$\langle n\rangle/X(p^n)$)/$(p, \cdots, v_n)$。利用命题 2.2.14(b)，可以证明

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n); \mathbf{F}_p) \cong \mathbf{F}_p[x, y]/x^2;$$

我们将利用这一计算和 $n+1$Bock-stein 谱序列来计算 THH(BP$\langle n\rangle/X(p^n)$; BP$\langle n\rangle$)。 $v_0$-Bockstein 谱序列为

(7)
$$E_1^{*,*} = \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n); \mathbf{F}_p)[v_0] \cong \mathbf{F}_p[v_0, x, y]/x^2 \Rightarrow \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n); \mathbf{Z}_p).$$

由命题 2.2.14(b) 中的 Bockstein 计算可知，存在一个 $d_1$-微分

$$d_1(y) = v_0 x, \tag{8}$$

这意味着 $d_1(yv_0^n) = v_0^{n+1}x$ （由 $\mathrm{F}_p[v_0]$-线性性可知）。然而，(8) 并不能立即推出 $y$ 的幂上的微分，因为 THH(BP$\langle n\rangle/X(p^n)$) 不具有环结构（因此该谱序列不是乘法谱序列）。不过，这个问题很容易解决：从计算 $\pi_*$THH(BP$\langle n\rangle$; $\mathrm{Z}_p$) 的 Bockstein 谱序列到上述 Bockstein 谱序列存在一个映射，其 $E_1$ 页为

$$'E_1^{*,*} \cong \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle; \mathbf{F}_p)[v_0].$$

$\mathrm{H}_*$(THH(BP$\langle n\rangle$); $\mathrm{F}_p$) 的计算见 [**AR05**，定理 5.12]；由此可以计算 $\pi_*$THH(BP$\langle n\rangle$; $\mathrm{F}_p$)。这里我们只需注意，类 $x, y \in {E^*_{,1}}^*$ 可沿映射 ${'E^*_{,1}}^* \to {E^*_{,1}}^*$ 提升。我们仍将这些提升记为 $x$ 和 $y$；在 ${'E^*_{,1}}^*$ 中仍存在一个 $d_1$-微分 $d_1(y) = v_0 x$ 。由于 THH(BP$\langle n\rangle$; $\mathrm{Z}_p$) 具有 $\mathrm{E}_2$-环结构，上述谱序列是乘法谱序列。因此，我们可以援引 [**May70**，命题 6.8]，它给出了 $y$ 的幂上的高阶微分。特别地，我们断言：

$$d_{v_p(j)+1}(y^j) = v_0^{v_p(j)+1} x y^{j-1}, \tag{9}$$

在 $\mathrm{F}_p^\times$ 中相差一个单位。通过取以 $p$ 为底的展开，只需在 $j$ 是 $p$ 的幂时证明这个微分，设为 $j = p^k$：于是，(9) 表明 $d_{k+1}(y^{p^k}) = v_0^{k+1} x y^{p^k-1}$。根据 [**May70**，命题 6.8]（针对 $k > 1$），我们有

$$d_{k+1}((y^{p^{k-1}})^p) = v_0 (y^{p^{k-1}})^{p-1} d_k(y^{p^{k-1}}) = v_0 y^{p^k - p^{k-1}} d_k(y^{p^{k-1}});$$

一旦证明了情形 $k = 1$，便可由此归纳推出 (9)。

对于 $p = 2$, [**May70**，命题 6.8] 表明

$$d_2(y^2) = v_0 y d_1(y) + Q_1(d_1(y)) = v_0^2 x y^2 + Q_1(v_0 x).$$

But

$$Q_1(x) = Q_1(\sigma(\zeta_{n+1}^2)) = \sigma(Q_2(\zeta_{n+1}^2)) = \sigma(\zeta_{n+2}^2),$$

这等于零。因此，我们得到 $d_2(y^2) = v_0 x y^2$，正如所需。对于 $p > 2$,[**May70**，命题 6.8] 表明

$$d_2(y^p) = v_0 y^{p-1} d_1(y) + \sum_{1 \le j \le r} j[d_1(y) y^{j-1}, d_1(y) y^{p-j-1}],$$

对于某个整数 $r$。“修正”项是 $v_0$ 倍的若干形如 $[xy^{j-1}, xy^{p-j-1}]$ 的项之和。注意，这个类属于 $\pi_*$THH(BP$\langle n\rangle$; $\mathrm{F}_p$)，但在计算 (7) 时，我们只关心该类在 $\pi_*$THH(BP$\langle n\rangle$; $\mathrm{F}_p$) 中的像

。我们声称， $[xy^{j-1}, xy^{p-j-1}]$ 在$\pi_*$THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$) 中的像为零，因此上面的修正项也为零。为证明这一点，注意到莱布尼茨法则表明，在 $\pi_*$THH(BP⟨n⟩;F$_p$) 中，我们有

$$\begin{aligned}[xy^{j-1}, xy^{p-j-1}] &= x[y^{j-1}, xy^{p-j-1}] + y^{j-1}[x, xy^{p-j-1}] \\ &= x^2[y^{j-1}, y^{p-j-1}] + xy^{p-j-1}[y^{j-1}, x] + y^{p-2}[x, x] + xy^{j-1}[x, y^{p-j-1}].\end{aligned}$$

这里，所有项都只确定到符号；这不会造成影响，因为我们将证明上面求和中的每一项都为零。第一项为零，因为 $x^2 = 0$；第三项为零，因为 $[x, x] = 0$。对于第二项和第四项，我们将更一般地证明，对于任意 $k \geq 0$， $[x, y^k]$ 在 $\pi_*$THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$)中的像为零。莱布尼茨法则蕴含 $[x, y^k] = ky^{k-1}[x, y]$，因此只需证明 $[x, y]$ 在 $\pi_*$THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$)中的像为零。

由于 $[x, y]$ 属于次数 $|x| + |y| + 1 = (2p^{n+1} - 1) + 2p^{n+1} + 1 = 4p^{n+1}$，且$\pi_{4p^{n+1}}$THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$) $\cong$ F$_p\{y^2\}$，若 $[x, y]$ 非零，则必有 $[x, y] \doteq y^2$ 属于 $\pi_*$THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$)。为证明 $[x, y] \dot{\neq} y^2$，注意到 E$_2$-映射 $\iota$: THH(BP⟨n⟩; F$_p$) $\to$ THH(BP⟨n⟩/MU; F$_p$)可经由 THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$)分解。类 $x$ 和 $y$ 属于映射 THH(BP⟨n⟩; F$_p$) $\to$ THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$)的像，而映射 $\iota$将 $x$ 映为零。由于 $\iota$ 是 E$_2$-映射，必有 $\iota([x, y]) = [\iota(x)\ \iota(y)] = 0$；然而， $\iota(y^2) = \iota(y)^2$ 非零。因此， $[x, y] \dot{\neq} y^2$；但由于$\pi_{4p^{n+1}}$THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$; F$_p$)是由 $y^2$张成的一维 F$_p$-向量空间，必有 $[x, y] = 0$。

这番讨论的结论是，(7) 的 $E_r$-页由下式给出

$$E_r^{*,*} = \mathbf{F}_p[v_0, y^{p^{r-1}}]\{1, x, xy, xy^2, \cdots\}/(v_0^i xy^{p^{i-1}j-1}, 1 \leq i \leq r-1, 1 \leq j \leq p-1).$$

特别地， $y$ 的任何幂都无法存活到 $E_\infty$-页；又因为 $v_0$ 表示 $p$，我们可以确定 $v_0$-扩张，从而得到

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n); \mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Z}_p \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \mathbf{Z}_p/p^{v_p(j)+1}\{xy^{j-1}\}. \tag{10}$$

注意， $|xy^{j-1}| = 2jp^{n+1} - 1$。

较高阶的 Bockstein 谱序列（对应 $v_1$、 $\cdots$、 $v_n$）因次数原因都在 $E_1$-页坍缩，下面说明原因。对于 $1 \leq m \leq n$ 的 $v_m$-Bockstein 谱序列，可以对 $m$ 作归纳（基例与归纳步骤的论证相同）。首先注意到， $v_1$、 $\cdots$、 $v_n$ 都在 Bockstein 谱序列中存活，因为 BP⟨n⟩ 是 THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$) 的直和项。特别地，目标为由 $v_i$ 的乘积构成的单项式的乘积的微分不可能存在。因此，由于整数环 $\mathbf{Z}_p[v_1, \cdots, v_m]$-线性，任何微分必定具有如下形式

$$d_r(xy^{j-1}) = v_{i_1}^{r_1} \cdots v_{i_a}^{r_a} v_m^r xy^{k-1}$$

对于某些 $j, k$、指数 $r_1, \cdots, r_a$ 以及 $1 \leq i_1, \cdots, i_a < m$。（更准确地说，它将是上述形式的单项式之和，但这一点并不重要。）但是，$d_r(xy^{j-1})$ 的双次数为 $(t-s, s) = (2jp^{n+1} - 2, r)$，而 $v_{i_1}^{r_1} \cdots v_{i_a}^{r_a} v_m^r xy^{k-1}$ 的双次数为 $(t-s, s) = (2r_1(p^{i_1} - 1) + \cdots + 2r_a(p^{i_a} - 1) + 2r(p^m - 1) + 2kp^{n+1} - 1, r)$。因此，这样的微分不可能存在，因为 $2jp^{n+1} - 2$ 是偶数，而 $2r_1(p^{i_1} - 1) + \cdots + 2r_a(p^{i_a} - 1) + 2r(p^m - 1) + 2kp^{n+1} - 1$ 是奇数。由此，THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$) 的计算可由 (10) 得出。

由于 THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$) $\simeq$ THH(BP⟨n⟩)$\otimes_{\mathrm{THH}(X(p^n))} X(p^n)$，我们看到 THH(BP⟨n⟩/$X(p^n)$) 具有 THH(BP⟨n⟩)-模的结构。这里有一个

$\mathbb{E}_2$-映射 $\mathrm{BP}\langle n\rangle \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle)$，因此通过标量限制，$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))$ 获得了 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$-模结构。于是，$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))$ 的每个 $\mathrm{BP}\langle n\rangle_*$-模生成元都可提升为从 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的移位到 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))$ 的谱映射。此外，所得映射 $\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n] \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{2jp^{n+1}-1}\mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n]/p^{v_p(j)+1} \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n))$ 按构造在同伦群上诱导出一个同构，因此得到定理 2.2.4(b)。□

**注 2.2.17.** 当 $n = 0$ 时，可以将定理 2.2.4(b) 的 Bockstein 计算视为纤维化 (5) 的 Serre 谱序列的一种翻译。假设 $p > 2$。事实上，Serre 谱序列为

$$E^2_{*,*} = \mathrm{H}_*(S^{2p-1}; \mathbf{Z}_p) \otimes \mathrm{H}_*(\Omega S^{2p+1}; \mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Z}_p[x, y]/x^2 \Rightarrow \mathrm{H}_*(\Omega S^3\langle 3\rangle; \mathbf{Z}_p).$$

微分只有一个族，由乘法结构从以下内容确定

$$d^{2p}(y) = px;$$

这意味着 $d^{2p}(y^m) = mpy^{m-1}x$。Serre 谱序列在第 $E^{2p+1}$ 页退化，所得结果恰好是 (10)。事实上，若 $\phi_n : \Omega^2 S^{2p^n+1} \to S^{2p^n-1}$ 是 [**Dev23a** 定义 4.1.1] 意义下的迷人映射（例如 [**CMN79a, CMN79b, Nei81**] 中的 Cohen-Moore-Neisendorfer 映射），则定理 2.2.4(b) 的证明可理解为利用 Cohen-Moore-Neisendorfer 型纤维化的 Serre 谱序列计算 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\mathrm{fib}(\phi_n)]$

$$S^{2p^n-1} \to B\,\mathrm{fib}(\phi_n) \to \Omega S^{2p^n+1}. \tag{11}$$

（11）的 Serre 谱序列与（5）的完全相同：$E^2$ 页为

$$E^2_{*,*} = \mathrm{H}_*(S^{2p^n-1}; \mathbf{Z}_p) \otimes \mathrm{H}_*(\Omega S^{2p^n+1}; \mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Z}_p[x, y]/x^2 \Rightarrow \mathrm{H}_*(B\,\mathrm{fib}(\phi_n); \mathbf{Z}_p).$$

只有一族微分，由以下关系通过乘法确定：

$$d^{2p^n}(y) = px;$$

这意味着 $d^{2p^n}(y^m) = mpy^{m-1}x$，且 Serre 谱序列在 $E^{2p^n+1}$ 页坍缩。因此

$$\mathrm{H}_i(B\,\mathrm{fib}(\phi_n); \mathbf{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_p & i = 0, \\ \mathbf{Z}_p/pk & 2kp^n - 1, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

事实上，定理 2.2.4(b) 意味着存在一个 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-模的等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^{n-1})) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_{n-1} \times B\,\mathrm{fib}(\phi_n)].$$

定理 2.2.4 的计算可以从 [Dev23a] 的结果中预测出来。为简单起见，假设 $p$ 是奇数。根据 [Dev23a，猜想 D 和 E], [Dev23a，推论 B]，存在一个映射 $\Omega^2 S^{2p^n+1} \to \mathrm{BGL}_1(X(p^n))$，其 Thom 谱为 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\Omega\Delta_n]$。这意味着存在一个谱等价 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n \times \Omega S^{2p^n+1}]$；这正是定理 2.2.4(a) 的第一部分。此外，[Dev23a，定理 A] 指出（仍假设上述猜想成立），复合映射 $\mathrm{fib}(\phi_n) \to \Omega^2 S^{2p^n+1} \to \mathrm{BGL}_1(X(p^n))$ 的 Thom 谱为 $\mathrm{BP}\langle n\rangle[\Omega\Delta_n]$。这可以推出 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \simeq \pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n]$，而定理 2.2.4(a) 确实证实了这一点。该结果还意味着存在一个谱等价 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/X(p^n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle[B\Delta_n \times B\,\mathrm{fib}(\phi_{n+1})]$,，事实也确实如此

定理 2.2.4(b) 证实了这一点。我们将把上述讨论所预测的结果表述为一个猜想。

**猜想 2.2.18.** 固定截断 *Brown-Peterson* 谱$\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$的一个$\mathbf{E}_3$-形式。则 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 具有 $S^1$-等变$\mathrm{BP}\langle n\rangle$-模的结构（其中 $S^1$ 在$\mathrm{BP}\langle n\rangle$上平凡作用），且定理 *2.2.4(a)* 中的等价可提升为 $p$-完备的谱等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/m} \simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/m}[B\Delta_n],$$
$$\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n].$$

第一个等价关于$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/m}$和$\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/m}$上的剩余 $S^1/\mu_m$-作用是 $S^1$-等变的。

注释 2.2.19. 证明猜想 2.2.18 的主要困难在于，目前尚不清楚如何赋予 TP(BP⟨$n-1$⟩/$X$($p^n$)) 或 THH(BP⟨$n-1$⟩/$X$($p^n$))$^{t\mathbf{Z}/m}$以 BP⟨$n$⟩-模结构。尽管如此，当 $n=1$时，猜想 2.2.18 中最终等价的一小部分可以无条件地得到证明。具体而言，存在一个映射 TP($\mathbf{Z}_p$/$X$($p$)) $\to \bigoplus_{j>-(p-1)} \Sigma^{2j}$BP⟨1⟩，它在模 $p$ 上同调中诱导直和项的包含映射。（这是“容易”的范围，因为 TP($\mathbf{Z}_p$/$X$($p$)) 中第一个未被此结论涵盖的预测直和项是 $\Sigma^{-2(p-1)}$BP⟨1⟩；但对于这个谱的 $\pi_0$，类 $v_1$ 正是在此处。）我们在命题 2.2.15 中计算了 TP($\mathbf{Z}_p$/$X$($p$)) 的模 $p$ 同调。这意味着 H$^*$,$^c$(TP($\mathbf{Z}_p$/$X$($p$)); F$_p$) $\cong$ H$^*$(BP⟨1⟩; F$_p$)(($\hbar$)) $\otimes_{\mathbf{F}_p}$ H$^*$(BSU($p-1$); F$_p$)。存在一个 Adams 谱序列

$$\mathrm{Ext}^{s}_{\mathscr{A}_*}{}^{t+2^j}(\mathscr{A}/\!\!/\mathscr{E}(1)\ \mathscr{A}/\!\!/\mathscr{E}(1))((\hbar))\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathrm{H}^*(\text{特殊酉群分类空间}(p-1);\mathrm{F}_p)\Rightarrow \pi_0\mathrm{Map}(\text{拓扑周期同调}(\text{整数环}_p/X(p))\ \Sigma^{2j}\mathrm{BP}\langle 1\rangle)^\wedge_p.$$

我们希望证明，对于 $j>-(p-1)$，双次数为 $(s,t-s)=(0,2j)$ 的任意类都会存活到 $E_\infty$ 页。为此，只需证明对于 $r\geq 2$，该类不存在非零的 $d_r$-微分。此微分必然落在 $(r,2j-1)$。根据 [**AP76**，命题 4.1], $\mathrm{Ext}^{s\ t}_{\mathscr{A}_*}(\mathscr{A}/\!\!/\mathscr{E}(1)\ \mathscr{A}/\!\!/\mathscr{E}(1))$ 在 $s\geq 1$, $t-s$ 为奇数且 $t-s\geq -2(p-1)$ 时消失。特别地，取 $(s,t-s)=(r,2j-1)$，我们看到当且仅当 $j>-(p-1)$ 时，$2j-1\geq -2(p-1)$ 成立。因此，对于每个 $j>-(p-1)$，我们都得到一个映射 TP($\mathbf{Z}_p$/$X$($p$)) $\to \Sigma^{2j}$BP⟨1⟩，这就给出了所需的结论。

**2.3. 变体：THH 在更深的底空间上。**在定理 2.2.4 中，我们看到了一个次数为 $2p^n$ 的“多项式”生成元，其中 $n$ 是高度。当 $n=0$ 时，这就归结为次数为 2 的 Bökstedt 生成元；现在我们将讨论定理 2.2.4 的一个变体，其中 $n=1$，此时会得到一个次数为 2 的生成元。

**构造 2.3.1。**令 U(1) $\to$ 特殊酉群 SU($p$) 表示由态射给出的包含映射

$$\lambda \mapsto \mathrm{diag}(\lambda,\cdots,\lambda,\lambda^{1-p}).$$

存在一个诱导映射 BU(1) $\to$ BSU($p$)，它定义了一个 E$_2$-映射 ΩU(1) $\simeq$Z $\to$ ΩSU($p$)。令 $J(p)$ 表示复合 E$_2$-映射$\mu$ : ΩU(1) $\to$ ΩSU($p$) $\to$ ΩSU $\simeq$ BU 的 Thom 谱。由命题 2.1.11，$J(p)$ 具有一个 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-结构，使得存在一个 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数映射 $J(p)\to X(p)$。注意，$\mu$ 的底层 E$_1$-映射是零映射，因为 $B\mu:\ S^1\to \mathrm{B}^2\mathrm{U}\simeq \mathrm{SU}$ 是$\pi_1$(SU) $=0$ 中的一个类。因此，$J(p)$ 的底层 E$_1$-环是 $S[\mathbf{Z}]=S[t^{\pm 1}]$。此外，

$J(p) \to X(p) \to \mathbf{Z}_p$ 的底层 $\mathbf{E}_1$-映射是映射 $S[t^{\pm 1}] \to \mathbf{Z}_p$，它发送$t \mapsto 1$。

**命题 2.3.2.** 存在一个等价 $\mathrm{THH}(T(1)/J(p)) \simeq T(1)[J_{p-1}(S^2)]$。类似地，$\mathrm{THH}(X(p)/J(p)) \simeq X(p)[J_{p-1}(S^2) \times \mathrm{SU}(p-1)]$。

证明。事实上，$\mathrm{THH}(T(1)/J(p)) \simeq \mathrm{THH}(T(1)) \otimes_{\mathrm{THH}(J(p))} J(p)$ 等价于 $T(1)[S^{2p-1}] \otimes_{T(1)[S^1]} T(1)$；但存在一个纤维序列

$$S^1 \to S^{2p-1} \to S^{2p-1}/S^1 = \mathbf{C}P^{p-1} \simeq J_{p-1}(S^2),$$

由此可得所需结论。 □

**命题 2.3.3.** 以下陈述成立：

*(a)* 存在一个等价 $\mathrm{THH}(\text{整数环}_p/J(p)) \simeq \text{整数环}_p[\Omega S^3]$。特别地，$\pi_*\mathrm{THH}(\text{整数环}_p/J(p)) \cong \text{整数环}_p[x]$ 其中 $|x| = 2$。在同伦上，映射 $\mathrm{THH}(\text{整数环}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\text{整数环}_p/X(p))$由下式给出

$$x^j \mapsto \begin{cases} \theta^{j/p} & j \in p\mathbf{Z}, \\ 0 & else. \end{cases}$$

*(b)* 典范映射 $THH(Z_p/J(p)) \to THH(F_p/J(p))$ 经由单位 $THH(F_p) \to THH(F_p/J(p))$ 分解，并定义了 $THH(Z_p)$-模之间的等价 $F_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} THH(Z_p/J(p)) \xrightarrow{\sim} THH(F_p)$。

证明。对于 (a)，我们首先注意到存在一个等价

$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \simeq \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p) \otimes_{\mathrm{THH}(J(p))} J(p) \simeq \mathbf{Z}_p[\Omega S^3\langle 3\rangle] \otimes_{\mathbf{Z}_p[\mathrm{U}(1)]} \mathbf{Z}_p.$$

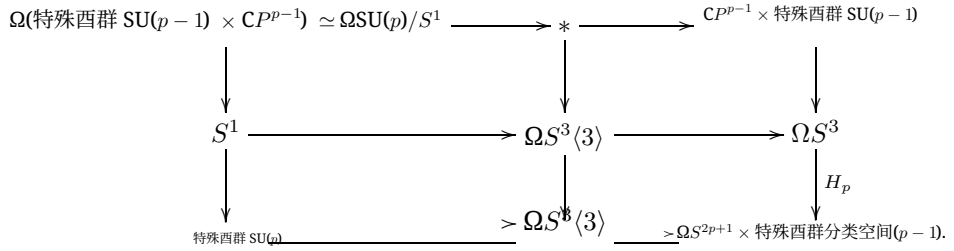
映射 $\mathbf{Z}_p \otimes_{J(p)} \mathrm{THH}(J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)$ 经由 $\mathbf{Z}_p \otimes_{X(p)} \mathrm{THH}(X(p)) \to \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)$ 分解，并且可以识别为复合映射的 $\mathbf{Z}_p$-链

$$\mathrm{U}(1) \to \mathrm{SU}(p) \to S^{2p-1} \xrightarrow{\alpha_1} \Omega S^3\langle 3\rangle.$$

注意，映射 $\mathrm{U}(1) \to S^{2p-1}$ 是映射 $S^{2p-1} \to \mathbf{C}P^{p-1}$ 的纤维。这个复合映射可以识别为 $S^1$ 在 $\Omega S^3\langle 3\rangle$ 上的作用。由于存在一个纤维序列

$$S^1 \to \Omega S^3\langle 3\rangle \to \Omega S^3,$$

由此可见，$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \simeq \mathbf{Z}_p[\Omega S^3]$。为识别映射 $\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/X(p))$，注意到 $\mathbf{C}P^{p-1} \simeq J_{p-1}(S^2)$，且存在一个方块，其中每一行和每一列都是纤维序列：




映射 $\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/X(p))$ 的作用由右下方的竖直映射决定，该映射由 James-Hopf 映射 $H_p : \Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1}$ 诱导。在 $\mathbf{Z}_p$-同调上，James-Hopf 映射的作用如命题 2.3.3(a) 所述。

对于 (b) 部分，存在一个等价

$$\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p/J(p)) \simeq \mathrm{THH}(\mathbf{F}_p) \otimes_{\mathrm{THH}(J(p))} J(p) \simeq \mathbf{F}_p[\Omega S^3] \otimes_{\mathbf{F}_p[\mathrm{U}(1)]} \mathbf{F}_p.$$

然而，映射 $\mathrm{F}_p\otimes_{J(p)}\mathrm{THH}(J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$ 可分解为经由 $\mathrm{F}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$ 的映射，并且可识别为复合映射 $\mathrm{U}(1) \to \Omega S^3\langle 3\rangle$ 与典范映射 $\Omega S^3\langle 3\rangle \to \Omega S^3$ 的 $\mathrm{F}_p$-链。这个复合映射作为 $\mathrm{E}_1$- 映射是零映射（事实上，作为 $\mathrm{E}_2$- 映射也是如此），因为存在一个 $\mathrm{E}_1$- 空间的纤维序列

$$\mathrm{BU}(1) \simeq \mathbf{C}P^\infty \to S^3\langle 3\rangle \to S^3.$$

因此，我们看到

$$\mathrm{THH}(\mathbf{F}_p/J(p)) \simeq \mathbf{F}_p[\Omega S^3] \otimes_{\mathbf{F}_p} (\mathbf{F}_p \otimes_{\mathbf{F}_p[\mathrm{U}(1)]} \mathbf{F}_p) \simeq \mathbf{F}_p[\Omega S^3 \times \mathbf{C}P^\infty].$$

这意味着映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p/J(p))$ 可经由 $\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p/J(p))$ 分解。进而，我们得到一个映射 $\mathrm{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$，它将 $\pi_*(\mathrm{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p))) \cong \mathrm{F}_p[x]$ 中的生成元映至 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p) \cong \mathrm{F}_p[\sigma]$ 中的生成元。因此，映射 $\mathrm{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$ 是一个等价，正如所需。□

**注记 2.3.4.** 映射 $J(p) \to X(p)$ 诱导出映射 $u : \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/X(p))$。根据定理 2.2.4 和命题 2.3.3，映射 $u$ 可识别为复合映射的 $\mathrm{Z}_p$-链

$$\Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1} \to \Omega S^{2p+1} \times \mathrm{BSU}(p-1);$$

这里，映射 $\Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1}$ 是 Hopf 映射。这个结论可由命题 2.3.3、命题 2.3.2 的证明以及 EHP 纤维化推出

$$J_{p-1}(S^2) \to \Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1}.$$

特别地，映射 $u$ 诱导映射 $\mathrm{Z}_p[x] \to \mathrm{Z}_p[\theta] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{Z}_p$[特殊酉群分类空间$(p-1)$]，该映射在 $p \mid m$ 时将 $x^m \mapsto \theta^{m/p}$ 映至 $x^m \mapsto 0$，否则映至其他值。

注意，若 $T(1)$ 是一个 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数，则映射 $u$ 会经由 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/T(1))$ 分解；并且在定理 2.2.4 和命题 2.3.3 的等价关系下，这将对应于 Hopf 映射的 $\mathrm{Z}_p$-链。

备注 2.3.5。命题 2.3.3 展示了 $\mathrm{THH}(R'/R)$ 对 $R'$ 上 $\mathrm{E}_1$-$R$-代数结构的依赖性。事实上，回忆一下，$\mathrm{E}_2$-映射 $J(p) \to X(p) \to \mathrm{Z}_p$ 底层的 $\mathrm{E}_1$-映射是映射 $S[t^{\pm 1}] \to \mathrm{Z}_p$，它将 $t \mapsto 1$ 送至相应元素。命题 2.3.3 声明，$\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \simeq \mathrm{Z}_p[\Omega S^3]$。然而，假设 $S[t^{\pm 1}] = S[\mathrm{Z}]$ 带有其标准的 $\mathrm{E}_2$-结构，并且将 $\mathrm{Z}_p$ 视为通过复合映射 $S[\mathrm{Z}] \to S \to \mathrm{Z}_p$得到的 $\mathrm{E}_1$-$S[\mathrm{Z}]$-代数。那么 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/S[\mathrm{Z}]) \simeq \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p) \otimes S[\mathrm{C}P^\infty] \simeq \mathrm{Z}_p[\Omega S^3\langle 3\rangle \times \mathrm{C}P^\infty]$。由于 $\mathrm{Z}_p[\Omega S^3\langle 3\rangle \times \mathrm{C}P^\infty] \not\simeq \mathrm{Z}_p[\Omega S^3]$，我们得出结论：$\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/S[\mathrm{Z}]) \not\simeq \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p))$。

**推论 2.3.6.** 存在一个同构 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \simeq \mathbf{Z}_p[t^{\pm 1}]^\wedge_{(t-1)}((\hbar))$，满足 $|\hbar| = -2$。

**推论 2.3.7.** 若 $\mathscr{C}$ 是一个 $\mathbf{Z}_p$-线性 $\infty$-范畴，则存在一个（非-$S^1$-等变）等价 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p)$。

证明。由命题 2.3.3(b)，存在一个等价 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathrm{F}_p \simeq \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$，它是 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p)$-模。由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p &\simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)} \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{THH}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)} \mathrm{THH}(\mathbf{F}_p) \simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p),\end{aligned}$$

如所欲证。 □

**注记 2.3.8.** 回忆 [**AMN18**，定理 3.5]，若 $S[z] = S[$整数环$_{\geq 0}]$ 表示由一个 0 次类生成的平坦多项式环，则存在同构$\pi_*$THH(整数环$_p/S[z]) \cong$整数环$_p[\sigma^2(z-p)],$，其中 $\mathrm{E}_\infty$-映射 $S[z] \to$整数环$_p$ 将 $z \mapsto p$ 映出。这意味着 $\pi_*$拓扑周期同调(整数环$_p/S[z]) \cong$ 整数环$_p[z]^\wedge_{(z-p)}((\hbar))$。类似地，存在同构

$\pi_*$拓扑周期同调$(\mathrm{Z}_p/S[\![\widetilde{p}]\!]) \cong \mathrm{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]^\wedge_{(\widetilde{p}-p)}((\hbar))$，其中 $\widetilde{p} \mapsto p$ 和 $S[\![\widetilde{p}]\!] = \left(S[q^{\pm 1}]^\wedge_{(p,q-1)}\right)^{h\mathbf{F}_p^\times}$.

同理，存在一个同构 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/S[t^{\pm 1}]) \cong \mathrm{Z}_p[\sigma^2(t+p-1)],$，其中 $\mathrm{E}_\infty$-映射 $S[t^{\pm 1}] \to \mathrm{Z}_p$ 将 $t \mapsto 1-p$映为$\pi_*$。这意味着 $\cong \mathrm{Z}_p[t^{\pm 1}]^\wedge_{(t+p-1)}((\hbar))$。鉴于它与命题 2.3.3 和推论 2.3.6 显然类似，自然会问：$J(p)$扮演什么角色?

为回答这个问题，为了简便起见，我们假设 $T(1)$ 具有 $\mathrm{E}_2$-环结构。$J(p)$ 的主要用途在于，它按构造便可与 $T(1)$ 直接比较；可以认为，$J(p)$ 所包含的"高度 1"信息大致与 $T(1)$ 相同。另一方面，我们不知道如何将 $S[t^{\pm 1}]$（带有标准 $\mathrm{E}_2$-结构）与 $T(1)$ 直接比较。（二者都存在到 $T(1)[t^{\pm 1}]$ 的 $\mathrm{E}_1$-代数映射，但这并不令人满意。）因此，可以将构造 2.3.1 视为对 $S[t^{\pm 1}]$ 上的 $\mathrm{E}_2$-结构所作的一种显式修改，使所得的 $\mathrm{E}_2$-代数存在一个有意义的映射到 $T(1)$。

自然会问，命题 2.3.3 是否可以推广到 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$。在高度 1 和 $p=2$ 处，我们可以显式构造一些 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，它们给出了 $J(p)$ 的高阶类比；但在更高高度和其他素数处的一般构造仍难以实现。

**构造 2.3.9**。回忆注记 2.1.10，可知存在一个 $\mathrm{E}_2$-映射 $\Omega\mathrm{Sp}(2) \to$分类空间 BU，其 Thom 谱等价于 $T(2)$ at $p=2$。令 $T_2(2)$ 表示由复合映射 $\mathrm{E}_2$-映射的 Thom 谱定义的 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环

$$\Omega\mathrm{Spin}(4) \to \Omega\mathrm{Sp}(2) \to \mathrm{BU},$$

其中第一个映射由包含映射 $\mathrm{Spin}(4) \subseteq \mathrm{Spin}(5) \cong \mathrm{Sp}(2)$ 诱导。类似地，令 $T_4(2)$ 表示由复合映射 $\mathrm{E}_2$-映射的 Thom 谱定义的 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环

$$\Omega\mathrm{U}(2) \to \Omega\mathrm{Sp}(2) \to \mathrm{BU},$$

其中第一个映射由包含映射 $\mathrm{U}(2) \subseteq \mathrm{Sp}(2)$ 诱导。注意，该包含映射可分解为 $\mathrm{U}(2) \to \mathrm{Spin}(4) \to \mathrm{Sp}(2)$，因此存在一个 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环的复合映射

$$T_4(2) \to T_2(2) \to T(2).$$

**注记 2.3.10**。存在一个纤维序列

$$\Omega S^3 \to \Omega\mathrm{Spin}(4) \to \Omega S^3,$$

这意味着 $\mathrm{MU}_*(T_2(2)) \simeq \mathrm{MU}_*[t_1, x_2]$，其中 $|x_2| = 2$。类似地，存在一个纤维序列

$$\Omega S^3 \to \Omega\mathrm{U}(2) \to \Omega S^1 \simeq \mathbf{Z},$$

这意味着 $\mathrm{MU}_*(T_4(2)) \simeq \mathrm{MU}_*[t_1, x_0^{\pm 1}]$ 其中 $|x_0| = 0$。

**引理 2.3.11.** 存在一个微分同胚 $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{Spin}(4) \cong S^4$，以及一个同伦等价 $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2) \simeq J_3(S^2)$。

证明。第一个微分同胚直接由同构 Sp(2) ≅ Spin(5) 及由此得到的链式关系推出

$$\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{Spin}(5)/\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(4) \cong S^4.$$

为证明第二个等价，关键依据是 [**Ame18**，命题 4.3], ，其中指出存在一个纤维序列

$$V_2(\mathbf{R}^5) \to J_3(S^2) \to \mathbf{C}P^\infty;$$

换言之，存在一个 $S^1$-作用于斯蒂费尔流形 $V_2(\mathbf{R}^5)$ 的作用，使得$V_2(\mathbf{R}^5)/S^1 \cong J_3(S^2)$。回忆，$V_2(\mathbf{R}^5)$ 与 SO(5)/SO(3) ≅Spin(5)/SU(2) 微分同胚。不难看出，通过上述纤维序列在 $V_2(\mathbf{R}^5)$ 上定义的 $S^1$-作用，恰好是 U(2)/SU(2) ≅ $S^1$在 Spin(5)/SU(2) 上的剩余作用；特别地，我们可以将 $J_3(S^2) \simeq$ Spin(5)/U(2) 认作所需的对象。□

**注记 2.3.12.** 商 Sp(2)/U(2} 也称为复拉格朗日格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}_2^{\mathrm{Lag}}(T^*\mathbf{C}^2)$，它由 $T^*\mathbf{C}^2$ 的拉格朗日子空间构成。

**警告 2.3.13.** 不要将 Sp(2)/U(2) 与商 Sp(2)/(Sp(1)×U(1)) 混淆：事实上，引理 2.3.11 表明，前者与 $J_3(S^2)$ 同伦等价，而后者与 $S^7/\mathrm{U}(1) = \mathbf{C}P^3$ 微分同胚。这些空间并不同伦等价（尽管在 6 可逆之后它们确实变得等价）。

引理 2.3.11 有如下有趣（但无关紧要？）的推论：

**推论 2.3.14.** 设 $Q \subseteq \mathbf{C}P^4$ 是一个复二次超曲面，并令 $\mathrm{Gr}_2^+(\mathbf{R}^5)$ 表示 $\mathbf{R}^5$ 中定向 2-平面的格拉斯曼流形。那么，存在微分同胚$Q \cong \mathrm{Gr}_2^{\mathrm{Lag}}(T^*\mathbf{C}^2) \cong \mathrm{Gr}_2^+(\mathbf{R}^5)$，且它们与 $J_3(S^2)$ 同伦等价。

证明。由于 Sp(2)/U(2) ≅SO(5)/(SO(3)·SO(2))，我们可以将 Sp(2)/U(2) =$\mathrm{Gr}_2^{\mathrm{Lag}}(T^*\mathbf{C}^2)$ 识别为 $\mathrm{Gr}_2^+(\mathbf{R}^5)$。因此，引理 2.3.11 给出了一个同伦等价 $\mathrm{Gr}_2^+(\mathbf{R}^5) \simeq J_3(S^2)$。所需结论现在可由以下观察得出：$\mathrm{Gr}_2^+(\mathbf{R}^5)$ 与一个二次超曲面 $Q \subseteq \mathbf{C}P^4$ 微分同胚，该微分同胚由同构 $\mathbf{R}^{10} \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^5$所诱导的映射 $\mathrm{Gr}_2^+(\mathbf{R}^5) \to \mathrm{Gr}_1(\mathbf{C}^5) \cong \mathbf{C}P^4$ 给出；参见 [**KN96**，例 10.6，第 280] 页。□

**注 2.3.15**。 存在一个纤维化[7] （更一般的陈述见 (57)）

$$S^2 \to J_3(S^2) \to S^4, \tag{12}$$

在该微分同胚下

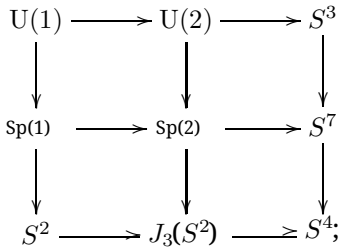
$$\mathrm{Spin}(4)/\mathrm{U}(2) \cong (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\mathrm{U}(2) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \cong S^2,$$

可通过引理 2.3.11 识别为纤维化

$$\mathrm{Spin}(4)/\mathrm{U}(2) \to \mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2) \to \mathrm{Sp}(2)/\mathrm{Spin}(4).$$

[7]纤维化 (12) 类似于“扭量”纤维化（见 (62)） $S^2 \to \mathbf{C}P^3 \to S^4$。

还有一个交换图，其中每一行和每一列都是纤维化：



最右侧的垂直纤维序列是 Hopf 纤维化。该图展示了 $J(2)$、$T_4(2)$、$T(1)$ 和 $T(2)$ 之间的关系。

**注 2.3.16.** 引理 2.3.11 的等价 $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2) = \mathrm{Gr}_2^{\mathrm{Lag}}(T^*\mathbb{C}^2) \simeq J_3(S^2)$ 可用于理解 $T(2)$ 与 Mahowald-Ravenel-Shick 谱 $y(2)$（来自 [**MRS01**]，素数 2 处）之间的关系。[8] 回忆注 2.1.10 中，存在一个 $\mathrm{E}_2$-映射 $\Omega\mathrm{Sp}(2) \to \mathrm{BU}$，其 Thom 谱在 $p = 2$ 处等价于 $T(2)$。类似地，回忆 $y(2)$ 是由映射 $\mu : \Omega J_3(S^2) \to \Omega^2 S^3 \to \mathrm{BO}$ 所确定的丛的 Thom 谱，其中第二个映射是 Möbius 丛 $S^1 \to \mathrm{BO}$ 的扩张。在等价 $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2) \simeq \mathrm{Sp}/\mathrm{U}$ 下，映射 $\mu : \Omega J_3(S^2) \to \mathrm{BO}$ 可识别为复合映射

$$\Omega(\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2)) \to \Omega(\mathrm{Sp}/\mathrm{U}) \to \mathrm{B}^2\mathrm{O} \xrightarrow{\eta} \mathrm{BO};$$

中间的映射是通过 Bott 周期性得到的。应用 [**Dev23a** 命题 2.1.6]于该纤维化上的环路

$$\mathrm{Sp}(2) \to J_3(S^2) \to \mathrm{BU}(2),$$

我们得出结论：$y(2) = \Omega J_3(S^2)^\mu$ 作为 $\mathrm{E}_1$-环等价于某个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\mathrm{U}(2) \to \mathrm{BGL}_1(T(2))$ 的 Thom 谱。举例来说，这意味着 $\mathrm{THH}(y(2)/T(2)) \simeq y(2)[\mathrm{BU}(2)]$。由于 $k(2) \simeq y(2) \otimes_{T(2)} \mathrm{BP}\langle 2\rangle$，这意味着 $\mathrm{THH}(k(2)/\mathrm{BP}\langle 2\rangle) \simeq k(2)[\mathrm{BU}(2)]$。类似地，由于 $y(2) \otimes_{T(2)}$ 连通 K 理论谱 $\simeq \mathrm{F}_2,$，我们还重新得到如下观察：$\mathrm{F}_2$ 作为 $\mathrm{E}_1$-环等价于某个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\mathrm{U}(2) \to \mathrm{BGL}_1$(连通 K 理论谱) 的 Thom 谱，因此 $\mathrm{HH}(\mathrm{F}_2/$连通 K 理论谱$) \simeq \mathrm{F}_2[\mathrm{BU}(2)]$ 作为 $\mathrm{F}_2$-模。

**命题 2.3.17.** 存在一个等价 $\mathrm{THH}(T(2)/T_2(2)) \simeq T(2)[S^4]$，以及一个等价 $\mathrm{THH}(T(2)/T_4(2)) \simeq T(2)[J_3(S^2)]$。

证明。注意到 $\eta$ 在 $T_4(2)$ 中是零伦的（因此在 $T_2(2)$ 中也是如此），因为包含映射 $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(2)$ 定义了一个映射 $S^2 \to \Omega\mathrm{U}(2)$，而该映射又托姆化为

[8] 关于这一讨论，一个更简洁的表述是：若 $\Omega S^2 \to \mathrm{BO}$ 是将 Möbius 丛 $S^1 \to \mathrm{BO}$ 延拓得到的映射，则 [**Dev23a**、命题 2.1.6] 以及该纤维化上的环路

$$S^3 \xrightarrow{\eta} S^2 \to \mathbf{C}P^\infty$$

这意味着存在一个映射

$$S^1 \to \quad {}_1 T\ 1 \qquad\qquad {}_1 \qquad S/\!\!/2 = \mathrm{BGL}(\,(\,)), \text{ 其}$$
$$y\ 1 \qquad S^1 \to \quad {}_1 T\ 1 \qquad 1-2 \in \pi_0\ T\ 1 \quad \times$$

Thom 谱是 E -商 ( )。映射 BGL ( ( )) 检测源的底胞腔上的 ( ( ))，因此我们重新得到 $T(1)/2 \simeq y(1)$ 这一事实。特别地，$\mathrm{HH}(y(1)/T(1)) \simeq y(1)[\mathbb{C}P^\infty]$。由于 $y(1) \otimes_{T(1)}$整数环$_2 \simeq \mathrm{F}_2,$，这重新得到一个众所周知的观察：$\mathrm{HH}(\mathrm{F}_2/$整数环$_2) \simeq \mathrm{F}_2[\mathbb{C}P^\infty]$，至少作为 $\mathrm{F}_2$ 上的模 。这一论证没有给出 $\mathrm{F}_2$ 的-代数 结构，因为 $\mathrm{HH}(y(1)/T(1))$ 不是一个环。

一个映射 $C\eta \to T_4(2)$，它分解了单位映射。根据引理 2.3.11，存在如下 $\mathbb{E}_1$-空间的纤维序列

$$\Omega\mathrm{Spin}(4) \to \Omega\mathrm{Sp}(2) \to \Omega S^4,$$
$$\Omega\mathrm{U}(2) \to \Omega\mathrm{Sp}(2) \to \Omega J_3(S^2),$$

根据 [**Dev23a**，命题 2.1.6]（另见 [**Bea17**]），$T(2)$ 是一个 $\mathbb{E}_1$-映射 $\Omega S^4 \to \mathrm{BGL}_1(T_2(2))$（分别为 $\Omega J_3(S^2) \to \mathrm{BGL}_1(T_4(2))$）的 Thom 谱。结合 [**BCS10**], ，即可得到所需结论。□

**注 2.3.18**。回忆 $\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2) \cong S^5$。由此可得 $\mathrm{THH}(X(4)/T(2)) \simeq X(4)[S^5]$。类似地，回忆 $\mathrm{SU}(4) \cong \mathrm{Spin}(6)$；因此存在一个微分同胚

$$\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{Spin}(6)/\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SO}(6)/\mathrm{SO}(4) \cong V_2(\mathbf{R}^6).$$

由此可得 $\mathrm{THH}(X(4)/T_2(2)) \simeq X(4)[V_2(\mathbf{R}^6)]$。（另请注意，$\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(4)/(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))$ 可视为一个“定向复格拉斯曼流形”$\widetilde{\mathrm{Gr}}_2(\mathbf{C}^4)$。）最后，$\mathrm{THH}(X(4)/T_2(2)) \simeq X(4)[\mathrm{SU}(4)/\mathrm{U}(2)]$。

**推论 2.3.19.** 存在2-完备的连通 $K$ 理论谱模等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_2(2)) \simeq \mathrm{ku}[\Omega S^5],$$
$$\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_4(2)) \simeq \mathrm{ku}[\Omega S^3].$$

在这些等价下，映射

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_4(2)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_2(2)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T(2))$$

由对霍普夫映射取连通 K 理论谱-链诱导

$$\Omega S^3 \xrightarrow{H} \Omega S^5 \xrightarrow{H} \Omega S^9.$$

证明. 利用命题 2.3.17，这可由定理 2.2.4(a) 得出（更准确地说，是其中涉及 $p = 2$ 和 $n = 2$ 的 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/T(2)) \simeq \mathrm{ku}[\Omega S^9]$ 版本），以及如下 $\mathbb{E}_1$-空间的纤维序列

$$\Omega S^4 \simeq \Omega(\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{Spin}(4)) \to \Omega^2 S^5 \to \Omega^2 S^9,$$
$$\Omega J_3(S^2) \simeq \Omega(\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{U}(2)) \to \Omega^2 S^3 \to \Omega^2 S^9$$

它们由对 $S^4$ 和 $S^2$的 2-局部 EHP 纤维序列取环路得到。映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_4(2)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_2(2))$ 和 $\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_2(2)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T(2))$ 的识别是直接的推论。□

**注记 2.3.20.** 回忆定理 2.2.4(a)，生成元 $\theta_2 \in \pi_8\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T(2))$ 可以理解为 $\sigma^2(v_2)$（模去可分解元）。相对于 $\Omega\mathrm{Spin}(4)$ 上的 Thom 谱 $T_2(2)$ 取 THH，可以看作是从 $\theta_2 \in \pi_8\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T(2))$ 中提取平方根。类似地，相对于 $\Omega\mathrm{U}(2)$ 上的 Thom 谱 $T_4(2)$ 取 THH，可以看作是从 $\theta_2 \in \pi_8\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T(2))$ 中提取四次方根；因此下标为 4。（粗略地说，$\pi_4\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_2(2))$ 的生成元可以视为 $\sigma^2(v_1)$；而 $\pi_2\mathrm{THH}(\mathrm{ku}/T_4(2))$ 的生成元可以视为 $\sigma^2(2)$。）特别地，应将 $T_4(2) = (\Omega\mathrm{U}(2))^\mu$ 视为高度 1 时 $p = 2$ 下 $J(p)$ 的恰当类比。

**注记 2.3.21.** 推论 2.3.19 表明，$\mathrm{ku}_2^\wedge$ 等价于一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega^2 S^3 \to \mathrm{BGL}_1(T_4(2))$ 的 Thom 谱。这也可以用类似于 [**Dev23a**] 结果的方式重新表述：假设 [**Dev23a**、猜想 D 和 E], [**Dev23a**，推论 B] 表明 $\mathrm{ku}_2^\wedge$ 是一个映射 $\Omega^2 S^9 \to \mathrm{BGL}_1(T(2))$ 的 Thom 谱。由命题 2.3.17 可知，$T(2) \simeq$ 余极限$_{\Omega J_3(S^2)}\, T_4(2)$，因此 [**Dev23a**、推论 B] 蕴含

$$\mathrm{ku}_2^\wedge \simeq \mathrm{colim}_{\Omega^2 S^9} T(2) \simeq \mathrm{colim}_{\Omega^2 S^9} \mathrm{colim}_{\Omega J_3(S^2)} T_4(2) \simeq \mathrm{colim}_{\Omega^2 S^3} T_4(2),$$

其中，最后一个等价来自 EHP 序列所给出的 $\mathrm{E}_1$-等价 $\mathrm{colim}_{\Omega^2 S^9} \Omega J_3(S^2) \simeq \Omega^2 S^3$。

由此得到如下结论，我们只陈述 $T(n)$ 的情形；$X(p^n)$ 也有类似结论。

**猜想 2.3.22。** 固定一个素数 $p$ 和 $n \geq 0$。对每个 $0 \leq j \leq n$，存在$\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环 $T_{p^j}(n)$，并配备$\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-映射

$$T_{p^n}(n) \to \cdots \to T_{p^j}(n) \to T_{p^{j-1}}(n) \to \cdots \to T_0(n) = T(n)$$

使得存在 $p$-完备等价

$$\mathrm{THH}(T(n)/T_{p^j}(n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[J_{p^j-1}(S^{2p^{n-j}})],$$

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^j}(n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\Omega S^{2p^{n-j}+1}].$$

由$\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-映射 $T_{p^j}(n) \to T_{p^{j-1}}(n)$ 诱导的映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^j}(n)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^{j-1}}(n))$ 由 ***Hopf*** 映射 $\Omega S^{2p^{n-j}+1} \to \Omega$*{v41}*上的$\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-链给出。换言之，若 $\theta_n^{1/p^j} \in \pi_{2p^{n-j}}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^j}(n))$ 表示生成元（粗略地说，将其视为 $\sigma^2(v_{n-j})$），那么

$$\pi_{2p^{n-j}}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^j}(n)) \ni \theta_n^{1/p^j} \mapsto (\theta_n^{1/p^{j-1}})^p \in \pi_{2p^{n-j}}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^{j-1}}(n)).$$

特别地，猜想 2.3.22 表示，对于假定存在的 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环 $T_{p^n}(n)$，存在一个等价 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T_{p^n}(n)) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[\sigma]$，其与 $|\sigma| = 2$ 相容。

**例 2.3.23.** 存在包含映射 $\mathrm{Spin}^c(5) \cong \mathrm{Sp}(2) \cdot \mathrm{U}(1) \subseteq \mathrm{Sp}(3)$（其商为 $\mathbb{C}P^5$），因此与包含映射 $\mathrm{Sp}(3) \subseteq \mathrm{SU}(6)$ 复合，定义了包含映射 $\mathrm{Sp}(2) \cdot \mathrm{U}(1) \subseteq \mathrm{SU}(6)$。特别地，我们得到一个 $\mathrm{E}_2$-映射 $\Omega(\mathrm{Sp}(2) \cdot \mathrm{U}(1)) \to \Omega\mathrm{SU}(6)$。由此得到的复合 $\mathrm{E}_2$-映射的 Thom 谱

$$\Omega(\mathrm{Sp}(2) \cdot \mathrm{U}(1)) \to \Omega\mathrm{SU}(6) \to \Omega\mathrm{SU} \simeq \mathrm{BU}$$

定义了一个 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，我们预计它可以被识别为 $T_8(3)$，其中 $p = 2$。

## 3. 拓扑 Sen 算子

**3.1. 构造拓扑 Sen 算子。**沿着注 2.2.17 的思路，定理 2.2.4(b) 本质上是对 Serre 谱序列的计算，因此注 2.2.12 中的下降谱序列有一种简单得多的描述。我们将继续固定截断 Brown-Peterson 谱 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 和 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的 $\mathbb{E}_3$-形式。

**记号 3.1.1.** 设 $R$ 是一个 $\mathbb{E}_\infty$-$\mathbb{Z}_p$-代数。我们用 $\epsilon^R$ 表示 $R[\mathrm{BSU}(p-1)]$，用 $\epsilon^R_*$ 表示 $\pi_*\epsilon^R$。（此记号意在表明，$\epsilon$ 在下文讨论中只起“小”的作用。）

**定义 3.1.2**（谱 Gysin 序列）。设 $S^{n-1}\to E\to B$ 是一个纤维化。由于 $E\simeq$ 在带基点空间中 $\mathrm{hocolim}_B S^{n-1}$，我们有 $E_+\simeq \mathrm{hocolim}_B S^{n-1}_+$。存在一个余纤维序列 $S^{n-1}_+\to S^0\to S^n$，因此我们得到一个余纤维序列

$$E_+\to \mathrm{hocolim}_B(S^0)\simeq B_+\to \mathrm{hocolim}_B(S^n)\simeq \Sigma^n(B_+).$$

若 $R$ 是一个 $\mathbb{E}_1$-环，则可得到一个左 $R$-模的余纤维序列：

$$R[E]\to R[B]\to \Sigma^n R[B].$$

**构造 3.1.3**（拓扑 Sen 算子）。设 $\mathscr{C}$ 是一个 $X(n)$-线性 $\infty$-范畴。存在一个 $S^1$-等变等价

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n-1))&\simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C})\otimes_{\mathrm{THH}(X(n-1))}X(n-1)\\&\simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C})\otimes_{X(n)\otimes_{X(n-1)}\mathrm{THH}(X(n-1))}X(n),\end{aligned}$$

一个显然的 $S^1$-等变等价

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))\simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C})\otimes_{\mathrm{THH}(X(n))}X(n).$$

由于 $\mathrm{THH}(X(n-1))\simeq X(n-1)[\mathrm{SU}(n-1)]$，存在一个等价 $X(n)\otimes_{X(n-1)}\mathrm{THH}(X(n-1))\simeq X(n)[\mathrm{SU}(n-1)]$。注意，$X(n)\otimes_{X(n-1)}\mathrm{THH}(X(n-1))$ 具有 $\mathbb{E}_1$-环的结构，并且 $\mathbb{E}_1$-代数映射 $\mathrm{THH}(X(n-1))\to\mathrm{THH}(X(n))$ 诱导出一个 $\mathbb{E}_1$-代数映射 $X(n)\otimes_{X(n-1)}\mathrm{THH}(X(n-1))\to\mathrm{THH}(X(n))\simeq X(n)[\mathrm{SU}(n)]$。纤维序列

$$S^{2n-1}\to \mathrm{BSU}(n-1)\to \mathrm{BSU}(n)$$

推出：

**定理 3.1.4.** 设 $\mathscr{C}$ 是一个左 $X(n)$-线性 $\infty$-范畴。则存在一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n-1))\xrightarrow{\iota}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))\xrightarrow{\Theta_{\mathscr{C}}}\Sigma^{2n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n)),\tag{13}$$

其中映射 $\iota$ 是 $S^1$-等变的，而 $\iota$ 的余纤维（至少在非等变意义下）可识别为 $\Sigma^{2n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))$。我们将称映射 $\Theta_{\mathscr{C}}\colon \Sigma^{-2n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))\to\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(n))$ 为拓扑 *Sen* 算子。

**注记 3.1.5.** 定理 3.1.4 的一个更简单的类似情形可描述如下。设 $A$ 是一个 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，并设 $A[t]$ 是 $A$ 上由一个 0 次生成元生成的平坦多项式环。假设 $\mathscr{C}$ 是一个 $A[t]$-线性 $\infty$-范畴。非等变等价 $\mathrm{HH}(A[t]/A)\simeq A[t][S^1]$ 给出一个余纤维序列

$$\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A)\to\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t])\xrightarrow{\nabla}\Sigma^2\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t])\tag{14}$$

它类似于定理 3.1.4，其中 $\nabla : \mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t]) \to \Sigma^2\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t])$ 展现为一个“Gauss-Manin 联络”。这个余纤维序列通常很有用；例如，若将 $\mathbf{Z}_p$ 视为通过 $\mathbf{E}_\infty$-映射 $S[\![t]\!] \to \mathbf{Z}_p$ 成为一个 $S[\![t]\!]$-代数，其中该映射发送 $t \mapsto p$，则有 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/S[\![t]\!]) \simeq \mathbf{Z}_p[y]$，并且 $|y| = 2$（更准确地说，$y = \sigma^2(t-p)$）；见 [**KN19**]。不难证明，映射 $\nabla : \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/S[\![t]\!]) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/S[\![t]\!])$ 将 $y^n \mapsto ny^{n-1}$ 发送到相应对象，由此推出 Bökstedt 对 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)$ 的计算。

与定理 3.1.4 中一样，(14) 中的映射 $\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A) \to \mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t])$ 是 $S^1$-等变的，但我们只能在非等变意义下将其余纤维识别为 $\Sigma^2\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t])$。为在等变意义下识别该余纤维，注意若 $\lambda$ 表示 $S^1$ 的旋转表示，则 $\mathrm{HH}(A/A[t]) \simeq A[B^\lambda \mathbf{Z}_{\geq 0}]$。这里，$B^\lambda \mathbf{Z}_{\geq 0}$ 是 $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ 的 $\lambda$-解环。这意味着存在一个等变 余纤维序列

$$\mathrm{HH}(\mathscr{C}/A) \to \mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t]) \xrightarrow{\nabla} \Sigma^\lambda \mathrm{HH}(\mathscr{C}/A[t]). \tag{15}$$

更多讨论请参见推论 3.1.19。

**注 3.1.6.** 在同伦层面上，$\mathscr{C} = \mathrm{LMod}^{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle}$ 的 (13) 中的映射 $\Theta$ 可利用定理 2.2.4 来识别。具体而言，回忆一下，根据定理 2.2.4(a)，$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n)) \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_n]_*[\theta_n]$；由此根据定理 2.2.4(b)，$\Theta$ 必须映至

$$\Theta : \theta_n^j \mapsto jp\theta_n^{j-1}.$$

因此，我们可以非正式地写作 $\Theta = p\partial_{\theta_n}$.[9] 从注记 2.2.17 的角度来看，映射 $\Theta$ 可以解释为 Serre 谱序列中的 $d^{2p^n}$-微分，该谱序列用于计算纤维化 (11) 的全空间的 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 同调。因此，确定 $\Theta$ 在 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))$ 上的作用（其中 $j \leq n-1$）可以视为确定某个假想的 Cohen-Moore-Neisendorfer 纤维化 (11)（其中以 $v_{n-j}$ 替换 $p$）的 Serre 谱序列/Gysin 序列中的微分的类比。

对于 $j \leq n-1$，我们可以对 $\Theta$ 在 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))$ 上的作用作一些定性观察。事实上，回忆 (4) 中有一个同构

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))/v_{[0,n-j)} \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[B\Delta_j]_*[\theta_n]/v_{[0,n-j)} \otimes_{\mathbf{F}_p} \Lambda_{\mathbf{F}_p}(\lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n).$$

简单计算可得存在一个同构

$$\pi_*\mathrm{THH}(X(p^n)/X(p^j)) \cong X(p^n)\left[\prod_{i=j+1}^{n} \overline{\Delta}_i\right]_* \otimes_{\mathbf{Z}_{(p)}} \mathbf{Z}_{(p)}(\lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_n).$$

因此，对 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))/v_{[0,n-j)}$ 的计算意味着，类 $y \in \pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))$ 在 $\Theta : \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j)) \to \Sigma^{2p^j}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^j))$ 下的像属于由 $v_{[0,n-j+1)} = (p, \cdots, v_{n-j})$ 生成的理想。

**注 3.1.7.** 由于等变映射 $\iota : \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n-1)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的余纤维（至少在非等变意义下）可识别为 $\Sigma^{2p^n}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$，因此依据我们在定理 2.2.4 中对 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的计算，以及前文将 $\Theta$ 描述为 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 的自同态的说明，更难确定 $\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$（即使模 $v_{n-1}$ 意义下也是如此）。一个

[9] 这一作用 $\Theta$ 在 $\theta_n = \sigma^2(v_n)$ 上，与 [**Lee22** 中的观察有关，引理 3.2.8(d)] 指出，存在一种 $v_n$ 的选取，使得右单位 $\eta_R : \mathrm{BP}_* \to \mathrm{BP}_*\mathrm{BP} \cong \mathrm{BP}_*[t_1, t_2, \cdots]$ 满足 $d(v_n) = \eta_R(v_n) - v_n \equiv pt_n$（模 $t_1, \cdots, t_{n-1}$）。

因此，基本问题是描述 cofib($\iota$) 上的 $S^1$-作用。当 $n=1$ 时，即使模 $p$ 意义下，这也已经相当复杂；而从 TP($\mathbf{Z}_p/X(p)$) 出发，对 TP($\mathbf{Z}_p/X(p-1)$) $\simeq$TP($\mathbf{Z}_p$)[特殊酉群分类空间$(p-1)$] 的描述基本已由 [**BM94**，猜想 4.3] 及 [**Tsa97**，定理 7.4] 完成。回忆定理 2.2.4(a)，存在一个同构

$$\pi_*\mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p/X(p))/p \cong \mathbf{F}_p[v_1,\hbar^{\pm 1}]\otimes_{\mathbf{F}_p}\epsilon_*^{\mathbf{F}_p}\cong \pi_* k(1)^{tS^1}[\mathrm{BSU}(p-1)].$$

那么，映射 $\pi_*$TP($\mathbf{Z}_p/X(p)$)$/p\to\pi_{*-2p}$TP($\mathbf{Z}_p/X(p)$)$/p$ 由下式给出

$$\hbar^{p^k}\mapsto \hbar^{p^k(p+1)}v_1^{\frac{p^{k+1}-p}{p-1}},\ v_1^k\mapsto 0.$$

注意到通过以下记号转换，*loc. cit.* 中的公式 $t^{p^k+\phi_{(k+1)}}f^{\phi(k)}$ 恰好变为 $\hbar^{p^k}{}_{(p+1)}$ $v_1^{\frac{p^{k+1}-p}{p-1}}$，这便是 [**Tsa97**，定理 7.4], 的直接推论。

$$t\rightsquigarrow\hbar,\ f\rightsquigarrow\sigma^2(v_1),\ tf\rightsquigarrow v_1,\ \phi(k)=\frac{p^{k+1}-p}{p-1}=v_p((p^k)!^p).$$

也可以使用与 [**HRW22**，定理 6.5.1]类似的论证来证明这一点。

此外，$\hbar$ 在边界映射 $\pi_{-2}$TP($\mathbf{Z}_p/X(p)$)$/p\to\pi_{2p-3}$TP($\mathbf{Z}_p/X(p-1)$)$/p$下的像是类 $\alpha_1\in\pi_{2p-3}$TP($\mathbf{Z}_p$)$/p$；注意，由于 $\hbar$ 属于$\pi_{-2}$TP($\mathbf{Z}_p/X(p)$)，类 $\alpha_1$ 实际上可以扩展为 $\pi_{2p-3}$TP($\mathbf{Z}_p/X(p-1)$)中的一个元素。从 TP($\mathbf{Z}_p/X(p)$) 计算 $\pi_*$TP($\mathbf{Z}_p$)的问题，与从 TP($\mathbf{Z}_p/S[\![t]\!]$) 计算 $\pi_*$TP($\mathbf{Z}_p$)的问题非常相似，后者在 [**LW20**] 中讨论（见备注 3.1.5）。

假设猜想 2.1.9 成立，则定理 3.1.4 可以进一步细化：也就是说，若$\mathscr{C}$是一个左 $T(n)$-线性 $\infty$-范畴，则存在一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/T(n-1))\xrightarrow{\iota}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/T(n))\xrightarrow{\Theta_{\mathscr{C}}}\Sigma^{2p^n}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/T(n)). \tag{16}$$

**注 3.1.8.** 设 $n=1$ 和 $\mathscr{C}=\mathrm{Mod}^{\mathbf{z}_p}$，其中 $p$ 为奇数。则存在一个映射 TP($\mathbf{Z}_p$) $\to$ TP($\mathbf{Z}_p/T(1)$)，以及一个迹映射 $K(\mathbf{Z}_p)\to$ TP($\mathbf{Z}_p$)。令 $j=\tau_{\geq 0}L_{K(1)}S$；经过 $p$-进完备化后，存在一个等价（参见 [**BM94**，定理 9.17]）

$$K(\mathbf{Z}_p)^\wedge_p\simeq j\vee\Sigma j\vee\Sigma^3\mathrm{ku}.$$

直和项 $j$ 是单位分量，即存在一个 $\mathbf{E}_\infty$-环映射 $j\to K(\mathbf{Z}_p)^\wedge_p$。因此，经过 $p$-完备化后，存在一个环映射 $j\to$TP($\mathbf{Z}_p$)。假设猜想 2.2.18 中的等价 TP($\mathbf{Z}_p/T(1)$) $\simeq$ BP$\langle 1\rangle^{tS^1}$ 成立，则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} j & \longrightarrow & \mathrm{BP}\langle 1\rangle \\ {\scriptstyle\mathrm{unit}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{unit}} \\ \mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & \mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p/T(1)). \end{array}$$

设 $\ell$ 是整数环 $\mathbf{Z}_p^\times$ 的一个拓扑生成元，并令 $\psi^\ell$ : BP$\langle 1\rangle\to\Sigma^{2p-2}$BP$\langle 1\rangle$ 为相应的阿姆斯特朗运算。那么，$\psi^\ell-1$ 的纤维是 $j$。根据上述交换图，人们预期，在猜想 2.2.18 的等价 TP($\mathbf{Z}_p/T(1)$) $\simeq$BP$\langle 1\rangle^{tS^1}$ 下，映射 $\psi^\ell-1$ 与 $\Theta^{tS^1}$ $\mathbf{z}_p$ 密切相关。例如，注意若取 $\ell=p+1$，映射 $\psi^\ell-1$ 会将 $v_1^j\mapsto p^{v_p(j)+1}v_1^j$ 映至相差一个 $p$-进单位的元素；这应与注 3.1.6 中 $\Theta_{\mathbf{Z}_p}$ 将 $\theta_1^j\mapsto jp\theta_1^{j-1}$ 映至.....这一事实相比较。这番讨论以及

[**BM94**], 表明 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p)^\wedge_p \simeq (j^{tS^1})^\wedge_p$。事实上，更强的结论成立：在与 Arpon Raksit 的即将发表的工作 [**DR23**] 中，我们将证明，作为圆分 $\mathbb{E}_\infty$-环，$\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p) = \tau_{\geq 0}(j^{t\mathbf{Z}/p})$。

**例 3.1.9**。令 $n = 1$，并令 $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}^{\mathrm{BP}\langle 1\rangle}$。那么定理 3.1.4 给出一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/X(p-1)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/X(p)) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{BP}\langle 1\rangle}} \Sigma^{2p}\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/X(p)).$$

此外，回忆定理 2.2.4(b)，存在一个 $p$-完备等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/X(p)) \simeq \mathrm{BP}\langle 1\rangle[\mathrm{BSU}(p-1)] \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{2jp^2-1}\mathrm{BP}\langle 1\rangle[\mathrm{BSU}(p-1)]/pj.$$

令 $a_j$ 表示直和项 $\Sigma^{2jp^2-1}\mathrm{BP}\langle 1\rangle/pj$ 的 $\mathrm{BP}\langle 1\rangle$-模生成元。由于 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/X(p-1)) \simeq \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle)[\mathrm{BSU}(p-1)]$, , 由 [**AHL10** 第 6] 节中的计算可改述如下。对于 $0 \leq k \leq v_p(j)$，$\Theta_{\mathrm{BP}\langle 1\rangle}$ 在同伦群上的作用为

$$\Theta_{\mathrm{BP}\langle 1\rangle} : p^k a_j \mapsto \left(\frac{j}{p^k} - 1\right) a_{j-p^k} v_1^{p\frac{p^{k+1}-1}{p-1}},$$

相差 $p$-进单位。关于这一计算的另一种观点见 [**Lee22**]。

**变式 3.1.10**。将 $X(p)$ 替换为 $J(p)$，即可证明定理 3.1.4 的一个变式。若 $\mathscr{C}$ 是一个左 $J(p)$-线性 $\infty$-范畴，则命题 2.3.2 产生一个余纤维序列：

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)) \xrightarrow{\Theta'} \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)). \tag{17}$$

这里，映射 $\iota$ 是 $S^1$-等变的，而 $\mathrm{cofib}(\iota)$（至少在非等变意义下）被识别为 $\Sigma^2\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p))$。命题 2.3.3 表明，$\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p)) \simeq \mathbb{Z}_p[\Omega S^3]$。在同伦层面，映射 $\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p)) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p))$ 由该纤维化的 Serre 谱序列中的 $d^2$-微分给出

$$S^1 \to \Omega S^3\langle 3\rangle \to \Omega S^3.$$

例如，在同构 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathbb{Z}_p/J(p)) \cong \mathbb{Z}_p[x]$ with $|x| = 2$ 下，余纤维序列 (17) 中针对 $n = 1$ 的映射 $\Theta'$ 将 $x^j \mapsto jx^{j-1}$ 送至。

假设 $\mathscr{C}$ 实际上是一个 $\mathbb{Z}_p$-线性的 $\infty$-范畴。沿映射 $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{F}_p$ 对 (17) 作基变换，并使用推论 2.3.7，我们得到一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \xrightarrow{\iota} \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p) \xrightarrow{\Theta'} \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p). \tag{18}$$

注意，映射 $\Theta' : \mathrm{THH}(\mathbb{F}_p) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(\mathbb{F}_p)$ 在同伦上将 $\sigma^j \mapsto j\sigma^{j-1}$ 送至自身。因此，与 $\sigma$：$\Sigma^2\mathrm{THH}(\mathscr{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{F}_p) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ 复合后，$\Theta'$ 在 $\mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ 上的 $\sigma$-进滤过的第 $j$ 个分次部分 $\mathrm{gr}^j_\sigma\mathrm{THH}(\mathscr{C}\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbb{F}_p)$ 的同伦上，按乘法 $j$ 起作用。

**注记 3.1.11.** 令 $p = 2$。利用纤维序列

$$S^3 \to \mathrm{BU}(1) \to \mathrm{BU}(2),$$

类似地可以证明，如果 $T_4(2)$ 表示来自构造 2.3.9 的 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，且 $\mathscr{C}$ 是一个左 $T_4(2)$-线性 $\infty$-范畴，则存在一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(2)) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/T_4(2)) \to \Sigma^4\mathrm{THH}(\mathscr{C}/T_4(2)).$$

**注 3.1.12**。 设 $R$ 是一个动画整数环$p$-代数。令 $\mathbb{\Delta}_R$ 表示 $R$ 的 Nygaard 完备棱柱上同调，并令 $\mathcal{N}^i\mathbb{\Delta}_R$ 表示 Nygaard 滤过 $\mathcal{N}^{\geq\star}(\mathbb{\Delta}_R)$ 的 $i$ 次分次部分。注意， [**BL22a**，注 5.5.15] 给出了一个同构 $\mathcal{N}^i(\mathbb{\Delta}_R\{i\}) \cong \mathcal{N}^i\mathbb{\Delta}_R$，其中 $\mathbb{\Delta}_R\{i\}$ 表示 $R$ 的 Breuil-Kisin 扭曲棱柱上同调。利用 [**BM22**]，的方法，可以构造一个余纤维序列

$$(\mathcal{N}^i\hat{\mathbb{\Delta}}_R)/p \to \mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p} \cong \mathcal{N}^i\hat{\mathbb{\Delta}}_{R/p} \to \mathrm{F}_{i-1}^{\mathrm{conj}}\mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p}. \tag{19}$$

如同上所引中所述，第二个映射与 Sen 算子密切相关。回忆（参见 [**BL22a**，例 6.4.17]以及 [**BMS19**]），THH($R/p$) 带有一个动机滤过，使得 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R/p) = \mathcal{N}^i(\mathbb{\Delta}_{R/p})[2i]$。取 $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}_R$，(18) 表明存在一个自映射 $\Theta' : \mathrm{THH}(R/p) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(R/p)$，其纤维为 THH($R$)/$p$。推测可以证明余纤维序列 (18) 与动机滤过相容，因此取分次部分即可恢复余纤维序列 (19)。基于上述讨论，自然会问：THH($R/J(p)$) 是否带有一个动机滤过，使得 (17) 是动机过滤谱的余纤维序列。

**回顾 3.1.13**。 令 $(\mathbb{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!], \widetilde{p})$ 表示 [**BL22a**，记号 3.8.9],若 $R$ 是一个 $p$-完备的动画 $\mathbb{Z}_p$-代数，令 $\widetilde{p}\Omega_R$ 表示 $\mathbb{\Delta}_{R/\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]}$。特别地， $\widetilde{p}\Omega_R \simeq (q\Omega_R)^{h\mathbf{F}_p^\times}$，这是通过棱镜 $(\mathbb{Z}_p[\![q-1]\!], [p]_q)$ 上的 $\mathrm{F}_p^\times$-作用得到的。令 $\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 表示 [**BL22a** 的衍射霍奇复形，构造 4.7.1]，于是， $\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 与 $\widetilde{p}\Omega_R/\widetilde{p}$ 同构，依据 [**BL22a**，备注 4.8.6]。回忆 [**BL22a**，备注 5.5.8] 中的余纤维序列：

$$\mathcal{N}^i\hat{\mathbb{\Delta}}_R \to \mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\widehat{\Omega}^{\not p}_R \xrightarrow{\Theta+i} \mathrm{F}_{i-1}^{\mathrm{conj}}\widehat{\Omega}^{\not p}_R.$$

该纤维序列模 $p$ 约化后得到 (19)。

由于 THH($R$) 带有动机滤过，其分次部分为 $\mathcal{N}^i(\mathbb{\Delta}_R)[2i]$，因此余纤维序列(17)引出了以下猜想（该猜想本质上指出，THH($R/J(p)$) 是 $\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 上共轭滤过的剪切 Rees 构造）：

**猜想 3.1.14.** 设 $R$ 是一个动画整数环$p$-代数。那么在$\mathrm{THH}(R/J(p))$ 上存在一个滤过 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R/J(p))$，使得：

- $\mathrm{gr}^{i_{\text{动机}}}\mathrm{THH}(R/J(p)) \simeq (\mathrm{F}_{\text{共轭}_i}\ \widehat{\Omega}^{\not p}_R)[2i]$; 并且
- 映射 $\Theta'_R : \mathrm{THH}(R/J(p)) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(R/J(p))$ 保持动机滤过不变，并诱导出映射 $\Theta + i : \mathrm{F}_{\text{共轭}_i}\ \widehat{\Omega}^{\not p}_R \to \mathrm{F}_{\text{共轭}_{i-1}}\ \widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 在$\mathrm{gr}^{i_{\text{动机}}}$上；并且
- 分次$^{i_{\text{动机}}}(\mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}]) \simeq \widehat{\Omega}^{\not p}_R[2i]$，使得局部化映射 $\mathrm{THH}(R/J(p)) \to \mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}]$ 在 分次$^{i_{\text{动机}}}$上诱导出包含映射 $(\mathrm{F}_{\text{共轭}_i}\ \widehat{\Omega}^{\not p}_R)[2i] \to \widehat{\Omega}^{\not p}_R[2i]$。

**注记 3.1.15.** 回忆命题 2.3.2，存在一个等价 THH($X(p)/J(p)$) $\simeq X(p)$[特殊酉群 SU($p-1$) $\times J_{p-1}(S^2)$]。利用这一点，不难证明猜想 3.1.14 蕴含：若 $R$ 是一个动画化的整数环 $\mathbb{Z}_p$-代数，则 THH($R/X(p)$) 具有一个动机滤过，使得 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R/X(p)) \simeq (\mathrm{F}^{\mathrm{conj}}_{pi}\widehat{\Omega}^{\not p}_R)[2pi] \otimes_R \epsilon^R$。如果猜想 2.1.9 对 $n=1$成立[10]，那么 THH($R/T(1)$) 将具有一个动机滤过，使得 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R/T(1)) \simeq (\mathrm{F}^{\mathrm{conj}}_{pi}\widehat{\Omega}^{\not p}_R)[2pi]$。因此，THH($R/X(p)$) 恰好提取了 $\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 上那些不会被 Sen 算子自动分裂的共轭滤过部分。从猜想 3.1.14 的角度来看，

[10]或者至少是较弱的结论： $T(1)$ 具有 $\mathrm{E}_2$-环的结构。

构造 2.3.9 中讨论的价值在于，尽管描述 $J(p)$ 的一个高色数类比颇为棘手（参见猜想 2.3.22），但当 $\mathscr{C}$ 是一个左 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$-线性 $\infty$-范畴时，$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))$ 为衍射 Hodge 复形提供了一个自然的高色数和非交换类比。

**注记 3.1.16.** 我们收集一些支持猜想 3.1.14 的进一步证据：

(a) 回忆一下，若 $\mathscr{D}$ 是一个 $\mathrm{F}_p$-线性 $\infty$-范畴，则典范映射 $\mathrm{THH}(\mathscr{D}) \to \mathrm{HH}(\mathscr{D}/\mathrm{F}_p)$ 由对 $\sigma \in \pi_2\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$ 取商给出。此外，若 $R$ 是一个动画 $\mathrm{F}_p$-代数，则 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R) \simeq (\mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\,\mathrm{dR}^{R/\mathbf{F}_p})[2i]$，而 $\mathrm{F}^\sigma_\star\mathrm{THH}(R)$ 是共轭滤过 $\mathrm{F}^{\mathrm{conj}}_\star\mathrm{dR}^{R/\mathbf{F}_p}$ 的非交换类比。特别地，$\mathrm{THH}(R)/\sigma$ 上诱导的动机滤过满足 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}(\mathrm{THH}(R)/\sigma) \simeq L\Omega^i_{R/\mathbf{F}_p}[-i]$。

这一图景在 $J(p)$ 上也有类似情形。回忆命题 2.3.3(a)，$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \cong \mathrm{Z}_p[x]$，其中 $|x| = 2$。设 $\mathscr{C}$ 是一个 $\mathrm{Z}_p$-线性 $\infty$-范畴。我们可以尝试将商 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p))/x$ 定义为 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p))$ 与 $\mathrm{Z}_p$ 关于 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p))$ 的相对张量积。不幸的是，这个张量积并无定义，因为 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p))$ 无法自然地获得 $\mathrm{E}_1$-代数结构。不过，若 $J(p)$ 具有 $\mathrm{E}_3$-代数结构，上述相对张量积恰好会计算 $\mathrm{HH}(\mathscr{C}/\mathrm{Z}_p) = \mathrm{THH}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)} \mathrm{Z}_p$。因此，将典范映射 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)) \to \mathrm{HH}(\mathscr{C}/\mathrm{Z}_p)$ 视为对 $x$ 取商是合理的。若 $R$ 是一个动画 $\mathrm{Z}_p$-代数，则 $\widehat{\mathrm{HH}}(R/\mathrm{Z}_p)$ 是霍奇复形 $\bigoplus_{n\geq 0} L\Omega^n_{R/\mathbf{Z}_p}[-n]$ 的非交换类比。在猜想 3.1.14 下，将映射 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/J(p)) \to \mathrm{HH}(\mathscr{C}/\mathrm{Z}_p)$ 视为由“杀掉 $x$”给出这一观点，可以看作 [BL22a, 注记 4.7.14]，的类比；该注记确定了 $\mathrm{gr}^{\mathrm{conj}}_i\widehat{\Omega}^{\not p}_R \simeq L\widehat{\Omega}^i_{R/\mathbf{Z}_p}[-i]$。

(b) 设 $R$ 是一个光滑的 $\mathrm{Z}_p$-代数。于是，棱镜—晶体比较定理（见 [**BL22a**，注 4.7.18]）意味着，基变换 $\mathrm{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{F}^{\mathrm{conj}}_\star\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 可识别为 $\mathrm{Frob}_*\mathrm{F}^{\mathrm{conj}}_\star\Omega^\bullet_{R/p/\mathbf{F}_p}$，其中 $\mathrm{Frob}: R \to R$ 是绝对 Frobenius。在猜想 3.1.14 成立的条件下，推论 2.3.7 可视为这一结果的非交换类比。

(c) 根据命题 2.3.3，类 $x$ 在映射 $\iota : \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$ 下被送至 $\sigma \in \pi_2\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)$。由于回旋 Frobenius 诱导了一个等价 $\varphi : \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)[1/\sigma] \xrightarrow{\sim} \mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)^{t\mathbf{Z}/p}$，(18) 的余纤维序列预示着一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p \xrightarrow{\iota} \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p)^{t\mathbf{Z}/p} \xrightarrow{\Theta'} \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{F}_p)^{t\mathbf{Z}/p}. \tag{20}$$

这样的余纤维序列确实存在，我们将在下面的推论 3.1.19 中构造它（尽管会采用略有不同的方法）。

假设当 $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}_R$ 时，余纤维序列 (20) 与动机滤过相容。由于 $\mathrm{THH}(R)^{t\mathbf{Z}/p} \simeq \mathrm{HP}((R/p)/\mathrm{F}_p)$（见 [**Mat20**，命题 2.12]），且 $\mathrm{HP}((R/p)/\mathrm{F}_p)$ 具有动机滤过，使得 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{HP}((R/p)/\mathrm{F}_p) \simeq \mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p}[2i]$，余纤维序列 (20) 大概会在猜想 3.1.14 下与下面这个和 (19) 相关的余纤维序列相关（它的存在是 Akhil Mathew 告诉我的）：

$$\overline{\mathbb{\Delta}}_R/p \to \mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p} \to \mathrm{dR}_{(R/p)/\mathbf{F}_p}. \tag{21}$$

为求完整起见，我们给出 (21) 的一个论证。

(21) 中余纤维序列的证明。回忆一下，根据 [**BM22**，推论 3.16]，若 $A$ 是一个动画整数环$p[x]$-代数，则存在一个余纤维序列

$$\overline{\mathbb{\Delta}}_A\{i\}/x \to \overline{\mathbb{\Delta}}_{A/x}\{i\} \to \overline{\mathbb{\Delta}}_{A/x}\{i-1\}. \tag{22}$$

这意味着（令 $i=0$，并将 $R/p$ 视为基变换 $R\otimes_{\mathbf{Z}_p[x]}\mathbf{Z}_p$，其中映射 $\mathbf{Z}_p[x]\to R$ 发送 $x\mapsto p$，而映射 $\mathbf{Z}_p[x]\to\mathbf{Z}_p$ 是增广）存在一个余纤维序列

$$\overline{\mathbb{\Delta}}_R/p \to \overline{\mathbb{\Delta}}_{R/p} \to \overline{\mathbb{\Delta}}_{R/p}.$$

de Rham/晶体比较定理告诉我们，$\mathbb{\Delta}_{R/p}\simeq\mathbb{\Delta}_{(R/p)/\mathbf{Z}_p}\simeq(\mathrm{dR}_R)^\wedge_p$，其中 $\mathbb{\Delta}_{(R/p)/\mathbf{Z}_p}$ 表示相对于晶体棱镜 $(\mathbf{Z}_p,(p))$ 的棱柱上同调（即 $R/p$的导出晶体上同调）。但是，$\overline{\mathbb{\Delta}}_{R/p}\simeq\mathrm{dR}^{(R/p)/\mathbf{F}_p}$，正如所需。

我们指出，(22) 可以利用 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}$构造。事实上，我们可以归约到 $A$ 是 $\mathbf{Z}_p[x]=\mathscr{O}_{\mathbf{G}_a}$的 $p$-完备化的情形。此时，**BL22b** 的例 9.1] 蕴含 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)\times_{\mathbf{G}_a}\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}\cong B(\mathbf{G}_a^\sharp\rtimes\mathbf{G}_m^\sharp)$。令 $\alpha:\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{Z}_p}\to\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}$ 为典范映射，因此它可分解为映射 $f\colon\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{Z}_p}\to\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)\times_{\mathbf{G}_a}\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}$，后者又可识别为映射 $B\mathbf{G}_m^\sharp\to B(\mathbf{G}_a^\sharp\rtimes\mathbf{G}_m^\sharp)$。由此可得一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{G}_a^\sharp & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{Z}_p} & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)\times_{\mathbf{G}_a}\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}.
\end{array}$$

设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}$ 上的一个拟凝聚层，并设 $\mathscr{F}/x$ 是 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_p)\times_{\mathbf{G}_a}\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}$ 上与之对应的拟凝聚层。我们的目标是在 $\mathscr{F}$ 是 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}$ 上的 Breuil-Kisin 扭曲线丛 $\mathscr{O}_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}}\{i\}$ 时，确定映射 $\mathscr{F}/x\to f_*\alpha^*\mathscr{F}\simeq f_*f^*(\mathscr{F}/x)$ 的余纤维。前述笛卡尔方形以及余纤维序列[11]

$$\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Z}_p\langle t\rangle=\mathscr{O}_{\mathbf{G}_a^\sharp}\xrightarrow{\partial_t}\mathbf{Z}_p\langle t\rangle,\ \gamma_n(t)\mapsto\gamma_{n-1}(t)$$

这意味着 $\mathrm{cofib}(\mathscr{F}/x\to f_*\alpha^*\mathscr{F})$ 可以识别为 $\mathscr{O}_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{Z}_p}}\{-1\}\otimes f_*\alpha^*\mathscr{F}$。令 $\mathscr{F}=\mathscr{O}_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{G}_a}}\{i\}$ 并取整体截面，即得到 (22)。□

现在我们构造余纤维序列 (20) 的一个更一般版本。首先需要以下引理:

**引理 3.1.17**。设 $G\subseteq S^1$ 是 $S^1$ 的一个非平凡有限子群，并令 $\lambda$ 表示 $S^1$ 在 $\mathbf{C}$ 上的旋转表示。

*(a)* 通过余纤维序列定义$(S^\lambda)^{(1)}$

$$G_+\to S^0\to(S^\lambda)^{(1)}.$$

那么存在一个余纤维序列

$$\Sigma(G_+)\to(S^\lambda)^{(1)}\to S^\lambda.$$

（*b*）设 $X$ 是一个带有 $G$-作用的谱。那么 $X^{tG}\xrightarrow{\sim}(\Sigma^\lambda X)^{tG}$。

[11]这里，我们声明 $\gamma_{-1}(x)=0$。

证明。部分（a）描述了 $S^\lambda$ 上的等变 CW 结构；我们把它留作读者的练习。部分（b）由观察余纤维序列可得

$$G_+ \otimes X \to X \to (S^\lambda)^{(1)} \otimes X$$

这意味着 $X^{tG} \xrightarrow{\sim} ((S^\lambda)^{(1)} \otimes X)^{tG}$；以及余纤维序列

$$X \otimes \Sigma(G_+) \to X \otimes (S^\lambda)^{(1)} \to \Sigma^\lambda X$$

这意味着 $(X \otimes (S^\lambda)^{(1)})^{tG} \xrightarrow{\sim} (\Sigma^\lambda X)^{tG}$。 □

**命题 3.1.18**。 设 $S[\pi] = S[\text{整数环}_{\geq 0}]$。对于任意 $S[\pi]$-线性 $\infty$-范畴 $\mathscr{C}$，存在余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{S[\pi]} S \to \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{S[\pi]} S)^{t\mathbf{Z}/p} \xrightarrow{\nabla^{t\mathbf{Z}/p}} \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{S[\pi]} S)^{t\mathbf{Z}/p}, \tag{23}$$

$$\mathrm{TP}(\mathscr{C}) \to \mathrm{TP}(\mathscr{C}/S[\pi]) \xrightarrow{\nabla^{tS^1}} \mathrm{TP}(\mathscr{C}/S[\pi]). \tag{24}$$

证明。我们将对 $A = S$ 使用 (15)（这里，变量 $t$ 重新标记为 $\pi$）。这给出一个 $S^1$-等变余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi]) \to \Sigma^\lambda \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi]). \tag{25}$$

为证明余纤维序列 (23)，我们先将 $t\mathbf{Z}/p$ 应用于前面的余纤维序列：

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi])^{t\mathbf{Z}/p} \to (\Sigma^\lambda \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi]))^{t\mathbf{Z}/p}.$$

注意，沿着增广 $S[\pi] \to S$（将 $\pi \mapsto 0$ 映至 $\mathscr{C}$）的张量积 $\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{S[\pi]} S$ 恰好是 $\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{S[\pi]} S$。类似地，$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi])^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{S[\pi]} S \simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_{S[\pi]} S)^{t\mathbf{Z}/p}$。因此，只需证明 $(\Sigma^\lambda \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi]))^{t\mathbf{Z}/p} \simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi])^{t\mathbf{Z}/p}$；而这正是引理 3.1.17。

余纤维序列 (24) 的构造甚至更简单：将 $tS^1$ 应用于 (25)，得到余纤维序列

$$\mathrm{TP}(\mathscr{C}) \to \mathrm{TP}(\mathscr{C}/S[\pi]) \to (\Sigma^\lambda \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi]))^{tS^1}.$$

由于存在余纤维序列

$$S^1_+ \to S^0 \to S^\lambda,$$

我们看到，对于任意 $S^1$-谱 $X$，都有等价 $X^{tS^1} \xrightarrow{\sim} (\Sigma^\lambda X)^{tS^1}$。特别地，$(\Sigma^\lambda \mathrm{THH}(\mathscr{C}/S[\pi]))^{tS^1} \simeq \mathrm{TP}(\mathscr{C}/S[\pi])$，如所求。□

**推论 3.1.19**。 令 $K$ 为一个数域，令 $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{O}_K$ 为位于 $p$ 之上的素理想，并令 $R$ 表示 $\mathscr{O}_K$ 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化。记 $\pi \in R$ 为一个一致化子，并令 $k = R/\pi$ 为剩余域，于是存在一个 $\mathbf{E}_\infty$-映射 $S[\pi] \to R$，将 $\pi \mapsto \pi$ 发送到。对于任意 $R$- 线性 $\infty$- 范畴 $\mathscr{C}$，存在余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C})^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_R k \to \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_R k)^{t\mathbf{Z}/p} \xrightarrow{\nabla^{t\mathbf{Z}/p}} \mathrm{THH}(\mathscr{C} \otimes_R k)^{t\mathbf{Z}/p}, \tag{26}$$

$$\mathrm{TP}(\mathscr{C}) \to \mathrm{TP}(\mathscr{C}/S[\pi]) \xrightarrow{\nabla^{tS^1}} \mathrm{TP}(\mathscr{C}/S[\pi]). \tag{27}$$

**注记 3.1.20.** 在 [**LW20**] 中，通过计算 $\mathrm{TP}(\mathscr{O}_K/S[\pi])$ 的相应自同态，使用余纤维序列 (27) 计算 $\mathrm{TP}(\mathscr{O}_K)$。

**3.2. 关于 THH 相对于 $X(p)$ 和 $\Theta$ 的一些计算。** 现在我们计算完美拟环上的拓扑 Sen 算子；这些计算为猜想 3.1.14 提供了进一步的证据。

**回顾 3.2.1.** 设 $R$ 是一个完美概形环。回忆， $A_{\mathrm{inf}}(R) = W(R^\flat)$，因此 $L_{A_{\mathrm{inf}}(R)/\text{整数环}_p}$ 是 $p$-完全零的。令 $A^+{}_{\mathrm{inf}}(R)$ 表示 [**Lur18** 的球面 Witt 向量$W^+(R^\flat)$，例 5.2.7]。

**引理 3.2.2.** 设 $\xi$ 是 *Fontaine* 映射 $\theta: A_{\mathrm{inf}}(R) \to R$ 的核的一个生成元。令 $\Omega^2 S^3 \to \mathrm{BGL}_1(A^+{}_{\mathrm{inf}}(R))$ 表示一个$\mathbf{E}_2$-映射，它检测源的底胞腔上的 $1-\xi \in A_{\mathrm{inf}}(R)^\times$。那么， $A_{\mathrm{inf}}(R)$ 的 $\xi$-进完备化与下列复合映射的 *Thom* 谱的 $\xi$-进完备化之间存在一个$\mathbf{E}_2$-$A^+{}_{\mathrm{inf}}(R)$-代数等价：

$$g_\xi : \Omega^2 S^3\langle 3\rangle \to \Omega^2 S^3 \to \mathrm{BGL}_1(A^+_{\mathrm{inf}}(R)).$$

特别地，存在一个等价：$\mathrm{THH}(A_{\mathrm{inf}}(R)^\wedge_\xi / A^+{}_{\mathrm{inf}}(R)^\wedge_\xi) \simeq A_{\mathrm{inf}}(R)^\wedge_\xi[\Omega S^3\langle 3\rangle]$，它是 $\mathbf{E}_2$-$A_{\mathrm{inf}}(R)^\wedge_\xi$-代数之间的等价。

证明。回忆 Mao20 的定理 1.13]: 映射 $\Omega^2 S^3 \to \mathrm{BGL}_1(A^+{}_{\mathrm{inf}}(R))$ 的 Thom 谱作为 $\mathrm{E}_2$-$A^+{}_{\mathrm{inf}}(R)$-代数等价于 $R$ 。纤维序列

$$\Omega^2 S^3\langle 3\rangle \to \Omega^2 S^3 \to S^1$$

这意味着存在一个类 $\xi \in \pi_0(\Omega^2 S^3\langle 3\rangle)^{g_\xi}$ 和一个映射 $S^1 \to \mathrm{BGL}_1(\Omega^2 S^3\langle 3\rangle)^{g_\xi}$，它检测 $1-\xi$，且其 Thom 谱为 $R$。这意味着存在一个余纤维序列

$$(\Omega^2 S^3\langle 3\rangle)^{g_\xi} \xrightarrow{\xi} (\Omega^2 S^3\langle 3\rangle)^{g_\xi} \to R.$$

由此可知， $\xi$-进完备化 $(\Omega^2 S^3\langle 3\rangle)^{g_\xi}$ 等价于 $A_{\mathrm{inf}}(R)^\wedge_\xi$。关于 THH 的论断可按标准方法利用 [**BCS10**] 得出。□

**注记 3.2.3.** 事实上，计算表明， [**BMS19**定理 6.1]中的结论，即 $\pi_*\mathrm{THH}(R) \cong R[\sigma]$ 等价于 [**Mao20**定理 1.13]（该定理将 $R$ 构造为映射 $\Omega^2 S^3 \to \mathrm{BGL}_1(A^+{}_{\mathrm{inf}}(R))$ 的 Thom 谱）。这两个陈述之间的等价性可用与 [**KN19**注记 1.5] 类似的方法证明。

**命题 3.2.4.** 设 $R$ 是一个 $p$-完备的完美概形环。那么存在一个 $p$-完备等价

$$\mathrm{THH}(R/X(p)) \simeq R[\mathbf{C}P^\infty \times \Omega S^{2p+1}] \otimes_R \epsilon^R.$$

特别地，若 $\theta$ 表示通过 $\Omega S^{2p+1}$ 上的 *James* 过滤得到的、次数为 $2p$的“多项式[12]”生成元，而 $R\langle u\rangle = \pi_* R[\mathbf{C}P^\infty]$ 是（底层 $R$-模上的）由次数为 2的类 $u$ 生成的除幂代数，则存在一个 $p$-完备同构

$$\pi_*\mathrm{THH}(R/X(p)) \simeq R[\theta]\langle u\rangle \otimes_R \epsilon^R_*.$$

证明。令 $X(p)\xi$ 表示复合映射的 $\xi$-进完备化 Thom 谱

$$\Omega\mathrm{SU}(p) \to \Omega S^{2p-1} \xrightarrow{\alpha_1} \Omega^2 S^3\langle 3\rangle \to \mathrm{BGL}_1(A^+_{\mathrm{inf}}(R)).$$

[12]回忆一下，$\mathrm{THH}(R/X(p))$ 不是一个环；“多项式”一词仅表示由 $R[\Omega S^{2p+1}]_*$ 生成的子空间。

于是，映射 $\mathrm{THH}(X(p)\xi) \to \mathrm{THH}(X(p)) \otimes A^{+}{}_{\text{无穷}}(R)^{\wedge}_{\xi}$ 是一个 $(p,\xi)$-完备等价：事实上，上述复合映射作为一个 $\mathrm{E}_1$-映射，由复合映射决定

$$\mathrm{SU}(p) \to S^{2p-1} \xrightarrow{(1-\xi)\alpha_1} B^2\mathrm{GL}_1(A^{+}_{\mathrm{inf}}(R)).$$

由于 $1-\xi$ 是 $\pi_0 A^{+}{}_{\mathrm{inf}}(R) \cong A_{\mathrm{inf}}(R)$ 中的单位，只需证明映射 $\mathrm{THH}(A^{+}{}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}) \to A^{+}{}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}$是一个 $(p,\xi)$-完备等价。但这显然成立：消去 $\xi$ 并与 $\mathrm{F}_p$张量后，我们得到映射 $\mathrm{HH}(R^{\flat}/\mathrm{F}_p) \to R^{\flat}$；由于 $R^{\flat}$ 是完美的，这个映射是等价。

由引理 3.2.2 以及证明定理 2.2.4(a) 时所用的相同论证可得，存在 $(p,\xi)$-完备等价

$$\mathrm{THH}(A_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}/X(p)) \simeq \mathrm{THH}(A_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}/X(p)_{\xi}) \simeq A_{\mathrm{inf}}(R)[\Omega S^{2p+1} \times \mathrm{BSU}(p-1)].$$

因此，存在 $p$-完备等价

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}(R/X(p)) &\simeq \mathrm{THH}(R/X(p)_{\xi}) \\ &\simeq \mathrm{THH}(R/A^{+}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}) \otimes_{\mathrm{THH}(A_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}/A^{+}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi})} \mathrm{THH}(A_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}/X(p)_{\xi}) \\ &\simeq \mathrm{THH}(R/A^{+}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}) \otimes_{A_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}[\Omega S^3\langle 3\rangle]} A_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}[\Omega S^{2p+1} \times \mathrm{BSU}(p-1)].\end{aligned}$$

由于 $R$ 是完美概形，[**BMS19** 定理 6.1] 蕴含 $\mathrm{THH}(R/A^{+}{}_{\mathrm{inf}}(R)) \simeq R[\Omega S^3]$。由单位诱导的映射 $\mathrm{THH}(W(R^{\flat})) \to \mathrm{THH}(R)$ 可识别为复合映射 $W(R^{\flat})[\Omega S^3\langle 3\rangle] \to R[\Omega S^3]$，它由 Fontaine 映射 $\theta : A_{\mathrm{inf}}(R) \to R$ 诱导。存在一个 $p$-局部笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} \Omega S^3\langle 3\rangle & \longrightarrow & \Omega S^3 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_p \times \iota} \\ \Omega S^{2p+1} \times \mathrm{BSU}(p-1) & \longrightarrow & \Omega S^{2p+1} \times \mathbf{C}P^{\infty} \times \mathrm{BSU}(p-1), \end{array} \tag{28}$$

这意味着

$$\mathrm{THH}(R/X(p)) \simeq R[\Omega S^{2p+1} \times \mathbf{C}P^{\infty} \times \mathrm{BSU}(p-1)],$$

正如所需。另一种方法是，存在等价

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}(R/X(p)_{\epsilon}) &\simeq \mathrm{THH}(R/A^{+}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi}) \otimes_{\mathrm{THH}(X(p)_{\epsilon}/A^{+}_{\mathrm{inf}}(R)^{\wedge}_{\xi})} X(p)_{\epsilon} \\ &\simeq R[\Omega S^3] \otimes_{R[\mathrm{SU}(p)]} R.\end{aligned}$$

所需的计算可由以下观察得出：存在一个 $p$-局部纤维化

$$\mathrm{SU}(p) \simeq \mathrm{SU}(p-1) \times S^{2p-1} \xrightarrow{*\times\alpha_1} \Omega S^3 \xrightarrow{H_p\times\iota} \Omega S^{2p+1} \times \mathbf{C}P^{\infty} \times \mathrm{BSU}(p-1)$$

它由笛卡尔方形 (28) 诱导。 □

**注 3.2.5.** 命题 3.2.4 有如下一个小变体：若 $R$ 是一个 $p$-完备的完美概形环，则存在一个 $p$-完备等价 $\mathrm{THH}(R/J(p)) \simeq R[\Omega S^3 \times \mathbf{C}P^{\infty}]$。唯一的修改是，必须改用 $p$-局部笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \Omega S^3\langle 3\rangle & \longrightarrow & \Omega S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega S^3 & \longrightarrow & \Omega S^3 \times \mathbf{C}P^{\infty}, \end{array}$$

它给出一个纤维化

$$S^1 \to \Omega S^3 \to \Omega S^3 \times \mathbf{C}P^\infty.$$

特别地，上述讨论表明 $\pi_*\mathrm{THH}(R/J(p)) \cong R[x]\langle u\rangle$。这与猜想 3.1.14 相符：

(a) 首先，$\pi_*\mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}] \cong R[x^{\pm 1}]\langle \frac{u}{x}\rangle$。由于 $\frac{u}{x}$ 位于 0 次，猜想 3.1.14 预言 $\widehat{\Omega}^{\not p}_R \cong R\langle \frac{u}{x}\rangle$。这确实成立： [BL22a, 例 4.7.6]表明，$p$-完美概形完美环 $R$ 的衍射霍奇复形是一个除幂 $R$-代数，由一个 0 次类生成。(b) 其次，$\tau_{(2n-2,2n]}\mathrm{THH}(R/J(p))$ 等价于 $\bigoplus_{0\le j\le n} R\cdot \gamma_j(u)x^{n-j}$，因此猜想 3.1.14 预言 $\mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 同构于由 $\{\gamma_j(\frac{u}{x})\}_{0\le j\le n}$ 生成的 $R$-子模 $\widehat{\Omega}^{\not p}_R$。这确实成立：见 [BL22a, 引理 5.6.14] 的证明中的 $(*_n)$。同理，$\tau_{(2(n-1)p,2np]}\mathrm{THH}(R/T(1))$ 是一个自由 $R$-模，由满足 $(n-1-i)p < j \le (n-i)p$ 的 $\theta^i\gamma_j(u)$ 张成。这包括满足 $(n-1)p < j \le np$ 的 $\gamma_j(u)$，也包括诸如 $\theta^n$ 和 $\theta^{n-1}\gamma_p(u)$ 的项。

**注 3.2.6**。 我们可以用如下更具代数性的方式理解命题 3.2.4 的计算。存在一个 $p$-局部纤维序列

$$S^{2p-1} \to \Omega S^3 \to \mathbf{C}P^\infty \times \Omega S^{2p+1}, \tag{29}$$

其中第二个映射由典范映射 $\Omega S^3 \to \mathrm{C}P^\infty$ 与 James-Hopf 映射 $\Omega S^3 \to \Omega S^{2p+1}$ 的乘积给出。关于 (29) 的 $\mathbf{Z}_p$-同调 Serre 谱序列为

$$E^2_{*,*} = \mathbf{Z}_p\langle u\rangle \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\theta,\epsilon]/\epsilon^2 \Rightarrow \pi_*\mathbf{Z}_p[\Omega S^3] \cong \mathbf{Z}_p[\sigma],$$

其中 $\epsilon$ 位于次数 $2p-1$。不难证明，存在唯一一族微分，其形式为

$$d^{2p}(\gamma_{p^n}(u)) = \epsilon\prod_{j=1}^{n-1}\gamma_{p^j}(u)^{p-1},\ d^{2p}(\theta^j) = jp\theta^{j-1}\epsilon.$$

其中，这个等式应理解为相差一个 $p$-进单位。上述描述意味着映射 $d^{2p}: E^2_{2np,\ 0} \to E^2_{2np-2p,\ 2p-1}$ 是满射，其核是一个秩为 1 的自由 $\mathbf{Z}_p$-模（例如，可以计算一个系数属于 $\mathbf{Z}_p$ 的显式 $(n+1)\times n$-矩阵，用以描述 $d^{2p}$）。若 $R$ 是完美环，那么这一讨论确定了 (29) 的 $R$-同调 Serre 谱序列。由于该谱序列中的 $d^{2p}$-微分恰好是拓扑 Sen 算子 $\Theta_R : \mathrm{THH}(R/X(p)) \to \Sigma^{2p}\mathrm{THH}(R/X(p))$ 在同伦上的作用，我们看到 $\Theta_R$由以下映射给出（相差一个 $p$-进单位）：

$$\gamma_{p^n}(u) \mapsto \prod_{j=1}^{n-1}\gamma_{p^j}(u)^{p-1}.$$

将 $u$ 视为变量，并用 $\frac{u^j}{j}!$ 表示 $\gamma_j(u)$；那么[13]

$$(u^{1-p}\partial_u)(\gamma_{p^n}(u)) = \frac{u^{p^n-p}}{(p^n-1)!} = \frac{(u^{p^{n-1}})^{p-1}}{(p^n-1)!} = \frac{u^{\sum_{j=1}^{n-1} p^j(p-1)}}{(p^n-1)!} \doteq \prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{u^{p^j}}{p^j!}\right)^{p-1}.$$

因此，我们可以非正式地写作 $\Theta_R = u^{1-p}\partial_u$。除以 $u^p$ 可视为对 $\Theta_R$中的移位 $2p$ 进行补偿。注意，若 $R$ 是 $p$-挠元自由的，则该算子也可解释为 $p\partial_{u^p}$。类似地，在同构$\pi_*\mathrm{THH}(R/J(p)) \cong R[x]\langle u\rangle$下，算子 $\Theta'_R : \mathrm{THH}(R/J(p)) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(R/J(p))$ 可解释为 $\partial_u$。

对上述讨论稍作变体，即可证明关于整数环/$p^n$的类似陈述。

**定义 3.2.7**。令 $Y_n$ 表示该复合映射的纤维

$$\mathbf{H}P^\infty \to K(\mathbf{Z},4) \to K(\mathbf{Z}/p^{n-1},4).$$

**命题 3.2.8**。取一个奇素数 $p$。存在等价

$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}/p^n/X(p)) \simeq \mathbf{Z}/p^n[\Omega S^{2p+1} \times B^2(p^{n-1}\mathbf{Z})] \otimes_{\mathbf{Z}/p^n} \epsilon^{\mathbf{Z}/p^n},$$
$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}/p^n/J(p)) \simeq \mathbf{Z}/p^n[\Omega S^3 \times B^2(p^{n-1}\mathbf{Z})],$$

其中，映射 $\mathbf{F}_p \otimes_{\mathbf{Z}/p^n} \mathrm{THH}(\text{整数环}/p^n/J(p)) \to \mathrm{THH}(\mathbf{F}_p/J(p))$ 由映射$\mathbf{F}_p[\Omega S^3 \times B^2(p^{n-1}\text{整数环})] \to \mathbf{F}_p[\Omega S^3 \times B^2(\text{整数环})]$ 诱导，该映射由 $p^{n-1}\text{整数环} \subseteq \text{整数环}$给出。

证明。在 [**Kit20**]，中，已证明 $\mathrm{Z}/p^n$ 是 $\mathrm{E}_2$-映射的 Thom 谱

$$\Omega^3 Y_n \to \Omega^3\mathbf{H}P^\infty \simeq \Omega^2 S^3 \to \mathrm{BGL}_1(S^0),$$

这意味着 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}/p^n) \simeq \mathrm{Z}/p^n[\Omega^2 Y_n]$。注意，存在一个典范映射 $\Omega^2 Y_n \to \Omega S^3$，因此也存在一个映射 $\Omega^2 Y_n \to \mathrm{C}P^\infty$。与命题 3.2.4 类似，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}/p^n/X(p)) &\simeq \mathrm{THH}(\mathbf{Z}/p^n) \otimes_{\mathrm{THH}(X(p))} X(p)\\ &\simeq \mathrm{THH}(\mathbf{Z}/p^n) \otimes_{\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)} \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/X(p))\\ &\simeq \mathbf{Z}/p^n[\Omega^2 Y_n] \otimes_{\mathbf{Z}/p^n[\Omega S^3\langle 3\rangle]} \mathbf{Z}/p^n[\Omega S^{2p+1} \times \mathrm{BSU}(p-1)].\end{aligned}$$

仍存在一个 $p$-局部笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc}\Omega S^3\langle 3\rangle & \longrightarrow & \Omega^2 Y_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega S^{2p+1} \times \mathrm{BSU}(p-1) & \longrightarrow & \Omega S^{2p+1} \times B^2(p^{n-1}\mathbf{Z}) \times \mathrm{BSU}(p-1),\end{array}$$

这意味着可以计算 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}/p^n/X(p))$。$\mathrm{THH}(\mathrm{Z}/p^n/J(p))$ 的计算 ) 类似。□

[13]关于最后一个等式，注意，如果 $n \geq 1$，那么 $(p^n-1)!$ 是 $p$-进单位乘以 $\prod_{j=1}^{n-1}(p^j!)^{p-1}$。事实上，注意到 $p^n - 1 = \sum_{j=0}^{n-1} p^j(p-1)$。根据阶乘的 $p$-进赋值的勒让德公式，我们有 $v_p(p^j!) = \frac{p^j-1}{p-1}$，因此

$$v_p((p^n-1)!) = \frac{p^n-1-n(p-1)}{p-1} = -n + \sum_{j=0}^{n-1} p^j = \sum_{j=1}^{n-1}(p^j-1) = v_p\left(\prod_{j=1}^{n-1}(p^j!)^{p-1}\right),$$

正如所需。

**注 3.2.9.** 也可以利用下降以及 $\mathrm{HH}(\mathbb{F}_p/\mathbb{Z}/p^n) = \mathbb{F}_p[K(\mathbb{Z}/p^{n-1},2)]$ 这一事实，从 $\mathbb{F}_p$ 的命题 3.2.4 推导出关于 $n \geq 2$ 的命题 3.2.8。事实上，复合映射 $S^1 \xrightarrow{p^{n-1}} S^1 \xrightarrow{1-p} \mathrm{BGL}_1(S)$ 能检测类 $(1-p)^{p^{n-1}} = 1 - p^n u \in \mathbb{Z}_p^\times$，其中 $p$ 是某个 $p$-进单位。因此，它的 Thom 谱等价于 $\mathbb{Z}/p^n$。进而，[**Dev23a**，命题 2.1.6]（或 [**Bea17**]）以及纤维序列

$$S^1 \xrightarrow{p^{n-1}} S^1 \to B\mathbf{Z}/p^{n-1}$$

这意味着，$\mathbb{F}_p$ 是映射 $B\mathbb{Z}/p^{n-1} \to \mathrm{BGL}_1(\mathbb{Z}/p^n)$ 的 Thom 谱，该映射在源的底胞腔上检测 $1-p \in (\mathbb{Z}/p^n)^\times$。应用 [**BCS10**]可得所需的 $\mathrm{HH}(\mathbb{F}_p/\mathbb{Z}/p^n)$ 计算。

**注记 3.2.10.** 命题 3.2.8 存在一个更高色数类比。为说明这一点，回忆 [**Lur15**，构造 3.5.1] 指出，存在一个球谱上的 $\mathbb{E}_2$-代数 $S((\hbar))$，满足 $|\hbar| = -2$。由 [**DHL+23**，推论 3.12] 可知，$S((\hbar))$ 可提升为 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数。因此，与 $X(p^n)$ 张量积定义了一个 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环 $X(p^n)((\hbar))$；特别地，可以定义相对于 $X(p^n)((\hbar))$ 的 THH。$\mathbb{E}_2$-映射 $X(p^n) \to \mathrm{BP}\langle n-1\rangle \to \mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}$ 可分解为一个 $\mathbb{E}_2$-映射 $X(p^n)((\hbar)) \to \mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}$，其中 $\hbar$ 被映到 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 的一个复定向（视为 $\pi_{-2}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}$ 中的一个类）。定理 2.2.4 的计算表明，

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}/X(p^n)((\hbar))) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}[\Omega S^{2p^n+1} \times B\Delta_n].$$

谱 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{t\mathbf{Z}/m}$ 是商 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1}/{}^{[m]}_{(\hbar)\hbar}$，其中 $[m](\hbar)$ 表示 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*$ 上形式群律的 $m$-级数。这可以视为一个映射 $S^1 \to \mathrm{BGL}_1(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1})$ 的 Thom 谱，该映射检测 $1 + {}^{[m]}_{(\hbar)\hbar} \in \pi_0(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{tS^1})^\times$。由此可得

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{t\mathbf{Z}/m}/X(p^n)((\hbar))) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle^{t\mathbf{Z}/m}[BS^1 \times \Omega S^{2p^n+1} \times B\Delta_n]. \tag{30}$$

当 $n=1$ 时，存在等价 $\mathrm{BP}\langle 0\rangle^{t\mathbf{Z}/m} \simeq (\mathbb{Z}/m)^{tS^1}$；而 (30) 可视为命题 3.2.8 中的等价沿 $\mathbb{Z}/m \to (\mathbb{Z}/m)^{tS^1}$ 作基变换所得。

由于 $B^2(p^{n-1}\mathbb{Z}) \cong \mathbb{C}P^\infty$（更典范地说，它是标准 $\mathbb{C}P^\infty$ 上线丛 $\mathscr{O}(p^{n-1})$ 的全空间），命题 3.2.8 蕴含 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathbb{Z}/p^n/J(p)) \cong \mathbb{Z}/p^n[x]\langle u_n\rangle$，其中 $|u_n| = |x| = 2$。若猜想 3.1.14 成立，命题 3.2.8 将蕴含 $\widehat{\Omega}^{\mathbb{P}}\mathbb{Z}/p^n$ 是 $\mathbb{Z}/p^n$ 上的一个（离散）除幂代数。在 [BL22b 的例 5.15]，中，证明了若 $\mathbb{G}_a^\sharp$ 表示 $\mathbb{G}_a$ 在原点处的 PD 完备化，则按 [BL22b] 的记法，$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^n)^{\mathbb{P}} \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{G}_a^\sharp \otimes \mathbb{F}_p$。这意味着 $\widehat{\Omega}^{\mathbb{P}}\mathbb{Z}/p^n \otimes_{\mathbf{Z}/p^n} \mathbb{F}_p$ 同构于 $|t_n| = 0$ 的除幂代数 $\mathbb{F}_p\langle t_n\rangle$。然而，正如猜想 3.1.14 所预言的，事实上无需模 $p$ 约化：下文的推论 3.2.15 表明，$\widehat{\Omega}^{\mathbb{P}}\mathbb{Z}/p^n$ 确实同构于 $|t_n| = 0$ 的除幂代数 $\mathbb{Z}/p^n\langle t_n\rangle$。

我感谢 Bhargav Bhatt 提出了下面这个引理的陈述；它类似于这样的计算：若 $R$ 是交换环，且 $x \in R$ 是正则元，则存在一个 $p$-完备等价 $\mathrm{dR}_{R/x/R} \simeq R\langle x\rangle/x$（参见[**Bha12**，定理 8.4]）。下面引理 3.2.11 的论证是我对 Bhatt 解释的理解。上面的拓扑讨论可以看作是一个

计算的类比：$\mathrm{HH}(R/x/R) \simeq R[\mathbb{C}P^\infty]/x$。下面我们将不拘一格地使用 [**BL22a**, **BL22b**] 中的记号。

引理 *3.2.11.* 设 $(A, I)$ 是一个横截棱镜（即 $A/I$ 是 $p$-挠元自由的）。设 $x \in A$ 是一个元素，使得 $x$ (模 $I$) 在 $\overline{A} := A/I$ 中是正则的，并且 $(x) \subseteq A$ 是 $\phi$-稳定的。那么 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{A/(I,x)/A}$ 与 $G^\sharp_a \times \mathrm{Spf}(A/(I,x))$ 是 $p$-完全同构的，因此 $\overline{\mathbb{\Delta}}_{A/(I,x)/A} \cong A/(I,x)\langle t\rangle$，其中 $|t| = 0$。

证明。根据 [**BL22b**，命题 5.12],，映射 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{A/(I,x)/A} \to \mathrm{Spf}(A/(I,x))$ 是一个以 $T_{A/(I,x)/\overline{A}}\{1\}^\sharp$ 为带的分裂 gerbe。在此情形下，由于 $x$ (模 $I$) 是 $\overline{A}$ 中的正则元素，我们看到 $L_{A/(I,x)/\overline{A}} = (x)/(x^2)[1]$,，因此 $T_{A/(I,x)/\overline{A}} = \mathrm{Spf}\,\mathrm{Sym}^{A/(I,x)}(L_{A/(I,x)/\overline{A}})^\wedge_p$ 与 $\Omega G_a$ 在 $A/(I,x)$ 上同构。由此可得，$\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{A/(I,x)/A}$ 与 $\mathrm{Spf}(A/(I,x))$ 上的平凡 $G^\sharp_a$-主齐性空间同构。由于 $\overline{\mathbb{\Delta}}_{A/(I,x)/A}$ 是 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{A/(I,x)/A}$ 的结构层的全局截面，引理得证。□

**注记 3.2.12.** 事实上，根据引理 3.2.11，共轭滤过 $\mathrm{F}^{\mathrm{conj}}_i\overline{\mathbb{\Delta}}_{A/(I,x)/A}$ 与 $A/(I,x)\langle t\rangle$ 上的除幂滤过同构。

**注记 3.2.13.** 继续采用引理 3.2.11 的假设，我们在此不加证明地指出，引理 3.2.11 也可由 [**BS19** 的例 7.9], 推出，该例指出 $\mathbb{\Delta}_{A/(I,x)/A} \cong A\{\frac{x}{I}\}^\wedge_{(p,I)}$。若 $I = (d)$ 是主理想，则 $p$-完备同构

$$\beta : A/(I,x)\langle t\rangle^\wedge_p \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{\Delta}}_{A/(I,x)/A} \cong A\left\{\frac{x}{I}\right\}^\wedge_p/I$$

导出一个 $I$-进 Bockstein 谱序列

$$E_1^{*,*} = A/(I,x)\langle t\rangle^\wedge_p[\overline{d}] \cong A\left\langle\frac{x}{d}\right\rangle^\wedge_p[\overline{d}]/d \Rightarrow A\left\{\frac{x}{d}\right\}^\wedge_{(p,d)},$$

其中 $\overline{d}$ 在 $E_1$ 页上表示 $d$。

映射 $\beta$ 将 $\gamma_{p^n}(t)$ 映至 $\mapsto \delta^n(\frac{x}{d})$（相差一个 $p$-进单位）。这可通过证明以下事实得到：在引理 3.2.11 的情形下，若 $n \geq 0$，则 $\phi(\delta^n(\frac{x}{d})) \in (d) \subseteq A\{\frac{x}{d}\}$（见下文引理 3.2.14）。事实是

$$\phi\left(\delta^n\left(\frac{x}{d}\right)\right) = \delta^n\left(\frac{x}{d}\right)^p + p\delta^{n+1}\left(\frac{x}{d}\right)$$

于是可推出 $\delta^n(\frac{x}{d})^p \equiv -p\delta^{n+1}(\frac{x}{d})$ (模 $d$)。因此，元素 $\delta^n(\frac{x}{d})$ 可用于定义 $\frac{x}{d}$ 的除幂（模 $d$）。特别地，我们得到所需的映射 $\beta$：$A/(I,x)\langle t\rangle \to A\{\frac{x}{d}\}^\wedge_{(p,d)}/d$，但还需进一步证明它是一个 $p$-完备同构。

**引理 3.2.14.** 沿用引理 *3.2.11* 中的记号。则 $\phi(\delta^n(\frac{x}{d})) \in (d) \subseteq A\{\frac{x}{d}\}$。

证明。设 $t = \frac{x}{d}$。所需的结论可对 $n$ 使用归纳法证明。对于基例，我们需要证明 $\phi(t) \in I$。通过将问题约化到普适情形，我们可以假设 $(p,d)$ 在 $A$ 中构成正则序列。于是，由 **AL20** 引理 3.6] 可知，序列 $(d, \phi(d))$ 在 $A$ 中是正则序列。由于 $(x)$ 是 $\phi$-稳定的，我们可知 $d$ 整除 $\phi(x)$；再由公式 $\phi(d)\phi(t) = \phi(x)$ 可得 $d$ 整除 $\phi(t)$，这正是所需结论。对于归纳步骤，注意到

$$p\phi(\delta^{n+1}(t)) = p\delta(\phi(\delta^n(t))) = \phi^2(\delta^n(t)) - \phi(\delta^n(t))^p.$$

归纳假设表明，对于每个 $k \geq 1$，都有 $\phi(\delta^n(t)) \in (d)$，因此 $d$ 整除 $p\phi(\delta^{n+1}(t))$。由于 $(p,d)$ 是正则序列，这意味着 $d$ 整除 $\phi(\delta^{n+1}(t))$，这正是所需结论。□

这推出了以下结果；该结果也在 [**Pet23** 的引理 6.13] 中得到证明。

**推论 3.2.15.** 存在一个$\mathrm{Spec}(\text{整数环}/p^n)^{\not p} \cong \mathbf{G}_a^\sharp \times \mathrm{Spec}(\text{整数环}/p^n)$ 的整数环$/p^n$-概形同构。特别地，$\mathbf{G}_m^\sharp$ 对$\mathbf{G}_a^\sharp$ 在整数环$/p^n$ 上的缩放作用给出一个$\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}_{\mathbf{Z}/p^n} \cong \mathbf{G}_a^\sharp/\mathbf{G}_m^\sharp$ 的整数环$/p^n$-代数栈同构。

证明。回忆，$\overline{\mathbb{\Delta}}_{\mathbf{Z}/p^n/\text{整数环}_p[\![\tilde{p}]\!]} = \widehat{\Omega}^{\not p}_{\text{整数环}/p^n}$。引理 3.2.11 表明，$\overline{\mathbb{\Delta}}_{\mathbf{Z}/p^n/\text{整数环}_p[\![\tilde{p}]\!]} \cong \mathbf{Z}/p^n\langle t\rangle$，且满足 $|t| = 0$；这就得到了所需结论。（如注记 3.2.13 所述，将 $\gamma_{p^m}(t)$ 视为 $p$-进单位元乘以 $\delta^m(\frac{p^n}{\tilde{p}})$ 是有用的。）

或者，考虑横截棱镜 $(A, I) = (\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!], [p]_q)$，并令$x = (q-1)^{n(p-1)}$。注意到 $\phi(x) \in (x)$，因此 $(x)$ 是 $\phi$- 稳定的。于是 $A/I \cong \mathbf{Z}_p[\zeta_p]$，并且 $A/(I,x)$ 同构于 $\mathbf{Z}_p[\zeta_p]/(\zeta_p - 1)^{n(p-1)} \cong \mathbf{Z}/p^n[\zeta_p]$，因为 $(\zeta_p - 1)^{n(p-1)}$ 的 $p$-进赋值为 $n$。由引理 3.2.11 可知，$\overline{\mathbb{\Delta}}_{\mathbf{Z}/p^n[\zeta_p]/\text{整数环}_p[\![q-1]\!]} \cong \mathbf{Z}/p^n[\zeta_p]\langle t'\rangle$，其中 $|t'| = 0$。$\mathbf{Z}_p^\times$ 在 $(A, I)$ 上有一个作用（因而 $\mathbf{F}_p^\times \subseteq \mathbf{Z}_p^\times$ 也有作用）；取 $\mathbf{F}_p^\times$-不动点可得到一个同构

$$\overline{\mathbb{\Delta}}_{\mathbf{Z}/p^n/\mathbf{Z}_p[\![\tilde{p}]\!]} \cong (\overline{\mathbb{\Delta}}_{\mathbf{Z}/p^n[\zeta_p]/\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]})^{h\mathbf{F}_p^\times} \cong \mathbf{Z}/p^n\langle t\rangle$$

如所需，带有 $|t| = 0$。注意，正如注记 3.2.13 所述，除幂$\gamma_{p^m}(t')$ 可以看作 $p$-进倍数的 $\delta^m(\frac{(q-1)^{n(p-1)}}{[p]_q}) = \delta^m(\frac{(q-1)^{np-n+1}}{q^p-1})$。□

附录 B 中给出了推论 3.2.15 的另一种（更便于实际操作的）证明；这一替代论证也作为 [**Pet23**，引理 6.13] 给出。

**例 3.2.16.** 下面描述 THH(整数环$/p^n/X(p)$) 上的拓扑 Sen 算子，其中 $n \geq 2$（回忆 $p > 2$）。这等价于描述纤维化的整数环$/p^n$-同调 Serre 谱序列

$$S^{2p-1} \to \Omega^2 Y_n \to \Omega S^{2p+1} \times B(p^{n-1}\mathbf{Z}).$$

注意，这个纤维化是纤维化 (5) 的一个类比。

在 $\mathbf{Z}_p$-同调中分析 Serre 谱序列会更简单，因为 $\mathbf{Z}/p^n$-同调中的 Serre 谱序列的所有微分都源自 $\mathbf{Z}_p$-同调中的 Serre 谱序列。分析方法与注 3.2.6 类似；Serre 谱序列为

$$E^2_{*,*} = \mathbf{Z}_p\langle u_n\rangle \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[\theta, \epsilon]/\epsilon^2 \Rightarrow \pi_*\mathbf{Z}_p[\Omega^2 Y_n], \tag{31}$$

其中 $\epsilon$ 的次数为 $2p-1$，而 $u_n$ 的次数为 2。确定这个谱序列中的微分有几种方法。我们将先计算 $\pi_*\mathbf{Z}_p[\Omega^2 Y_n]$，以此描述微分的模式；接着，我们将通过计算 $\pi_* C^*(\Omega^2 Y_n; \mathbf{Z}_p)$ 来完成这一步。为此，我们使用纤维化的 Serre 谱序列

$$B\mathbf{Z}/p^{n-1} \to \Omega^2 Y_n \to \Omega S^3.$$

由于 $\mathrm{H}^*(B\mathbf{Z}/p^{n-1}; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[c]/p^{n-1}c$，且 $|c| = 2$，Serre 谱序列在第 $E_2$ 页退化，因此我们发现 $\pi_* C^*(\Omega^2 Y_n; \mathbf{Z}_p) \cong \mathbf{Z}_p\langle x\rangle[c]/(x - p^{n-1}c)$，且 $|x| = 2$。（如果 $n = 1$，那么 $\Omega^2 Y_n \simeq \Omega S^3$，并且上同调环为 $\mathbf{Z}_p\langle x\rangle$。）对于

$n \geq 2$，这与 $\mathrm{Z}_p\langle y\rangle[c]/y$ 同构，其中 $y = x - p^{n-1}c$。事实上，注意如果 $n \geq 2$，那么

$$\gamma_j(y) := \sum_{i=0}^{j} \frac{p^{i(n-1)}}{i!} c^i \gamma_{j-i}(x)$$

由于 $p$ 在 $\mathrm{Z}_p$ 中具有除幂，因此它是 $\mathrm{Z}_p\langle x\rangle[c]/(x - p^{n-1}c)$ 中定义良好的类，并且这些类构成了 $\mathrm{Z}_p\langle x\rangle[c]/(x - p^{n-1}c)$ 作为 $\mathrm{Z}_p[c]$-模的一组基。回忆，在同调分次下，存在如下等价：

$$\mathbf{Z}_p\langle y\rangle/y \simeq \mathbf{Z}_p \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathbf{Z}_p/n\{\gamma_n(y)\}[-2n],$$

这意味着，如果 $n \geq 2$，那么

$$\mathrm{H}^i(\Omega^2 Y_n; \mathbf{Z}_p) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_p \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbf{Z}_p/j\{\gamma_j(y)c^{k-j}\} & i = 2k \geq 0 \text{ even} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

利用泛系数定理，我们发现，如果 $n \geq 2$，那么

$$\pi_i \mathbf{Z}_p[\Omega^2 Y_n] \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_p & i \in 2\mathbf{Z}_{\geq 0} \\ \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbf{Z}_p/j & i = 2k-1. \end{cases}$$

$\pi_{2j}\mathrm{Z}_p[\Omega^2 Y_n]$ 的生成元是 $c^j \in \mathrm{Z}_p\langle y\rangle[c]/y$ 的线性对偶，而 $\pi_{2k-1}\mathrm{Z}_p[\Omega^2 Y_n]$ 中被 $j$ 消去的生成元则是 $\gamma_j(y)c^{k-j}$ 的对偶。请注意，若 $n \geq 2$，则同伦群 $\pi_*\mathrm{Z}_p[\Omega^2 Y_n]$ 与 $n$ 无关（但这些群的生成元确实依赖于 $n$）。

现在我们回到 Serre 谱序列 (31)。与纤维化 (5) 的 Serre 谱序列进行比较（即考察 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/X(p))$ 上的拓扑 Sen 算子；见注 3.1.6），可知 (31) 中的微分必定为（相差 $p$-进单位元）：

$$d^{2p}(\gamma_{p^k}(u_n)) = p^{n-1}\epsilon \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_{p^j}(u_n)^{p-1} = p^n \epsilon \partial_{u_n^p}(\gamma_{p^k}(u_n)),\ d^{2p}(\theta^j) = jp\theta^{j-1}\epsilon.$$

模 $p^n$ 约化后，我们得到 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}/p^n/X(p))$ 上关于 $n \geq 2$ 的拓扑 Sen 算子：

$$\Theta : \gamma_{p^k}(u_n) \mapsto p^{n-1} \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_{p^j}(u_n)^{p-1},\ \Theta : \theta^j \mapsto jp\theta^{j-1}.$$

注意，这一作用表现为“$p^n\partial_{u_n^p}$”。当然，也可以类似地推出 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}/p^n/J(p))$ 上拓扑 Sen 算子的作用。这恢复了如下计算

$$\pi_j \mathrm{THH}(\mathbf{Z}/p^n) = \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{j} \mathbf{Z}/\gcd(j, p^n) & \text{even } j \geq 0, \\ \bigoplus_{i=0}^{j} \mathbf{Z}/\gcd(j, p^n) & \text{odd } j \geq 0, \\ 0 & j < 0. \end{cases}$$

研究完备离散赋值环时，还会出现另一个拓扑 Sen 算子的例子；此时，关于 Conjecture 3.1.14 所预言的相对于 $J(p)$ 的 THH 与衍射霍奇复形之间的关系，可以直接看出。

**例 3.2.17.** 设 $R$ 是一个 $p$-无挠的完备混合特征 $(0, p > 0)$ 离散赋值环，其剩余域 $k$ 是完美的。则有

$$\pi_* \mathrm{THH}(R/X(p)) \cong \mathrm{HH}_*(R/\mathbf{Z}_p)[\theta] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \epsilon_*^{\mathbf{Z}_p},$$

且映射 $\Theta$： $\pi_*\mathrm{THH}(R/X(p)) \to \pi_{*-2p}\mathrm{THH}(R/X(p))$ 将 $\theta^j \mapsto jp\theta^{j-1}$ 发送到。为了计算拓扑 Sen 算子在 $\mathrm{THH}(R/X(p))$ 其余部分上的作用，假设 $T(1)$ 是一个 $\mathrm{E}_2$-环，并改为使用 $\mathrm{THH}(R/T(1))$ 会更简单；这只是表面上的处理，将下文的论证稍作修改以改用 $\mathrm{THH}(R/X(p))$ 并不困难。于是，我们有 $\pi_*\mathrm{THH}(R/T(1)) \cong$ Hochschild 同调$_*(R/$整数环$_p)[\theta]$。我们将利用拓扑 Sen 算子在 $\mathrm{THH}(R/T(1))$ 上的作用以及 (16) 来计算 $\mathrm{THH}(R)$。设 $\pi \in R$ 是一个一致化子，令 $E(u) \in W(k)[\![u]\!]$ 为其最小多项式，并令 $E'(u) \in W(k)[\![u]\!]$ 表示其关于 $u$ 的导数。回忆， $R = W(k)[\![u]\!]/E(u)$， $W(k)$ 在整数环 $\mathbf{Z}_p$ 上是 étale 的，且 $\pi_*$ Hochschild 同调$(W(k)[\![u]\!]/W(k)) \cong \Lambda_{W(k)[\![u]\!]}(du)$，其中 $|du| = 1$，并且 $\pi_*$Hochschild 同调$(R/W(k)[\![u]\!]) \cong R\langle\sigma_E\rangle$，其中 $\sigma_E := \sigma^2(E(u))$。复合映射 $W(k) \to W(k)[\![u]\!] \to R$ 的传递性序列蕴含，Hochschild 同调$(R/W(k)) \simeq$Hochschild 同调$(R/$整数环$_p)$ 是映射 $R\langle\sigma_E\rangle \to \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle$ 的纤维，该映射将 $\gamma_n(\sigma_E) \mapsto E'(\pi)\gamma_{n-1}(\sigma_E)$ 发送到。特别地，

$$\pi_n\mathrm{HH}(R/\mathbf{Z}_p) \cong \begin{cases} R & n = 0, \\ R/E'(\pi) & n = 2j+1,\ j \geq 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

将 $\pi_{2j-1}\mathrm{HH}(R/\mathbf{Z}_p)$ 的生成元记为 $z_j$，使得 $\gamma_{j-1}(\sigma_E) \in \pi_{2j}\Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle$被边界映射 $\Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle \to \Sigma\mathrm{HH}(R/\mathbf{Z}_p)$ 送至 $z_j$。于是我们有

$$\pi_n\mathrm{THH}(R/T(1)) \cong \begin{cases} R \cdot \theta^j & n = 2pj, j \geq 0 \\ \bigoplus_{0 \leq i < j/p} R/E'(\pi) \cdot z_{j-pi}\theta^i & n = 2j-1, j \geq 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{32}$$

由此，我们可以描述 $\mathrm{THH}(R/T(1))$ 上的拓扑 Sen 算子。为此，将上述计算稍作改写，并使用 $J(p)$ 代替 $T(1)$ 会很有帮助。容易计算得出， $\pi_*\mathrm{THH}(R/J(p)) \cong \mathrm{HH}_*(R/\mathbf{Z}_p)[x]$，其中 $x$ 是命题 2.3.3 中次数为 2 的类。换言之，

$$\pi_n\mathrm{THH}(R/J(p)) \cong \begin{cases} R \cdot x^j & n = 2j \text{ for } j \geq 0, \\ \bigoplus_{0 \leq i < j} R/E'(\pi) \cdot z_{j-i}x^i & n = 2j-1, j \geq 1. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{HH}(R/\mathbf{Z}_p)$ 是映射 $R\langle\sigma_E\rangle \to \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle$ 的纤维，因此存在一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(R/J(p)) \to R\langle\sigma_E\rangle[x] \xrightarrow{\nabla} \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle[x], \tag{33}$$

其中我们将第二个映射记为 $\nabla$。映射 $\nabla$ 在同伦上的作用由一个导子给出，将 $\sigma_E \mapsto E'$ 送到 $\pi$。非正式地，$\mathrm{THH}(R/J(p))$ 可以写作 $R\langle\sigma_E\rangle[x]^{\nabla=0}$。

拓扑 Sen 算子 $\Theta : \mathrm{THH}(R/J(p)) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(R/J(p))$ 在同伦上的描述，是由 $R\langle\sigma_E\rangle[x]$ 上的算子给出的，该算子将 $x \mapsto nx^{n-1}$。注意，此算子与 $\nabla$ 交换（因此它确实定义了一个作用于 $\pi_*\mathrm{THH}(R/J(p))$ 上的算子）。注意，由于 $\mathrm{THH}(R)$ 是 $\Theta : \mathrm{THH}(R/J(p)) \to \Sigma^2\mathrm{THH}(R/J(p))$ 的纤维，而 $\mathrm{THH}(R/J(p))$ 是 $\nabla$: $R\langle\sigma_E\rangle[x] \to \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle[x]$ 的纤维，

我们可以将 THH($R$) 写成该方块的全纤维

$$\begin{array}{ccc} R\langle\sigma_E\rangle[x] & \xrightarrow{\nabla} & \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle[x] \\ \downarrow{\scriptstyle \Theta} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle[x] & \xrightarrow{\nabla} & \Sigma^4 R\langle\sigma_E\rangle[x], \end{array} \tag{34}$$

其中，记作 $\Theta$ 的映射将 $x^n \mapsto nx^{n-1}$ 送到.....。进而可得，THH($R$) 也是该方块的全纤维

$$\begin{array}{ccc} R\langle\sigma_E\rangle[x] & \xrightarrow{\nabla} & \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle[x] \\ \downarrow{\scriptstyle \Theta+\nabla} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta+\nabla} \\ \Sigma^2 R\langle\sigma_E\rangle[x] & \xrightarrow{\nabla} & \Sigma^4 R\langle\sigma_E\rangle[x]. \end{array} \tag{35}$$

算子 $\nabla + \Theta$ 通过以下方式作用于 $R\langle\sigma_E\rangle[x]$

$$\nabla + \Theta : x^n \gamma_m(\sigma_E) \mapsto n x^{n-1} \gamma_m(\sigma_E) + E'(\pi) x^n \gamma_{m-1}(\sigma_E). \tag{36}$$

现在令 $x$ 可逆，并将 $y = \sigma_E x^{-1}$ 写作 $R\langle\sigma_E\rangle[x^{\pm 1}]$。那么，$y$ 具有除幂，且位于 0 次，并且在同伦上存在一个同构 $R\langle\sigma_E\rangle[x^{\pm 1}] \cong R\langle y\rangle^{\wedge}_{(y)}[x^{\pm 1}]$。对于 $n \leq 0$，我们可以用相同的公式形式化地定义 $\Theta$ 在 $x^n$ 上的作用：$\Theta(x^n) = nx^{n-1}$。由 (36) 可得，$\Psi := x(\nabla + \Theta)$ 将.....送到

$$\Psi : \gamma_n(y) \mapsto -n x^{-n} \gamma_n(\sigma_E) + E'(\pi) x^{-n+1} \gamma_{n-1}(\sigma_E) = E'(\pi)\gamma_{n-1}(y) - n\gamma_n(y).$$

我们断言，若将 $y = (1-t)E'(\pi)$ 视为相同，则 $-t\partial_t$ 在 $R\langle(1-t)E'(\pi)\rangle$ 上的作用与 $\Psi$ 在 $R\langle y\rangle^{\wedge}_{(y)}$ 上的作用一致。事实上：

$$\begin{aligned} \gamma_n(y) = \gamma_n((1-t)E'(\pi)) &= -E'(\pi)^n \frac{(1-t)^n}{n!} \\ &\xmapsto{-t\partial_t} E'(\pi)^n \frac{t(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} = E'(\pi)^n \left( \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} - n\frac{(1-t)^n}{n!} \right) \\ &= E'(\pi)\gamma_{n-1}((1-t)E'(\pi)) - n\gamma_n((1-t)E'(\pi)) \\ &= E'(\pi)\gamma_{n-1}(y) - n\gamma_n(y). \end{aligned}$$

特别地，在将 $x$ 取逆后，我们可以将方块（35）改写为

$$\begin{array}{ccc} R\langle(1-t)E'(\pi)\rangle[x^{\pm 1}] & \longrightarrow & R\langle(1-t)E'(\pi)\rangle[x^{\pm 1}] \\ \downarrow{\scriptstyle t\partial_t} & & \downarrow{\scriptstyle t\partial_t} \\ R\langle(1-t)E'(\pi)\rangle[x^{\pm 1}] & \longrightarrow & R\langle(1-t)E'(\pi)\rangle[x^{\pm 1}], \end{array}$$

其中，水平映射的作用是将 $\gamma_n((1-t)E'(\pi)) \mapsto E'(\pi)\gamma_{n-1}((1-t)E'(\pi))$ 送至 $\gamma_n((1-t)E'(\pi)) \mapsto E'(\pi)\gamma_{n-1}((1-t)E'(\pi))$。上述方块中任一水平映射的纤维均可识别为 THH($R/J(p)$)$[x^{-1}]$。

利用上述对 $\Theta$ 的描述，可以（经过一些繁琐的计算）得到

$$\pi_n \mathrm{THH}(R) = \begin{cases} R & n = 0, \\ R/jE'(\pi) & n = 2j-1 \geq 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

这正是来自 [**LM00** 的 $\pi_*\mathrm{THH}(R)$ 计算，见定理 5.1] （ [**KN19** 中的定理 **4.4**] 对其进行了重新证明）。

上述讨论可与 [BL22b, 备注 9.7]，相比较，其中指出，若 $X=\mathrm{Spec}\ R$，则有 $\mathrm{WCart}_X^{\mathrm{HT}}\cong X\times BG$，其中 $G=\{(a,t)\in \mathbb{G}_a^\sharp\rtimes\mathbb{G}_m^\sharp | t-1=E'(\pi)a\}$。典范映射 $\mathrm{WCart}_X^{\mathrm{HT}}\to X\times\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}\cong (B\mathbb{G}_m^\sharp)_X$ 可识别为由群概形 $G\to\mathbb{G}_m^\sharp$ 在 $X$ 上的商映射所诱导的分类栈之间的映射。回忆，衍射霍奇栈 $X^{\not p}$ 可识别为 $\mathrm{WCart}_X^{\mathrm{HT}}\times_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}}\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)\cong \mathrm{WCart}_X^{\mathrm{HT}}\times_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}\times X} X$。特别地，$X^{\not p}\cong (\mathbb{G}_m^\sharp)_X/G$，即群概形 $\mathbb{G}_a^\sharp[E'(\pi)]=\{a\in\mathbb{G}_a^\sharp | E'(\pi)a=0\}$ 的分类栈。由此描述可以证明，衍射霍奇复形 $\widehat{\Omega}_R^{\not p}\cong \Gamma(B\mathbb{G}_a^\sharp[E'(\pi)];\mathcal{O})$ 的上同调的 2-周期化可识别为 $\pi_*\mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}]$（加法上即为 $\pi_*\mathrm{HH}(R/\mathbb{Z}_p)$ 的 2-周期化），正如猜想 3.1.14 所预言的那样。

注意，对于（16）的以下同伦长正合列，其中的扩张始终是非平凡的：

$$\begin{aligned}(37)\qquad &\cdots\to\pi_{2j}\mathrm{THH}(R/T(1))\to\pi_{2(j-p)}\mathrm{THH}(R/T(1))\to\pi_{2j-1}\mathrm{THH}(R)\to\\ &\pi_{2j-1}\mathrm{THH}(R/T(1))\to\pi_{2(j-p)-1}\mathrm{THH}(R/T(1))\to\pi_{2j-2}\mathrm{THH}(R)\to\cdots\end{aligned}$$

例如，当 $j=p$ 时，有一个长正合列

$$\pi_{2p}\mathrm{THH}(R/T(1))\cong R\cdot\theta\to\pi_0\mathrm{THH}(R/T(1))\cong R\to\pi_{2p-1}\mathrm{THH}(R)\to\pi_{2p-1}\mathrm{THH}(R/T(1))\to$$

这特别给出了一个短正合列

$$0\to R/p\to\pi_{2p-1}\mathrm{THH}(R)\to R/E'(\pi)\cong\pi_{2p-1}\mathrm{THH}(R/T(1))\to 0.$$

由于 $\pi_{2p-1}\mathrm{THH}(R)\cong R/pE'(\pi)$，因此该扩张必定是非平凡的。

**3.3. 与 $\widetilde{p}$-德拉姆复形的关系。** 现在我们将介绍一些额外的计算，这些计算进一步支持猜想 3.1.14。

**注 3.3.1.** 假设 $R$ 是 $\mathbb{Z}_p[t]$ 的 $p$-完备化。Arpon Raksit 的即将发表的工作（[**Rak20**]）表明，(完备化后的) $q\Omega_R$ 是 $\mathrm{HP}(\mathrm{ku}[t]/\mathrm{ku})$ 上某个动机滤过的伴随分次。事实上，Raksit 研究了一般的、具有偶数同伦群的 $\mathbb{E}_\infty$-环 $A$ 的 $\mathrm{HP}(A[t]/A)$。

利用注 3.3.1，可以证明 (完备化后的) $\widetilde{p}\Omega_R$ 是 $\mathrm{BP}\langle 1\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle 1\rangle$ 上某个动机滤过的伴随分次。此外，类 $\widetilde{p}$ 被确定为 $v_1\hbar^{p-1}$ 在伴随分次中的像。为求完整起见，我们明确计算 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p[t]/X(p))$。与例 3.2.17 一样，假设 $T(1)$ 是一个 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，并改为研究 $\mathrm{THH}(R/T(1))$，这样做仅仅是形式上的改变。首先需要以下结果，这是 [**Rig21** 的命题 3.1.1] 的一个特例，以及 $S^1/\mu_n$ 的 $S^1$-等变庞加莱对偶性。

**引理 3.3.2.** 设 $X$ 是一个带有 $S^1$ 作用的下有界谱。那么存在一个等价

$$\left(\bigoplus_{n\geq 1} X\otimes(S^1/\mu_n)_+\right)^{tS^1}\simeq\lim_{k\to\infty}\bigoplus_{n\geq 1}(\Sigma\tau_{\leq k}X)^{t\mathbf{Z}/n}.$$

**例 3.3.3.** 设 $S$ 为球谱。回忆一下，$\mathrm{Z}_p[t] \simeq \mathrm{Z}_p \otimes S[t]$，因此 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p[t]/T(1)) \simeq \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/T(1)) \otimes \mathrm{THH}(S[t])$。令 $\mathrm{THH}(S[t], (t))$ 表示映射 $\mathrm{THH}(S[t]) \to \mathrm{THH}(S) \simeq S$ 的纤维，该映射由增广 $S[t] \to S$ 诱导，并将 $t \mapsto 0$ 送到相应对象；注意，映射 $\mathrm{THH}(S[t]) \to S$ 具有一个 $S^1$-等变分裂。类似地，我们记 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p[t]/T(1), (t))$ 为映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p[t]/T(1)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/T(1))$ 的纤维，该映射由增广 $\mathrm{Z}_p[t] \to \mathrm{Z}_p$ 诱导。于是 $\mathrm{THH}(S[t], (t)) \simeq \bigoplus_{n\geq 1}(S^1/\mu_n)_+$，因此

$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p[t]/T(1), (t)) \simeq \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/T(1)) \otimes \mathrm{THH}(S[t], (t)) \simeq \bigoplus_{n\geq 1}(S^1/\mu_n)_+ \otimes \mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/T(1)). \tag{38}$$

由引理 3.3.2 可知，存在一个等价

$$\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p[t]/T(1), (t))^{tS^1} \simeq \lim_{k\to\infty} \bigoplus_{n\geq 1} \Sigma(\tau_{\leq k}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/T(1)))^{t\mathbf{Z}/n}.$$

利用定理 2.2.4(a)，我们有 $\tau_{\leq 2kp}\mathrm{THH}(\mathrm{Z}_p/T(1)) \simeq \mathrm{Z}_p[J_k(S^{2p})]$。利用定理 2.2.4(a)进行简单计算可得，存在一个同构

$$\pi_*(\tau_{\leq 2kp}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/T(1)))^{t\mathbf{Z}/n} \cong \pi_*(\mathrm{BP}\langle 1\rangle/v_1^{k+1})^{t\mathbf{Z}/n} \cong \pi_*(\tau_{\leq 2k(p-1)}\mathrm{BP}\langle 1\rangle)^{t\mathbf{Z}/n}.$$

令 $\langle n\rangle(\hbar) := {}^{[n]}_{(\hbar)}\hbar$，使得 $\pi_*\mathrm{BP}\langle 1\rangle^{t\mathbf{Z}/n} \cong \mathrm{Z}_p[v_1]((\hbar))/\langle n\rangle(\hbar)$。类比于$q = \beta\hbar + 1$，若定义 $\widetilde{p} = v_1\hbar^{p-1}$，则 $\langle n\rangle(\hbar)$ 定义了 $\mathrm{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]$ 中的一个元素，记为 $\langle n\rangle_{\widetilde{p}}$。由此可得

$$\pi_*(\tau_{\leq 2kp}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/T(1)))^{t\mathbf{Z}/n} \cong \mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]((\hbar))/(\widetilde{p}^{k+1}, \langle n\rangle(\hbar)).$$

由此可得

$$\pi_*\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p[t]/T(1), (t))^{tS^1} \cong \lim_{k\to\infty} \bigoplus_{n\geq 1} \Sigma\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]((\hbar))/(\widetilde{p}^{k+1}, \langle n\rangle_{\widetilde{p}}),$$

即，

$$\pi_*\mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p[t]/T(1)) \cong \mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]((\hbar)) \times \lim_{k\to\infty} \bigoplus_{n\geq 1} \Sigma\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]((\hbar))/\langle n\rangle_{\widetilde{p}}.$$

与例 3.3.3 类似，可以计算得，若我们令 $\mathrm{Z}_p[\beta]((\hbar)) = \mathrm{Z}_p[\![q-1]\!]((\hbar))$，其中 $q = 1+\beta\hbar$，且 $\langle n\rangle_{\mathbf{G}_m}(\hbar) = {}^{[n]_{\mathbf{G}_m}(\hbar)}\hbar$是重标度乘法形式~~群律~~ $x + y + (q-1)xy$的除法 $n$-级数，则

$$\pi_*\mathrm{HP}(\mathrm{ku}_p^\wedge[t]/\mathrm{ku}_p^\wedge) \cong \mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]((\hbar)) \times \lim_{k\to\infty} \bigoplus_{n\geq 1} \Sigma\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]((\hbar))/((q-1)^{k+1}, \langle n\rangle_{\mathbf{G}_m}(\hbar)). \tag{39}$$

此外，$\pi_*\mathrm{HP}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle 1\rangle) \cong \pi_*\mathrm{HP}(\mathrm{ku}_p^\wedge[t]/\mathrm{ku}_p^\wedge)^{\mathbf{F}_p^\times}$，其中 $\mathrm{F}_p^\times$通过其在 $\mathrm{ku}_p^\wedge$ 上的 Adams 运算作用于 $\mathrm{HP}(\mathrm{ku}_p^\wedge[t]/\mathrm{ku}_p^\wedge)$。注意，由于 $\mathrm{F}_p^\times$ 的阶与 $p$互素，取 $\mathrm{F}_p^\times$-不变量在 $p$-局部化后保持小极限和余极限。特别地，$\pi_*\mathrm{HP}(\mathrm{BP}\langle 1\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle 1\rangle)$ 同构于 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{Z}_p[t]/T(1))$。

以下结论也是 Arpon Raksit 的即将发表的工作（[**Rak20**]）的结果，该工作已在上文提及。

**引理 3.3.4**。存在一个 整数环$_p^\times$-等变同构

$$\mathrm{H}^*(q\Omega_{\mathbf{Z}_p[t]})((\hbar)) \cong \mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]((\hbar)) \times \bigoplus_{n\geq 1} \Sigma\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]((\hbar))/\langle n\rangle_{\mathbf{G}_m}(\hbar).$$

证明。对于 $\mathbf{ku}_p^\wedge$ 上的形式群律，我们有

$$\langle n\rangle_{\mathbf{G}_m}(\hbar)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\hbar^{i-1}\beta^{i-1}=[n]_q\in\mathbf{Z}_p[\beta](\!(\hbar)\!),$$

其中 $q:=1+\beta\hbar$。现在，结论由以下事实得出：$q\Omega^{\mathbf{Z}_p[t]}$ 中的微分 $\nabla_q$ 将 $t^n\mapsto[n]_q t^{n-1}dt$ 发送到 $\square$。

特别地，$\pi_*\mathrm{HP}(\mathrm{BP}\langle1\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle1\rangle)\cong\pi_*\mathrm{TP}(\mathbf{Z}_p[t]/T(1))$ 是 $\mathrm{H}^*(\widetilde{p}\Omega^{\mathbf{Z}_p[t]})$ 的某个完备化的 2-周期化。这一计算引出了与猜想 3.1.14 相关的以下预期：

**猜想 3.3.5**。令 $R$ 为一个动画 $\mathbf{Z}_p$-代数。则 $\mathrm{TP}(R/X(p))$ 具有一个动机滤过 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{mot}}\mathrm{TP}(R/X(p))$，使得 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{TP}(R/X(p))\simeq{}^\wedge\mathbb{\Delta}_{R/\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]}[2i]\otimes_{R_\epsilon}R$，其中 $^\wedge\mathbb{\Delta}_{R/\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]}$ 是 $\widetilde{p}\Omega_R$ 的 *Nygaard* 完备化。

现在我们转向这一图景（的一部分）的一个高色数类比。

**定义 3.3.6.** 设 $R$ 是一个 $\mathrm{E}_2$-环，并在 $\mathrm{HH}(R[t]/R):=\mathrm{THH}(S[t])\otimes R$ 上赋予从 $\mathrm{THH}(S[t])$ 继承的 $S^1$-作用，以及在 $R$ 上的平凡作用。

**警告 3.3.7.** 如果 $R$ 只是一个 $\mathrm{E}_2$-环，就不能定义相对于 $R$ 的 Hochschild 同调；特别是，记号 $\mathrm{HH}(R[t]/R)$ 相当滥用。正如 [**DHL+23** 的推论 2.9]，中所解释的，如果 $R'$ 是一个 $\mathrm{E}_1$-$R$-代数，那么只有当 $R$ 是一个带框架的$\mathrm{E}_2$-环[14] 时，$\mathrm{HH}(R'/R)$ 才存在（并具有自然的 $S^1$-作用）。换言之，如果 $R$ 仅仅是一个 $\mathrm{E}_2$-环，那么若非我们已知 $R[t]$ 可以提升到球谱，就不清楚该如何定义 $\mathrm{HH}(R[t]/R)$。这引出了以下令人遗憾的警告：如果 $R$ 是一个带有非平凡 $S^1$-作用的 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环，那么 $\mathrm{HH}(R[t]/R)$ 上经由 $R$ 的 $S^1$-作用产生的（更自然的）圆作用未必能与定义 3.3.6 中的圆作用相识别。不过，本文只会使用定义 3.3.6 中的圆作用。

将 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t_1,\cdots,t_j]$ 视为 $\mathbf{Z}^j_{\geq0}$-分次环，其中 $t_i$ 的权为 $(0,\cdots,1,\cdots,0)$。然后，将 $\mathrm{HP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t_1,\cdots,t_j]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 定义为在 $\mathbf{Z}^j_{\geq0}$-分次 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$-模内部取 $\mathrm{HH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t_1,\cdots,t_j]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 的 $S^1$-Tate 构造。类似地，将 $\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t_1,\cdots,t_j]/X(p^n))$ 定义为在 $\mathbf{Z}^j_{\geq0}$-分次 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-模内部取 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t_1,\cdots,t_j]/X(p^n))$ 的 $S^1$-Tate 构造。接着，关于猜想 3.3.5，我们有如下结果（当 $n=0$ 时，这是 [**PV19**]主要结果的一个非常特殊的情形）：

**命题 3.3.8**。存在一个 $p$-完备的 $\mathbf{Z}^j_{\geq0}$-分次模同构，并配备一个从 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{tS^1}[B\Delta_n]\cong\pi_*\mathrm{TP}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 出发的映射：

$$\pi_*\text{周期循环同调}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t_1,\cdots,t_j]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)[B\Delta_n]\cong\pi_*\text{拓扑周期同调}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t_1,\cdots,t_j]/X(p^n)).$$

映射 拓扑周期同调$^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/X(p^n))\ \to$ 拓扑周期同调$(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))$ 在进行 $K(n)$- 局部化后是一个等价。

[14]设 $R$ 是一个 $\mathrm{E}_3$-代数，且 $\mathscr{C}$ 是一个 $R$-线性 $\infty$-范畴。选取 $\mathrm{R}^3$ 中的一个带框架结，也定义了一个 $\mathrm{E}_{n-3}$-映射 $\int_{S^1}R\to R$，因此可以定义相对 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}(\mathscr{C}/R)$。然而，这并未在 $\mathrm{HH}(\mathscr{C}/R)$ 上定义一个 $S^1$-作用！感谢 Robert Burklund 指出了这一点。

证明。为简单起见，我们假设 $j = 1$ 并将 $t$ 写作 $t_1$。在分次情形下，我们可以将 $S^1$-Tate 构造与无限直和交换（即，不需要引理 3.3.2）。由此可得存在分次等价

$$\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/X(p^n),(t)) \simeq \bigoplus_{m\geq 1} \Sigma \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/m}(m),$$
$$\mathrm{HP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle,(t)) \simeq \bigoplus_{m\geq 1} \Sigma \mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/m}(m).$$

所需结果现在由定理 2.2.4(a)得出。第二个陈述由上述等价以及 $L_{K(n)}(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}) = 0$ 这一事实得出，其中该事实由引理 3.3.9 得到。□

上述证明用到了以下（众所周知的）事实。

**引理 3.3.9**。令 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 表示截断 *Brown–Peterson* 谱的任意一种形式。则有 $L_{K(n)}(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}) = 0$。

证明。我们首先注意到，$\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}$ 仅取决于 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的 $p$-完备化；事实上，[**NS18** 的引理 I.2.9] 的显然变体表明，若 $X$ 是带有整数环 $\mathbf{Z}/p^m$-作用的下有界谱，则 $X^{t\mathbf{Z}/p^m}$ 是 $p$-完备的，且映射 $X^{t\mathbf{Z}/p^m} \to (X^\wedge_p)^{t\mathbf{Z}/p^m}$ 是等价。由于 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的所有形式在 $p$-完备化后都等价（由 [**AL17**], ），因此我们可以将证明这一断言归约为单一一种 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 的形式。

为了证明 $L_{K(n)}(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}) = 0$，只需证明（因为 $\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}$是一个复 bordism 谱 MU-模）$(\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}[\frac{1}{v_n}])/(p,\cdots,v_{n-1}) \cong \pi_* k(n)^{t\mathbf{Z}/p^m}[\frac{1}{v_n}] = 0$。回忆 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m} \cong \mathrm{BP}\langle n\rangle_*((\hbar))/[p^m](\hbar)$。我们将使用这样的 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 形式，使得其在 $\pi_*\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 上的伴随形式群律在 $\pi_* k(n)$上诱导出 Honda 形式群律。于是，该形式群在$\pi_* k(n)$ 上的 $p^m$-级数满足 $[p^m](\hbar) = v_n^{\frac{p^{nm}-1}{p^n-1}}\hbar^{p^{mn}}$；因此 $\pi_* k(n)^{t\mathbf{Z}/p^m} \cong \mathbf{F}_p[v_n]((\hbar))/v_n^{\frac{p^{nm}-1}{p^n-1}}$。特别地，$v_n$ 在 $k(n)^{t\mathbf{Z}/p^m}$ 中是幂零的，因此 $\pi_* k(n)^{t\mathbf{Z}/p^m}[\frac{1}{v_n}] = 0$。 □

**注 3.3.10**。一般来说，$\pi_*\mathrm{HP}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)$ 看起来是以下二项复形的上同调经 2-周期化后再完备化的结果：

$$\mathrm{BP}\langle n\rangle_*[\![\hbar]\!][t] \xrightarrow{\nabla} \mathrm{BP}\langle n\rangle_*[\![\hbar]\!][t]dt,\ \nabla : t^m \mapsto \tfrac{[m]_{\mathrm{BP}\langle n\rangle}(\hbar)}{\hbar} t^{m-1}dt. \tag{40}$$

这是 $q$-德拉姆复形的一种变体，最早由 Arpon Raksit（见即将发表的工作）考虑。注意，公式 (40) 的一个类似形式可以为任意交换环 $A$ 上的形式群律 $F(x,y)$ 定义：

$$F\Omega_{A[t]/A} := \left(A[\![\hbar]\!][t] \xrightarrow{\nabla} A[\![\hbar]\!][t]dt\right),\ \nabla : t^m \mapsto \tfrac{[m](\hbar)}{\hbar} t^{m-1}dt; \tag{41}$$

我们将在 [**DM23**] 中研究这类复形的基本组合性质。基变换到 $\mathbf{Q}$ 后，算子 $\nabla$ 可以用公式 $\hbar t\nabla = \exp_F(t\partial_t \log_F(\hbar))$ 来刻画。

我们还有：

**命题 3.3.11**。如果 $\mathscr{C}$ 是一个左 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-线性 $\infty$-范畴，并且 $\mathscr{C}[t]$ 表示 $\mathscr{C}\otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]$，那么猜想 *2.2.18* 蕴含映射 $L_{K(n)}$拓扑周期同调$^{\mathrm{gr}}(\mathscr{C}[t]/X(p^n)) \to L_{K(n)}$拓扑周期同调$(\mathscr{C}/X(p^n))$ 是一个等价。

证明。注意到

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}[t]/X(p^n)) \simeq \mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))(0) \oplus \bigoplus_{m\geq 1}(S^1/\mu_m)_+ \otimes \mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))(m),$$

使得

$$\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{C}[t]/X(p^n)) \simeq \mathrm{TP}(\mathscr{C}/X(p^n))(0) \oplus \bigoplus_{m\geq 1}\Sigma\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p^m}(m).$$

现在，猜想 2.2.18 表明 $\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X(p^n))^{t\mathbf{Z}/p^m}$ 是一个 $\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}$-模。但根据引理 3.3.9，$L_{K(n)}(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p^m}) = 0$，因此 $L_{K(n)}\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(\mathscr{C}[t]/X(p^n)) \simeq L_{K(n)}\mathrm{TP}(\mathscr{C}/X(p^n))$，如所求。□

**例 3.3.12.** 设 $n=0$，并假设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbf{F}_p$-概形 $X$ 上拟凝聚层的 $\infty$-范畴。那么，命题 3.3.11 表明，映射 $\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(\mathbf{A}^1\times X) \to \mathrm{TP}(X)$ 是一个有理等价。这在非分次情形下一般并不成立。

注 3.3.13. 注意，函子 $L_{K(0)}\mathrm{TP}$ 并非幂零不变；在 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-代数上，函子 $L_{K(n)}\mathrm{TP}(-/T(n))$ 也同样如此。事实上，[Hor20，定理 1.1] 表明，映射 $L_{K(0)}\mathrm{TP}(\mathbf{F}_p[t]/t^k) \to L_{K(0)}\mathrm{TP}(\mathbf{F}_p) \simeq \mathbf{Q}_p^{tS^1}$ 是同构，当且仅当 $k$ 是 $p$ 的幂。我们也可以通过计算 $\mathbf{F}_p[t]/t^k$ 的晶体上同调，从代数层面看出这一点。若 $R$ 表示商映射 $\mathbf{Z}_p[t]\to \mathbf{F}_p[t]/t^k$ 的 $p$-完备化 PD-包络（从而 $R=\mathbf{Z}_p\left[t, \frac{t^{kj}}{j}!\ \middle|\ j\geq 1\right]_p^{\wedge}$），那么 [BO78，定理 7.23] 表明，$\Gamma_{\mathrm{crys}}((\mathbf{F}_p[t]/t^k)/\mathbf{Z}_p)$ 与德拉姆复形 $\Omega^{\bullet}_{R/\mathbf{Z}_p}$ 拟同构。注意，$R$ 在加法意义下同构于 $p$-完备化的 $\bigoplus_{0\leq i\leq k-1}\bigoplus_{j\geq 0}\mathbf{Z}_p\{\frac{t^{kj+i}}{j}!\}$。

由于 $\frac{t^{kj+i}}{j}!$ 的导数是 $(kj+i)\frac{t^{kj+i-1}}{j}!$，当 $i=0$ 时可化简为 $k\frac{t^{k(j-1)+k-1}}{(j-1)!}$，由此我们得到 $\pi_0\Gamma_{\mathrm{crys}}((\mathbf{F}_p[t]/t^k)/\text{整数环}_p) \cong$ 整数环$_p$，并且

$$\pi_{-1}\Gamma_{\mathrm{crys}}((\mathbf{F}_p[t]/t^k)/\mathbf{Z}_p) \cong \left(\bigoplus_{j\geq 0}\mathbf{Z}_p/k\cdot\left\{\frac{t^{k(j+1)-1}}{j!}\right\}\right)_p^{\wedge} \oplus \left(\bigoplus_{0\leq i<k-1}\bigoplus_{j\geq 0}\mathbf{Z}_p/(kj+i+1)\cdot\left\{\frac{t^{kj+i}}{j!}\right\}\right)_p^{\wedge}.$$

例如，假设 $k=p$。那么 $pj+i+1\equiv i+1$ (模 $p$)，这永远不为零，因为 $0\leq i<p-1$。因此，第二个直和项为零，因为 $pj+i+1$ 是一个 $p$-进单位，由此我们得到 $\pi_{-1}\Gamma_{\mathrm{crys}}((\mathbf{F}_p[t]/t^p)/\text{整数环}_p) \cong \left(\bigoplus_{j\geq 0}\text{整数环}/p\cdot\left\{\frac{t^{p(j+1)-1}}{j}!\right\}\right)_p^{\wedge}$。然而，如果 $k$ 不是 $p$ 的幂，第二个直和项就包含一个非挠部分；例如，如果 $k=2$ 且 $p$ 是奇数，第二个直和项就包含 $p$-完备化的 $\bigoplus_{m\geq 0}$整数环$/p^m$，它是非挠的。

**例3.3.14.** 令 $n=1$；那么，命题 3.3.11 表明，猜想 2.2.18 蕴含：对于作为 $\mathbf{E}_1$-$\mathbf{Z}_p$-代数的 $R$，在取 Nygaard 型完备化后，$L_{K(1)}\mathrm{TP}^{\mathrm{gr}}(R[t]/X(p)) \xrightarrow{\sim} L_{K(1)}\mathrm{TP}(R/X(p))$。在非分次情形下，这通常并不成立；这与 [**LMMT20** 的推论 4.24]（例如）形成对比，该推论指出，$K(1)$-局部代数 K 理论在连通的 $K(1)$-无环环谱上是 $\mathbf{A}^1$-不变的（尤其是在连通的 $\mathbf{E}_1$-$\mathbf{Z}_p$-代数上）。

现在让我们稍微转向一个略有不同的话题，讨论著名的素数 $p = 2$ 处的情形。于是 $\widetilde{p}\Omega_R = q\Omega_R$，并且 $\mathrm{Z}/2 \subseteq \mathrm{Z}_2^\times$ 在 $q\Omega_R$ 上有一个有趣的作用，将 $q \mapsto q^{-1}$ 送到相应对象。若将 $q$ 视为 $\mathrm{C}P^\infty$ 上 tautological线丛的陈类（在 K 理论中），这对应于 $\mathrm{Z}/2$ 在 $\mathrm{C}P^\infty$ 上由复共轭给出的作用。由此引出下面的讨论：

**注 3.3.15.** 我们预计，本文中的大多数结果和猜想在具有 $\mathrm{Z}/2$-等变性时仍然成立；此时，“实”拓扑 Hochschild 同调 $\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}$ 指的是 [**DMPR17,HHK+20**] 中描述的构造。回忆，$\mathrm{Z}/2$通过复共轭作用于 $\mathrm{SU}(n)$；我们将这个 $\mathrm{Z}/2$-空间记为 $\mathrm{SU}(n)_{\mathbf{R}}$。令 $\sigma$ （分别为 $\rho = \sigma + 1$）表示符号表示（分别为正则表示）；若 $X$ 是一个 $\mathrm{Z}/2$-空间，则令 $\Omega^\sigma X$ 表示映射空间 $\mathrm{Map}(S^\sigma, X)$。存在一个 $\mathrm{Z}/2$-等变 $\mathrm{E}\rho$-映射

$$\Omega^\sigma \mathrm{SU}(n)_{\mathbf{R}} \simeq \Omega^\rho \mathrm{BSU}(n)_{\mathbf{R}} \to \Omega^\rho \mathrm{BSU}_{\mathbf{R}} \simeq \mathrm{BU}_{\mathbf{R}},$$

它使其 Thom 谱 $X(n)_{\mathbf{R}}$ 具有 $\mathrm{E}\rho$-环结构。可以证明，$\mathrm{MU}_{\mathbf{R}}$ 上的等变 Quillen 幂等元限制为 $X(n)_{\mathbf{R}}$上的一个幂等元；我们将所得的 $X(2^n)_{\mathbf{R}}$ 的直和项记为 $T(n)_{\mathbf{R}}$。此外，$\Phi^{\mathbf{Z}/2} T(n)_{\mathbf{R}} \simeq y(n)$作为 2-局部 $\mathrm{E}_1$-代数。

因此我们预期：

**猜想 3.3.16**。以下结论成立：

*(a)* $T(n)_{\mathbf{R}}$ 具有 $E_\rho \rtimes U(1)_{\mathbf{R}}$-代数结构，并且 $X(2^n)_{\mathbf{R}}$ 可分解为 $T(n)_{\mathbf{R}}$ 的移位的直和，使得单位直和项的包含映射 $T(n)_{\mathbf{R}} \to X(2^n)_{\mathbf{R}}$ 是 $E\rho$-代数映射。特别地，$THH_{\mathbf{R}}(BP\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n)_{\mathbf{R}})$存在，且带有 $U(1)_{\mathbf{R}}$ 作用[15]。

*(b)* 令 $\mathrm{BP}\langle n\rangle_{\mathbf{R}}$ 表示实截断 *Brown-Peterson* 谱。那么存在等价

$$\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n)_{\mathbf{R}}) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}[\Omega S^{2^n\rho+1}], \tag{42}$$

$$\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n-1)_{\mathbf{R}}) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}} \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{2^{n-1}j\rho-1}\mathrm{BP}\langle n\rangle_{\mathbf{R}}/j \tag{43}$$

作为 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}$-模。第二个等价需要 $n \geq 1$。此外，由映射$E\colon S^{2^n\rho} \to \Omega S^{2^n\rho+1}$ 诱导的类 $\pi_{2^n\rho}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n)_{\mathbf{R}})$ 检测 $\sigma^\rho(\underline{v}_n)$。

*(c)* 存在一个整数环/2-等变空间 $\widetilde{K}_n$ 以及一个等变纤维化

$$S^{2^n\rho-1} \to \widetilde{K}_n \to \Omega S^{2^n\rho+1}$$

使得 $\widetilde{K}_0 = \Omega S^\rho$ 并且 $\widetilde{K}_1 = \Omega S^{\rho+1}\langle \rho+1\rangle$。对于 $n = 0$，这就是 $S^\sigma$ 的 *EHP* 序列。底层纤维化的边界映射 $\Omega^2 S^{2^{n+1}+1} \to S^{2^{n+1}-1}$ 在源空间的底胞腔上的次数为2 ，并且$(\widetilde{K}_n)^{\mathbf{Z}/2} = K_{n-1}$ 是作为 $(S^{2^n\rho-1})^{\mathbf{Z}/2} = S^{2n-1}$-纤维化，定义在 $(\Omega S^{2^n\rho+1})^{\mathbf{Z}/2} = \Omega S^{2^n+1}$之上的。

*(d)* 对于任意 整数环/2-等变 $\mathbf{E}\sigma$-$T(n)_{\mathbf{R}}$-代数 $R$，存在一个等变余纤维序列

$$\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(R/T(n-1)_{\mathbf{R}}) \to \mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(R/T(n)_{\mathbf{R}}) \to \Sigma^{2^n\rho}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(R/T(n)_{\mathbf{R}}),$$

[15]注意，$\mathrm{U}(1)_{\mathbf{R}} = S^\sigma$。

其中第二个映射是拓扑 *Sen* 算子的 整数环/2-等变类比。

(*e*) 设

$$\mathrm{TP}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n)_{\mathbf{R}}) := \mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n)_{\mathbf{R}})^{t_{C_2}\mathrm{U}(1)_{\mathbf{R}}},$$

其中记号"$t_{C_2}\mathrm{U}(1)_{\mathbf{R}}$"表示来自 [**QS21**，备注 1。17] 的参数化 *Tate* 构造。于是存在一个 $\mathbf{Z}/2$-等变等价

$$\mathrm{TP}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n)_{\mathbf{R}}) \simeq \mathrm{BP}\langle n\rangle_{\mathbf{R}}^{t_{C_2}\mathrm{U}(1)_{\mathbf{R}}},$$

其中 $\mathrm{U}(1)_{\mathbf{R}}$ 在 $\mathrm{BP}\langle n\rangle_{\mathbf{R}}$ 上平凡作用。

(*f*) 设 $R$ 为一个2-完备的动画交换环，并赋予平凡的$\mathbf{Z}/2$-作用。则 $\mathrm{TP}_{\mathbf{R}}(R/T(1)_{\mathbf{R}})$ 上存在一个 $\mathbf{Z}/2$-等变滤过，使得

$$\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{TP}_{\mathbf{R}}(R/T(1)_{\mathbf{R}}) \simeq (\hat{\mathbb{\Delta}}_{R/\mathbf{Z}[\![q-1]\!]})^\wedge_2[2i] = (q\hat{\Omega}_R)^\wedge_2[2i],$$

其中，右侧的 $\mathbf{Z}/2$-作用是通过将 $\mathbf{Z}/2 \subseteq \mathbf{Z}_2^\times \cong \mathbf{Z}/2 \times (1+4\mathbf{Z}_2)$ 视为.....并利用 2-完备 $q$-德拉姆复形上的 $\mathbf{Z}_2^\times$-作用得到的。

**例 3.3.17**。 注意， [**DMPR17** 定理 5.18] 和 [**HHK**$^+$**20** 定理 A.1] 分别证明了 $n=0$ 的 (42) 和 $n=1$ 的 (43)。

**注 3.3.18**。 我们预期 $\mathrm{BP}\langle n\rangle^{\mathbf{Z}/2}{}_{\mathbf{R}} \otimes T(n)$ 集中在偶数次。

**命题 3.3.19**。 等价 (42) 对 $n=1$ 成立。

证明概要。这可以仿照定理 2.2.4(a)，对 $n=1$ 利用等变 Toda 纤维序列来证明

$$S^{\rho+\sigma} \to \Omega S^{\rho+1}\langle\rho+1\rangle \to \Omega S^{2\rho+1}$$

来自 [**Dev23a** 的方程 7.1].[16] 事实上，回忆 [**Dev23a** 的例 7.1.3]，$X(2)_{\mathbf{R}}$ 是映射 $\Omega^\sigma S^{\rho+\sigma} \to \mathrm{BGL}_1(S)$ 的 Thom 谱，该映射检测 $\widetilde{\eta} \in \pi_\sigma S$。通过类似于 [**BCS10**]，的论证可知，$\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(X(2)_{\mathbf{R}}) \simeq X(2)_{\mathbf{R}}[S^{\rho+\sigma}]$。因此：

$$\begin{aligned}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{Z}}/X(2)_{\mathbf{R}}) &\simeq \underline{\mathbf{Z}}[\Omega S^{\rho+1}\langle\rho+1\rangle] \otimes_{X(2)_{\mathbf{R}}[S^{\rho+\sigma}]} X(2)_{\mathbf{R}} \\ &\simeq \underline{\mathbf{Z}}[\Omega S^{\rho+1}\langle\rho+1\rangle] \otimes_{\underline{\mathbf{Z}}[S^{\rho+\sigma}]} \underline{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{Z}[\Omega S^{2\rho+1}],\end{aligned}$$

其中最后一个等价用到了等变 Toda 纤维序列。 □

**例 3.3.20.** 我们来指出一些支持猜想 3.3.16(a) 的额外证据：若 $X$ 是一个 $\mathrm{Z}/2$-空间，则空间的余纤维序列 $(\mathrm{Z}/2)_+ \to S^0 \to S^\sigma$ 表明 $(\Omega^\sigma X)^{\mathbf{Z}/2}$ 等价于典范映射 $X^{\mathbf{Z}/2} \to X$ 的纤维。特别地，由于 $(\mathrm{SU}(n)_{\mathbf{R}})^{\mathbf{Z}/2} = \mathrm{SO}(n)$，我们看到 $(\Omega^\sigma \mathrm{SU}(n)_{\mathbf{R}})^{\mathbf{Z}/2} \simeq \Omega(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n))$。由于几何不动点保余极限，这意味着 $\Phi^{\mathbf{Z}/2}X(n)_{\mathbf{R}}$ 是映射的 Thom 谱

$$(\Omega^\sigma \mathrm{SU}(n)_{\mathbf{R}})^{\mathbf{Z}/2} \simeq \Omega(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)) \to \Omega(\mathrm{SU}/\mathrm{SO}) \simeq \mathrm{BO} \simeq \mathrm{BU}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{Z}/2}.$$

由于作为 2-局部 $\mathrm{E}_1$ 代数有 $\Phi^{\mathbf{Z}/2}T(n)_{\mathbf{R}} \simeq y(n)$，猜想 3.3.16(a) 将意味着 $\Phi^{\mathbf{Z}/2}X(2^n)_{\mathbf{R}}$ （即映射 $\Omega(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)) \to \mathrm{BO}$ 的 Thom 谱）

[16] 另见 [**Dev23a**，定理 7.2。1], 它指出，Z 是映射 $\Omega^\rho S^{2\rho+1} \to \mathrm{BGL}_1(X(2)_{\mathbf{R}})$ 的 Thom 谱，其底胞腔可检测 $\underline{v}_1 \in \pi_\rho X(2)_{\mathbf{R}}$。

是若干 $y(n)$ 移位的直和，使得单位直和项 $y(n) \to \Phi^{\mathbf{Z}/2}X(2^n)_{\mathbf{R}}$ 的包含映射是一个 $\mathrm{E}_1$-映射。这确实成立，并已由 [**Yan92**] 证明。

**例 3.3.21.** 猜想 3.3.16(d) 最有力的证据如下。由 [**Dev23a**的构造 7.1 可知，1] 存在一个映射 $\Omega S^{n\rho-1} \to \mathrm{BGL}_1(X(n-1)_{\mathbf{R}})$，其 Thom 谱为 $X(n)_{\mathbf{R}}$。随后，证明定理 3.1.4 时所用的同一构造表明，对于任意 $\mathrm{Z}/2$-等变 $\mathrm{E}_\sigma$-$X(n)_{\mathbf{R}}$-代数$R$，都存在一个等变余纤维序列

$$\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(R/X(n-1)_{\mathbf{R}}) \to \mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(R/X(n)_{\mathbf{R}}) \to \Sigma^{n\rho}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(R/X(n)_{\mathbf{R}}), \tag{44}$$

其中第二个映射是拓扑 Sen 算子的 $\mathrm{Z}/2$-等变类比。不难看出，给定猜想 3.3.16(a) 的前半部分，就可以利用定理 3.1.4 的构造轻松证明猜想 3.3.16(d)。

例如，我们有 $X(2)_{\mathbf{R}} = T(1)_{\mathbf{R}}$，而（44）的余纤维序列正是猜想 3.3.16(d)。对于 $R = \mathrm{Z}$，（44）变为一个余纤维序列

$$\underline{\mathbf{Z}}[\Omega S^{\rho+1}\langle\rho+1\rangle] \simeq \mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{Z}}) \to \mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{Z}}/X(2)_{\mathbf{R}}) \simeq \underline{\mathbf{Z}}[\Omega S^{2\rho+1}] \simeq \bigoplus_{n\geq 0}\Sigma^{2n\rho}\underline{\mathbf{Z}} \to \bigoplus_{m\geq 1}\Sigma^{2m\rho}\underline{\mathbf{Z}}.$$

事实上，这个纤维序列的一个版本已经在 [$\mathbf{HHK}^+\mathbf{20}$，引理 A.3] 中得到研究。

**注记 3.3.22**。 猜想 3.3.16(a) 和猜想 3.3.16(d) 一起推出

$$\pi_*\Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}) \simeq \mathbf{F}_2[t, \sigma^2(v_{n-1}), \sigma(v_{j-1})|1 \leq j \leq n]/(\sigma(v_j)^2),$$

其中 $|t| = 2^n = |\sigma^2(v_{n-1})|$ 以及 $|\sigma(v_{j-1})| = 2^j - 1$。通过写成下式，也可以使用与 [**DMPR17**，定理 5.23]，中类似的方法无条件地证明这一点

$$\Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}) \simeq \Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}} \Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}},$$

并利用 $\pi_*\Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}} \cong \mathrm{F}_2[t]$。

注意，如果我们假设猜想 3.3.16(c)，那么 $\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n-1)_{\mathbf{R}}) \simeq \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}[\widetilde{K}_n]$；随后猜想中的等价 $\widetilde{K}_n^{\mathbf{Z}/2} = K_{n-1}$ 给出一个等价

$$\Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}/T(n-1)_{\mathbf{R}}) \simeq \Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}[K_{n-1}]. \tag{45}$$

注意

$$\pi_*\Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_{\mathbf{R}}[K_{n-1}] \cong \mathbf{F}_2[t, x, e]/e^2,$$

其中 $|x| = 2^n$ 和 $|y| = 2^n - 1$。例如，当 $n = 1$时，存在一个等价 $(\Omega S^{\rho+1}\langle\rho+1\rangle)^{\mathbf{Z}/2} = \Omega S^2$，而（45）化简为等价

$$\Phi^{\mathbf{Z}/2}\mathrm{THH}_{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{Z}}) \simeq \Phi^{\mathbf{Z}/2}\underline{\mathbf{Z}}[\Omega S^2] \simeq (\tau_{\geq 0}\mathbf{F}_2^{tS^1})[\Omega S^2].$$

**3.4. 补记：Segal猜想**。 本节将简要讨论 Segal猜想；关于其代数解释以及该主题的文献综述，请读者参阅 [**HW20** 第4] 节和 [**Mat21** 第 5] 节。

**定义3.4.1.** 如果回旋 Frobenius $\mathrm{THH}(R) \to \mathrm{THH}(R)^{t\mathbf{Z}/p}$ 在高次上是等价，则称 $\mathrm{E}_\infty$-环 $R$ 满足 Segal猜想。

**例3.4.2.** 设 $R$ 是交换 $\mathrm{F}_p$-代数。如果 $R$ 按照 [**KM21** 第 2] 节的意义是 Cartier光滑，并且 $\Omega^n_{R/\mathbf{F}_p}=0$ 适用于 $n\gg 0$，那么 $R$ 满足定义3.4.1意义下的 Segal猜想（参见 [**Mat22**，推论9.5]）。

例如，设 $R=k$ 是特征为 $p>0$的域。那么，作为 $\mathrm{THH}(\mathrm{F}_p)\simeq \mathrm{F}_p[\sigma]$上的模，$\mathrm{THH}(k)\simeq \mathrm{HH}(k/\mathrm{F}_p)[\sigma]$，并且 $\pi_i\mathrm{HH}(k/\mathrm{F}_p)=0$，当 $i>\log_p[k:k^p]=\dim_k \Omega^1_{k/\mathbf{F}_p}$ 时成立。这说明局部化映射 $\mathrm{THH}(k)\to \mathrm{THH}(k)[\frac{1}{\sigma}]\simeq_\varphi \mathrm{THH}(k)^{t\mathbf{Z}/p}$ 在次数 $>\log_p[k:k^p]-2$上是等价。

**例3.4.3.** [**HW20** 的定理 4.3.1 和推论 4.2.3] 的证明可用于证明映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)\otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle}\mathrm{F}_p\to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)^{t\mathbf{Z}/p}\otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle}\mathrm{F}_p$ 在次数 $>n+\sum_{i=0}^{n-1}|v_i|=\sum_{i=0}^{n-1}(2p^i-1)=2\frac{p^n-1}{p-1}-n$上是等价。注意，$2\frac{p^n-1}{p-1}-n$ 也恰好是 Mahowald-Rezk 对偶中对 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 出现的移位（见 [**MR99**，推论 9.3]）。

**注3.4.4。** 假设猜想 2.1.9 成立，因此我们可以定义相对于 $T(n)$ 的左$T(n)$-线性 $\infty$-范畴的 THH。由于我们不知道相对于$T(n)$的 THH 是否具有环谱结构（我们推测并非如此），因此似乎无法在此背景下直接类比定义3.4.1。不过，回忆一下，如果 $k$ 是特征为 $p>0$ 的完美域，且 $R$ 是一个动画 $k$-代数，那么回旋 Frobenius $\varphi:\mathrm{THH}(R)\to \mathrm{THH}(R)^{t\mathbf{Z}/p}$ 是通过求逆 $\sigma\in\pi_2\mathrm{THH}(k)$ 给出的 Frobenius线性映射：这是由以下观察得出的结果：映射 $\varphi$: $\mathrm{THH}(k)\to \mathrm{THH}(k)^{t\mathbf{Z}/p}$ 是通过将局部化 $\mathrm{THH}(k)\to \mathrm{THH}(k)[\sigma^{-1}]$ 与 Frobenius线性等价 $\mathrm{THH}(k)[\sigma^{-1}]\simeq_{\mathrm{Frob}}\mathrm{THH}(k)^{t\mathbf{Z}/p}$复合而得到的。

这一观察促使我们引入以下术语：如果 $\mathrm{E}_1$- $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-代数 $R$ 满足“$T(n)$-Segal猜想”，则称其满足该猜想；这意味着沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle\to \mathrm{F}_p=\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/(p,\cdots,v_{n-1})$ 对局部化映射 $\mathrm{THH}(R/T(n))\to \mathrm{THH}(R/T(n))[\theta_n^{-1}]$ 作基变换后，所得映射在高次上是等价。注意，若 $n=1$，这等价于说映射 $\mathrm{THH}(R/T(1))\to \mathrm{THH}(R/T(1))[\theta^{-1}]$ 的 $p$-完备化在高次上是等价。类似地，如果 $\mathrm{E}_1$-$Z_p$-代数 $R$ 满足“$J(p)$-Segal猜想”，则称其满足该猜想；这意味着映射 $\mathrm{THH}(R/J(p))\to \mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}]$ 在高次上是等价。

**命题 3.4.5。** 若假设猜想 *2.1.9*，局部化映射

$$\gamma:\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[x_1,\cdots,x_d]/T(n))\to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[x_1,\cdots,x_d]/T(n))[\theta_n^{-1}]$$

在沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle\to \mathbf{F}_p$进行基变换后，在次数 $>d-2p^n$ 上是等价。特别地，平坦多项式代数 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[x_1,\cdots,x_d]$ 满足 $T(n)$-*Segal*猜想。

证明。为简化记号，记 $T:=\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))$。利用（38），我们有

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/T(n))[\theta^{-1}]\simeq T[\theta^{-1}]\oplus\bigoplus_{n\geq 1}T[\theta^{-1}]\otimes(S^1/\mu_n)_+.$$

由于映射 $T\to T[\theta^{-1}]$ 在沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle\to \mathrm{F}_p$进行基变换后，在次数 $>-2p^n$ 上是等价，映射 $T\otimes(S^1/\mu_n)_+\to T[\theta^{-1}]\otimes(S^1/\mu_n)_+$ 在沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle\to \mathrm{F}_p$进行基变换后，在次数 $>-2p^n+1$ 上是等价。由于映射 $\gamma:\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/T(n))\to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/T(n))[\theta^{-1}]$ 保持

直和项，因此我们看到，映射 $\gamma$ 在沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle \to \mathrm{F}_p$进行基变换后，在次数 $> -2p^n+1$ 上是等价。对变量的个数进行归纳，我们发现映射 $\gamma$ 在沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle \to \mathrm{F}_p$进行基变换后，在次数 $> d-2p^n$ 上是等价，所求即得。□

**注记 3.4.6**。当 $d=0$ 时，命题 3.4.5 应与 [**HW20** 的定理 4.3.1] 进行比较。事实上，我们预计可以利用命题 3.4.5 得到他们的结果。我们还注意到以下变体。令 $R := \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t_1,\cdots,t_d]$ 表示由偶数次类 $t_i$ 上的平坦多项式 $\mathrm{E}_2$-$\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-代数（即沿 $\mathrm{E}_3$-映射 $\mathrm{MU} \to \mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 对 $\mathrm{E}_\infty$-MU-代数 $\mathrm{MU}[t_1,\cdots,t_d]$ 作基变换）。于是，命题 3.4.5 的论证表明，沿复合映射 $R \to \mathrm{BP}\langle n-1\rangle \to \mathrm{F}_p$ 作基变换后，局部化映射 $\gamma\colon \mathrm{THH}(R/T(n)) \to \mathrm{THH}(R/T(n))[\theta_n^{-1}]$ 在次数 $> -2p^n + \sum_{j=1}^{d}(|t_j|+1)$ 上是等价。当 $n=0$ 时，这就是 [**HW20** 的推论 4.2.3]。

**命题 3.4.7**。设 $R$ 是一个 $p$-无挠的离散交换环，且 $R/p$ 是正则诺特的。假设 $L\Omega_R^n = 0$ 对于 $n > d$ 成立。那么猜想 ***3.1.14*** 蕴含 $R$ 满足 $J(p)$-***Segal***猜想：事实上，映射 $\mathrm{THH}(R/J(p)) \to \mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}]$ 在次数 $> d-2$ 上是一个等价。

证明。回忆一下，猜想 3.1.14 断言，$\mathrm{THH}(R/J(p))$ 具有一个滤过，使得 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}\mathrm{THH}(R/J(p)) \simeq (\mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\widehat{\Omega}^{\not p}_R)[2i]$，并且映射 $\gamma\colon \mathrm{THH}(R/J(p)) \to \mathrm{THH}(R/J(p))[x^{-1}]$ 在 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}[-2i]$ 上诱导出映射 $\mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\widehat{\Omega}^{\not p}_R \to \widehat{\Omega}^{\not p}_R$。根据 [BL22a，注 4.7.4]，$\widehat{\Omega}^{\not p}_R/\mathrm{F}_i^{\mathrm{conj}}\widehat{\Omega}^{\not p}_R$ 集中在上同调次数 $\geq i+1$ 中，因此 $\mathrm{gr}^i(\gamma)$ 的余纤维集中在次数 $\leq 2i-(i+1) = i-1$ 中。此外，$L\Omega^n_R = 0$ 对于 $n > d$ 成立这一假设意味着，$\gamma$ 在 $\mathrm{gr}^i_{\mathrm{mot}}$ 上对 $i \geq d$ 诱导出一个等价。结合这些观察即可得到所需结论（另见 [Mat22，推论 9.5] 的证明）。□

**3.5. 旁注：Cartier 同构**。本节研究备注 3.3.10 中二项复形的一个拓扑类比；未来的工作中，我们将研究这些复形的基本代数性质。为避免处理完备化问题，我们采用以下记号（关于记号 $\mathrm{HH}(R[t]/R)$ 的说明，见警告 3.3.7）：

**定义 3.5.1.** 设 $R$ 是一个 $\mathrm{E}_2$-环。多项式 $\mathrm{E}_1$-$R$-代数 $R[t] = R[\mathbb{N}]$ 带有自然的 $\mathbb{Z}$-分次，我们用 $\mathrm{HH}(R[t]/R)^{\leq m}$ 表示由截断 $\mathrm{HH}(R[t]/R) := R\otimes\mathrm{THH}(S[t])$ 在权 $\geq m+1$ 上得到的分次左 $R$-模。具体而言，$\mathrm{HH}(R[t]/R)^{\leq m}$ 等价于 $R \oplus \left(\bigoplus_{1\leq n\leq m} R\otimes(S^1/\mu_n)_+\right)$。

**引理 3.5.2.** 若 $X \in \mathrm{Sp}^{BS^1}$，则下列复合映射是一个等价：

$$X^{t\mathbf{Z}/p}\otimes(S^1/\mu_n)_+ \xrightarrow{\sim} (X\otimes(S^1/\mu_n)_+)^{t\mathbf{Z}/p} \xrightarrow{\psi} (X\otimes(S^1/\mu_{np})_+)^{t\mathbf{Z}/p}.$$

此外，若 $p\nmid m$，则 $(X\otimes(S^1/\mu_m)_+)^{t\mathbf{Z}/p} = 0$。

证明。若 $\varphi\colon (S^1/\mu_n)_+ \to ((S^1/\mu_{np})_+)^{h\mathbf{Z}/p}$ 表示不稳定 Frobenius（将 $x\mapsto x^{1/p}$ 送到），则该复合映射的余纤维

$$\psi : (S^1/\mu_n)_+ \to ((S^1/\mu_{np})_+)^{h\mathbf{Z}/p} \to (S^1/\mu_{np})_+$$

具有诱导的整数环/$p$作用，其中$(S^1/\mu_n)_+$ 和$((S^1/\mu_{np})_+)^{h\mathbf{Z}/p}$ 均赋予平凡的整数环/$p$作用。因此，典范映射 $X^{t\mathbf{Z}/p}\otimes(S^1/\mu_n)_+ \to (X\otimes$

$(S^1/\mu_n)_+)^{t\mathbf{Z}/p}$ 是一个等价（因为$(S^1/\mu_n)_+$ 是一个具有平凡整数环/$p$作用的有限谱）。由此得到第一个结论。最后，若 $p \nmid m$，则$S^1/\mu_m$ 上的整数环/$p$作用是自由的，因此$(X \otimes (S^1/\mu_m)_+)^{t\mathbf{Z}/p} = 0$，如所求。□

**命题 3.5.3** (Cartier 同构)。设 $R$ 是一个$\mathbf{E}_2$-环。则：

*(a)* 存在一个 $S^1$-等变映射 $\mathfrak{C}$：Hochschild 同调$(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}) \to$ Hochschild 同调$(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}$，其中Hochschild 同调$(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}$ 带有剩余的 $S^1/\mu_p$-作用，而Hochschild 同调$(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p})$带有由 $S^1$-作用在Hochschild 同调上以及剩余的 $S^1/\mu_p$-作用在 $R^{t\mathbf{Z}/p}$ 上所诱导的对角 $S^1$- 作用。此外，该映射 $\mathfrak{C}$ 将 $t \mapsto t^p$。*(b)* 对每个 $m \geq 1$，映射 $\mathfrak{C}$ 诱导出一个等价 $\mathfrak{C}_{\leq m}$：Hochschild 同调$(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p})_{\leq m} \xrightarrow{\sim}$(Hochschild 同调$(R[t]/R)_{\leq mp})^{t\mathbf{Z}/p}$。

证明。回忆一下，存在一个等价 Hochschild 同调$(R[t]/R) \simeq R \otimes \mathrm{THH}(S[t])$。由于 Z/$p$-Tate 构造是松对称幺半的，我们通过以下复合映射得到映射 $\mathfrak{C}$

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}) &\simeq R^{t\mathbf{Z}/p} \otimes \mathrm{THH}(S[t]) \\ &\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varphi} R^{t\mathbf{Z}/p} \otimes \mathrm{THH}(S[t])^{t\mathbf{Z}/p} \\ &\to (R \otimes \mathrm{THH}(S[t]))^{t\mathbf{Z}/p} \simeq \mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}.\end{aligned}$$

对于每个 $m \geq 1$，都存在一个等价

$$(\mathrm{HH}(R[t]/R)_{\leq m})^{t\mathbf{Z}/p} \simeq R^{t\mathbf{Z}/p} \oplus \left(\bigoplus_{1\leq n\leq m} R \otimes (S^1/\mu_n)_+\right)^{t\mathbf{Z}/p}.$$

由于映射 $\varphi : (S^1/\mu_n)_+ \to ((S^1/\mu_{np})_+)^{h\mathbf{Z}/p}$ 定义了 THH$(S[t]) \simeq S \oplus \bigoplus_{n\geq 1}(S^1/\mu_n)_+$上的 Frobenius，由引理 3.5.2 可知，对于每个 $m \geq 1$，映射 $\mathfrak{C}_{\leq m}$定义了一个等价

$$\bigoplus_{1\leq j\leq m} R^{t\mathbf{Z}/p} \otimes (S^1/\mu_j)_+ \xrightarrow{\sim} \left(\bigoplus_{1\leq n\leq mp} R \otimes (S^1/\mu_n)_+\right)^{t\mathbf{Z}/p}.$$

左侧是 HH$(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p})_{\leq m}$，右侧是 $(\mathrm{HH}(R[t]/R)_{\leq mp})^{t\mathbf{Z}/p}$。□

**注 3.5.4**。当 $R$ 是一个 E$_\infty$-环时，命题 3.5.3 的映射 $\mathfrak{C}$ : HH$(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}) \to$ HH$(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}$ 也可以利用（一个简单情形的） [**Law21** 定理 1.3]来构造。所引用的结果如下。假设 $k$ 是一个 E$_\infty$-环，因此 Tate 值 Frobenius $k \to k^{t\mathbf{Z}/p}$ 可扩张为一个从 THH$(k) \to k^{t\mathbf{Z}/p}$ 到 E$_\infty$-环的 $S^1$-等变映射。若 $A$ 是一个 E$_1$-$k$-代数，且 $M$ 是 Mod$_k$ 中的一个 $A$-双模，则存在一个相对 Tate 对角映射

$$k^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{\mathrm{THH}(k)} \mathrm{THH}(A, M) \to \mathrm{THH}^k(A, M^{\otimes_A p})^{t\mathbf{Z}/p},$$

其中，THH$^k$ 表示相对于 $k$的 THH。要构造 $\mathfrak{C}$，取 $k = R$ 和 $A = M = k[t]$。于是

$$k^{t\mathbf{Z}/p} \otimes_{\mathrm{THH}(k)} \mathrm{THH}(A, M) \simeq k^{t\mathbf{Z}/p} \otimes \mathrm{THH}(S^0[t]) \simeq \mathrm{HH}(k^{t\mathbf{Z}/p}[t]/k^{t\mathbf{Z}/p}),$$

由于 $\mathrm{THH}(A, M) \simeq \mathrm{THH}(A) \simeq \mathrm{THH}(S^0[t]) \otimes \mathrm{THH}(k)$。类似地，$\mathrm{THH}^k(A, M^{\otimes_A p}) \simeq \mathrm{HH}(A/k)$，并且不难验证，Lawson 相对 Tate 对角映射与映射 $\mathfrak{C}$ 一致。

命题 3.5.3 中构造 $\mathfrak{C}$ 的一个优点是，它显然是 $S^1$-等变的，而且不依赖于 $R$ 是 $\mathbf{E}_\infty$- 环。更一般地，可以发现，若 $\mathscr{C}$ 是一个稳定的 $\infty$- 范畴，且 $R$ 是任意 $\mathbf{E}_2$-环，则 $\mathrm{THH}(\mathscr{C})$ 上的回旋 Frobenius 定义了一个 $S^1$-等变映射 $\mathfrak{C}\colon \mathrm{HH}(\mathscr{C} \otimes R^{t\mathbf{Z}/p}/R^{t\mathbf{Z}/p}) \to \mathrm{HH}(\mathscr{C} \otimes R/R)^{t\mathbf{Z}/p}$，它推广了命题 3.5.3 中的映射。此外，若 $\mathscr{C}$ 光滑且适当，此映射就是一个等价。

**注记 3.5.5**。在命题 3.5.3 中，映射 $\mathfrak{C}\colon \mathrm{HH}(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}) \to \mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}$ 本身几乎是一个等价：主要问题在于典范映射

$$\mathrm{colim}_m \left(\mathrm{HH}(R[t]/R)_{\leq mp}\right)^{t\mathbf{Z}/p} \to \left(\mathrm{colim}_m \mathrm{HH}(R[t]/R)_{\leq mp}\right)^{t\mathbf{Z}/p} \simeq \mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}$$

可能不是等价。不过，命题 3.5.3 表明，分次映射 $\mathfrak{C}^{\mathrm{gr}}\colon \mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p} \to \mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}$ 本身是一个等价。

**注记 3.5.6.** 若 $R$ 是一个复定向 $\mathbf{E}_2$-环，令 $[p](\hbar) \in \pi_{-2}R^{hS^1}$ 表示形式群律在 $R$ 上的 $p$-级数。若 $M \in \mathrm{LMod}_R^{BS^1}$，则不难证明存在一个等价 $M^{tS^1}/^{[p]}_{(\hbar)} \xrightarrow{\simeq} M^{t\mathbf{Z}/p)}$。（尽管这当然广为人知，但文献中关于如~~此一~~般性表述的唯一参考似乎是 [**HRW22**，引理 6.2.2]。）特别地，$\mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p} \simeq \mathrm{HP}(R[t]/R)/\frac{[p](\hbar)}{\hbar}$，因此命题 3.5.3 和注记 3.5.5 表明，存在一个 $S^1$-等变的分次等价

$$\mathfrak{C}\colon \mathrm{HH}(R^{t\mathbf{Z}/p}[t]/R^{t\mathbf{Z}/p}) \to \mathrm{HP}(R[t]/R)/\tfrac{[p](\hbar)}{\hbar} \simeq \mathrm{HH}(R[t]/R)^{t\mathbf{Z}/p}.$$

在未来的工作中，我们将证明，若进一步假设 $R$ 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-环，且 $\mathscr{C}$ 是一个 $R$-线性 $\infty$-范畴，那么 $(R^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1} \simeq (R^{tS^1})^\wedge_p$-模 $(\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \otimes_{\mathrm{THH}(R)} R^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1}$ 就如同将 $L\eta_{[p](\hbar)/\hbar}$ 应用于 $\mathrm{HP}(\mathscr{C}/R)$ 所得到的非交换类比。这里，$\hbar \in \pi_{-2}R^{hS^1}$ 是 $R$ 的复定向，而 $[p](\hbar)/\hbar \in \pi_0 R^{tS^1}$ 是相关形式群律的 $p$- 级数的商。

**注 3.5.7.** 命题 3.5.3(b) 中的等价并不需要局限于单个变量的多项式环；由此得到的陈述细节留给读者。

**例 3.5.8.** 设 $R = \mathbf{Z}$。那么 $\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}$ 是一个 $\mathbf{E}_\infty$-Z-代数，其同伦群由 $\mathbf{F}_p((\hbar))$ 给出，其中 $|\hbar| = 2$。因此，$\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p} \simeq \mathbf{F}_p^{tS^1}$ 作为 $\mathbf{E}_2$-环[17]，，并且

[17]事实上，它们作为 $\mathbf{E}_\infty$-环是等价的。尽管看似无伤大雅，即便是较弱的断言——$\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}$ 具有 $\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{F}_p$-代数结构——从第一原理出发证明起来也出乎意料地困难（见 [NS18，注 IV.4.17]）。一种可能的论证如下：由于 $p = 0 \in \pi_0 \mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}$，存在一个从带有 $p = 0$ 的自由 $\mathbf{E}_\infty$-代数到 $\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}$ 的映射。然而，奇怪的是，带有 $p = 0$ 的自由 $\mathbf{E}_\infty$-代数并不是 $\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{F}_p$-代数；这使得通过此论证证明 $\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}$ 是 $\mathbf{E}_\infty$-$\mathbf{F}_p$-代数的希望落空。更一般地，带有 $p = 0$ 的自由 $\mathbf{E}_n$-代数 $R$ 不是 $\mathbf{E}_n$-$\mathbf{F}_p$-代数，除非 $n = 2$：事实上，将 $\mathbf{E}_n$-余切复形应用于 $\mathbf{E}_n$-代数映射的复合 $\mathbf{F}_p \to R \to \mathbf{F}_p$，可知 $L^{\mathbf{E}_n}\mathbf{F}_p$ 是 $\mathbf{F}_p \otimes_R L^{\mathbf{E}_n}_R \simeq \mathbf{F}_p$ 的一个直缩。这迫使 $L^{\mathbf{E}_n}\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_p$，也就是说，$\mathbf{F}_p$ 将由球谱通过在次数 1 处附加一个 $\mathbf{E}_n$-胞腔构造而成——但这是不可能的，因为 $\mathbf{F}_p \otimes \mathbf{F}_p \not\simeq \mathbf{F}_p[\Omega^n S^{n+1}]$，除非 $n = 2$。

命题 3.5.3（结合注记 3.5.5）可具体表述为存在一个 Frobenius-线性等价

$$\mathfrak{C}:\mathrm{HH}(\mathbf{F}_p[t]/\mathbf{F}_p)((\hbar))_{\leq m}\simeq \mathrm{HH}(\mathbf{F}_p^{tS^1}[t]/\mathbf{F}_p^{tS^1})_{\leq m}\xrightarrow{\sim}(\mathrm{HH}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})_{\leq mp})^{t\mathbf{Z}/p}.$$

注意，$\mathrm{HH}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})^{t\mathbf{Z}/p}\simeq \mathrm{HP}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})/p\simeq \mathrm{TP}(\mathbf{F}_p[t])/p$。由于 HKR 定理表明，$\mathrm{HH}(\mathbf{F}_p[t]/\mathbf{F}_p)^{tS^1}$ 是 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_p}$的霍奇上同调的 2-周期化，而 $\mathrm{HP}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})/p$ 是 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}_p}$ 模 $p$ 的德拉姆上同调的 2-周期化（即 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_p}$的德拉姆上同调），因此可以将 $\mathfrak{C}$ 视为仿射直线的 Cartier 同构的拓扑类比。它在分次部分上退化为通常的 Cartier 同构。在这种情况下，命题 3.5.3 的表述也应与 [**Kal08**, **Kal17**, **Mat20**]进行比较。对于命题 3.5.3(a)中 $\mathfrak{C}$ 的 $S^1$-等变性取同伦不动点，我们得到一个 Frobenius线性等价

$$\mathfrak{C}^{hS^1}:(\mathrm{HH}(\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1})_{\leq m}\xrightarrow{\sim}((\mathrm{HH}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})_{\leq mp})^{tS^1})^\wedge_p. \tag{46}$$

更简洁地说，存在一个分次等价

$$(\mathfrak{C}^{\mathrm{gr}})^{hS^1}:\mathrm{HH}(\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{HP}^{\mathrm{gr}}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})^\wedge_p.$$

利用 $\mathrm{HH}(\mathbf{Z}[t]/\mathbf{Z})$ 上的霍赫希尔德–科斯祖尔–罗森伯格滤过，可以证明 $\mathrm{HH}(\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathbf{Z}^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1}$带有一个滤过，其分次部分由 $L\eta_p\Gamma_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Z}_p[t]/\mathbf{Z}_p)\simeq L\eta_p\Gamma_{\mathrm{crys}}(\mathbf{F}_p[t]/\mathbf{Z}_p)$ 的偶数移位给出。我们将在未来的一篇文章中对此作更详细的阐述。由于 $\mathrm{HP}(\mathbf{Z}_p[t]/\mathbf{Z}_p)\simeq \mathrm{TP}(\mathbf{F}_p)$，(46) 可视为 $\mathbf{F}_p[t]$ 的晶体上同调中“Cartier 同构” $L\eta_p\Gamma_{\mathrm{crys}}(\mathbf{F}_p[t]/\mathbf{Z}_p)\simeq\Gamma_{\mathrm{crys}}(\mathbf{F}_p[t]/\mathbf{Z}_p)$ 的 2-周期化（一般情形见 **BO78**，定理 8.20] ）。

**例 3.5.9.** 设 $R=\mathrm{ku}$。那么 $\pi_*\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p}\cong \mathbf{Z}[\zeta_p](\!(\hbar)\!)$，并且预期它可提升为 $\mathrm{E}_\infty$-环的等价 $\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p}\simeq \mathbf{Z}[\zeta_p]^{tS^1}$（另见下文例 3.5.11）。尽管如此，确实存在 $\mathrm{E}_2$-环的等价 $\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p}\simeq \mathbf{Z}[\zeta_p]^{tS^1}$（可利用 [**Mao20**，定理 1.19] 证明；感谢 Arpon Raksit 指出这一点）。因此，命题 3.5.3 和注记 3.5.5 给出一个等价

$$\mathfrak{C}:\text{Hochschild 同调(整数环}[\zeta_p][t]/\text{整数环}[\zeta_p])(\!(\hbar)\!)_{\leq m}\simeq \text{Hochschild 同调(整数环}[\zeta_p]^{tS^1}[t]/\text{整数环}[\zeta_p]^{tS^1})_{\leq m}\xrightarrow{\sim}(\text{Hochschild 同调(连通 K 理论谱}[t]/\text{连通 K 理论谱})_{\leq mp})^{t\mathbf{Z}/p}.$$

注意，$\mathrm{HH}(\mathrm{ku}[t]/\mathrm{ku})^{t\mathbf{Z}/p}\simeq \mathrm{HP}(\mathrm{ku}[t]/\mathrm{ku})/[p]_q$。这里，我们将 $[p]_{\mathbf{G}_m}(\hbar)\xrightarrow{\hbar=\quad}\in\pi_0\mathrm{ku}^{tS^1}\cong \mathbf{Z}[\![q-1]\!]$ 识别为 $q$-整数 $[p]_q$。

根据 HKR 定理，可以将 $\mathrm{HH}(\mathbf{Z}[\zeta_p][t]/\mathbf{Z}[\zeta_p])(\!(\hbar)\!)$ 视为 $\mathbf{A}^1_{\mathbf{Z}}$ 沿映射 $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}[\zeta_p]$ 基变换后所得霍奇上同调的 2-周期化。类似地，Raksit 的上述工作（参见 [**Rak 20**] 以及注 3.3.1 和引理 3.3.4）表明，$\mathrm{HP}(\mathrm{ku}[t]/\mathrm{ku})$ 可以视为 $\mathbf{Z}[t]$ 的$q$-德拉姆复形的 2-周期化。由于消去 $[p]_q\in\mathbf{Z}[\![q-1]\!]$ 相当于将$q$ 特化为一个本原的 $p$次单位根，因此可以将命题 3.5.3 视为仿射直线的 $q$-德拉姆复形的 Cartier 同构的拓扑类比（例如参见 [**Sch17**，命题 3.4]）。

根据命题 3.5.3(a) 中的 $S^1$-等变性对 $\mathfrak{C}$ 取同伦不动点，我们得到一个等价

$$\mathfrak{C}^{hS^1}:(\mathrm{HH}(\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1})_{\leq m}\xrightarrow{\sim}((\mathrm{HH}(\mathrm{ku}[t]/\mathrm{ku})_{\leq mp})^{tS^1})^\wedge_p. \tag{47}$$

更简洁地说，存在一个分次等价

$$(\mathfrak{C}^{\mathrm{gr}})^{hS^1}:\mathrm{HH}(\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathrm{ku}^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{HP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{ku}[t]/\mathrm{ku})^\wedge_p.$$

在后续工作中，我们证明 Raksit 在 HP(ku$[t]$/ku) 上的滤过可以进一步细化，从而在 HH(ku$^{t\mathbf{Z}/p}[t]$/ku$^{t\mathbf{Z}/p}$)$^{hS^1}$ 上构造一个滤过，其分次部分由 $L\eta_{[p]_q}q\Omega^{\mathbf{Z}_p[t]}$ 的偶数次移位给出。于是，(47) 可以视为 $q$-德拉姆上同调的“Cartier 同构” $\phi^*_{\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!]}q\Omega_{\mathbf{Z}_p[t]} \simeq L\eta_{[p]_q}q\Omega^{\mathbf{Z}_p[t]}$ 的 2-周期化，其中 $\mathrm{Z}_p[t]$。（参见 [**BS19**，应用于 $q$-晶体棱柱 $(\mathrm{Z}_p[\![q-1]\!],[p]_q)$ 的定理 1.16(4)] 。）

**注记 3.5.10.** 例 3.5.9 可以做一个温和的推广。具体而言，若 ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}$表示严格不动点（即 ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}} = \tau_{\geq 0}$(ku$^{h\mathbf{Z}/p^{n-1}}$)），则可以计算 $\pi_*$(ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}$)$^{t\mathbf{Z}/p} \cong \pi_*$整数环$_p[\zeta_{p^n}]^{tS^1}$。可以证明，这可以扩展为 $\mathrm{E}_2$-环之间的等价 (ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}$)$^{t\mathbf{Z}/p} \simeq$ 整数环$_p[\zeta_{p^n}]^{tS^1}$。命题 3.5.3 和注记 3.5.5 给出一个分次等价

$$\mathfrak{C} : \mathrm{HH}(\mathbf{Z}[\zeta_{p^n}][t]/\mathbf{Z}[\zeta_{p^n}])((\hbar)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{HH}(\mathrm{ku}^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}[t]/\mathrm{ku}^{\mathbf{Z}/p^{n-1}})^{t\mathbf{Z}/p}.$$

这里，整数环$/p$ 在 Hochschild 同调(ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}[t]$/ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}$) $=$ THH($S[t]$) $\otimes$ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}$ 上的作用，是通过 THH 和 ku$^{\mathbf{Z}/p^{n-1}}$上的对角作用实现的。因此，在此情形下，可以将命题 3.5.3 视为仿射直线的棱镜 (整数环$_p[\![q^{1/p^{n-1}}-1]\!],[p]_q$) 上相对于 Hodge-Tate 上同调的 Cartier 同构的拓扑类比。

**例 3.5.11.** 更一般地，令 $R =$BP$\langle n\rangle$。正如注记 2.2.16[**AMS98**中所回忆的，命题 2.3] 证明了存在同构 $\pi_*$BP$\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p} \cong \pi_*$BP$\langle n-1\rangle^{tS^1}$；而在[**DJK**$^+$**86**中，猜想 1.2] 猜想该同构可提升为谱等价。若我们假设实际上存在 $\mathrm{E}_2$-环的等价 BP$\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p} \simeq$ BP$\langle n-1\rangle^{tS^1}$，则由命题 3.5.3 和注记 3.5.5 可得一个等价

$$\mathfrak{C} : \mathrm{HH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)((\hbar))_{\leq m} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{HH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)_{\leq mp})^{t\mathbf{Z}/p}.$$

因此，在此情形下，命题 3.5.3 可视为“$v_n$-进霍奇理论”中仿射直线上 Cartier 同构的类比。对命题 3.5.3(a) 中 $\mathfrak{C}$ 的 $S^1$-等变性取同伦不动点，我们得到一个等价

(48)
$$\mathfrak{C}^{hS^1} : (\mathrm{HH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1})_{\leq m} \xrightarrow{\sim} ((\mathrm{HH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)_{\leq mp})^{tS^1})^\wedge_p.$$

更简洁地说，存在一个分次等价

$$(\mathfrak{C}^{\mathrm{gr}})^{hS^1} : \mathrm{HH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p}[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle^{t\mathbf{Z}/p})^{hS^1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{HP}^{\mathrm{gr}}(\mathrm{BP}\langle n\rangle[t]/\mathrm{BP}\langle n\rangle)^\wedge_p.$$

注意，猜想 2.2.18 特别意味着，若 $T(n)$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环结构，则根据命题 3.3.8，HP(BP$\langle n\rangle[t]$/BP$\langle n\rangle$) 与 TP(BP$\langle n-1\rangle[t]/T(n)$) 密切相关。在这种形式下，将 BP$\langle n\rangle$ 替换为任意复定向的 $\mathrm{E}_2$-环 $R$时，(48) 仍成立。与前面的例子一样，我们认为，当 $R$是连通的时，这可以看作二项复形 (41) 的“Cartier 同构”的一种 2-周期化。更多讨论请参见 [**DM23**] 。

## 4. 与形式群模叠的关系

**4.1. 拓扑 Sen 算子在 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上的体现。**在第 3 节中，我们证明，注 2.2.12 中的下降谱序列可以推广为拓扑 Sen 算子（定理 3.1.4）。正如下文所述，这一推广在 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上也有体现。本节讨论的定理 2.2.4、定理 3.1.4 等的类似结果，有助于作出拓扑预测，因为其中涉及的计算较为容易。

回顾 4.1.1（偶过滤）。令 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{ev}}:\mathrm{CAlg}\to\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{fil}})$ 为 [HRW22] 的偶过滤：若 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{ev}}$ 表示由具有偶同伦的 $\mathrm{E}_\infty$-环所张成的 CAlg 全子范畴，则 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{ev}}$ 是函子 $\tau_{\geq 2\star}:\mathrm{CAlg}^{\mathrm{ev}}\to\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{fil}})$ 沿包含映射 $\mathrm{CAlg}^{\mathrm{ev}}\hookrightarrow\mathrm{CAlg}$ 的右 Kan 延拓。注意，由于 $\tau_{\geq 2\star}$ 是松对称幺半的，且 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{ev}}$ 由右 Kan 延拓定义，因此它也是一个松对称幺半函子。我们将用到 [HRW22] 中的以下结果：若 $R$ 是一个 $\mathrm{E}_\infty$-环，且 $\mathrm{MU}\otimes R\in\mathrm{CAlg}^{\mathrm{ev}}$，则 $\mathrm{F}^{\star}_{\mathrm{ev}}R$ 与其 Adams–Novikov 塔 $\nu(R)\in\mathrm{Syn}^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{MU}}(\mathrm{Sp})=\mathrm{Mod}_{\mathrm{Tot}(\tau_{\geq 2\star}\mathrm{MU}^{\otimes\bullet+1})}(\mathrm{Sp}^{\mathrm{fil}})$ 的底层滤过 $\mathrm{E}_\infty$-环 $p$-完全等价。（另见 [Pst18, GIKR18]。）在此情形下，伴随分次 Hopf 代数胚 $(\mathrm{MU}_*(R),\mathrm{MU}_*(\mathrm{MU}\otimes R))$ 定义了一个覆于 $B\mathrm{G}_m$ 之上的叠。若 $R$ 是复定向的，则该叠同构于 $\mathrm{Spec}(\pi_*R)/\mathrm{G}_m$，其中 $\mathrm{G}_m$ 的作用编码了 $\pi_*R$ 上的分次。

**观察 4.1.2.** 要定义与分次 Hopf 代数胚 $(\mathrm{MU}_*(R),\mathrm{MU}_*(\mathrm{MU}\otimes R))$ 相关联的叠 $\mathcal{M}_R$，不需要它是 $\mathrm{E}_\infty$-环；只需它具有同伦交换环的结构，且 $\mathrm{MU}_*(R)$ 集中在偶数次上。Hopkins 在 [DFHH14 第 9] 章的讲座中阐述了这一视角。特别地，可以定义与$X(n)$相关联的叠：它是由配备了次数为 $\leq n$ 的坐标的分次形式群及其之间的严格同构所构成的模叠。（例如参见 [Mil19 第2]节。）

**变体 4.1.3.** 我们发现，采用分次 Hopf 代数胚 $(\mathrm{MU}_*(R),\mathrm{MU}_*(\mathrm{MU}\otimes R))$ 的 $p$-典型变体会很方便。具体而言，若 $R$ 是一个 $p$-局部同伦交换环，且 $\mathrm{BP}_*(R)$ 集中在偶数次上，则记 $\mathcal{M}_R$ 为与分次 Hopf 代数胚 $(\mathrm{BP}_*(R),\mathrm{BP}_*(\mathrm{BP}\otimes R))$ 相关联的分次叠。例如，$\mathcal{M}_{T(n)}$ 是由配备了截至 $\leq p^{n+1}-1$ 阶坐标的 $p$-典型分次形式群所构成的模叠；根据 $p$-典型性，它进一步同构于由配备了截至 $\leq p^n$ 阶坐标的 $p$-典型分次形式群所构成的模叠。特别地，$\mathcal{M}_{S^0}$ 同构于 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ $p$-典型分次形式群的模叠。类似地，若$R$是一个 $p$-局部复定向同伦交换环，则 $\mathcal{M}_R$ 同构于 $\mathrm{Spec}(\pi_*R)/\mathrm{G}_m$。

例 4.1.4. 单位映射 $S^0\to\mathrm{MU}$ 诱导映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{MU}}\cong\mathrm{Spec}(\mathrm{MU}_*)/\mathrm{G}_m\to\mathcal{M}_{S^0}$，它描述了由分次拉扎德环给出的分次形式群模叠的平坦覆盖。此映射将 $\mathcal{M}_{S^0}$ 表示为 $\mathrm{Spec}(\mathrm{MU}_*)/\mathrm{G}_m$ 对群概形 $\mathrm{Spec}(\pi_*(\mathrm{MU}\otimes\mathrm{MU}))/\mathrm{G}_m$ 的商。注意，$\mathrm{MU}\otimes\mathrm{MU}\simeq\mathrm{MU}[BU]$；由于 $\pi_*\mathbb{Z}[BU]$ 是大 Witt 环概形的坐标环，我们看到 $\mathrm{Spec}(\pi_*(\mathrm{MU}\otimes\mathrm{MU}))/\mathrm{G}_m$ 是大 Witt 环概形在 $\mathrm{Spec}(\mathrm{MU}_*)/\mathrm{G}_m$ 上的一个提升。类似地，$\mathcal{M}_{S^0}=\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 是 $\mathcal{M}_{\mathrm{BP}}=\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*)/\mathrm{G}_m$ 对 $p$-典型 Witt 环概形 $W$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*)/\mathrm{G}_m$ 上的一个提升的商。

**注 4.1.5.** 如果 $A \to B$ 是一个 $p$-局部 $\mathbf{E}_\infty$-环之间的映射，且 $\mathrm{MU}_*(A)$ 和 $\mathrm{MU}_*(B)$ 都是偶的，那么会诱导出一个分次代数栈映射。回忆，$\mathrm{THH}(B/A)$ 是单纯 $A$-代数 $B^{\otimes_A \bullet+1}$的几何实现。逐层将 $\mathrm{F}^\star_{\mathrm{ev}}$ 应用于 $B^{\otimes_A \bullet+1} \in \mathrm{Fun}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}}, \mathrm{CAlg}_A)$，得到 Bökstedt 谱序列的 Adams-Novikov 类比：

$$\pi_* \mathrm{HH}(\mathcal{M}_B/\mathcal{M}_A) \Rightarrow \pi_* \mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}} \mathrm{THH}(B/A).$$

特别要注意，$\mathrm{HH}(\mathcal{M}_B/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ 是 $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(B)$ 的一种近似。要使这个谱序列存在，并不要求 $A$ 和 $B$ 是 $\mathbf{E}_\infty$-环：例如，只需 $A \to B$ 是一个 $p$-局部 $\mathbf{E}_2$-环之间的映射，使得 $\mathrm{MU}_*(A)$ 和 $\mathrm{MU}_*(B)$ 都是偶的，并且 $\mathrm{THH}(B/A)$ 有下界且具有偶 MU-同调。此时，$\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(B/A)$ 必须解释为 $\mathrm{THH}(B/A)$ 上 Adams-Novikov 滤过的伴随分次；参见 [**HRW22**，推论 1.1.6]。

**例 4.1.6.** 令 $\mathcal{M}^s_{\mathrm{FG}}$ 表示 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上典范线丛的全空间（由映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}} \to B\mathbf{G}_m$ 确定）。若 $R$ 是一个 $p$-拟合成环，则 [**BMS19** 的定理 1.12] 和注 4.1.5 给出一个谱序列

$$\pi_* \mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(R)/\mathcal{M}^s_{\mathrm{FG}}) \Rightarrow \pi_* \mathscr{N}^* \hat{\mathbb{\Delta}}_R[2*].$$

事实上，$\mathcal{M}_R = \mathrm{Spec}(R)/\mathbf{G}_m \cong \mathrm{Spec}(R) \times B\mathbf{G}_m$，因此 $\mathrm{HH}(\mathcal{M}_R/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ 的底层 $R$-代数是 $\mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(R)/\mathcal{M}^s_{\mathrm{FG}})$。

**例 4.1.7.** 复定向 $\mathrm{BP} \to \mathrm{BP}\langle n\rangle$ 诱导出一个映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{BP}\langle n\rangle} \to \mathcal{M}_{\mathrm{BP}}$，该映射分解结构映射 $\mathcal{M}_{\mathrm{BP}\langle n\rangle} \to \mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$。具体来说，我们有如下在 $B\mathbf{G}_m$ 上的代数栈复合映射：

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n\rangle_*)/\mathbf{G}_m \to \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*)/\mathbf{G}_m \to \mathcal{M}_{\mathrm{FG}}.$$

取余切复形可得如下在 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}{}_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*}$ 中的传递性余纤维序列：

$$\mathrm{BP}\langle n\rangle_* \otimes_{\mathrm{BP}_*} L_{\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*)/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}} \to L_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}} \to L_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*/\mathrm{BP}_*}.$$

由于 $\mathrm{BP}_*/(v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots) \cong \mathrm{BP}\langle n\rangle_*$，注意到 $L_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*/\mathrm{BP}_*}$ 是一个自由 $\mathrm{BP}\langle n\rangle_*$-模，由类 $\sigma(v_{n+1})$ $\sigma(v_{n+2})$ $\cdots$ 生成。类似地，例 4.1.4 中的讨论表明，$L_{\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*)/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}}$ 是一个自由 $\mathrm{BP}_*$-模，由类 $d(t_i)$ 生成。由此可推得，$L_{\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n\rangle_*)/\mathbf{G}_m/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}}$ 是一个自由 $\mathrm{BP}\langle n\rangle_*$-模，由类 $\sigma(v_j)$（其中 $j \geq n+1$）以及 $d(t_i)$（其中 $i \geq 1$）生成。根据 HKR 定理，$\pi_* \mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n\rangle_*)/\mathbf{G}_m/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ 同构于 $\mathrm{Sym}^{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*}(L_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}}[1])$，可将其识别为

$$\pi_* \mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n\rangle_*)/\mathbf{G}_m/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}) \cong \mathrm{BP}\langle n\rangle_*\langle \sigma^2 v_j | j \geq n+1\rangle \otimes_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*} \Lambda_{\mathrm{BP}\langle n\rangle_*}(dt_i | i \geq 1).$$

由于 $v_j$ 的次数为 $2p^j - 2$、权为 $p^j - 1$，类 $\sigma^2 v_j$ 的次数为 $2p^j = |v_j| + 2$、权为 $p^j$；类似地，由于 $t_i$ 的次数为 $2p^i - 2$、权为 $p^j - 1$，类 $dt_i$ 的次数为 $2p^i - 1$、权为 $p^j$。

**例4.1.8.** 对于以下 $B\mathbf{G}_m$ 上代数栈之间的复合映射，同样的讨论也适用

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbf{G}_m \to \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*)/\mathbf{G}_m \to \mathcal{M}_{T(n)}$$

表明 $L_{\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbf{G}_m/\mathcal{M}_{T(n)}}$ 是一个由类 $\sigma(v_j)$（其中 $j \geq n$）和类 $d(t_i)$（其中 $i \geq n+1$）生成的自由 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*$-模。因此，HKR 定理推出 $\pi_* \mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbf{G}_m/\mathcal{M}_{T(n)})$ 同构于一个对称

代数，其底环为 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*$，生成元为类 $\sigma^2(v_i)$（$i \geq n$）和 $d(t_i)$（$i \geq n+1$）。具体而言，

$$\pi_*\mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbf{G}_m/\mathcal{M}_{T(n)}) \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*\langle \sigma^2 v_j | j \geq n\rangle \otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*} \Lambda_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*}(dt_i | i \geq n+1).$$

类 $\sigma^2 v_j$ 的次数为 $2p^j = |v_j| + 2$，权为 $p^j$；类 $dt_i$ 的次数为 $2p^i - 1$，权为 $p^j$。这与命题 2.2.14 中 Bökstedt 谱序列的 $E^2$ 项计算相呼应。

事实上，通过运行 Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列（注 4.1.5），并运用命题 2.2.14 中的 $\mathrm{E}_2$-Dyer-Lashof 论证来解决 $E^\infty$ 页上的扩张问题，可以由此恢复定理 2.2.4。这里我们以非常宽泛的意义使用“恢复”一词：
Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列中的微分由通常的 Bökstedt 谱序列中的微分所决定（命题 2.2.14）。具体而言，我们有

$$d^{p-1}(\gamma_j(\sigma^2 v_m)) = \gamma_{j-p}(\sigma^2 v_m) dt_m$$

模去可分解元后，谱序列在 $E_p$ 页处退化。存在由拓扑决定的扩张 $(\sigma^2 v_m)^p = \sigma^2 v_{m+1}$，模去可分解元后，它给出一个同构（如定理 2.2.4 所示）

$$\pi_* \mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}} \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*[\sigma^2(v_n)].$$

**回顾 4.1.9**。设 $Y$ 是一个概形，且 $q\colon X \to \mathrm{A}^1 \times Y$ 是一个态射，因此 $X$ 通过投影 $\mathrm{pr}: \mathrm{A}^1 \times Y \to Y$ 成为 $Y$ 上的概形。拟凝聚层 $\mathrm{QCoh}(X)$ 中的传递性余纤维序列如下

$$q^* L_{\mathbf{A}^1 \times Y/Y} \to L_{X/Y} \to L_{X/\mathbf{A}^1 \times Y}.$$

由于 $q^* L_{\mathbf{A}^1 \times Y/Y}$ 是由 $dt$ 生成的自由 $\mathscr{O}_X$-模，秩为 1（其中 $t$ 是 $\mathrm{A}^1$ 上的一个坐标），我们得到一个余纤维序列

$$\mathrm{dR}^*_{X/Y} \to \mathrm{dR}^*_{X/\mathbf{A}^1 \times Y} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{dR}^*_{X/\mathbf{A}^1 \times Y} dt,$$

其中，$\mathrm{dR}^*_{X/Y} = \bigoplus_{i \geq 0}(\wedge^i L_{X/Y})[-i]$ 表示 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(L_{X/Y}[1](1))$ 向下剪切后，其底层的导出交换代数。映射 $\nabla$ 是态射 $q$ 的 Gauss-Manin 联络。注意，$\nabla$ 满足 Griffiths横截性：它将 Hodge滤过的第 $n$ 层映至第 $(n-1)$ 层。

**注 4.1.10.** 注意，若将 $q$取为态射 $Y \to \mathrm{A}^1 \times Y$，即将原点嵌入 $\mathrm{A}^1$，，则 $\mathrm{dR}_{Y/\mathbf{A}^1 \times Y}$ 与除幂代数 $\mathscr{O}_Y\langle t\rangle$是 $p$-完全同构的。利用 $\mathrm{dR}_{Y/Y} \cong \mathscr{O}_Y$这一事实，不难看出，Gauss-Manin 联络 $\nabla$ 必定将 $\gamma_j(t) \mapsto \gamma_{j-1}(t)dt$映至相应对象。此处，我们令 $\gamma_{-1}(t) = 0$。特别地，$\nabla$ 是一个 PD-导子。

**例 4.1.11**（拓扑 Sen 算子与 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$）。同伦交换环的映射 $T(n-1) \to T(n)$ 诱导出一个分次代数栈之间的映射 $\mathcal{M}_{T(n)} \to \mathcal{M}_{T(n-1)}$，它将配备了截至阶数 $\leq p^n$ 坐标的 $p$-典型分次形式群映射到其底层的、配备了截至阶数 $\leq p^n - 1$ 坐标的 $p$-典型分次形式群。映射 $\mathcal{M}_{T(n)} \to \mathcal{M}_{T(n-1)}$ 是一个仿射丛：换言之，它将 $\mathcal{M}_{T(n-1)}$ 表示为 $\mathcal{M}_{T(n)}$ 关于群概形 $\mathrm{G}^{(p^n-1)}{}_a$ /$\mathrm{G}_m$ over $B\mathrm{G}_m$ 的商，其中 $\mathrm{G}^{(p^n-1)}{}_a$ 表示带有权为 $p^n - 1$ 的 $\mathrm{G}_m$ 作用的仿射直线。例如，这可由 [**Pet17** 推出，即引理 3.2.3 到引理 3.2. 的推论。

如果 $f\colon X \to \mathcal{M}_{T(n)}$ 是 $\mathcal{M}_{T(n)}$ 上的一个叠，则 $\mathrm{QCoh}(X)$ 中的传递性余纤维序列为

$$f^* L_{\mathcal{M}_{T(n)}/\mathcal{M}_{T(n-1)}} \to L_{X/\mathcal{M}_{T(n-1)}} \to L_{X/\mathcal{M}_{T(n)}}.$$

由于 $\mathcal{M}_{T(n)} \to \mathcal{M}_{T(n-1)}$ 是一个 $\mathrm{G}_a$-丛，我们看到 $L_{\mathcal{M}_{T(n)}/\mathcal{M}_{T(n-1)}}$ 是由类 $dt_i$ 生成的秩为 1 的自由 $\mathscr{O}_{\mathcal{M}_{T(n)}}$-模。因此存在一个余纤维序列

$$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n-1)}) \to \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n)}) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{mot}}} \Sigma^{2p^n, p^n} \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n)}) \tag{49}$$

在 $X$ 上的拟凝聚层，其中 $\Sigma^{n,w}$ 表示次数为 $n$ 、权为 $w$ 的移位。正如记号所示，映射 $\Theta_{\mathrm{mot}}$ 在 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上的表现类似于定理 3.1.4 中的拓扑 Sen 算子；更准确地说，它是 Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列的 $E^2$ 页上拓扑 Sen 算子的作用。回顾 4.1.9 中的讨论指出， $\Theta_{\mathrm{mot}}$ 可以理解为 Gauss-Manin 联络的类似物。

**例 4.1.12.** $\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p/J(p)) \cong \mathbf{Z}_p[x]$ 上的拓扑 Sen 算子将 $x^j \mapsto jx^{j-1}$ 送至，因此 Sen 算子的作用恰好是 $\mathrm{G}_a^\sharp$ 在 $\mathrm{G}_a = \mathrm{Spec}\mathbf{Z}_p[x]$ 上的作用，其由 $\partial_x : \mathbf{Z}_p[x] \to \mathbf{Z}_p[x]$ 给出。因此，存在一个 $p$-完备分次同构 $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p) \cong \Gamma(\mathrm{G}_a/\mathrm{G}_a^\sharp; \mathscr{O})$。同理，可以论证存在一个 $p$-完备同构 $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)^{t\mathbf{Z}/p} \cong \Gamma(\mathrm{G}_m/\mathrm{G}_m^\sharp; \mathscr{O})$。

这种观点与 [**Dri22, BL22a**] 所述的 Hodge-Tate 上同调的代数栈方法有如下联系。根据 [**Dri22**，命题 3.5.1]，存在一个同构 $\mathrm{G}_a/\mathrm{G}_a^\sharp \cong \mathrm{G}_a^{\mathrm{dR}}$；类似地，$\mathrm{G}_m/\mathrm{G}_m^\sharp \cong \mathrm{G}_m^{\mathrm{dR}}$。因此：

$$\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p) \cong \Gamma(\mathbf{G}_a^{\mathrm{dR}}; \mathscr{O}), \tag{50}$$

$$\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)^{t\mathbf{Z}/p} \cong \Gamma(\mathbf{G}_m^{\mathrm{dR}}; \mathscr{O}). \tag{51}$$

由于 $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)^{t\mathbf{Z}/p}$ 应当作为 Breuil-Kisin 扭曲线丛 $\mathscr{O}_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}}\{1\}$ 在 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}$ 上的全空间 $\mathrm{Tot}(\mathscr{O}_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}}\{1\})$ 的上同调出现，同构 (51) 表明 $\mathrm{Tot}(\mathscr{O}_{\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}}\{1\}) \cong \mathrm{G}_m^{\mathrm{dR}}$。进而，这提示 $\mathrm{WCart}^{\mathrm{HT}}$ 应当是 $\mathrm{G}_m^{\mathrm{dR}}/\mathrm{G}_m = B\mathrm{G}_m^\sharp$。这确实成立：这正是 [**BL22a**，定理 3.4.13]。

类似地，$\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\mathbf{Z}_p)$ 应当来自 Breuil-Kisin 扭曲线丛全空间的上同调，该线丛位于 Drinfeld 的“扩展 Hodge-Tate 位点”$\Delta_0'$ 之上 $\Sigma'$。（该叠 $\Delta_0'$ 定义于 [**Dri22**第 5.10 节]。）在 [**Bha22**], 中，该叠 $\Sigma'$ 记作 $\mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p)^{\mathcal{N}}$，因此或许可以将 $\Delta_0'$ 记作 $\mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p)^{\mathcal{N},\mathrm{HT}}$。于是，同构 (50) 表明，$\mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p)^{\mathcal{N},\mathrm{HT}}$ 之上的 Breuil-Kisin 线丛全空间是 $\mathrm{G}_a^{\mathrm{dR}}$，进而表明 $\mathrm{Spf}(\mathbf{Z}_p)^{\mathcal{N},\mathrm{HT}}$ 应当是 $\mathrm{G}_a^{\mathrm{dR}}/\mathrm{G}_m \cong \mathrm{G}_a/(\mathrm{G}_a^\sharp \rtimes \mathrm{G}_m)$。确实如此：这正是 [**Dri22**引理 5.12.4]。

如果我们改用偶忠实平坦覆盖 $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\text{整数环}_p) \to \mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(\text{整数环}_p/S[t])$（其中 $t \mapsto p$），那么与 $\mathrm{THH}(\text{整数环}_p)$ 上的偶过滤相关联的叠实际上将由 $\mathrm{G}_a^{\mathrm{dR}}/\mathrm{G}_m$ 表示（因此与其同构）。

**变体 4.1.13。** 还可以研究与 $\mathcal{M}_{J(p)}$ 相关的叠 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环 $J(p)$。不难证明，态射 $\mathcal{M}_{J(p)} \to \mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 将 $\mathcal{M}_{J(p)}$ 表示为 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上的 $\mathrm{G}_m$-丛；例如，纤维积 $\mathrm{Spec}(\mathrm{MU}_*)/\mathrm{G}_m \times_{\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}} \mathcal{M}_{J(p)}$ 同构于 $\mathrm{Spec}(\pi_*(\mathrm{MU} \otimes J(p)))/\mathrm{G}_m$，但 $\mathrm{E}_2$-MU-代数 $\mathrm{MU} \otimes J(p) \simeq \mathrm{MU}[t^{\pm 1}]$ 与 $|t| = 0$ 等价。

由于 $\mathcal{M}_{J(p)}$ 是 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上的 $\mathbb{G}_m$-丛，Hochschild 同调中的下降由 Gauss-Manin 联络控制。若 $Y$ 是一个概形，且 $q\colon X \to \mathbb{G}_m \times Y$ 是一个态射，则存在一个余纤维序列

$$\mathrm{dR}^*_{X/Y} \to \mathrm{dR}^*_{X/\mathbf{G}_m \times Y} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{dR}^*_{X/\mathbf{G}_m \times Y} d\log(t).$$

若 $X$ 是 $\mathcal{M}_{J(p)}$ 上的叠，则可得到一个余纤维序列

$$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}) \to \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{J(p)}) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{mot}}} \Sigma^{2,1}\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{J(p)})$$

$X$ 上的拟凝聚层。这是 (17) 中拓扑 Sen 算子在 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上的类比。

**注 4.1.14.** 假设 $T(1)$ 带有 $\mathbb{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环结构（在 $p=2$ 处确实如此）。$T(1)$ 上的单位映射定义了一个映射 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1))$。由于根据定理 2.2.4，$\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1))$ 集中在偶数次上，因此可以利用双速 Postnikov 滤过定义 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1))$ 上的动机滤过。在同构 $\pi_*\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1)) \cong \pi_*\mathrm{BP}\langle 1\rangle^{tS^1} \cong \mathbb{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]^{tS^1}$ 下，可以将 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1))$ 上动机滤过的 $\mathrm{gr}^0$ 视为 $\mathbb{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]$。回忆，$\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p)$ 是 Cartier-Witt 叠 $\mathrm{WCart}^{\mathbb{Z}_p}$ 的一个同伦论类比，见 [**BL22b**]。因此，可以将映射 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1))$ 视为由 $q$-de Rham 点诱导的下述映射的类比：

$$\rho_{\widetilde{p}\mathrm{dR}} : \mathrm{Spf}\,\mathbf{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!] \cong (\mathrm{Spf}\,\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!])/\mathbf{F}_p^\times \to (\mathrm{Spf}\,\mathbf{Z}_p[\![q-1]\!])/\mathbf{Z}_p^\times \xrightarrow{\rho_{q\mathrm{dR}}} \mathrm{WCart}_{\mathbf{Z}_p}.$$

这个映射将棱镜 $(\mathbb{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!], (\widetilde{p}))$ 分类，也可以合理地称为 $\widetilde{p}$-德拉姆点。

正如 [**HRW22**], 引言末尾所解释的，人们希望单位映射 $S^0 \to \mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p)$ 在动机滤过的伴随分次上诱导映射 $\mathrm{WCart}_{\mathbf{Z}_p} \to \mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$，该映射将 $\mathrm{WCart}_{\mathbf{Z}_p} = \Sigma$ 上的 Drinfeld 形式群分类，并来自 [**Dri21**] 。如果猜想 2.2.18 成立（即存在一个谱的等价 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1)) \simeq \mathrm{BP}\langle 1\rangle^{tS^1}$），那么由此得到的单位映射 $S^0 \to \mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1)) \to \mathrm{BP}\langle 1\rangle^{tS^1}$ 就是 $\mathbb{E}_\infty$-环 $\mathrm{BP}\langle 1\rangle^{tS^1}$ 的单位。由于 $\mathrm{BP}\langle 1\rangle$ 是复定向的，$\mathrm{BP}\langle 1\rangle^{tS^1} \cong \mathbb{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]$ 上的形式群必定与 $\mathrm{BP}\langle 1\rangle$ 的形式群同构，也就是说，它是乘法形式群的 $p$-典范形式。尤其是，前述关于 $\mathrm{WCart}^{\mathbb{Z}_p}$ 上的形式群及其与 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p)$ 关系的预期，将预言沿映射 $\rho_{\widetilde{p}\mathrm{dR}}$ 拉回 $\mathrm{WCart}^{\mathbb{Z}_p}$ 上的 Drinfeld 形式群后，得到的是 $\mathbb{Z}_p[\![\widetilde{p}]\!]$ 上乘法形式群的 $p$- 典范形式。事实确实如此，且已在 [**Dri21** 第 2.10 节中得到证明。6]这进一步佐证了这样一种观点：映射 $\mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{TP}(\mathbb{Z}_p/T(1))$ 是 $\mathrm{WCart}^{\mathbb{Z}_p}$ 的 $\widetilde{p}$-德拉姆点的一种同伦论类比。

**4.2. 对比 THH 相对于 $T(n)$ 与 $T(n+1)$。** 回忆定理 2.2.4，$\pi_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/T(n+1)) \otimes_{\mathrm{BP}\langle n\rangle} \mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$ 在加法意义上等价于 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \cong \mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*[\theta_{n-1}]$ 中的“子代数”$\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*[\theta_{n-1}^p]$。我们现在来说明，这一图景在 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上也有类似结果。首先需要进行一个简单的计算。

**注 4.2.1。** 设 $R$ 是一个交换环，且 $x \in R$ 是一个正则元。那么存在一个 $p$-完备等价 $\mathrm{dR}^*_{R[t]/x/R} \simeq R[t]\langle x'\rangle/x \otimes_{R[t]/x} \Lambda_{R[t]/x}(dt)$ 与 $|x'| = 0$。事实上，这可由以下观察结合下面的 $p$-完备等价得到：$\mathrm{dR}^*_{R[t]/R} \simeq \Lambda_{R[t]}(dt)$,

$\mathrm{dR}^*_{R/x/R} \simeq R\langle x'\rangle/x$。类似地，存在一个等价 $\mathrm{HH}(R[t]/x/R) \simeq R[t][S^1 \times \mathbb{C}P^\infty]/x$。

例 4.2.2。令 $i_{n-1}\colon \mathscr{Z}(v_{n-1}) \hookrightarrow \mathcal{M}_{T(n)}$ 表示由全局截面 $v_{n-1} \in \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_T(n); \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{T(n)}})$ 截出的闭子叠。若 $f\colon X \to \mathcal{M}_T(n)$ 是 $\mathcal{M}_{T(n)}$ 上的一个叠，令 $X^{v_{n-1}=0}$ 表示沿 $i_{n-1}$ 对 $X$ 的拉回，并令 $f\colon X^{v_{n-1}=0} \to \mathscr{Z}(v_{n-1})$ 表示结构态射。则 $i^*_{n-1}\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{T(n)}) = \mathrm{HH}(X^{v_{n-1}=0}/\mathscr{Z}(v_{n-1}))$。在 $X = \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n\rangle_*)/\mathbb{G}_m$ 的情形下，存在一个同构 $X^{v_{n-1}=0} = \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbb{G}_m$。现在，我们将通过计算 $\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)})$ 来建立 $\mathrm{HH}(X^{v_{n-1}=0}/\mathscr{Z}(v_{n-1}))$ 与 $\mathrm{HH}(X^{v_{n-1}=0}/\mathcal{M}_{T(n-1)})$ 之间的联系。

回忆例 4.1.11，其中存在一个 $\mathbb{G}_a$-丛 $\mathcal{M}_{T(n)} \to \mathcal{M}_{T(n-1)}$。注意，$L_{\mathcal{M}_{T(n)}/\mathcal{M}_{T(n-1)}}$ 是由类 $d(t_n)$ 生成的秩为 1 的自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{T(n)}}$-模，并且 $L_{\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n)}}$ 是由类 $\sigma^2(v_{n-1})$ 生成的秩为 1 的自由 $\mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{n-1})}$-模。应用注 4.2.1，我们得到

$$\pi_*\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)}) \cong \mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{n-1})}\langle\sigma^2(v_{n-1})\rangle \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{n-1})}} \Lambda_{\mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{n-1})}}(dt_n). \tag{52}$$

因此我们看到，$\mathrm{HH}(X^{v_{n-1}=0}/\mathcal{M}_{T(n-1)})$ 是 $\mathrm{HH}(X^{v_{n-1}=0}/\mathscr{Z}(v_{n-1}))$ 与 $f^*\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)}) \cong \mathcal{O}_{X^{v_{n-1}=0}}\langle\sigma(v_{n-1})\rangle[dt_n]/(dt_n)^2$ 的张量积的一个子商。现在令 $f$ 为态射 $\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbb{G}_m \to \mathcal{M}_{T(n)}$。$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-2\rangle/T(n-1))$ 的 Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列的第 $E^2$ 页给出如下

$$E^2_{*,*} = \mathrm{BP}\langle n-2\rangle_*\langle\sigma^2 v_j | j \geq n-1\rangle \otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*} \Lambda_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*}(dt_j | j \geq n),$$

而 $E^\infty$-页上的扩张由 $(\sigma^2 v_j)^{p^{n-j}} = \sigma^2 v_n$ 给出。因此，上述讨论表明，$f^*\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)})$ 恰好检测了该 $E^2$-页的“底层部分”，即子代数 $\mathrm{BP}\langle n-2\rangle_*\langle\sigma^2 v_{n-1}\rangle \otimes_{\mathrm{BP}\langle n-2\rangle_*} \Lambda_{\mathrm{BP}\langle n-2\rangle_*}(dt_n)$。因此，前面对 $\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)})$ 的计算，为何 $\pi_*(\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n)) \otimes_{\mathrm{BP}\langle n-1\rangle} \mathrm{BP}\langle n-2\rangle)$ 在加性上等价于 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-2\rangle/T(n-1)) \cong \mathrm{BP}\langle n-2\rangle_*[\theta_{n-2}]$ 的“子代数” $\mathrm{BP}\langle n-2\rangle_*[\theta^p_{n-2}]$ 提供了一种解释。

注 4.2.3. 我们可以进一步扩展例 4.2.2 中的分析。令 $0 \leq j \leq n-1$，并令 $i_{j,\cdots,n-1}\colon \mathscr{Z}(v_{[j,n)}) \hookrightarrow \mathcal{M}_{T(n)}$ 表示由整体截面 $v_j \cdots v_{n-1} \in \mathcal{M}_{T\,n}\ \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{T(n)}}$ $f\ X \to ,, \mathrm{H}^0(\,(\,);\,)$ 切出的 $\mathcal{M}_{T\,n}$ $\mathcal{M}_{T\,n}$ $X^{v_j \cdots v_{n-1}=0}$ $X$ 闭子叠。如果 $:(\,)$ 是 $(\,)$ 上的一个叠，令 $,,$ 表示沿 $i$ 对其作的拉回，并令 $f\colon X^{v_j,\cdots,v_{n-1}=0} \to \mathscr{Z}(v_{[j,n)})$ 表示结构态射。那么，$i^*_{j,\cdots,n-1}$Hochschild 同调 $(X/\mathcal{M}_T(n))$ 等价于 Hochschild 同调 $(X^{v_j,\cdots,v_{n-1}=0}/\mathscr{Z}(v_{[j,n)}))$。在 $X = \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_*)/\mathbb{G}_m$ 的情形下，存在一个同构 $X^{v_j,\cdots,v_{n-1}=0} = \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle_*)/\mathbb{G}_m$。现在，我们可以通过计算 Hochschild 同调 $(\mathscr{Z}(v_{[j,n)})/\mathcal{M}_{T(j)})$，将 Hochschild 同调 $(X^{v_j,\cdots,v_{n-1}=0}/\mathscr{Z}(v_{[j,n)}))$ 与 Hochschild 同调 $(X^{v_j,\cdots,v_{n-1}=0}/\mathcal{M}_T(j))$ 联系起来。

我们声称存在一个同构

$$\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{[j,n)})/\mathcal{M}_{T(j)}) \cong \mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{[j,n)})}\langle\sigma(v_i) | j \leq i \leq n-1\rangle \otimes_{\mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{[j,n)})}} \Lambda_{\mathcal{O}_{\mathscr{Z}(v_{[j,n)})}}(dt_i | j+1 \leq i \leq n)$$

为证明这一点，我们将对 $j$ 使用递降归纳法；基例 $j = n-1$ 已在例 4.2.2 中研究。对于归纳步骤，假设我们已知 $j+1$ 的结果。令 $i_j\colon \mathscr{Z}(v_{[j,n)}) \to \mathscr{Z}(v_{j+1}, \cdots, v_{n-1})$ 表示由 $j$ 切出的闭子叠

则存在同构

$$\begin{aligned}\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{[j,n)})/\mathcal{M}_{T(j+1)}^{v_j=0}) &\cong i_j^*\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{j+1},\cdots,v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(j+1)})\\ &\cong \mathscr{O}_{\mathscr{Z}(v_{[j,n)})}\langle\sigma^2(v_i)|j+1\le i\le n-1\rangle\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{Z}(v_{[j,n)})}}\Lambda_{\mathscr{O}_{\mathscr{Z}(v_{[j,n)})}}(dt_i|j+2\le i\le n)\end{aligned}$$

回忆一下，例 4.2.2 给出了 $\mathrm{HH}(\mathcal{M}_T^{v_j=0}{}_{(j+1)}/\mathcal{M}_{T(j)})$ 与 $\mathscr{O}_{\mathcal{M}_T^{v_j=0}{}_{(j+1)}}\langle\sigma^2(v_j)\rangle\otimes\mathscr{O}_{\mathcal{M}_T^{v_j=0}{}_{(j+1)}}\Lambda_{\mathscr{O}_{\mathcal{M}_T^{v_j=0}{}_{(j+1)}}}(dt_{j+1})$。所需的 $\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{[j,n)})\quad/\mathcal{M}_{T(j)})$

现在只需利用复合映射的传递性序列进行简单计算

$$\mathscr{Z}(v_{[j,n)})\to\mathcal{M}_{T(j+1)}^{v_j=0}\to\mathcal{M}_{T(j)}.$$

令 $X=\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle_*)/\mathrm{G}_m$，并令 $f\colon X\to\mathscr{Z}(v_{[j,n)})$ 为结构映射。那么，上述讨论表明，$\mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle_*)/\mathrm{G}_m/\mathcal{M}_{T(j)})$ 同构于 $f^*\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{[j,n)})/\mathcal{M}_{T(j)})$ 与 $\mathrm{HH}(\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle_*)/\mathrm{G}_m/\mathscr{Z}(v_{[j,n)}))$ 的张量积。这给出了计算 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j))$ 的 Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列的 $E^2$ 页（见注 4.1.5）；并且可以像命题 2.2.14 中那样运行这个谱序列。如果 $\mathrm{BP}\langle j-1\rangle$ 具有 $\mathrm{E}_3$-代数结构，那么在该谱序列的 $E^\infty$ 页上，存在 $\sigma^2(v_i)^p=\sigma^2(v_{i+1})$ 的扩张，模去可分解元。

令 $T(n)/v_{[j,n)}$ 表示 $T(n)/(v_j,\cdots,v_{n-1})$。由于 $\theta_j\in\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j))$ 可由 $\sigma^2(v_j)$ 表示，我们发现 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j))$（加法意义下）等价于 $T(n)[\theta_j]/(v_{[j,n)},\theta_j^{p^{n-j}})$。（关于这一观察的更拓扑学视角，参见注 4.2.5。）这一讨论从代数视角说明了为何 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{[j,n)}$（加法意义下）等价于由 $\theta_j^{p^{n-j}}$ 生成的 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j))$ 的“子代数”。

注 4.2.4。在拓扑学中，若假设 [18]猜想 2.1.9，则例 4.2.2 可如下展开。令 $n\ge 1$。我们首先观察到，$T(n)/v_{n-1}$ 是某个 $\mathrm{E}_1$ 映射 $\mu\colon\Omega J_{p-1}(S^{2p^{n-1}})\to\mathrm{BGL}_1(T(n-1))$ 的 Thom 谱；特别地，$T(n)/v_{n-1}$ 具有 $\mathrm{E}_1$-环的结构。为此，我们先按如下方式定义映射 $\mu$。存在一个映射 $S^{2p^{n-1}}\to B^2\mathrm{GL}_1(X(p^n-1))$，它检测类 $v_{n-1}\in\pi_{2p^{n-1}-2}X(p^n-1)$；由于我们是在 $p$-局部化下工作，这个映射自然延拓为映射 $J_{p-1}(S^{2p^{n-1}})\to B^2\mathrm{GL}_1(X(p^n-1))$。因此，我们得到一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega J_{p-1}(S^{2p^{n-1}})\to\mathrm{BGL}_1(X(p^n-1))$。根据猜想 2.1.9，投影 $X(p^n-1)\to T(n-1)$ 是 $\mathrm{E}_2$-环之间的映射，因此诱导出一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\mathrm{BGL}_1(X(p^n-1))\to\mathrm{BGL}_1(T(n-1))$。与 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega J_{p-1}(S^{2p^{n-1}})\to\mathrm{BGL}_1(X(p^n-1))$ 复合后，便得到所需的映射 $\mu$。利用下文的 (54)，可以直接证明 $\mu$ 的 Thom 谱可识别为 $T(n)/v_{n-1}$。由此讨论可知，存在一个等价

$$\mathrm{THH}(T(n)/v_{n-1}/T(n-1))\simeq T(n)[J_{p-1}(S^{2p^{n-1}})]/v_{n-1}.$$

此外，在定理 2.2.4(a) 的等价 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-2\rangle/T(n-1))\simeq\mathrm{BP}\langle n-2\rangle[\Omega S^{2p^{n-1}+1}]$ 下，由映射 $T(n)/v_{n-1}\to\mathrm{BP}\langle n-2\rangle$ 诱导的映射 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{n-1}/T(n-1))\to\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-2\rangle/T(n-1))$，由 $J_{p-1}(S^{2p^{n-1}})\to\Omega S^{2p^{n-1}+1}$ 的骨架包含给出。投影 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-2\rangle/T(n-1))\to$

[18]下面的讨论有一个无条件的变体，即将 $T(n)$ 替换为 $X(p^{n+1}-1)$。不过，这样做的代价是需要将空间 $\Delta_n$ 纳入其中。

$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{n-1}$ 可识别为 James-Hopf 映射 $\Omega S^{2p^{n-1}+1} \to \Omega S^{2p^n+1}$ 在 $\mathrm{BP}\langle n-2\rangle$- 链上诱导的作用。因此，EHP 序列

$$J_{p-1}(S^{2p^{n-1}}) \to \Omega S^{2p^{n-1}+1} \to \Omega S^{2p^n+1}$$

表明 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{n-1}$ 在加法意义下等价于 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-2\rangle/T(n-1))$ 中由 $\theta_{n-1}^p$ 生成的"子代数"。上述 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{n-1}/T(n-1))$ 的计算，是例 4.2.2 中 $\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)})$ 计算的拓扑实现。事实上，
Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列（见注 4.1.5）如下展开：

$$E^2_{*,*} = \pi_*\mathrm{HH}(\mathscr{Z}(v_{n-1})/\mathcal{M}_{T(n-1)}) \Rightarrow \pi_*\mathrm{gr}^\bullet_{\mathrm{ev}}\mathrm{THH}(T(n)/v_{n-1}/T(n-1)), \tag{53}$$

其 $E^2$ 页由式 (52) 给出。同样，可以在 Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列中建立 Bökstedt 微分 (6) 的类似结果，从而为上述 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{n-1}/T(n-1))$ 的计算提供另一种方法。

**注 4.2.5.** 继续假设猜想 2.1.9 成立，并令 $0 \le j \le n-1$。回忆，$T(n)/v_{[j,n)}$ 表示 $T(n)/(v_j, \cdots, v_{n-1})$。回忆，

$$\mathrm{H}_*(T(n)/v_{[j,n)}; \mathbf{F}_p) = \begin{cases} \mathbf{F}_2[\zeta_1^2, \cdots, \zeta_j^2, \zeta_{j+1}, \cdots, \zeta_n] & p = 2, \\ \mathbf{F}_p[\zeta_1, \cdots, \zeta_n] \otimes \Lambda_{\mathbf{F}_p}(\tau_j, \cdots, \tau_{n-1}) & p > 2. \end{cases} \tag{54}$$

自然会问，注 4.2.4 中的讨论是否可以扩展为对 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j))$ 的描述，从而与注 4.2.3 相呼应。这个问题定义不清，因为尚不清楚 $T(n)/v_{[j,n)}$ 是否具有 $\mathrm{E}_1$-代数结构。尽管如此，若 $T(n)/v_{[j,n)}$ 确实具有 $\mathrm{E}_1$-$T(j)$-代数结构，则类似于定理 2.2.4 的分析表明

$$\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j)) \simeq T(n)[J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j})]/v_{[j,n)}.$$

这是注 4.2.3 中计算的拓扑类比。在定理 2.2.4(a) 的等价 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j)) \simeq \mathrm{BP}\langle j-1\rangle[\Omega S^{2p^j+1}]$ 下，由映射 $T(n)/v_{[j,n)} \to \mathrm{BP}\langle j-1\rangle$ 诱导的映射 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j))$ 是由 $J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \Omega S^{2p^j+1}$ 的骨架包含给出的。投影

$$\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{[j,n)}$$

可以认作 James-Hopf 映射 $\Omega S^{2p^j+1} \to \Omega S^{2p^n+1}$ 对 $\mathrm{BP}\langle j-1\rangle$-链的作用。因此，EHP 序列

$$J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \Omega S^{2p^j+1} \to \Omega S^{2p^n+1}$$

表明，$\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{[j,n)}$ 在加法意义下恰好等价于由 $\theta_j^{p^{n-j}}$ 生成的 $\pi_*\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j))$ 的"子代数"。

由于 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j)) \simeq T(n)[J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j})]/v_{[j,n)}$，人们预期 $T(n)/v_{[j,n)}$ 在 $T(j)$ 上具有一种 $\mathrm{E}_1$-胞腔结构，该结构由 $J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j})$ 的胞腔结构描述。虽然我们不知道如何无条件地证明这一点，但若进一步假设 [**Dev23a**、猜想 D 和 E]，则不难证明。在此情形下，[**Dev23a**、推论 B] 表明，存在一个映射 $f : \Omega^2 S^{2p^j+1} \to \mathrm{BGL}_1(T(j))$，它在源的底胞腔上检测 $v_j \in \pi_{2p^j-2}T(j)$，使得其 Thom 谱

$f$ 的 Thom 谱是 $\mathrm{BP}\langle j-1\rangle$ 的一种形式。令[19] $f_{n,j}\colon \Omega J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \mathrm{BGL}_1(T(j))$ 表示 $f$ 与 $\mathbb{E}_1$-映射 $\Omega J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \Omega^2 S^{2p^j+1}$ 的复合。则 $f_{n,j}$ 的 Thom 谱等价于 $T(n)/v_{[j,n)}$，作为一个 $T(j)$-模。对于 $T(n)/v_{[j,n)}$ 而言，这还不完全算是一种“$\mathbb{E}_1$-胞腔结构”，因为 $f_{n,j}$ 不是 $\mathbb{E}_1$-映射；尽管如此，这种构造 $T(n)/v_{[j,n)}$ 足以计算 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j))$。

**例 4.2.6.** 如果 $R$ 是一个 $\mathbb{E}_2$-代数，同时也是一个 $\mathbb{E}_1$-$T(n)$-代数，那么可以将上述讨论粗略地理解为：这个方块

(55)
$$\begin{array}{ccc} R[J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j})] \simeq R\otimes_{T(n)} \mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j)) & \longrightarrow & \mathrm{THH}(R/v_{[j,n)}/T(j)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & \mathrm{THH}(R/T(n))/v_{[j,n)} \end{array}$$

表明右上角是“左上角与右下角的张量积”。注意，左上角的同伦是 $R[\theta_j]/\theta_j^{p^{n-j}}$。应将右下角视为 $\mathrm{THH}(R/v_{[j,n)}/T(n)/v_{[j,n)})$，尽管很难将这一图景精确化（因为 $T(n)/v_{[j,n)}$ 不具有 $\mathbb{E}_2$-代数结构）。

例如，如果 $R=\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$，那么方块 (55) 表明这个方块

(56)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BP}\langle n-1\rangle[J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j})] & \longrightarrow & \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j)) \simeq \mathrm{BP}\langle j-1\rangle[\Omega S^{2p^j+1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{[j,n)} \simeq \mathrm{BP}\langle j-1\rangle[\Omega S^{2p^n+1}] \end{array}$$

表明右上角是左上角与右下角的张量积。这本质上是因为映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j)) \to \mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))/v_{[j,n)}$ 将 $\theta_j^m \mapsto 0$ 映到 $p^{n-j}|m$，除非 $\theta_j^m \mapsto$，此时 $\theta_n^{m/p^{n-j}}$。因此，这解释了定理 2.2.4(a) 所揭示的 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle/T(n))$ 与 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle/T(j))$ 之间的相似性。

**备注 4.2.7**。如前所述，上述涉及的对象缺乏结构，因此很难用上述图景来理解 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$ 上的乘法结构；不过，它确实指出了一种着手方案。具体而言，可以考虑自然映射 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)/v_{[0,n)} \to \mathrm{THH}(\mathbb{F}_p)$，以尝试理解 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)/v_{[0,n)}$ 上的偶过滤。容易看出，这个映射是一个有效覆盖，因此，与 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)/v_{[0,n)}$ 上的偶过滤相关联的叠，是与 $\mathrm{THH}(\mathbb{F}_p)$ 上的偶过滤相关联的概形除以某个群概形所得的商。与 $\mathrm{THH}(\mathbb{F}_p)$ 上的偶过滤相关联的概形恰好是 $\mathbb{G}_a$，上述讨论表明，与 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)/v_{[0,n)}$ 上的偶过滤相关联的叠同构

[19] 在注 4.2.4 中，我们描述了映射 $f_{n,\,n-1}$ 而未假设 [**Dev23a**、猜想 D 和 E]。一般而言，若 $j<n-1$，则无法以类似方式描述 $f_{n,\,j}$：尽管存在一个映射 $S^{2p^j} \to B^2\mathrm{GL}_1(T(j))$，可以检测 $v_j \in \pi_{2p^j-2}T(j)$，但若 $n-j>1$，则存在沿 $S^{2p^j} \to J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j})$ 延拓的 $p$-局部障碍。这些障碍可视为作用在 $v_j$ 上的 $\mathbb{E}_2$-Browder 括号；[**Dev23a**、猜想 E] 意味着这些 Browder 括号可以相容地平凡化。

到 $\mathrm{G}_a/W[F^n]$；Lee 在 [**Lee22**] 的工作也暗示了这一点。我们希望在未来与 Jeremy Hahn 和 Arpon Raksit 合作研究这一问题。为此，我们在附录 C 中为今后研究这个叠奠定了一些基础，并研究了 $W[F^n]$ 的一些基本性质。

**注 4.2.8.** 注 4.2.5 中对 $\mathrm{THH}(T(n)/v_{[j,n)}/T(j))$ 的计算表明，情况还不止于此：如果 $n \geq k-1$，那么 $\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 作为 $\mathrm{E}_1$-$X(p^k)$-代数的结构（即 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n\rangle/T(k))$）与 $\mathrm{BP}\langle n-k\rangle$ 作为球谱上的 $\mathrm{E}_1$-代数的结构（即 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-k\rangle)$）相映照。

注 4.2.9. 请注意，映射 $f_n$,0 的 Thom 谱已在 [MRS01]，中得到研究，并记作 $y(n)$。正如 $y(n)$ 描述了 $y(\infty) = \mathrm{F}_p$ 的一个由 $\mathrm{E}_1$-代数构成的滤过，谱 $T(n)/v_{[j,n)}$ 描述了 $\mathrm{BP}\langle j-1\rangle$ 的一个滤过。例如，不难证明，对于 $j \leq k \leq n-1$，谱 $T(n)/v_{[j,n)}$ 是 $\mathrm{Tel}(k)$-无效的。因此，若 $T(n)/v_{[j,n)}$ 具有 $\mathrm{E}_1$-环结构，则与 [LMMT20，推论 4.15] 中相同的论证表明，映射 $K(T(n)/v_{[j,n)}) \to K(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle)$ 对于 $j \leq k \leq n-1$ 是 $\mathrm{Tel}(k)$-等价。由于 $K(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle)$ 对于 $k \geq j+1$ 在 $\mathrm{Tel}(k)$-局部意义下可缩，唯一有趣的情形是 $k = j$；在这种情况下，我们得到这些映射

$$K(T(j+1)/v_j) \to K(T(j+2)/(v_j, v_{j+1})) \to \cdots \to K(\mathrm{BP}\langle j-1\rangle)$$

都是 $\mathrm{Tel}(j)$-等价。

注 4.2.10. 由于注 4.2.5 表明 $T(n)/v_{[j,n)}$ 与 $T(j)$ 密切相关，因此自然会想到，$T(n)/v_{[j,n)}$ 与 $T(n+k)/v_{[j,n+k)}$ 之间是否存在某种关系，并且这种关系与它们和 $T(j)$ 的关系相容。根据注 4.2.4，$T(n+k)/v_{[n,n+k)}$ 是映射 $\Omega J_{p^k-1}(S^{2p^n}) \to \mathrm{BGL}_1(T(n))$ 的 Thom 谱。因此，若 $T(n)/v_{[j,n)}$ 具有 $\mathrm{E}_1$-环结构，则 $T(n+k)/v_{[j,n+k)}$ 是映射 $\Omega J_{p^k-1}(S^{2p^n}) \to \mathrm{BGL}_1(T(n)/v_{[j,n)})$ 的 Thom 谱。如注 4.2.5 所述，若进一步假设 [Dev23a，猜想 D 和 E]，，则谱 $T(n)/v_{[j,n)}$（分别为 $T(n+k)/v_{[j,n+k)}$）是映射 $\Omega J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \mathrm{BGL}_1(T(j))$（分别为 $\Omega J_{p^{n+k-j}-1}(S^{2p^j}) \to \mathrm{BGL}_1(T(j))$）的 Thom 谱。

$T(n+k)/v_{[j,n+k)}$ 的两种呈现方式（分别作为 $T(n)/v_{[j,n)}$ 上和 $T(j)$ 上的 Thom 谱）之间的关系，可由不稳定同伦论中的以下观察来解释：存在一个纤维化[20]

$$J_{p^m-1}(S^{2d}) \to J_{p^{m+k}-1}(S^{2d}) \xrightarrow{H} J_{p^k-1}(S^{2dp^m}). \tag{57}$$

事实上，在 $m = n-j$ 和 $d = p^j$ 的情况下应用 (57)，我们得到一个 $\mathrm{E}_1$-空间的纤维化：

$$\Omega J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \Omega J_{p^{n+k-j}-1}(S^{2p^j}) \xrightarrow{H} \Omega J_{p^k-1}(S^{2p^n}).$$

$f_{n+k,j}\colon \Omega J_{p^{n+k-j}-1}(S^{2p^j}) \to \mathrm{BGL}_1(T(j))$ 与映射 $\Omega J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \Omega J_{p^{n+k-j}-1}(S^{2p^j})$ 的复合映射为 $f_{n,j}\colon \Omega J_{p^{n-j}-1}(S^{2p^j}) \to \mathrm{BGL}_1(T(j))$。因此，[**Dev23a**，命题 2.1.6] 蕴含存在一个映射 $f_{n+k,j}\colon \Omega J_{p^k-1}(S^{2p^n}) \to \mathrm{BGL}_1(T(n)/v_{[j,n)})$

[20]为构造纤维化 (57)，回忆存在一个 EHP 序列

$$J_{p^m-1}(S^{2d}) \to \Omega S^{2d+1} \xrightarrow{H} \Omega S^{2dp^m+1}.$$

根据维数考虑，典范映射 $J_{p^{m+k}-1}(S^{2d}) \to \Omega S^{2d+1}$ 可经由 $J_{p^{m+k}-1}(S^{2d}) \to J_{p^k-1}(S^{2dp^m})$ $\times_{\Omega S^{2dp^m+1}} \Omega S^{2d+1}$ 分解，并且很容易验证这是一个等价。这就推出了所需的纤维序列 (57)。

其 Thom 谱为 $T(n+k)/v_{[j,n+k)}$。这就是 $T(n+k)/v_{[j,n+k)}$ 的各种表示之间所需的关系。

**注 4.2.11.** 特别要注意的是，前面的讨论意味着存在映射 $q_k : \Omega J_{p^k-1}(S^{2p^n}) \to \mathrm{BGL}_1(y(n))$，使得复合映射 $S^{2p^n-1} \to \Omega J_{p^k-1}(S^{2p^n}) \to \mathrm{BGL}_1(y(n))$ 能检测 $v_n \in \pi_{2p^n-2}y(n)$，并且该映射的 Thom 谱为 $y(n+k)$。取 $k \to \infty$ 后，这意味着存在映射 $q_\infty : \Omega^2 S^{2p^n+1} \to \mathrm{BGL}_1(y(n))$，其 Thom 谱为 $y(\infty) = \mathrm{F}_p$。映射$q_\infty$ 与来自 [**MRS01** 第4节.1] 的 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega^3 S^{2p^n+1}_+ \to y(n)$ 互为伴随；该映射在源的底胞腔上检测 $v_n$。

## 附录 A. 实 K 理论谱与 tmf 的类似结果

本文正文中的许多结果都可以推广到实 K 理论谱 ko 和 tmf 的情形。本节将陈述这些结果；由于证明基本相同，除非情形有实质性差异，否则我们不再给出论证。为简便起见，我们将专门讨论 $p = 2$ 的情形。定理 2.2.4 的一个主要观察是，$\mathrm{BP}\langle n\rangle$ 作为 $X(p^n)$（或者说，$T(n)$）上的 $\mathrm{E}_1$-代数，其结构与整数环 $\mathbb{Z}_p$ 作为 $\mathrm{E}_1$-代数在 $S^0$ 上的结构相呼应。对于实 K 理论谱 ko 和 tmf，也存在 $X(p^n)$ 的类似物，我们在 [**Dev23a**] 中研究过它们。

回顾 A.1. 令 $A$ 表示带有 $\nu$ 的一个零伦的自由 $\mathrm{E}_1$-代数 $S/\!\!/\nu$，即 Thom 谱，其对应的 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega S^5 \to \mathrm{BGL}_1(S)$ 在底胞腔[21]上检测 $\nu \in \pi_3(S)$。此谱具有如下性质：$\mathrm{H}_*(A; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\zeta_1^4]$（事实上，$\mathrm{BP}_*(A) \cong \mathrm{BP}_*[{}^{\eta_R}(v_1^2)_4 - v_1^2] \cong \mathrm{BP}_*[t_1^2 + v_1 t_1]$）。存在一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $i\colon A \to \mathrm{ko}$，使得在同构 $\mathrm{H}_*(\mathrm{ko}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3, \cdots]$ 下，映射 $i$ 对应于 $\mathbb{F}_2[\zeta_1^4]$ 的包含映射。特别地，映射 $A \to \mathrm{ko}$ 在维数 $\leq 4$ 上是一个等价。事实上，还存在一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $A \to \mathrm{MSpin}$，它由一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega S^5 \to \mathrm{BSpin}$ 诱导。另有一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $A \to X(2) = T(1)$，使得 $T(1) \simeq A \otimes C\eta$。注意，$\mathrm{H}_*(\mathrm{ko}; \mathbb{F}_2)$ 的“$Q_0$-Margolis 同调”（即将 $\mathrm{Sq}^1$ 视为作用于 $\mathrm{H}_*(\mathrm{ko}; \mathbb{F}_2)$ 上的微分时所得的同调）恰为 $\mathrm{H}_*(A; \mathbb{F}_2)$。

类似地，令 $B$ 表示 Dev23a 的定义 3.2 中的 $\mathrm{E}_1$-代数。[17][22]，于是存在一个 $\mathrm{E}_1$-空间 $N$，使得 $B$ 是某个 $\mathrm{E}_1$-映射 $N \to \mathrm{BString}$ 的 Thom 谱。此处我们不回顾 $N$ 的构造；只说明 $B$ 是由 $\mathrm{E}_1$-商 $S/\!\!/\sigma$ 得到的，具体做法是进一步对 $\pi_{11}(S/\!\!/\sigma)$ 中的一个类取“$\mathrm{E}_1$-商”，该类由 $\nu\sigma \in \pi_{10}(S)$ 的一个零伦构造而成。这个谱具有如下性质：$\mathrm{H}_*(B; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4]$（事实上，$\mathrm{BP}_*(B) \cong \mathrm{BP}_*[b_4, y_6]$，其中 $b_4 \equiv t_1^4$ 和 $y_6 \equiv t_2^2$ 模掉 $(2, v_1, \cdots)$）[23]。存在一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $i\colon B \to \mathrm{tmf}$，使得在同构 $\mathrm{H}_*(\mathrm{tmf}; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4, \cdots]$ 下，映射 $i$ 对应于 $\mathbb{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4]$ 的包含映射。特别地，映射 $B \to \mathrm{tmf}$ 在维数 $\leq 12$ 上是一个等价。事实上还存在一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $B \to \mathrm{MString}$。另有一个 $\mathrm{E}_1$- 映射 $B \to T(2)$，使得 $T(2) \simeq B \otimes DA_1$，其中 $DA_1$ 是一个 8 胞腔复形，其模 2 上同调同构于由 $\mathrm{Sq}^2$ 和 $\mathrm{Sq}^4$ 生成的 Steenrod 代数子代数。我们注意到，$\mathrm{H}_*(\mathrm{tmf}; \mathbb{F}_2)$ 的“$Q_0$-Margolis 同调”（即将 $\mathrm{Sq}^1$ 视为作用于 $\mathrm{H}_*(\mathrm{tmf}; \mathbb{F}_2)$ 上的微分时所得的同调）恰好是 $\mathrm{H}_*(B; \mathbb{F}_2)$。

以下内容已在 [**Dev23a**], 中隐含地陈述，但我们在此明确说明：

---

[21]谱 $A$ 此前已由 Mahowald 及其合作者在 [**Mah79, DM81, Mah81b, Mah81a, Mah82, MU77**], 中进行研究，其中通常将其记作 $X_{5\circ}$ [22]环 $_1 B$ 曾以 $\overline{X}$ 之名在 [**HM02**]中得到简要研究。[23]作为说明，我们指出，如果 $p = 2$，那么 $b_4$ 可取为 $\sigma = \alpha_{4/4}$的以下余边代表元，其中 $v_i$是 Hazewinkel 生成元：

$$\begin{aligned} b_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_R(v_1^4) - v_1^4}{8} - (\eta_R(v_1 v_2) - v_1 v_2)\right) \\ &= 5t_1^4 + 9t_1^3 v_1 + 7t_1^2 v_1^2 - 2t_1 t_2 + 2t_1 v_1^3 - t_1 v_2 - t_2 v_1. \end{aligned}$$

Here, 我们使用了公式

$$\eta_R(v_2) = v_2 - 5v_1 t_1^2 - 3v_1^2 t_1 + 2t_2 - 4t_1^3.$$

**猜想 A.2**。 $A$ 和 $B$ 上的 $\mathbf{E}_1$-代数结构可以扩张为 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-代数结构，使得映射 $A \to X(2)$、 $B \to X(4)^{(2)}$、 $A \to$ 实 K 理论谱 和$B \to \mathrm{tmf}$ 具有 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-映射的结构。

类似于命题 2.2.14 的计算表明:

**命题 A.3.** 假设猜想 *A.2* 成立。存在同构

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{ko}/A);\mathbf{F}_2) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{ko};\mathbf{F}_2)[\sigma(\zeta_3)] \otimes_{\mathbf{F}_2} \Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma(\zeta_2^2)),$$
$$\mathrm{H}_*(\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}/B);\mathbf{F}_2) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{tmf};\mathbf{F}_2)[\sigma(\zeta_4)] \otimes_{\mathbf{F}_2} \Lambda_{\mathbf{F}_2}(\sigma(\zeta_3^2)).$$

其中， $|\sigma(\zeta_3)| = 8$、 $|\sigma(\zeta_2^2)| = 7$、 $|\sigma(\zeta_4)| = 16$ 和 $|\sigma(\zeta_3^2)| = 15$。

按照定理 2.2.4(b)，利用 $\pi_*$THH(实 K 理论谱$/A$) 和 $\pi_*$THH(tmf$/B$) 的 Adams谱序列（并利用实 K 理论谱和 tmf 的线性），可得:

**定理 A.4.** 假设猜想 *A.2* 成立。经2-完备化后，存在等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ko}/A) \simeq \mathrm{ko} \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{8j-1}\mathrm{ko}/2j,$$
$$\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}/B) \simeq \mathrm{tmf} \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{16j-1}\mathrm{tmf}/2j.$$

**注记 A.5.** 由于 ko$\otimes C\eta \simeq$ku，定理 A.4 蕴含 THH(ko$/A$) $\otimes C\eta \simeq$THH(ku$/T($1)$)$。相关地，存在一个 $\mathrm{E}_1$-$T$(1)-代数的等价 ko$\otimes T$(1) $\simeq$ku$[\Omega S^5]$，这意味着

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ko}) \otimes T(1) \simeq \mathrm{THH}(\mathrm{ko} \otimes T(1)/T(1)) \simeq \mathrm{ku}[S^5] \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{8j-1}\mathrm{ku}[S^5]/2j.$$

沿着类似思路，定理 A.4 蕴含 THH(tmf$/B$)$\otimes DA_1 \simeq$ THH(BP$\langle 2\rangle/T$(2))。此外还存在一个 2-局部等价 tmf $\otimes T$(2) $\simeq$BP$\langle 2\rangle[N]$，它是 $\mathrm{E}_1$-$T$(2)-代数，因此

$$\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}) \otimes T(2) \simeq \mathrm{BP}\langle 2\rangle[BN] \oplus \bigoplus_{j\geq 1} \Sigma^{16j-1}\mathrm{BP}\langle 2\rangle[BN]/2j.$$

注意，BP$\langle 2\rangle[N] \simeq$BP$\langle 2\rangle[\Omega S^9 \times \Omega S^{13}]$，因此 $\pi_*$(tmf$\otimes T$(2)) $\cong \mathrm{Z}_{(2)}[v_1, v_2, x_8, y_{12}]$，其中 $|v_1| = 2$、 $|v_2| = 6$、 $|x_8| = 8$ 和 $|y_{12}| = 12$。这为通过基于 $T$(1)（分别基于 $T$(2)）的 Adams-Novikov 谱序列计算 THH(ko)（分别计算 THH(tmf)）提供了一种可能的方法。描述此谱序列，实质上等价于计算 THH(ko$/A$) 的拓扑 Sen 算子的类比对象，其构造将在下文的构造 A.9 中介绍。

**注记 A.6**。 回忆图 1 中，实 K 理论谱 ko 在 $A$ 上的结构与 tmf 在 $B$ 上的结构相呼应，而后者又与 BP$\langle n\rangle$ 在 $T$(n) 上的结构相呼应；换言之，定理 A.4 的计算沿着图 1 中的对角线 $(n, n)$ 进行。自然会想知道，是否存在一个 $\mathrm{E}_1$-环 $A$，配备一个 $\mathrm{E}_1$ 映射 $A \to A$ 和一个到实 K 理论谱 ko 的 $\mathrm{E}_1$ 映射 $A \to$，使得 ko 在 $A$ 上的结构与 BP$\langle n-1\rangle$ 在 $T$(n) 上的结构相呼应。（这就是图 1 中的“非对角线”$(n, n-1)$。）只有当 $p = 2$ 时，这个问题才有意义，因为若 $p > 2$，ko$^{(p)}$ 会分裂为 BP$\langle 1\rangle$ 的偶数次移位的直和。在下面的讨论中，我们将局部化于 2。考察 $p = 2$ 时证明定理 A.4 的论证，可知 $\widetilde{A}$ 的模 2 同调必须是 $\mathrm{H}_*(\widetilde{A};\mathrm{F}_2) \cong \mathrm{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2]$。

如果按如下方式构造 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-结构，那么一个零伦确定的类 $\sigma_1 \in \pi_5(A)$（参见 [**Dev23a**]，注

3.2.17]）定义了一个映射 $S^6 \to \mathrm{BGL}_1(A)$。由于我们关于 $A$ 的假设，该映射可延拓为一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega S^7 \to \mathrm{BGL}_1(A)$。所需的 $\mathrm{E}_1$-$A$-代数 $\widetilde{A}$ 可定义为此映射的 Thom 谱。（根据 [**Dev23a**，注 5.1.5]，不应期待 $A$ 能够自然地构造为球谱之上的 Thom 谱。）注意到 $A \otimes C\eta \simeq T(2)$。

同定理 2.2.4(a) 的论证表明：

**命题A.7**。如果 $A$ 和 $\widetilde{A}$ 都具有 $\mathbf{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环的结构，并且 实 K 理论谱 具有 $\mathbf{E}_1$-$A$-代数的结构，那么存在一个 2-完备等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ko}/\widetilde{A}) \simeq \mathrm{ko}[\Omega S^9],$$

其中，$\pi_8\mathrm{THH}(\mathrm{ko}/\widetilde{A})$ 中的生成元为 $\sigma^2(v_2)$。此外，

$$\mathrm{H}^c_*(\mathrm{TP}(\mathrm{ko}/\widetilde{A}); \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2[\zeta_1^4, \zeta_2^2, \zeta_3^2, \zeta_4, \cdots](\!(\hbar)\!). \tag{58}$$

**注A.8**。类似地，如果 $B$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环的结构，则 [**Dev23a** 的注 3.2 中的类 $\sigma_2 \in \pi_{13}(B)$24]定义了一个映射 $S^{14} \to \mathrm{BGL}_1(B)$。由于我们对 $B$的假设，该映射可扩张为一个 $\mathrm{E}_1$-映射 $\Omega S^{15} \to \mathrm{BGL}_1(B)$。定义 $\widetilde{B}$为该映射的 Thom 谱，从而 $\mathrm{H}_*(\widetilde{B}; \mathrm{F}_2) \cong \mathrm{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2]$。注意 $B \otimes DA_1 \simeq T(3)$。

$B$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环的结构，而 tmf 具有 $\mathrm{E}_1$-$B$-代数的结构，因此与定理 2.2.4(a) 中相同的论证表明，存在一个 2-完备等价

$$\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}/\widetilde{B}) \simeq \mathrm{tmf}[\Omega S^{17}],$$

$\pi_{16}\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}/\widetilde{B})$ 中的生成元为 $\sigma^2(v_3)$。此外，

$$\mathrm{H}^c_*(\mathrm{TP}(\mathrm{tmf}/\widetilde{B}); \mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2[\zeta_1^8, \zeta_2^4, \zeta_3^2, \zeta_4^2, \zeta_5, \cdots](\!(\hbar)\!). \tag{59}$$

**构造 A.9**（相对于 $A$ 的 THH 拓扑 Sen 算子）。根据 [**BCS10**，定理 1]，$\mathrm{THH}(A)$ 等价于以下复合映射的 Thom 谱

$$\mathscr{L}S^5 \xrightarrow{\mathscr{L}\nu} \mathscr{L}B^2\mathrm{GL}_1(S) \simeq B^2\mathrm{GL}_1(S) \times \mathrm{BGL}_1(S) \xrightarrow{\mathrm{id}\times\eta} \mathrm{BGL}_1(S).$$

存在一个非分裂纤维序列

$$\Omega S^5 \to \mathscr{L}S^5 \to S^5, \tag{60}$$

上述复合映射沿映射 $\Omega S^5 \to \mathscr{L}S^5$ 的限制是映射 $\Omega S^5 \to \mathrm{BGL}_1(S)$，它定义了 $A$。由纤维序列 (60) 可知，$\mathrm{THH}(A)$ 是映射 $S^5 \to \mathrm{BGL}_1(A)$ 的 Thom 谱，该映射检测到类 $x \in \pi_4(A) \cong \pi_4(\mathrm{ko})$。特别地，$\mathrm{THH}(A)$ 是一个具有两个胞腔的 $A$-模。现在假设猜想 A.2 成立；那么 [$\mathbf{DHL}^+\mathbf{23}$，推论 2.8] 给出一个分裂 $\mathrm{THH}(A) \to A$，这意味着类 $x \in \pi_4(A)$ 必须是平凡的。换言之，$\mathrm{THH}(A) \simeq A[S^5]$。如果 $\mathscr{C}$ 是一个 $A$-线性 $\infty$-范畴，这意味着存在一个余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/A) \xrightarrow{\Theta'} \Sigma^6\mathrm{THH}(\mathscr{C}/A). \tag{61}$$

人们应当能够在 $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}_{\mathrm{ko}}$ 的情形下，利用 (61) 和定理 A.4 的计算，从 [**AHL 10**] 中恢复 $\mathrm{THH}(\mathrm{ko})$ 的计算。类似于

注 2.2.5、定理 A.4 和 (61) 表明

$$\mathrm{THH}(\mathrm{ko}/A)/2 \simeq \mathrm{ko}[S^7 \times \Omega S^9]/2,$$
$$\mathrm{THH}(\mathrm{ko}) \otimes_{\mathrm{ko}} \mathbf{F}_2 \simeq \mathbf{F}_2[S^5 \times S^7 \times \Omega S^9].$$

后者已由 Angeltveit-Rognes 在 [**AR05** 定理 6.2] 中证明。

**注 A.10.** 回忆 [**MR99** 推论 9.3]，Mahowald-Rezk 对偶给出了等价 $W$实 K 理论谱 $\simeq \Sigma^6$实 K 理论谱（分别为 $W\mathrm{BP}\langle 1\rangle \simeq \Sigma^{2p}\mathrm{BP}\langle 1\rangle$）；此等价中的 6（分别为 $2p$）移位，出于与（61）（分别为带有 $n=1$ 的（16））相同的原因：两者都对应于类 $\sigma^2(t_1^2)$（分别为 $\sigma^2(t_1)$）。我们希望在未来的工作中进一步探讨这一点。

**注 A.11.** 对于 $B$，也存在拓扑 Sen 算子的一个类似物。为描述它，注意到利用与构造 A.9 类似的论证可得 $\mathrm{THH}(B/\!\!/S\sigma) \simeq B[S^{13}]$，且 $\mathrm{THH}(S/\!\!/\sigma) \simeq (S/\!\!/\sigma)[S^9]$。这意味着，若 $\mathscr{C}$ 是一个 $B$-线性 $\infty$-范畴，则存在余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/\!\!/S\sigma) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/B) \xrightarrow{\Theta_B} \Sigma^{14}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/B),$$
$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/\!\!/S\sigma) \xrightarrow{\Theta'_B} \Sigma^{10}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/\!\!/S\sigma).$$

然而，在几乎所有非平凡的例子中，描述这些余纤维序列都要复杂得多，因此我们不再进一步讨论。尽管如此，仍可利用定理 A.4 证明以下与注 2.2.5 类似的等价：

$$\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}/B)/2 \simeq \mathrm{tmf}[S^{15} \times \Omega S^{17}]/2,$$
$$\mathrm{THH}(\mathrm{tmf}) \otimes_{\mathrm{tmf}} \mathbf{F}_2 \simeq \mathbf{F}_2[S^9 \times S^{13} \times S^{15} \times \Omega S^{17}];$$

注意 $\mathrm{F}_2[S^9 \times S^{13}] \simeq \mathrm{F}_2[BN]$。后者已由 Angeltveit-Rognes 在 [**AR05** 的定理 6.2] 中证明。

假设猜想 A.2，并令 $p=2$。那么存在一个 $\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 上的叠之间的映射 $\mathcal{M}_{T(1)} \to \mathcal{M}_A$，它将 $\mathcal{M}_{T(1)}$ 表示为 $\mathcal{M}_A$ 的二重平坦有限表示覆盖。回忆，$\mathcal{M}_{T(1)}$ 同构于分次形式群的模叠，其中配备了一个精确到 $\leq 2$ 阶的坐标（等价地，对于 2-典型形式群，精确到 $\leq 3$ 阶）。类似地，我们有：

**命题 A.12.** 叠 $\mathcal{M}_A$ 同构于分次形式群的模叠，其中配备了一个精确到 $\leq 5$ 阶的偶坐标。

证明。回忆，有一个纤维序列

$$\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) \cong S^2 \to \mathrm{BU}(1) \simeq \mathbf{C}P^\infty \to \mathrm{BSU}(2) \simeq \mathbf{H}P^\infty.$$

设 $n \geq 1$。存在一个同伦等价 $\mathrm{H}P^n \times_{\mathbf{H}P^\infty} \mathrm{C}P^\infty \simeq \mathrm{C}P^{2n+1}$（因为 $S^{4n+3}/\mathrm{SU}(2) = \mathrm{H}P^n$ 且 $S^{4n+3}/\mathrm{U}(1) = \mathrm{C}P^{2n+1}$），由此得到“扭子纤维化”，即纤维序列

$$S^2 \to \mathbf{C}P^{2n+1} \to \mathbf{H}P^n. \tag{62}$$

映射 $\mathrm{C}P^{2n+1} \to \mathrm{H}P^n$ 在坐标中由映射 $[z_1 : \cdots : z_{2n+2}] \mapsto [z_1 + z_2\mathbf{j} : \cdots : z_{2n+1} + z_{2n+2}\mathbf{j}]$ 给出。注意，$\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1) = \mathrm{C}P^1$ 是伴随表示中 SU(2) 的单位球面 $S(\mathfrak{su}(2))$，因此 (62) 等价地表明，$\mathrm{C}P^{2n+1}$ 是 $\mathrm{H}P^n$ 上秩为 3 的伴随丛的球面丛。

令 $R$ 为一个复定向同伦交换环，其关联的形式群G定义在 $\pi_*(R)$ 上；为简单起见，我们假设 2 不是 $R$ 中的零因子。

那么， $R^*(\mathbf{C}P^5)$ 同构于 G 上所有至少 $\geq 6$阶消失的函数所构成的函数环。与纤维序列 (62) 相关的 Serre 谱序列表明， $R^*(\mathbf{H}P^2)$ 同构于 $R^*(\mathbf{C}P^5)^{\mathbf{Z}/2}$，其中 $\mathbf{Z}/2$ 通过形式群上的取逆作用。由此可得所需结论，因为存在谱的等价 $\mathbf{H}P^2 \simeq \Sigma^4 C\nu$，且 $A$ 是一个自由 $\mathbf{E}_1$-环，其单位映射经过包含映射 $S^0 \to C\nu$。□

**注A.13.** 命题 A.12 中对 $\mathcal{M}_A$ 的描述有具体应用；例如，在 [**Dev22**], 中，我们证明 $\mathcal{M}_{\mathrm{tmf}\otimes A} = \mathcal{M}_A \times_{\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}} \mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$ 可被识别为椭圆曲线模叠 $\mathscr{E}$，其上配备了 $\mathbf{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E})$ 上 Hodge滤过的一个分裂，并据此描述拟模形式的整数环的一个拓扑类比。

**注A.14.** 正如 [**Dev23a**，注 7.1.7], 中所述，存在一个 $\mathbf{Z}/2$-等变的 $\mathbf{E}_1$-代数 $A_{\mathbf{Z}/2}$，其底层的 $\mathbf{E}_1$-代数是 $A$，并且 $\Phi^{\mathbf{Z}/2}A_{\mathbf{Z}/2} = X(2)^{(2)}$ 作为 $\mathbf{E}_1$-代数成立。这是对命题 A.12 所提示的以下观察的一种拓扑解释： $\mathcal{M}_A$ 是 $\mathcal{M}_{X(2)}$ 的“半个”；更确切地说，存在一个二重平坦有限表示覆盖 $\mathcal{M}_{X(2)} \to \mathcal{M}_A$。这是等价 $A \otimes C\eta \simeq X(2)$ 的一个代数类比。

我们还注意到，纤维序列 (62) 存在一个 $\mathbf{Z}/2$-等变类比：具体而言，存在一个 $\mathbf{Z}/2$-等变扭子纤维化

$$\begin{array}{ccccc} S^{\rho} & \longrightarrow & \mathbf{C}P^{2n-1}_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & \mathbf{H}P^{n-1}_{\mathbf{R}} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ S^{2\rho-1}/S^{\sigma} & \longrightarrow & S^{2n\rho-1}/S^{\sigma} & \longrightarrow & S^{2n\rho-1}/S^{2\rho-1}. \end{array}$$

其中，$\mathbf{Z}/2$ 通过 $\mathbf{Z}/2 \subseteq S^1 \subseteq \mathrm{SO}(3)$ 在 H 上的作用作用于 $\mathbf{H}P^n$。其底层纤维化为 (62)，而 $\mathbf{Z}/2$-不动点给出纤维化

$$S^1 \to \mathbf{R}P^{2n-1} \to \mathbf{C}P^{n-1}$$

这表明 $\mathbf{R}P^{2n-1}$ 是 $\mathbf{C}P^{n-1}$上复线丛 $\mathscr{O}(2)$ 的球面丛。

**构造A.15**。 命题 A.12 中 $\mathcal{M}_A$ 的辨识带来的一个结果是， $\mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_{\mathrm{FG}}$ 是一个仿射丛，因此余切复形 $L_{\mathcal{M}_A/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}}$ 拉回到 $\mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*(A))/\mathbf{G}_m \cong \mathrm{Spec}(\mathrm{BP}_*[t_1^2 + v_1 t_1])/\mathbf{G}_m$ 后，可以辨识为一个秩为 1 的自由 $\mathrm{BP}_*[t_1^2 + v_1 t_1]$-模，由权为 2 的类 $d(t_1^2 + v_1 t_1)$ 生成。利用回顾 4.1.9，我们得到 (61) 的代数类比：若 $X$ 是 $\mathcal{M}_A$ 上的一个叠，则存在一个余纤维序列

$$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}}) \to \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_A) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{mot}}} \Sigma^{6,3}\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_A).$$

叠 $\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}$ 可识别为具有形式 $y = x^2 + bx + c$、坐标变换为 $x \mapsto x + r$ 的曲线模叠，而 $\mathrm{HH}(\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ 描述了计算 THH(ko) 的 Adams-Novikov-Bökstedt 谱序列的 $E_1$页（参见注 4.1.5）。若能明确描述 $\mathrm{HH}(\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$ 将会很有意思；注意

$$\pi_*\mathrm{HH}(\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}/\mathcal{M}_A) \cong \mathscr{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}}\langle \sigma^2 v_j | j \geq 2\rangle \otimes_{\mathscr{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}}} \Lambda_{\mathscr{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}}}(dt_i | i \geq 2),$$

其中 $\sigma^2(v_j)$ 位于次数 $2^{j+1}$、权 $2^j$，而 $dt_i$ 位于次数 $2^{i+1}-1$、权 $2^i$。这可以完全按照例4.1.8来证明；权的考量

大概可以让我们完整描述 $\Theta_{\mathrm{mot}}$：$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_A) \to \Sigma^6, {}^3\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_A)$，从而得到 $\mathrm{HH}(\mathcal{M}_{\mathrm{ko}}/\mathcal{M}_{\mathrm{FG}})$。

**注记 A.16.** 假设猜想 A.2 成立，并令 $p = 2$。要以类似于命题 A.12 的方式描述叠 $\mathcal{M}_B$，要棘手得多。作为初步尝试，若假设 $S/\!\!/\sigma$ 具有同伦交换环的结构，则可以尝试描述模叠 $\mathcal{M}_{S/\!\!/\sigma}$。然而，可以证明，在点集范畴中不可能构造一个 Hurewicz 纤维化

$$S^4 \to \mathbf{H}P^5 \to \mathbf{O}P^2$$

。这是 [**Sch81** 定理 5.1]，的推论。该定理更一般地指出，若 $F \to E \to X$ 是一个 Hurewicz 纤维化，其中 $E$ 同伦等价于 $\mathrm{H}P^{2n+1}$，且 $F$ 和 $X$ 同伦等价于有限 CW 复形，则 $F$ 或 $X$ 必须是可缩的。注意，这一结果意味着甚至不存在 Hurewicz 纤维化

$$S^4 \to \mathbf{H}P^3 \to S^8.$$

同样，不存在 Hurewicz 纤维化

$$\mathbf{C}P^3 \to \mathbf{C}P^7 \to S^8,$$
$$\mathbf{C}P^3 \to \mathbf{C}P^{11} \to \mathbf{O}P^2;$$

参见 [**LV94**]，其中说明了第一个 Hurewicz 纤维化不可能存在（这也意味着第二个 Hurewicz 纤维化不可能存在）。这些不可能性结果使得难以对 $R^*(\mathrm{O}P^2)$（因而也难以对 $\mathcal{M}_{S/\!\!/\sigma}$，因为 $\mathrm{O}P^2 \simeq \Sigma^8 C\sigma$）给出形式群论描述，其中 $R$ 是一个复定向同伦交换环。

关于实 K 理论谱 ko 的论述可以稍作不同地推广到更高高度。

**例 A.17.** 注意到 $S^5 = \mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)$，并且映射 $\Omega S^5 \to$分类空间 BU（其 Thom 谱为 $A$）可以看作以下复合映射

$$\Omega(\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)) \to \Omega(\mathrm{SU}/\mathrm{Sp}) \simeq \mathrm{BSp} \to \mathrm{BU}.$$

等价 $\Omega(\mathrm{SU}/\mathrm{Sp}) \simeq \mathrm{BSp}$ 由 Bott 周期性给出，而映射 $\mathrm{BSp} \to$分类空间 BU 将一个辛丛映射为其底层酉丛。

受例 A.17 启发，我们得到如下定义：

**定义 A.18.** 通过复合映射的 Thom 谱定义一个 $\mathrm{E}_1$-代数 $X_{\mathbf{H}}(n)$

$$\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)) \to \Omega(\mathrm{SU}/\mathrm{Sp}) \simeq \mathrm{BSp} \to \mathrm{BU}.$$

存在一个典范的 $\mathrm{E}_1$-映射 $X_{\mathbf{H}}(n) \to X_{\mathbf{H}}(\infty) = \mathrm{MSp}$。

谱 $X_{\mathbf{H}}(n)$已由 Andy Baker 研究。

**注释 A.19.** 详见 [**CM88**]，其中对空间 $\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n))$ 进行了详细研究。注意，若 $\mathrm{SU}(2n)_{\mathbf{H}}$ 表示 $\mathrm{Z}/2$-等变环路空间，其 $\mathrm{Z}/2$-作用由辛 involution 给出

$$A \mapsto J\overline{A}J^{-1},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus n},$$

于是 $\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)) \simeq (\Omega^\sigma \mathrm{SU}(2n)_{\mathbf{H}})^{\mathbf{Z}/2}$。事实上，$\mathrm{SU}(2n)_{\mathbf{H}}$的不动点是 $\mathrm{Sp}(n)$（根据定义），因此我们可以应用例 3.3.20 的第一句话来得出结论。

**注记 A.20**。 正如记号所示， $X_{\mathbf{H}}(n)$ 应被视为 [**Rav84**] 中 $X(n)$ 谱的四元数类比；参见表 2。

| 赋范除法代数 | $\mathbf{R}$ | $\mathbf{C}$ | $\mathbf{H}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{E}_1$-环 | $y(n) \subseteq \Phi^{\mathbf{Z}/2}X(2^n)_{\mathbf{R}}$ | $T(n) \subseteq X(2^n)$ | $X_{\mathbf{H}}(2^n)$ |
| 当 $n \to \infty$ 时的极限 | $\mathrm{F}_2 \subseteq \Phi^{\mathbf{Z}/2}$复 bordism 谱 $\mathrm{MU}_{\mathbf{R}} = \mathrm{MO}$ | BP $\subseteq$ 复 bordism 谱 MU | MSp |
| 模 2 同调 | $\mathrm{F}_2[\zeta_1, \cdots, \zeta_n]$ | $\mathrm{F}_2[\zeta_1^2, \cdots, \zeta_n^2]$ | $\mathrm{F}_2[\zeta_1^4, \cdots, \zeta_n^4]$ |

表 2. $y(n)$、 $T(n)$ 与 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 之间的类比，其中隐含的素数为 $p = 2$。包含映射 $y(n) \subseteq \Phi^{\mathbf{Z}/2}X(2^n)_{\mathbf{R}}$在例 3.3.20 中讨论；另见 [**Yan92**]。最后一行应解释如下：$\mathrm{H}_*(\Phi^{\mathbf{Z}/2}X(2^n)_{\mathbf{R}};\mathrm{F}_2)$ 是 $\mathrm{F}_2[\zeta_1, \cdots, \zeta_n]$ 的偶数移位的直和；同理，$\mathrm{H}_*(X(2^n);\mathrm{F}_2)$ 和 $\mathrm{H}_*(X_{\mathbf{H}}(2^n);\mathrm{F}_2)$ 也是如此。

注意，存在代数同构

$$\mathrm{H}_*(\Phi^{\mathbf{Z}/2}X(n)_{\mathbf{R}};\mathbf{F}_2) \cong \mathrm{H}_*(\Omega(\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n));\mathbf{F}_2) \cong \mathbf{F}_2[x_1, \cdots, x_{n-1}],$$
$$\mathrm{H}_*(X_{\mathbf{H}}(n);\mathbf{Z}) \cong \mathrm{H}_*(\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n));\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}[y_1, \cdots, y_{n-1}],$$

其中 $|x_j| = j$ 和 $|y_j| = 4j$。

**例 A.21.** 根据构造， $X_{\mathbf{H}}(2) \simeq A = S/\!\!/\nu$。

**构造 A.22**。 假设 $X_{\mathbf{H}}(n)$具有同伦交换环的结构。于是，我们也可以寻求对叠 $\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}$作出类似于命题 A.12 的解释。事实证明，注记 A.16 中的问题对于 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 不再构成障碍。事实上，映射 $S^4 \to \Omega S^5$ （其 Thom 化是命题 A.12 证明中所使用的映射 $C\nu \to A$ ）的类似物由映射 $\iota\colon \mathrm{H}P^{n-1} \to \Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n))$ 给出，该映射将 $\mathrm{H}P^{n-1}$ 表示为 $\Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n))$ 的生成复形。（例如参见 [**CM88**，命题 1.4]。）此外，复合映射

$$\mathbf{H}P^{n-1} \xrightarrow{\iota} \Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)) \to \Omega(\mathrm{SU}/\mathrm{Sp}) \simeq \mathrm{BSp}$$

可分解为 $\mathrm{H}P^{n-1} \hookrightarrow \mathrm{H}P^{\infty} \simeq \mathrm{BSp}(1) \to \mathrm{BSp}$。由于典范四元数直线丛在 $\mathrm{H}P^{n-1}$ 上的 Thom 谱为 $\Sigma^{-4}\mathrm{H}P^n$，映射 $\iota$ Thom 化为映射 $\Sigma^{-4}\mathrm{H}P^n \to X_{\mathbf{H}}(n)$。

利用扭子纤维化 (62) 以及构造 A.22 中的映射 $\Sigma^{-4}\mathrm{H}P^n \to X_{\mathbf{H}}(n)$，可以仿照命题 A.12 进行论证，从而证明：

**命题 A.23.** 叠 $\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}$ 同构于由偶坐标（精确到阶数 $\leq 2n+1$）所配备的分次形式群的模叠。

**注 A.24.** 设 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环结构。另有一个典范映射 $\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n-1)} \to \mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}$，它将 $\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}$ 表示为 $\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n-1)}$ 对群概形 $\mathrm{G}_a^{(2n-2)}/\mathrm{G}_m$ 的商，作用由 $\mathrm{G}$ $B\mathrm{G}_m$ 给出，其中 $\mathrm{G}_a^{(2n-2)}$ 表示带有权为 $2n-2$ 的 $\mathrm{G}_m$ 作用的仿射直线。这是以下内容的代数类比：

**引理 A.25.** 谱 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 等价于映射$\Omega S^{4n-3} \to \mathrm{BGL}_1(X_{\mathbf{H}}(n-1))$的 *Thom* 谱。

证明。根据 [**Dev23a**，命题 2.1.6](另见 [**Bea17**])，只需证明存在一个 $\mathrm{E}_1$-空间的纤维序列

$$\Omega(\mathrm{SU}(2n-2)/\mathrm{Sp}(n-1)) \to \Omega(\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)) \to \Omega S^{4n-3}.$$

为此，注意到存在一个微分同胚 $\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n) \cong \mathrm{SU}(2n-1)/\mathrm{Sp}(n-1)$，因此有一个纤维化

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{SU}(2n-2)/\mathrm{Sp}(n-1) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n-1)/\mathrm{Sp}(n-1) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n-1)/\mathrm{SU}(2n-2) \\
\| & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
\mathrm{SU}(2n-2)/\mathrm{Sp}(n-1) & \longrightarrow & \mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n) & \longrightarrow & S^{4n-3}.
\end{array}$$

所需的纤维序列可通过对底行取环路得到。 □

**注 A.26.** 在源的底胞腔上，映射 $\Omega S^{4n-3} \to \mathrm{BGL}_1(X_{\mathbf{H}}(n-1))$ 定义了一个类 $\chi_n^{\mathbf{H}} \in \pi_{4n-5}X_{\mathbf{H}}(n-1)$，而 $\chi_{2^n}^{\mathbf{H}}$ 由 $[t_n^2]$ 在 Adams-Novikov 谱序列的 $E_2$ 页中检测到，其中该谱序列对应于 $X_{\mathbf{H}}(2^n-1)$。此外，如果 $X_{\mathbf{H}}(n-1)$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环结构，且 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 具有 $\mathrm{E}_1$-$X_{\mathbf{H}}(n-1)$- 代数结构，那么 $\mathrm{THH}(X_{\mathbf{H}}(n)/X_{\mathbf{H}}(n-1)) \simeq X_{\mathbf{H}}(n)[\Omega S^{4n-3}]$。

于是我们可以得出结论（如定理 3.1.4 和例 4.1.11 所示）：若 $\mathscr{C}$ 是一个 $X_{\mathbf{H}}(n)$-线性 $\infty$-范畴，且 $X$ 是定义在 $\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}$ 上的叠，那么存在余纤维序列

$$\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X_{\mathbf{H}}(n-1)) \to \mathrm{THH}(\mathscr{C}/X_{\mathbf{H}}(n)) \xrightarrow{\Theta'} \Sigma^{4n-2}\mathrm{THH}(\mathscr{C}/X_{\mathbf{H}}(n)),$$

$$\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n-1)}) \to \mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}) \xrightarrow{\Theta_{\mathrm{mot}}} \Sigma^{4n-2,2n-1}\mathrm{HH}(X/\mathcal{M}_{X_{\mathbf{H}}(n)}).$$

只有第一个余纤维序列要求 $X_{\mathbf{H}}(n-1)$ 和 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 具有 $\mathrm{E}_2^{\mathrm{fr}}$-环结构，并且 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 具有 $\mathrm{E}_1$-$X_{\mathbf{H}}(n-1)$-代数结构；第二个余纤维序列只要求 $X_{\mathbf{H}}(n)$ 具有同伦交换环结构。

## 附录 B. 对 $\widehat{\Omega}^{\mathbb{P}}_{\text{整数环}/p^n}$ 的另一种计算

在这一简短章节中，我们遵循 [**BL22b**，例 5.15]，给出一个关于推论 3.2.15 的替代代数论证。非常感谢 Sasha Petrov 就整个附录进行了一场富有启发性的讨论；另见 [**Pet23**，引理 6.13]。

推论 3.2.15 的另一种证明。设 $R$ 是一个（离散）交换的整数环/$p^n$-代数。那么 [**BL22b**，构造 3.8] 表明

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^n)^{\mathbb{P}}(R) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}}(\mathbf{Z}/p^n, W(R)/V(1)) \\ &\simeq \{z \in W(R) | zV(1) = p^n\} = \{x \in W(R) | V(Fz) = p^n\}.\end{aligned}$$

由于 $V$ 是单射，这是一个关于 $W[F](R) = \mathbb{G}_a^\sharp(R)$ 的主齐性空间。此外，该主齐性空间是平凡的，即 $p^n$ 属于 $VF$ 的像。事实上，我们断言

$$p^n = V(p^{n-1}) = VF(V(p^{n-2})) \in W(\mathbf{Z}/p^n). \tag{63}$$

为此，我们用幽灵坐标进行计算。回忆一下，若 $w(x) = (w_0(x)\ w_1(x)\ \cdots)$ 是 $x \in W(R)$ 的幽灵坐标，则 $w_{n+1}(Vx) = pw_n(x)$。由于 $w(p^n) = (p^n, p^n, \cdots)$ 且 $w(V(p^{n-1})) = (0, p^n, p^n, \cdots)$，我们得到

$$w(p^n - V(p^{n-1})) = (p^n, 0, 0, \cdots).$$

由于映射 $\mathbb{G}_a^\sharp \cong W[F] \to W$ 将 $x \in \mathbb{G}_a^\sharp$ 映到幽灵坐标为（$x$, 0, 0, $\cdots$）的 Witt 向量，因此由观察到 $p^n \in W[F](\mathbf{Z}_p)$ 在 $W[F](\mathbf{Z}/p^n)$ 中映到零，可得断言 (63)。□

**注 B.1.** 正如 Sasha Petrov 所指出的，前面的计算也确定了 $\mathbb{G}_m^\sharp$ 在 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^n)^{\mathbb{P}}$ 上的作用如下。上述讨论表明，同构 $\mathbb{G}_a^\sharp \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^n)^{\mathbb{P}}$ 将 $x \mapsto x + V(p^{n-2})$ 映到该处。在此同构下，$g \in \mathbb{G}_m^\sharp$ 在 $x + V(p^{n-2}) \in \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^n)^{\mathbb{P}}$ 上的作用由下式给出：

$$g(x + V(p^{n-2})) = gx + gV(p^{n-2}) = gx + V(F(g)p^{n-2});$$

但 $F(g) = 1$，因为 $\mathbb{G}_m^\sharp = W^\times[F]$，所以这可以识别为 $gx + V(p^{n-2})$。换言之，同构 $\mathbb{G}_a^\sharp \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^n)^{\mathbb{P}}$ 关于 $\mathbb{G}_m^\sharp$ 在 $\mathbb{G}_a^\sharp$ 上的缩放作用是等变的。

通过以下方法可以得到一个比 (63) 更“精确”的公式（另见 [**Ill22**，第 56]，页，其中这条陈述的部分内容归功于 Gabber）[24]。

引理 *B.2.* 设 $y$ 表示与幽灵坐标 $(1 - p^{p-1}, 1 - p^{p^2-1}, \cdots)$ 相关联的 $W(\mathbf{Z}_p)$ 中的元素。那么 $[p] + V(y) = p$。此外，$y = Fx$ 当且仅当对于某个 $x \in W(\mathbf{Z}_p)$ 有 $p > 2$；在这种情况下，$x \in W(\mathbf{Z}_p)^\times$（因此 $y \in W(\mathbf{Z}_p)^\times$）。若 $p = 2$，则对于任意 $m \geq 2$，$y[2^m]$ 都在 $F$ 的像中。

**注 B.4**。为简单起见，假设 $p$ 为奇数。于是由引理 B.2 可知，$p - [p] \in W(\mathbf{Z}_p)$是 $V(1)$的一个单位倍数，因为 $p - [p] = V(y) = xV(1)$，且$x \in W(\mathbf{Z}_p)^\times$.[25] 由此根据 [**BL22b**，构造 3.8] 可知，若 $X = \mathrm{Spf}(R)$是有界的 $p$-进形式概形，则衍射霍奇复形 $X^{\mathbb{P}}$ 在$p$-幂零环 $S$上的取值为 $X^{\mathbb{P}}(S) = X(W(R)/(p - [p]))$。

[24]据我们所知，这个结果相当知名；[**BMS18**] 中广泛用到了某种形式的这一结果。[25]类似地，对于 $p = 2$，$[2](2 - [2]) = [2]V(y) = V(y[4]) \in W(\mathbf{Z}_p)$ 可被 $V(1)$ 整除。

**注记 B.3**。 将 $F$ 应用于恒等式 $[p]+V(y) = p$，可得 $[p^2] = p(1-y)$。特别地，[**Dri22**，引理 4.7.3] 中的元素 $a \in W(\mathbf{Z}_p)$可识别为 $1-y$。

**注 B.5.** 利用引理 B.2，我们可以给出一个关于 $p^n$ 在 $VF$ 下原像的"替代"公式。事实上，对某个 $y \in W(\mathbf{Z}_p)$，有 $p = [p] + V(y)$，因此在 $W(\mathbf{Z}_p)$ 中有 $p^n = [p^n] + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} [p^i]V(y)^{n-i}$。由于 $V(a)b = V(aFb)$ 且 $FV = p$，通过对 $n$ 作简单归纳，可得 $V(a)^n = V(p^{n-1}a^n)$。此外，$[p^i]V(a) = V(aF[p^i]) = V([p^{pi}]a)$。由于 $[p^n] = 0 \in W(\mathbf{Z}/p^n)$（因而也属于 $W(R)$），我们有

$$p^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} [p^i]V(y)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} V(p^{n-i-1}y^{n-i}F[p^i]) \in W(\mathbf{Z}/p^n).$$

假设 $p > 2$，于是引理 B.2 蕴含，对某个 $x \in W(\mathbf{Z}_p)$，有 $y = Fx$。现在利用 $F$ 的乘法性，我们可以得出

$$p^n = VF\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{n-i-1}x^{n-i}[p^i]\right) \in W(\mathbf{Z}/p^n),$$

从而 $p^n \in W(R)$ 位于 $VF$ 的像中，正如所需。

容易验证

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{n-i-1}y^{n-i}[p^{pi}] = p^{n-1} \in W(\mathbf{Z}/p^n).$$

这本质上是对引理 B.2 证明的展开。事实上，应用 $w_j$，我们有

$$\begin{aligned} w_j\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{n-i-1}y^{n-i}[p^{pi}]\right) &= \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (p - p^{p^{j+1}})^{n-i}p^{p^{j+1}i} \\ &= p^{n-1} - p^{p^{j+1}n-1}. \end{aligned}$$

因此，只需证明带有坐标$w_j(a) = p^{p^{j+1}n-1}$ 的 Witt 向量 $a \in W(\mathbf{Z}_p)$ 在 $W(\mathbf{Z}/p^n)$ 中为零，这可由直接计算得到。

以引理 B.2 的证明作结；下面的显式公式对于任何概念上的发展都并非必要，但由于计算颇为有趣，我们还是将其列出。

引理 B.2 的证明。首先，很容易看出 $y$ 是良定义的。现在来验证 $p = [p] + V(y)$。若 $w(x) = (w_0(x)\ w_1(x)\ \cdots)$ 是 $x \in W(R)$ 的幽灵坐标，那么 $w_{n+1}(Vx) = pw_n(x)$。由此可得 $w_n(Vy) = p - p^{p^n}$。由于 $w([p]) = (p, p^p, p^{p^2}, \cdots)$，我们有

$$w([p] + Vy) = w([p]) + w(Vy) = (p, p, \cdots) = w(p),$$

因此 $p = [p] + V(y)$，正如所声称的那样。

为了证明关于 $y$属于 $F$的像的断言，回忆一下，若 $x \in W(R)$，那么 $Fx$ 的幽灵坐标由 $w_n(Fx) = w_{n+1}(x)$给出。特别地，$y = Fx$ 当且仅当存在某个 $x \in W(\text{整数环}_p)$使得我们能解出

$$1 - p^{p^n-1} = x_0^{p^n} + px_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n x_n$$

对于某个 $x_0$、$\cdots$、$x_n \in$ 整数环$_p$ 以及所有 $n \geq 1$。这对 $p = 2$是不可能的。事实上，首先注意到我们需要 $x_0^2 + 2x_1 = 1 - p^{p-1} = -1$，因此 $x_0^2 \equiv 1$（模 2）（从而$x_0 \equiv 1$（模 2））。设 $x_0 = 1+2s$，则 $x_0^2+2x_1 = 1+4s(1+s)+2x_1$。要使其等于 $1-p^{p-1} = -1$，我们需要 $4s(1+s)+2x_1 = -2$，即 $x_1 \equiv 1$（模 2）。这意味着 $x_0^4 \equiv 1$（模 8）且 $x_1^2 \equiv 1$（模 4）（因此 $2x_1^2 \equiv 2$（模 8））。由于$1-p^{p^2-1} = -7 = x_0^4+2x_1^2+4x_2$，我们可以模 8 化简，得到 $1 \equiv 1+2+4x_2$（模 8）。但此时 $x_2$ 将是 $4x_2 \equiv -2$（模 8）的解，这是不可能的。

现在假设 $p > 2$。由于 $x_0^p + px_1 = 1 - p^{p-1}$，我们有 $x_0^p \equiv 1$（模 $p$）；这意味着 $x_0^{p^n} \equiv 1$（模 $p^{n+1}$）。令 $x_0^{p^n} = 1 - p^{n+1}s_n$ 为某个 $s_n \in \mathbf{Z}_p$，则有 $x_1 = ps_1 - p^{p-2}$。由于 $p > 2$，我们看到 $x_1 = p(s_1 - p^{p-3}) \in p\mathbf{Z}_p$。我们断言，对于 $n \geq 1$，$x_n$ 存在且属于 $p\mathbf{Z}_p$。上文已证明基例$n = 1$，因此假设 $x_1$、$\cdots$、$x_{n-1} \in p\mathbf{Z}_p$，并令 $x_i = pt_i$。于是我们有

$$\begin{aligned} p^n x_n &= 1 - p^{p^n-1} - (x_0^{p^n} + px_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}x_{n-1}^p) \\ &= p^{n+1}s_n - p^{p^n-1} - p^{p^{n-1}+1}t_1^{p^{n-1}} - \cdots - p^{p+n-1}t_{n-1}^p, \end{aligned}$$

从而

$$x_n = ps_n - p^{p^n-1-n} - p^{p^{n-1}+1-n}t_1^{p^{n-1}} - \cdots - p^{p-1}t_{n-1}^p.$$

由于 $p > 2$，这显然能被 $p$ 整除（因此，对于 $n \geq 1$，有 $p^n - 1 - n \geq 1$）。因此，$x_n$ 存在且属于 $p\mathbf{Z}_p$，如所需。（注意，若 $p = 2$ 且 $n = 1$，则 $p^n - 1 - n = 0$，所以 $x_1 \notin 2\mathbf{Z}_2$。）如果希望得到显式公式，上述论证表明，一旦写出 $x_0 = 1 - ps_0$，就可以通过归纳定义 $j \geq 1$ 对应的 $x_j = pt_j$：

$$t_n = \sum_{i=1}^{p^n} \frac{(-1)^{i+1}}{p^{n+1-i}} \binom{p^n}{i} s_0^i - p^{p^n-2-n} - \sum_{k=1}^{n-1} p^{p^k-k-1}t_{n-k}^{p^k}.$$

首项为 $s_n$；注意 $\frac{1}{p^{n+1-i}}\binom{p^n}{i} \in$ 整数环。由于对于 $i \geq 1$，$x_0 \equiv 1$（模 $p$）且 $x_i \equiv 0$（模 $p$），容易看出 $x$ 的所有幽灵分量都属于$1 + p$整数环$_p \subseteq$ 整数环$_p^\times$；这意味着 $x \in W($整数环$_p)$ 可逆，正如所声称的那样。

现在假设 $p = 2$，并证明对于任意 $m \geq 2$，$y[2^m]$ 属于 $F$ 的像。为此，注意到 $y[2^m]$ 的幽灵分量由下式给出

$$w_n(y[2^m]) = w_n(y)w_n([2^m]) = 2^{m2^n}(1 - 2^{2^{n+1}-1}).$$

因此，我们需要求解

$$2^{m2^{n-1}}(1 - 2^{2^n-1}) = x_0^{2^n} + 2x_1^{2^{n-1}} + \cdots + 2^n x_n$$

对于某些 $x_0$、$\cdots$、$x_n \in$ 整数环$_2$ 以及所有 $n \geq 1$。当 $n = 1$时，我们有 $x_0^2 + 2x_1 = -2^m$，因此 $x_0^2 \equiv 0$（模 2），因为 $m > 0$。由此可得，对于某个 $t_0 \in$，$x_0 = 2t_0$ 属于整数环$_2$。现在我们断言，对于 $n \geq 0$，$x_n$ 存在且属于 2整数环$_2$。我们已在上文建立了基例$n = 0$，因此假设 $x_0$、$x_1$、$\cdots$、$x_{n-1} \in$ 2整数环$_2$,，并写作 $x_i = 2t_i$。于是

$$\begin{aligned} 2^n x_n &= 2^{m2^{n-1}}(1 - 2^{2^n-1}) - (x_0^{2^n} + 2x_1^{2^{n-1}} + \cdots + 2^{n-1}x_{n-1}^2) \\ &= 2^{m2^{n-1}}(1 - 2^{2^n-1}) - (2^{2^n}t_0^{2^n} + 2^{2^{n-1}+1}t_1^{2^{n-1}} + \cdots + 2^{n+1}t_{n-1}^2), \end{aligned}$$

从而

$$x_n = 2^{m2^{n-1}-n}(1 - 2^{2^n-1}) - (2^{2^n-n}t_0^{2^n} + 2^{2^{n-1}+1-n}t_1^{2^{n-1}} + \cdots + 2t_{n-1}^2).$$

由于对于每个 $j \geq 0$，$m \geq 2$ 和 $2^j - j \geq 1$，我们便得到所需的 $x_n \in 2\mathbf{Z}_2$,。（当然，关键情形是 $m = 2$；当 $m = 1$ 和 $n = 1$时，项 $2^{m2^{n-1}-n}(1 -$

$2^{2^n-1}) = -1 \notin 2\mathbb{Z}_{2\circ}$ ）若希望得到一个显式公式，请注意，上述论证表明，一旦写出 $x_0 = 2t_0$，便可通过归纳定义 $x_j = 2t_j$ ：

$$t_n = 2^{m2^{n-1}-n-1}(1-2^{2^n-1}) - \sum_{i=1}^{n} 2^{2^i-i-1} t_{n-i}^{2^i}.$$

注意， $x$ 在 $W(\mathbb{Z}_2)$ 中不可 逆；相反，由于 $x_j \in 2\mathbb{Z}_2$, 第 $n$ 个幽灵分量 $w_n(x) \in 2^{n+1}\mathbb{Z}_{2\circ}$ □

## 附录 C. $W[F^n]$和 $W^\times[F^n]$的卡蒂埃对偶

本节受到上文所证结果的启发，但对本文主体内容并非必不可少。下文的推论 C.12 可视为一种代数方法，用以记录拓扑 Sen 算子所具有的结构；而且，正如我们希望在未来工作中展示的那样，它在定理 3.1.4 和例 4.1.11 中的拓扑 Sen 算子与代数 Sen 算子之间起到中介作用（参见注 C.19）。我们从以下结果开始（该结果想必广为人知）。我（再次）感谢 Sasha Petrov 就此进行了相关讨论。

**命题 C.1.** 在整数环$_{(p)}$ 上，$W[F^n] := \ker(F^n : W \to W)$ 与 $W_n = W/V^n$在原点处完备化的卡蒂埃对偶之间存在一个群概形同构。

证明. 我们用 $p$-典型的大 Witt 向量来描述 $W$。给定 $f(t) \in W$，令$a_0, a_1, a_2, \cdots$表示 $f$的幽灵分量，使得 $t\frac{d}{dt}\log(f(t)) = \sum_{m\geq 0} a_m t^{p^m}$。那么， $f(t) \in W[F^n]$当且仅当对 $m \geq n$有 $a_m = 0$。

我们先证明命题在 $n = 1$时的结论。此时， $\frac{d}{dt}\log(f(t))$是一个常数，且 $f(0) = 1$; 我们声称，这等价于 $f$定义了一个同态 $\hat{\mathbb{G}}_a \to \mathbb{G}_m$，也就是说， $f(x+y) = f(x)f(y)$。为验证这一点，先假设 $f(x+y) = f(x)f(y)$。那么 $\partial_x f(x+y) = f(y)f'(x)$，因此

$$\frac{\partial_x f(x+y)}{f(x+y)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dt}\log(f(x))$$

与 $y$ 无关。取 $x = 0$，我们看到 $\frac{d}{dt}\log(f(x))$ 是常数，正如所期望的。反向命题（即 $\frac{d}{dt}\log(f(x))$ 为常数且 $f(0) = 1$ 意味着$f(x+y) = f(x)f(y)$）的证明类似。

在一般情形下，注意到由于 $W$ 上的 Frobenius 将幽灵分量移位 $F : (a_0, a_1, a_2, \cdots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \cdots)$，作用于 $f$ 的 Frobenius $F$ 满足：

$$\frac{d}{dt}\log(F^j(f)(t)) = \sum_{m=0}^{n-j} a_{m+j} t^{p^m},$$

因此，幂级数之间有如下等式

$$F^j(f)(t) = \exp\left(\sum_{m=0}^{n-j} \frac{a_{m+j}}{p^m} t^{p^m}\right).$$

注意，这是阿廷-哈斯指数的一个略微变体。定义一个映射 $\hat{g} : W_n \to \mathbb{G}_m$，作用于 Witt 分量（而非幽灵分量！）$(x_0, \cdots, x_{n-1})$，如下所示：

$$\begin{aligned} g(x_0, \cdots, x_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} F^j(f)(x_j) &= \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-j} \frac{a_{m+j}}{p^m} x_j^{p^m}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{a_m}{p^m}\left(\sum_{j=0}^{m} p^j x_j^{p^{m-j}}\right)\right). \end{aligned}$$

$\frac{a_m}{p^m}$ 的系数正是第 $m$个维特多项式，因此函数 $\hat{g}$ 确实是 $W_n$上的加法函数。此外，赋值 $f \mapsto g$ 确实给出了一个

同构 $W[F^n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\hat{}W_n, \mathbb{G}_m)$，这一点可以利用 $n=1$ 的情形以及它在 Q 上诱导出同构这一事实进行归纳验证。□

**注 C.2**（整系数情形）。上述陈述成立并不需要 $p$-典型性。具体而言，若 W 表示大 Witt 环概形，那么一个经典事实是，W 在 Z 上的 Cartier 对偶典范地同构于 W。与上面的 $p$- 典型情形一样，配对 $\mathbb{W} \times \mathbb{W} \to \mathbb{G}_m$ 将

$$(a,b) \mapsto \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{w_n(a)w_n(b)}{n}\right).$$

只需验证这个表达式确实定义在 Z 上。为此，首先注意，若 $b$ 的 Witt 分量为（$b_1$, $b_2$, $\cdots$），则有

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{w_n(a)w_n(b)}{n}\right) = \prod_{j\geq 1} \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{w_{nj}(a)b_j^n}{n}\right).$$

注意 $w_{nj}(a) = w_n(F_j a)$，因此若 $(F_j a)_d$ 表示 $F_j a$ 的 Witt 分量，则有

$$\exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{w_n(a)w_n(b)}{n}\right) = \prod_{j,d\geq 1} (1-(F_j a)_d b_j^d),$$

由此得到所需的整系数表示。事实上，最后一步可以通过以下对 Dwork 引理的改述加以推广：

**引理 C.3.** 设 $R$ 是一个无挠环，并配备环映射 $\phi_p : R \to R$，每个素数 $p$ 对应一个映射，使得对所有 $r \in R$，$\phi_p(r) \equiv r^p \pmod{p}$。设 $(x_n)_{n\geq 1}$ 是一列元素，使得对每个素数 $p$ 及每个 $n \in p\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$x_n \equiv \phi_p(x_{n/p}) \pmod{p^{v_p(n)}}$。则 $f(t) := \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x_n t^n}{n}\right)$ 属于 $1+tR[\![t]\!] \subseteq 1+t(R\otimes\mathbb{Q})[\![t]\!]$。

证明。设 $g(t) = 1-t \in R[\![t]\!]$，则有恒等式

$$g(t) = \exp(\log(1-t)) = \exp\left(-\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n}\right).$$

由于 $f(0) = 1$，我们可以唯一地写成 $f(t) = \prod_{j\geq 1}(1-r_j t^j) = \prod_{j\geq 1} g(r_j t^j)$，其中$r_j \in R\otimes\mathbb{Q}$。由于 $g(t)$ 是整数，只需证明元素 $r_j$ 也是整数。应用 $d\log$，我们得到

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x_n t^n}{n} = d\log(f)(t) = \sum_{j\geq 1} d\log(g)(r_j t^j) = -\sum_{j,m\geq 1} \frac{r_j^m t^{jm}}{m}.$$

由此可得 $x_n = -\sum_{j|n} j r_j^{n/j}$。现在可以完全按照通常的 Dwork 引理（即对 $j|n$ 且 $j \neq n$ 的情形，关于 $r_j \in R$ 使用归纳法）来论证每个 $r_j$ 都是整数。□

**推论 C.4.** 将 $W_n$ 的底层概形写作 $\prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{G}_a$（其中第 $i$ 个 $\mathbb{G}_a$ 的坐标为 $\Phi_i$）。存在一个全忠实函子 拟凝聚层$(BW[F^n]) \hookrightarrow$拟凝聚层$(W_n)$，其本质像由这样的 $p$-完备 $M \in$ 拟凝聚层$(W_n)$ 组成：对每个 $0 \leq i \leq n-1$，$\Phi_i$ 在 $\mathrm{H}^*(M/p)$ 上局部幂零。此外，对于 拟凝聚层$(W_n)$ 上的卷积张量积，此函子是对称幺半的。

若 $\mathscr{F} \in$拟凝聚层$(BW[F^n])$经此函子映至 $M \in$拟凝聚层$(W_n)$，则可得到一个立方体[26] $\Phi_\bullet$： $2^{[n-1]} \to$模$\mathbf{z}_p$，其所有顶点均为 $M$，并且从子集 $\{i_1, \cdots, i_{j-1}\}$ 到 $\{i_1, \cdots, i_j\}$ 的边由算子 $\Phi_j$： $M \to M$ 给出。于是，全局截面 $\Gamma(BW[F^n];\ \mathscr{F})$ 可等同于立方体 $\Phi_\bullet$ 的全纤维。

**注记 C.5.** 更一般地，命题 C.1 的论证表明，在整数环 $\mathrm{Z}_{(p)}$ 上， $W_m[F^n] := \ker(F^n\colon W_m \to W_m)$ 与 $W_n[F^m]$ 的 Cartier 对偶之间存在群概形同构。在特征为 $p > 0$ 的完美域 $k$ 上，利用 Dieudonné 模理论可以更简单地证明这一事实：$W_m[F^n]$ 在 $k$ 上的 Dieudonné 模为 $W(k)[F, V]/(F^n, V^m)$，而 $W_n[F^m]$ 在 $k$ 上的 Dieudonné 模为 $W(k)[F, V]/(F^m, V^n)$。

命题 C.1 的论证还表明以下结论（已在 [**Dri21** 附录 D]中讨论）：

命题 *C.6*（[*Dri21*，附录 *D*]）。设 $\hat{G}_\lambda$ 是由 $\mathrm{Spf}\, Z_{(p)}[t, \lambda, \frac{1}{1+t\lambda}]^\wedge_t$ 给出的 $\hat{G}_m$ 到 $\hat{G}_a$ 的退化，其群律为 $x+y+\lambda xy$。则 $\hat{G}_\lambda$ 的 $Z_{(p)}[\lambda]$-线性 *Cartier* 对偶同构于群概形 $D(\hat{G}_\lambda) = \mathrm{Spec}\, Z_{(p)}[\lambda, z, \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(z-j\lambda)\, n!}]$，它定义在 $A^1_\lambda = \mathrm{Spec}\, Z_{(p)}[\lambda]$ 上，余乘法为 $z \mapsto z \otimes 1 + 1 \otimes z$。

证明。一个同态 $f\colon \hat{\mathrm{G}}_\lambda \to \mathrm{G}_m \times \mathrm{A}^1_\lambda$ 是整数环 $\mathrm{Z}_{(p)}[t, \lambda, \frac{1}{1+t\lambda}]^\wedge_t$ 中的一个元素，使得

$$f(x + y + \lambda xy) = f(x)f(y).$$

这个条件意味着

$$(1 + \lambda y)f'(x + y + \lambda xy) = f(y)f'(x),$$

因此，将两边除以 $f(x + y + \lambda xy)$，得到

$$(1 + \lambda y) \cdot d\log(f)(x + y + \lambda xy) = d\log(f)(x).$$

取 $x = 0$，可见 $d\log(f)(y)$ 是 $\frac{1}{1+\lambda y}$ 的常数倍（常数为 $f'(0)\ f(0)$），因此

$$f(y) = (1 + \lambda y)^{z/\lambda} = \sum_{n \geq 0} y^n \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(z - j\lambda)}{n!}$$

对于某个固定的 $z$。这给出了所需的结论，与命题 C.1 类似。注意， $f(y) = \exp(z\log_F(y))$，其中 $\log_F$ 是 $\mathrm{A}^1_\lambda$ 上形式群律 $x + y + \lambda xy$ 的对数。□

**注记 C.7**。注意，$\mathrm{D}(\hat{\mathrm{G}}_\lambda)$ 同构于子群 $(W \times \mathrm{A}^1_\lambda)[F + [-\lambda]^{p-1}]$，它是 $W \times \mathrm{A}^1_\lambda$ 中由 $\{x | Fx = [-\lambda]^{p-1}x\}$ 截出的；参见 [**MRT19**，命题 6.3。3] 以及 [**Dri21**，命题 D.4。10]。关键在于，如果 $f(x) \in W$ 且 $xd\log(f(x)) = \sum_{m \geq 1} a_m x^m$，那么 $f(t) \in (W \times \mathrm{A}^1_\lambda)[F + [-\lambda]^{p-1}]$ 当且仅当

$$a_{p^{n+1}} = ((-\lambda)^{p-1})^{p^n} a_{p^n} = (-\lambda)^{p^{n+1}-p^n} a_{p^n}.$$

为检验这一点，请注意

$$xd\log(f)(x) = \frac{zx}{1 + \lambda x} = \sum_{n \geq 0} (-\lambda)^n z x^{n+1},$$

[26]回忆， $[n]$ 表示集合 $\{0, \cdots, n\}$。

从而 $a_m = (-\lambda)^{m-1}z$，且 $a_m = (-\lambda)^{m-n}a_n$ 如果 $m \geq n$。

**注 C.8.** 类似的论证表明，若 G 表示群概形 Spec $\mathbb{Z}/p^N[\lambda]\langle x\rangle$，其群律为 $x + y + \lambda xy$（因此，当 $\lambda = 0$ 时，我们得到 $\mathbb{G}_a^\sharp$），则 G 的 $\mathbb{Z}/p^N[\lambda]$-线性 Cartier 对偶同构于 Spec $\mathbb{Z}/p^N[\lambda, z]$ 在轨迹 $\prod_{j=0}^{p-1}(z - j\lambda) = z(z^{p-1} - \lambda^{p-1})$ 处的完备化（例如参见 [**Dri21**，B.4] 节）。由此可知，G-表示的 $\infty$-范畴等价于由算子 $z\colon M \to M$ $M$ 作用的 $\mathbb{Z}/p^N$-模的 $\infty$-范畴，其中 $z(z^{p-1} - \lambda^{p-1})$ 在 $\mathrm{H}^*(M \otimes_{\mathbf{Z}/p^N} \mathbb{F}_p)$ 上局部幂零。

**回顾 C.9.** 在 [**BL22a** 中，Bhatt 和 Lurie 的引理 3.5.18]，表明，以下是 $\mathbb{Z}/p^k$ 上群概形的一个笛卡尔方形:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m^\sharp & \xrightarrow{\log} & \mathbf{G}_a^\sharp \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\mapsto \exp(px)} \\ \mathbf{G}_m & \xrightarrow[x\mapsto x^p]{} & \mathbf{G}_m^{(1)}. \end{array} \tag{64}$$

我们将在下文的推论 C.10 中推广这一结果。在 [**DM23**]，中，我们证明了这一方形的另一种推广，不过方向不同：将 $\mathbb{G}_a^\sharp$ 替换为形式群 ˆG 的 Cartier 对偶，并将 $\mathbb{G}_m^\sharp$ 替换为适当的 ˆG 类比除幂完备化。

**推论 C.10.** 设 $k \geq 0$。存在一个 $Z/p^k$ 上群概形的同构，它将 $W^\times[F^n] := \ker(F^n\colon W^\times \to W^\times)$ 的 *Cartier* 对偶与 $W_n$ 在其 $\mathbb{F}_p$-有理点 $W_n(\mathbf{F}_p) \cong \mathbf{Z}/p^n$ 处的完备化对应起来。

证明。按照 [**BL22a** 的注记 3.5.17]，，只需证明以下 [**BL22a** 引理 3.5.18] 的类似结论：存在一个 $\mathbb{Z}/p^k$ 上平群概形的笛卡尔图，如下所示

$$\begin{array}{ccc} W^\times[F^n] & \xrightarrow{\log} & W[F^n] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\mapsto \exp(p^n x)} \\ \mathbf{G}_m & \xrightarrow[x\mapsto x^{p^n}]{} & \mathbf{G}_m^{(n)}. \end{array} \tag{65}$$

这里，左侧垂直映射 $W^\times[F^n] \to \mathbb{G}_m$ 是复合映射

$$W^\times[F^n] \to W^\times \to W^\times/V \cong \mathbf{G}_m.$$

事实上，对 (65) 取 Cartier 对偶并使用命题 C.1，我们得到一个形式群概形的推出图

$$\begin{array}{ccc} p^n\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{W}_n & \longrightarrow & \mathrm{D}(W^\times[F^n]). \end{array}$$

这表明，$\mathrm{D}(W^\times[F^n])$ 是 $W_n$ 在其 $\mathbb{F}_p$-有理点 $W_n(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/p^n$ 处的完备化，正如所需。

方块 (65) 为笛卡尔方块的证明实际上是 [**BL22a** 引理 3.5.18] 的推论。正如 [**BL22a** 引理 3.5.18]，中所述，由于涉及的所有群概形都是

在 $\mathrm{Z}/p^k$ 上平坦的，只需证明该图表在基变换到 $\mathrm{F}_p$ 后是笛卡尔的（即，假设 $k=1$）。我们首先注意到存在一个同构$V$： $W^\times \xrightarrow{\sim} \{x \in W | x_0 = 0\}$，它是 $p$-进形式概形之间的同构，并将 $x \mapsto Vx$ 发送到相应对象。由此得到一个群概形之间的同构 $W[F^n] \times \mu_{p^n} \cong W^\times[F^n]$，它们定义在 $\mathrm{F}_p$ 上，并将 $(x,a) \mapsto [a] + Vx$。因此，只需证明复合映射

$$W[F^n] \xrightarrow{x \mapsto 1+Vx} W^\times[F^n] \xrightarrow{\log} W[F^n]$$

是一个同构。但存在一个交换图

$$\begin{tikzcd}
W[F^{n-1}] \arrow[r, "x\mapsto 1+Vx"'] \arrow[d] & W^\times[F^{n-1}] \arrow[r, "\log"] \arrow[d] & W[F^{n-1}] \arrow[d] \\
W[F^n] \arrow[r, "x\mapsto 1+Vx"] \arrow[d] & W^\times[F^n] \arrow[r, "\log"] \arrow[d] & W[F^n] \arrow[d] \\
\mathbf{G}_a^\sharp \arrow[r, "x\mapsto 1+Vx"] & \mathrm{G}^\sharp_m \arrow[r, "\log"] & \mathrm{G}^\sharp_a,
\end{tikzcd}$$

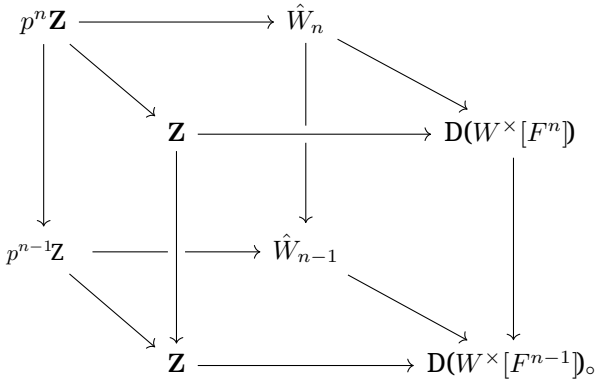
其中各列将第三项表示为前两项的商。通过对 $n$ 进行归纳法（基例由 [**BL22a**, 引理 3.5.18] 给出），我们可以得出结论：中间的水平复合映射是一个同构。□

**注 C.11.** 另一种等价的证明推论 C.10 的方法是注意到， $n-1$ 的方块 (65) 映射到 $n$的方块 (65)；该方块映射的所有分量都是典范映射，除了右下角的 $\mathrm{G}_m$ （此处映射由 $p$ 次幂映射 $\mathrm{G}_m \to \mathrm{G}_m^{(1)}$ 给出）。图示如下：

$$\begin{tikzcd}
W^\times[F^{n-1}] \arrow[rr, "\log"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & W[F^{n-1}] \arrow[dr] \arrow[dd, "x\mapsto \exp(p^{n-1}x)"] & \\
& W^\times[F^n] \arrow[rr, "\log"'] \arrow[dd] & & W[F^n] \arrow[dd, "x\mapsto \exp(p^n x)"] \\
\mathbf{G}_m \arrow[rr, "x\mapsto x^{p^{n-1}}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \mathrm{G}_m^{(n-1)} \arrow[dr, "x\mapsto x^p"] & \\
& \mathbf{G}_m \arrow[rr, "x\mapsto x^{p^n}"] & & \mathrm{G}_m^{(n)}.
\end{tikzcd} \tag{66}$$

取 Cartier 对偶后，我们得到一个推出方块的映射：

(67)




再次，推论 C.10 可通过对 $n$ 使用归纳法得出，其中基例使用了 [**BL22a**，引理 3.5。18]

**推论 C.12.** 将 $W_n$ 的底层概形写作 $\prod_{i=0}^{n-1}\mathbf{G}_a$ （其中 $\mathbf{G}_a$ 的第 $i$ 个副本具有坐标 $\Psi_i$）。存在一个全忠实函子 拟凝聚层$(BW^\times[F^n]) \hookrightarrow$拟凝聚层$(W_n)$，其本质像由那些 $p$-完备的 $M \in$ 拟凝聚层$(W_n)$构成，并且 $\Psi_i^p - \Psi_i$ 在每个 $0 \le i \le n-1$ 上都局部幂零地作用于 $\mathrm{H}^*(M/p)$。此外，该函子关于拟凝聚层$(W_n)$上的卷积张量积是对称幺半的。

若在此函子下，$\mathscr{F} \in$拟凝聚层$(BW^\times[F^n])$被映射到 $M \in$拟凝聚层$(W_n)$，则得到一个立方体 $\Psi_\bullet$：$2^{[n-1]} \to$模$\mathbf{z}_p$，其所有顶点都是 $M$，且从子集 $\{i_1, \cdots, i_{j-1}\}$ 到 $\{i_1, \cdots, i_j\}$ 的边由算子 $\Psi_j$：$M \to M$给出。于是，全局截面 $\Gamma(BW^\times[F^n];\ \mathscr{F})$ 可识别为该立方体 $\Psi_\bullet$的全纤维。

**例 C.13.** 若 $\mathscr{F},\mathscr{G} \in$拟凝聚层$(BW^\times[F^2])$ 分别对应元组 $(M, \Psi_0^M, \Psi_1^M)$ 和 $(M', \Psi_0^{M'}, \Psi_1^{M'})$，则整体截面 $\Gamma(BW^\times[F^2];\ \mathscr{F})$ 可识别为该方块的全纤维

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi_0^M} & M \\ {\scriptstyle \Psi_1^M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Psi_1^M} \\ M & \xrightarrow[\Psi_0^M]{} & M. \end{array}$$

此外，$\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$对应于模 $M \otimes M'$，其中

$$\Psi_0^{M\otimes M'} = \Psi_0^M \otimes 1 + 1 \otimes \Psi_0^{M'},$$

$$\Psi_1^{M\otimes M'} = \Psi_1^{M'} \otimes 1 + 1 \otimes \Psi_1^{M'} - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}(\Psi_0^M)^i \otimes (\Psi_0^{M'})^{p-i}.$$

更一般地，若 $\mathscr{F},\mathscr{G} \in$拟凝聚层$(BW^\times[F^n])$分别对应于元组 $(M, \Psi_0^M, \cdots, \Psi_{n-1}^M)$ 和 $(M', \Psi_0^{M'}, \cdots, \Psi_{n-1}^{M'})$，记 $\Psi := (\Psi_0, \Psi_0, \cdots)$。令 $w_j(\Psi) = \sum_{i=0}^j p^i \Psi_i^{p^{j-i}}$ 表示相应的维特多项式；则

$$w_j(\Psi^{M\otimes M'}) = w_j(\Psi^M) \otimes 1 + 1 \otimes w_j(\Psi^{M'}). \tag{68}$$

**命题 C.14.** 通过复合映射定义一个同态 $W^{\times}[F^n] \to \mathbf{G}_m$

$$W^{\times}[F^n] \to W^{\times} \to (W/V)^{\times} \cong \mathbf{G}_m.$$

令 $\mathscr{O}\{1\}$ 表示由所得映射$BW^{\times}[F^n] \to B\mathbf{G}_m$确定的 $BW^{\times}[F^n]$ 上的线丛。根据推论 *C.12* 的函子，线丛 $\mathscr{O}\{1\}$的全空间对应于 $\mathbf{Z}_p[x^{\pm 1}]$ 的 $p$-完备化，其上的 $\Psi_j$作用由对维特多项式的以下要求确定：

$$w(\Psi) = (w_0(\Psi), w_1(\Psi), w_2(\Psi), \cdots) = (x\partial_x, x\partial_x, x\partial_x, \cdots). \tag{69}$$

证明。映射 $BW^{\times}[F^n] \to B\mathbb{G}_m$ 确定了 $BW^{\times}[F^n]$上的叠 $\mathbb{G}_m/W^{\times}[F^n]$，因此，在推论 C.12 的函子下，$\mathrm{QCoh}(W_n)$ 中相应对象的底层模由 $\mathscr{O}_{\mathbf{G}_m} = \mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$给出。从映射 $BW^{\times}[F^n] \to B\mathbb{G}_m$ 的定义不难看出，在推论 C.12 的函子下，$\mathscr{O}\{1\}$ 上的线丛 $BW^{\times}[F^n]$ 对应于 $p$-完备模 $\mathbb{Z}_p$ （其生成元为 $x$），其中 $\Psi_0$ 在 $x$ 上作用为 1，而对于 $j \geq 1$， $\Psi_j$ 在 $x$ 上作用为零。 $w_j(\Psi)$在 $\mathscr{O}\{m\} = \mathbb{Z}_p \cdot x^m$ 上的作用于是由式 (68) 得出。□

**例 C.15.** 例如，由（69）可得

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= x\partial_x, \\
\Psi_1 &= \frac{x\partial_x}{p}\left(1 - (x\partial_x)^{p-1}\right), \\
\Psi_2 &= \frac{x\partial_x}{p^2}\left(1 - (x\partial_x)^{p^2-1} - \frac{1}{p^{p-1}}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j \binom{p}{j}(x\partial_x)^{(p-1)(j+1)}\right).
\end{aligned}$$

**注 C.16.** 利用推论 C.4，可以通过类似的计算来描述 $a$-丛 $\mathbb{G}_a/W[F^n]$ 上的 $BW[F^n]$; 尤其是， $\infty$-范畴 $\mathrm{QCoh}((\mathbb{G}_a/W[F^n])/\mathbb{G}_m)$。我们将这一计算总结如下。回忆一下，$\mathbb{G}_a/W[F] \cong \mathbb{G}_a/\mathbb{G}_a^{\sharp}$ 同构于 $\mathbb{G}_a^{\mathrm{dR}}$，因此若 $\mathscr{A}_1 := \mathbb{Z}_p\{x, \partial_x\}/([\partial_x, x] = 1)$ 是 Weyl 代数，则 $\mathrm{QCoh}(\mathbb{G}_a/W[F]) \simeq$左模$^{\partial_x\text{-幂零}}\mathscr{A}_1$。类似地，若我们记作$\frac{1}{m!}\partial_x^m = \partial_x^{[m]}$（从而 $\partial_x^{[m]}(x^k) = \binom{k}{m}x^{k-m}$ ），则通过以下方式定义 $\mathscr{A}_1^{[n]}$

$$\mathscr{A}_1^{[n]} = \mathbf{Z}_p\left\{x, \partial_x, \cdots, \partial_x^{[p^{n-1}]}\right\}/([\partial_x^{[p^j]}, x] = \partial_x^{[p^j-1]}).$$

注意到 $\partial_x^{[p^j-1]}$是 $p$-进单位乘以 $\prod_{k=0}^{j-1}(\partial_x^{[p^k]})^{p-1}$。于是，$W[F^n]$ 对 $\mathbb{G}_a$ 的作用意味着存在一个等价

$$\mathrm{QCoh}(\mathbf{G}_a/W[F^n]) \simeq \mathrm{LMod}^{\partial_x^{[p^j]}\text{-nilp}}_{\mathscr{A}_1^{[n]}};$$

这可以扩展为 $\mathrm{QCoh}((\mathbb{G}_a/W[F^n])/\mathbb{G}_m)$ 与由分次 $\mathscr{A}_1^{[n]}$ -模构成的$\infty$范畴之间的等价，其中 $\partial_x^{[p^j]}$对 $0 \leq j \leq n-1$ 的作用是幂零的； $x \in \mathscr{A}_1^{[n]}$ 的权为 1，而 $\partial_x^{[p^j]} \in \mathscr{A}_1^{[n]}$ 的权为 $-p^j$。诸如 $\mathscr{A}_1^{[n]}$ 这样的除幂微分算子代数最初由 Berthelot 在 [**Ber96**] 中研究。

**警告 C.17.** 注意，$\mathbb{G}_a/W[F^n]$不是环叠。事实上，映射$W[F^n] \to \mathbb{G}_a$不是拟理想： $W[F^n]$ 上的 $W$-模结构不能经由 $W \twoheadrightarrow W_1 = \mathbb{G}_a$ 分解（如果 $F^n(x) = 0$，那么 $xV(y) = V(F(x)y)$不一定为零）。然而，它确实经由 $W \twoheadrightarrow W_n$ 分解（如果 $F^n(x) = 0$，那么

$xV^n(y) = V^n(F^n(x)y) = 0$)；事实上，$W_n/W[F^n] \cong W/p^n$ 具有环叠结构。

**注 C.18.** 推论 C.10 的证明表明，存在一个同构

$$W^\times[F^n] \cong W[F^n] \times \mu_{p^n}$$

在 $\mathrm{F}_p$ 上。设 $\mathfrak{X}$ 是 $\mathrm{Z}_p$ 上的光滑 $p$-进形式概形，并设 $X = \mathfrak{X} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{F}_p$。假设 $\mathrm{G}_m^\sharp$ 在 $\widehat{\Omega}^{\not p}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{F}_p = F_{X,*}\Omega^\bullet_{X/\mathbf{F}_p}$ 上的作用可提升为一个 $W^\times[F^n]$- 作用。（例如，令 $(\widehat{\Omega}^{\not p}_{\mathfrak{X}})_0$ 表示 $\widehat{\Omega}^{\not p}_{\mathfrak{X}}$ 上由 $\mathrm{G}_m^\sharp$ 作用所继承的 $\mathrm{Z}/p$-分次的权重 0 部分。提升为 $W^\times[F^2]$-作用这一数据会导出一个作用于 $(\widehat{\Omega}^{\not p}_{\mathfrak{X}})_0$ 的算子，它在 $\mathrm{gr}^{pi}\,\mathrm{conj}\widehat{\Omega}^{\not p}_{\mathfrak{X}}$ 上的作用为乘以 $-i$。）在这种情况下，来自 [BL22a，注 4.7.20] 的 $F_{X,*}\Omega^\bullet_{X/\mathbf{F}_p}$ 上的 $\mathrm{Z}/p$-分次可提升为 $\mathrm{Z}/p^n$-分次；这将意味着 Deligne-Illusie 定理 [DI87]，的一种提升，表明 $\tau_{\geq -p^n+1}F_{X,*}\Omega^\bullet_{X/\mathbf{F}_p}$ 可分解。

**注 C.19**（ [**Dev23b**] 的“机智”解读）。 [**Lee22**] 的工作表明，沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_* \to \mathrm{F}_p$（甚至沿 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle_* \to \mathrm{Z}_p$）对由 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)^{t\mathbf{Z}/p}$（分别为 $\mathrm{THH}(\mathrm{BP}\langle n-1\rangle)$）上动机滤过[**HRW22**] 的伴随分次构造出的叠进行基变换，所得叠同构于 $(\mathrm{G}_m/W^\times[F^n])/\mathrm{G}_m \cong BW^\times[F^n]$（分别为 $(\mathrm{G}_a/W[F^n])/\mathrm{G}_m \cong (F_*W/pF^{n-1})/\mathrm{G}_m$）。我们目前正与 Jeremy Hahn 和 Ar- pon Raksit 一同研究这一问题及其推论。特别是，这表明若一个整数环 $p$-概形“提升到 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$”，那么 $\widehat{\Omega}^{\not p}_{\mathfrak{X}}$ 上的 $\mathrm{G}_m^\sharp$-作用可细化为一个 $W^\times[F^n]$-作用。从这个角度来看，上文的算子 $\Psi_j$ 与本文正文中的拓扑 Sen 算子 $\Theta_j$ 密切相关：粗略地说，$\Theta_j$ 可理解为 $w_{j-1}(\Psi)$。

由备注 C.18 可知，自然会引出以下问题：如果 $X$ 是一个光滑且适当的 $\mathrm{F}_p$-概形，并且“提升到 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$”，且 $\dim(X) < p^n$，那么 $X$ 的 Hodge-de Rham 谱序列是否在第 $E_1$ 页退化？这个问题未必有意义，因为 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 通常不是 $\mathrm{E}_\infty$-环 [**Law18,Sen17**]。然而，由于 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$ 具有 $\mathrm{E}_3$-环结构，我们仍可进一步探讨：若 $\mathrm{QCoh}(X)$ 可提升为左 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-线性 $\infty$范畴，是否会在非交换情形下成立这样的退化结论。这一思路促成了以下结果（见 [**Dev23b**]）：若 $\mathrm{QCoh}(X)$ 可提升为左 $\mathrm{BP}\langle n-1\rangle$-线性 $\infty$范畴，且 $\dim(X) < p^n$，那么 $\mathrm{HP}(X/\mathrm{F}_p)$ 的 Tate 谱序列会在第 $E_2$ 页退化。

## 参考文献

[ACH21] G. Angelini-Knoll、D. Culver 和 E. Honing。《截断 Brown-Peterson 谱的拓扑 Hochschild 同调 I》。https://arxiv.org/abs/2106.06785，2021年。[AHL10] V. Angeltveit、M. Hill 和 T. Lawson。 $\ell$ 与 $ko$的拓扑 Hochschild 同调。《美国数学杂志》132(2):297–330，2010年。[AL17] V. Angeltveit 和 J. Lind。 $BP\langle n\rangle$的唯一性。《同伦与相关结构杂志》12(1):17–30，2017年。[AL20] J. Anschütz 和 A.-C. Le Bras。 $p$-完备化的环狄克迹在次数 2 的情形。《K 理论年刊》5(3):539–580，2020年。[Ame18] S. Amelotte。$\Omega^3 S^{17}$上平方映射之纤维的同伦分解。《同调、同伦与应用》20(1):141–154，2018年。[AMN18] B. Antieau、A. Mathew 和 T. Nikolaus。关于 TP 的 Blumberg–Mandell Künneth 定理。《数学精选》24(5):4555–4576，2018年。[AMS98] M. Ando、J. Morava 和 H. Sadofsky。周期谱的 Z/(*p*)-Tate 上同调的完备化。《几何与拓扑》2:145–174，1998年。[AP76] F. Adams 和 S. Priddy。 $B$SO 的唯一性。《剑桥哲学学会数学会刊》80(3):475–509，1976年。[AQ17] G. Angelini-Knoll 和 J. D. Quigley。Ravenel 谱的拓扑 Hochschild 同调的 Segal猜想。https://arxiv.org/abs/1705.03343，2017年。[AQ19] G. Angelini-Knoll 和 J. D. Quigley。 $y(n)$的代数 K 理论的色性复杂度。https://arxiv.org/abs/1908.09164，2019年。[AR05] V. Angeltveit 和 J. Rognes。拓扑 Hochschild 同调上的 Hopf 代数结构。《代数与几何拓扑》5:1223–1290，2005年。[BCS10] A. Blumberg、R. Cohen 和 C. Schlichtkrull。Thom 谱的拓扑 Hochschild 同调与自由环空间。《几何与拓扑》14(2):1165–1242，2010年。[Bea17] J. Beardsley。通过幺半群算子 Kan 延拓构造相对 Thom 谱。《代数与几何拓扑》17(2):1151–1162，2017年。[Ber 96] P. Berthelot。 $\mathcal{D}$-算术模 I：有限层微分算子。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）29(2):185–272，1996年。[Bha12] B. Bhatt。

$p$ 1204 6560, -进导出德 2012

拉姆上同调。https://arxiv.org/abs/ . .[Bha22] B. Bhatt。棱柱 F-规范。《数学讲义》，讲义见 https://www.math.ias.edu/ ~bhatt/teaching/mat549f22/lectures.pdf，2022年。[BL21] J. Beardsley 和 T. Lawson。骨架与代数范畴。https://arxiv.org/ abs/2110.09595，2021年。[BL22a] B. Bhatt 和 J. Lurie。绝对棱柱上同调。https://arxiv.org/abs/2201. 06120，2022年。[BL22b] B. Bhatt 和 J. Lurie。 $p$-进形式概形的棱柱化。https://arxiv. org/abs/2201.06124，2022年。[BM94] M. Bokstedt 和 I. Madsen。整数的拓扑循环同调。第 226 号，页 7–8，57–143。1994年。 $K$-理论（斯特拉斯堡，1992年）。[BM22] B. Bhatt 和 A. Mathew。合成复形与 $p$-进 étale Tate 扭转。https: //arxiv.org/abs/2202.04818，2022年。[BMMS86] R. Bruner、P. May、J. McClure 和 M. Steinberger。 $H_\infty$ 环谱及其应用，《数学讲义》第 1176 卷。施普林格出版社，柏林，1986年。[BMS18] B. Bhatt、M. Morrow 和 P. Scholze。整系数 $p$-进霍奇理论。《高等科学研究所数学出版物》128:219–397，2018年。[BMS19] B. Bhatt、M. Morrow 和 P. Scholze。拓扑 Hochschild 同调与整系数$p$-进霍奇理论。《高等科学研究所数学出版物》129:199–310，2019年。[BO78] P. Berthelot 和 A. Ogus。《晶体上同调札记》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1978年。[BR05] R. Bruner 和 J. Rognes。同调同伦不动点谱序列中的微分。《代数与几何拓扑》5:653–690，2005年。[BS19] B. Bhatt 和 P. Scholze。《棱柱与棱柱上同调》。https://arxiv.org/abs/ 1905.08229，2019年。[Bö85] M. Bökstedt。Z 与 Z/$p$Z 的拓扑 Hochschild 同调。比勒费尔德未发表预印本；可在线获取，1985年。

[CM88] M. Crabb 和 S. Mitchell。U($n$)/O($n$) 与 U(2$n$)/Sp($n$) 上的环空间。《剑桥哲学学会数学会刊》，104(1):95–103，1988年。[CMN79a] F. Cohen、J. Moore 和 J. Neisendorfer。二重悬挂与球面同伦群的指数。《数学年刊》(2)，110(3):549–565，1979年。[CMN79b] F. Cohen、J. Moore 和 J. Neisendorfer。同伦群中的挠元。《数学年刊》(2)，109(1):121–168，1979年。[Dev19] S. Devalapurkar。Ando-Hopkins-Rezk 定向是满射的。https://arxiv.org/abs/1911.10534，2019年。[Dev22] S. Devalapurkar。椭圆曲线的霍奇理论与 Hopf 元 $\nu$。《伦敦数学学会会报》；可见 https://doi.org/10.1112/blms.12759，2022年。[Dev23a] S. Devalapurkar。通过不稳定同伦论构造高色数 Thom 谱。https://arxiv.org/abs/2004.08951；即将发表于《代数与几何拓扑》，2023年。[Dev23b] S. Devalapurkar。提升到截断 Brown-Peterson 谱以及特征 $p > 0$ 下的霍奇-德拉姆退化。https://arxiv.org/abs/2303.00739，2023年。[DFHH14] C. Douglas、J. Francis、A. Henriques 和 M. Hill。《拓扑模形式》，第 201 卷《数学调查与专著》。美国数学会，2014年。[DGM13] B. Dundas、T. Goodwillie 和 R. McCarthy。《代数 K 理论的局部结构》，第 18 卷《代数与应用》。施普林格伦敦出版社有限公司，伦敦，2013年。[DHL+23] S. Devalapurkar、J. Hahn、T. Lawson、A. Senger 和 D. Wilson。圆盘代数的例子。https://arxiv.org/abs/2302.11702，2023年。[DHS88] E. Devinatz、M. Hopkins 和 J. Smith。幂零性与稳定同伦论 I。《数学年刊》(2)，128(2):207–241，1988年。[DI87] P. Deligne 和 L. Illusie。模 $p^2$ 提升与德拉姆复形的分解。《数学发明》，89(2):247–270，1987年。[DJK+86] D. Davis、D. Johnson、J. Klippenstein、M. Mahowald 和 S. Wegmann。谱 ($P \wedge$BP⟨2⟩)$_{-\infty}$。《美国数学会汇刊》，296(1):95–110，1986年。[DM81] D. Davis 和 M. Mahowald。稳定同伦论中的 $v_1$-周期性与 $v_2$-周期性。《美国数学杂志》，103(4):615–659，1981年。[DM23] S. Devalapurkar 和 M. Misterka。广义 $n$-级数与德拉姆复形。即将出版，2023年。[DMPR17] E. Dotto、K. Moi、I. Patchkoria 和 S. Reeh。实拓扑 Hochschild 同调。https://arxiv.org/abs/1711.10226，2017年。[DR23] S. Devalapurkar 和 A. Raksit。待定。即将出版，2023年。[Dri21] V. Drinfeld。在 Spf $\mathbb{Z}_p$ 的棱柱化上定义的一维形式群。http://arxiv.org/abs/2107.11466，2021年。[Dri22] V. Drinfeld。棱柱化。https://arxiv.org/abs/2005.04746，2022年。[GIKR18] B. Gheorghe、D. Isaksen、A. Krause 和 N. Ricka。$\mathbb{C}$-动机模形式。https://arxiv.org/abs/1810.11050，2018年。[HHK+20] J. Hahn、A. Horev、I. Klang、D. Wilson 和 F. Zou。Thom 谱的等变非阿贝尔庞加莱对偶与等变因子化同调。https://arxiv.org/abs/2006.13348，2020年。[HM02] M. Hopkins 和 M. Mahowald。具有可提升到 $B$O[8] 的法丛的 24 维流形的结构。载于《同伦论近期进展》（美国马里兰州巴尔的摩，2000年），《当代数学》第 293 卷，第 89–110 页。美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2002年。[Hop84] M. Hopkins。某些环空间的稳定分解。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，1984年。博士论文——西北大学。[Hor20] R. Horiuchi。周期拓扑循环同调的非幂零不变性。《同调、同伦与应用》，22(2):173–179，2020年。[HRW22] J. Hahn、A. Raksit 和 D. Wilson。交换环谱的拓扑循环同调上的动机滤过。https://arxiv.org/abs/2206.11208，2022年。[HW20] J. Hahn 和 D. Wilson。截断 Brown-Peterson 谱的红移与乘法。https://arxiv.org/abs/2012.00864，2020年。[Ill22] L. Illusie。在 Bhatt-Lurie 、 Drinfeld 等人的工作之后，德拉姆上同调的新视角。https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~illusie/DI-slides-new.pdf，2022年。[Kal08] D. Kaledin。通过 Deligne-Illusie 方法证明非交换霍奇到德拉姆退化。《纯粹与应用数学季刊》，4(3，专辑：纪念 Fedor Bogomolov，第 2 部分):785–875，2008年。

[Kal17] D. Kaledin。循环同调的谱序列。载于《21世纪的代数、几何与物理学》，《数学进展》第 324 卷，第 99–129 页。Birkhäuser/Springer，Cham，2017年。[Kit20] N. Kitchloo。HZ/$p^k$ 作为 Thom 谱与拓扑 Hochschild 同调。《美国数学会会刊》，148:3647–3651，2020年。[KM21] S. Kelly 和 M. Morrow。赋值环的 $K$ 理论。《组合数学》，157(6):1121–1142，2021年。[KN96] S. Kobayashi 和 K. Nomizu。《微分几何基础》。第一卷。《Wiley 经典丛书图书馆》。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1996年。1963年原版重印，Wiley-Interscience 出版物。[KN19] A. Krause 和 T. Nikolaus。Bökstedt周期性与离散赋值环的商。https://arxiv.org/abs/1907.03477，2019年。[Law 18] T. Lawson。素数 2 处 Brown-Peterson 谱的二次幂运算。《数学年刊》(2)，188(2):513–576，2018年。[Law19] T. Lawson。 $E_n$-环谱与 Dyer–Lashof运算。http://www-users.math.umn.edu/~tlawson/papers/dyerlashof.pdf，2019年。[Law21] T. Lawson。展开相对 Tate 对角映射。《拓扑学杂志》，14(2):674–699，2021年。[Lee22] D. Lee。连通复 K 理论的整数拓扑 Hochschild 同调。https://arxiv.org/abs/2206.02411，2022年。[LM00] A. Lindenstrauss 和 I. Madsen。数环的拓扑 Hochschild 同调。《美国数学会汇刊》，352(5):2179–2204，2000年。[LMMT20] M. Land、A. Mathew、L. Meier 和 G. Tamme。染色局部化代数 K 理论中的纯性。https://arxiv.org/abs/2001.10425，2020年。[LN14] T. Lawson 和 N. Naumann。Steenrod 代数上的图表的严格交换实现，以及素数 2 处的拓扑模形式。《国际数学研究论文集》，10:2773–2813，2014年。[Lur15] J. Lurie。代数 K 理论中的旋转不变性。https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/Waldhaus.pdf，2015年。[Lur18] J. Lurie。椭圆上同调 II：定向。http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/Elliptic-II.pdf，2018年。[LV94] B. Loo 和 A. Verjovsky。关于 Hopf纤维化的商。《的里雅斯特大学数学研究所学报》，26(1-2):103–108 (1995)，1994年。[LW20] R. Liu 和 G. Wang。局部域的拓扑循环同调。https://arxiv.org/abs/2012.15014，2020年。[Mah79] M. Mahowald。作为 Thom复形的环谱。《杜克数学杂志》，46 559，1979 3 549( ): – 。[Mah81a] M. Mahowald。 $b$o-分解。《太平洋数学杂志》，92(2):365–383，1981年。[Mah81b] M. Mahowald。首个 $v_2$-周期族。《数学杂志》，177(3):381–393，1981年。[Mah82] M. Mahowald。

$J$ $EHP$ $2$ 116 1 65 112, 在序列中 1982 的像。《数学年刊》( )，( ): – 。[Mao20] Z. Mao。作为 Thom 谱的完美环。https://arxiv.org/abs/2003.08697，2020年。[Mat20] A. Mathew。Kaledin退化定理与拓扑 Hochschild 同调。《几何与拓扑》，24(6):2675–2708，2020年。[Mat21] A. Mathew。关于 $K$(1)-局部 TR。《组合数学》，157(5):1079–1119，2021年。[Mat22] A. Mathew。拓扑 Hochschild 同调的一些近期进展。《伦敦数学学会会报》，54(1):1–44，2022年。[May70] P. May。Steenrod运算的一般代数方法。载于《Steenrod 代数及其应用》（庆祝 N. E. Steenrod 六十寿辰会议论文集，美国俄亥俄州哥伦布市 Battelle 纪念研究所，1970年），《数学讲义》第 168 卷，第 153–231 页。施普林格，柏林，1970年。[Mil19] H. Miller。余模、层与正合函子定理。载于《同伦论：工具与应用》，《当代数学》第 729 卷，第 205–220 页。美国数学会， [Providence], RI，2019年。[MR99] M. Mahowald 和 C. Rezk。Brown-Comenetz对偶与 Adams谱序列。《美国数学杂志》，121(6):1153–1177，1999年。[MRS01] M. Mahowald、D. Ravenel 和 P. Shick。望远镜猜想的三重环空间方法。载于《代数拓扑中的同伦方法》（美国科罗拉多州博尔德，1999年），《当代数学》第 271 卷，第 217–284 页。美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2001年。

[MRT19] T. Moulinos、M. Robalo 和 B. Toën。《通用 HKR 定理》。https://arxiv. org/abs/1906.00118v2，2019年。[MS93] J. McClure 和 R. Staffeldt。《关于 $b$u 的拓扑 Hochschild 同调》。I.《美国数学杂志》，115(1):1–45，1993年。[MU77] M. Mahowald 和 A. Unell。《素数 2 处球面不稳定同伦中的 Bott 周期性》。http://www.mit.edu/~ sanathd/mahowald-unell-bott.pdf，1977年。[Nei81] J. Neisendorfer。《3 83，1981 90 1 63 - primary exponents》。《剑桥哲学学会数学会刊》，( ): – 。[NS18] T. Nikolaus 和 P. Scholze。《关于拓扑循环同调》。Acta Math.，221(2):203– 409，2018年。[Pet17] E. Peterson。《形式几何与博尔迪兹曼运算》。https://github.com/ ecpeterson/FormalGeomNotes，2017年10月。[Pet23] A. Petrov。《德拉姆复形的不可分解性与 Sen 算子的非半单性》。https://arxiv.org/abs/2302.11389，2023年。[Pst18] P. Pstragowski。《合成谱与胞腔动机范畴》。https://arxiv. org/abs/1803.01804，2018年。[PV19] A. Petrov 和 V. Vologodsky。《特征 $p$ 下 DG 范畴的周期拓扑循环同调》。https://arxiv.org/abs/1912.03246，2019年。[QS21] J. Quigley 和 J. Shah。《两种实分圆谱理论的等价性》。https://arxiv.org/abs/2112.07462，2021年。[Rak20] A. Raksit。《 $q$-德拉姆上同调与复 K 理论》。芝加哥大学演讲；海报见 http://math.uchicago.edu/~algtop/posters/20201201.pdf，2020 年。[Rav84] D. Ravenel。《关于某些周期同调理论的局部化》。《美国数学杂志》，106(2):351–414，1984年。[Rav86] D. Ravenel。《复博尔迪兹曼与球面的稳定同伦群》。Academic Press，1986年。[ Rig21] N. Riggenbach。《 $S^1$ 在 $K$理论与拓扑循环同调中的组装映射》。ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2021年。博士论文——印第安纳大学。[Sch81] R. Schultz。《齐性空间的紧纤维化》。I. Compositio Math.，43(2):181– 215，1981年。[Sch17] P. Scholze。《算术几何中的典范 $q$-变形》。Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)，26(5):1163–1192，2017年。[Sen17] A. Senger。《奇素数处 Brown-Peterson 谱并非 $\mathbb{E}_{2(p^2+2)}$》。https:// arxiv.org/abs/1710.09822，2017年。[Tod62] H. Toda。《球面同伦群中的复合方法》。数学研究年刊，第49号。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，N.J.，1962年。[Tsa97] S. Tsalidis。《关于整数的拓扑循环同调》。《美国数学杂志》，119(1):103–125，1997年。[Yan92] D. Yan。《关于 Ω(SU($n$)/SO($n$)) 上的 Thom 谱与 Mahowald 的 $X_k$ 谱》。Proc. Amer. Math. Soc.，116(2):567–573，1992年。

1号牛津街，马萨诸塞州剑桥市 02139电子邮箱地址：
sdevalapurkar@math.harvard.edu，2023年3月31日