arXiv:2303.17347v3 [math-ph] 5 Dec 2023

紧束缚模型中的布洛赫电子系统与量子平面中的 Hom-Lie-Virasoro 对称性

Naruhiko Aizawa [a], * 和 Haru-Tada Sato [a], [b]
[a] 大阪公立大学理学院物理系，中百舌鸟校区，日本大阪市堺市，邮编 599-8531
[b] i's Factory Corporation, Ltd. 数据科学系，日本东京神田锦町 2-7-6，邮编 101-0054

摘要

我们讨论离散布洛赫电子系统（即所谓的紧束缚模型，TBM）中以及其连续系统中的 Virasoro代数的 Curtright-Zachos（CZ）变形及其扩展，并从磁平移（MT）群的角度进行阐述。我们验证，CZ 生成元本质上由特定组合的 MT 算子构成，这些算子表示变形和未变形的 $U(1)$ 平移群，并决定 $*$-括号对易子的相位因子。通过将离散 MT 作用的 AB 相位因子解释为量子平面的涨落参数 q，这些相位因子可表示为可交换的 $U(1)$ 算子的 $*$-有序乘积。我们还表明，某些 TBM 哈密顿量序列可由 CZ 生成元描述。

关键词：量子平面，q 变形，Virasoro代数，Hom-Lie 代数，磁平移，紧束缚模型 数学学科分类：17B61, 17B68, 81R50, 81R60

* 通讯作者。电子邮箱：aizawa@omu.ac.jp

1 引言

1.1 FFZ 与莫亚尔变形

Moyal 正弦代数（FFZ代数） [1] 与莫亚尔括号变形有关。莫亚尔括号变形是一种著名的泊松括号的李代数变形，并已应用于描述多个领域中的非交换现象，例如弦理论中的非交换几何和量子霍尔物理。

莫亚尔括号及其星乘积定义为 [2]

$$\{f(x,p),g(x,p)\}_* = \frac{2}{\hbar}\sin\left(\frac{\hbar}{2}\theta^{ab}\partial_1^a\partial_2^b\right)f(x,p)g(x,p)\,, \tag{1.1}$$

$$f*g = \exp\left\{i\frac{\hbar}{2}\theta^{ab}\partial_1^a\partial_2^b\right\}f(x,p)g(x,p)\,, \tag{1.2}$$

其中， $\theta^{xp}=-\theta^{px}=-\theta$、 ∂_1 和 ∂_2 分别表示向前（左）导数运算和向后（右）导数运算。莫亚尔对易子与莫亚尔括号相关

$$[f,g]_* = f*g-g*f = i\hbar\{f,g\}_* \tag{1.3}$$

并且通常称为莫亚尔变形或莫亚尔量子化，可以将其视为狄拉克括号的量子变形

$$i\hbar\{f,g\}_* \to [f,g]\,. \tag{1.4}$$

众所周知，如果取相空间 T^2 的基$\tau_{n,\ k}=e^{i(nx+kp)}$ ，则这种量子化会导出所谓的 SU（∞）李代数，即莫亚尔正弦代数:

$$[\tau_{n,k},\tau_{m,l}] = 2i\sin(\frac{\hbar\theta}{2}(nl-mk))\tau_{n+m,k+l}\,. \tag{1.5}$$

在变形量子化的语境下，可以保留星乘积结构

$$[\tau_{n,k},\tau_{m,l}]_* = 2i\sin(\frac{\hbar\theta}{2}(nl-mk))\tau_{n+m,k+l}\,. \tag{1.6}$$

本文所称的 FFZ代数最初由（1.5）给出，其中引入了变形参数 q 以及 q-括号，适用于任意对象 A

$$q=e^{i\hbar\theta}\,,\quad \text{and}\quad [A]=\frac{q^A-q^{-A}}{q-q^{-1}}\,. \tag{1.7}$$

改变归一化

$$T_{(n,k)} = \frac{1}{q-q^{-1}}\tau_{n,k} \tag{1.8}$$

我们得到 FFZ代数

$$[T_{(n,k)},T_{(m,l)}] = [\frac{nl-mk}{2}]T_{(n+m,k+l)}\,, \tag{1.9}$$

其中我们假设 $\tau_{n,\ k}$ 可推广为任意一个表现得类似于 Moyal星积 [1]的算子

$$\tau_{n,k}\tau_{m,l} = q^{\frac{nl-mk}{2}}\tau_{n+m,k+l}\,. \tag{1.10}$$

众所周知，磁平移（MT）算符满足这一融合关系 [3]。

1.1.1 非交换几何

非交换空间上的量子场论 [4] 是莫亚尔括号的众多应用之一。据报道，在恒定 Neveu-Schwarz B场作用下，受限于 D膜的开弦端点坐标与某种非交换代数相关[5]。边界非交换空间上的场论（称为非交换场论）在弦理论和 M理论中备受关注，其非交换性由莫亚尔星括号 $[x^\mu, x^\nu]_* = i\hbar\theta^{\mu\nu}$.来表达。这种非交换特征被认为源于与恒定磁场中二维量子力学的非交换磁平移相同的思想 [3]。

量子引力中还有一个与无限维对称性相关的有趣课题。近期，人们在非交换性和$W_{1+\infty}$ 代数 [6], 的背景下研究了自对偶引力的莫亚尔变形，而其经典对应物 $w_{1+\infty}$ 代数 [7] 则与渐近平坦四维量子引力中的软引力子对称性相关 [8]

$$[w_n^p, w_m^q] = (n(q-1) - m(p-1))w_{n+m}^{p+q-2}\,. \tag{1.11}$$

1.1.2 量子霍尔效应

另一方面，量子霍尔物理[9, 10] 以及边缘激发的共形场论和体物理扩展 [11]中也研究了另一类 W_∞ 代数。众所周知， W_∞ 与不可压缩流体的保面积微分同胚（综述见[12]）有关。生成元 $\tilde{w}_n^k$ 满足 [13]

$$[\tilde{w}_n^k, \tilde{w}_m^l] = ((k+1)(m+1) - (n+1)(l+1))\tilde{w}_{n+m}^{k+l}\,, \tag{1.12}$$

其生成函数 $\rho(k,\bar{k})$由 $\tilde{w}_n^k$ 作为傅里叶分量[14] 组成，满足 Girvin-MacDonald-Platzman 代数 [10]

$$[\rho(k,\bar{k}), \rho(p,\bar{p})] = (e^{p\bar{k}/4} - e^{\bar{p}k/4})\rho(k+p, \bar{k}+\bar{p})\,. \tag{1.13}$$

有趣的是，通过改变归一化，该关系可以与 FFZ 对易关系（1.9）对应起来

$$\rho(k,\bar{k}) = e^{-\frac{k\bar{k}}{8}} W_{k,\bar{k}}\,, \tag{1.14}$$

这将导致 [14]

$$[W_{k,\bar{k}}, W_{p,\bar{p}}] = 2\sinh\left(\frac{p\bar{k} - \bar{p}k}{8}\right) W_{k+p,\bar{k}+\bar{p}}\,. \tag{1.15}$$

1.2 量子代数与霍尔效应

量子霍尔效应的另一个有趣方面是，它与二维晶格系统中的可积模型存在某种关联。当哈密顿量可以用对称性生成元表示时，动力学对称性的代数方法非常有用。恒定磁场中Bloch电子的问题可以通过利用磁平移群与 $U_q(sl_2)$量子群[15] 之间的关系来求解（严格来说是量子代数，它是一个泛包络代数，其中

具有非余交换霍普夫代数结构 [15, 16, 17, 18]）。磁场中二维方格晶格上粒子的哈密顿量（紧束缚模型）由 U_q（sl_2）升降算符组成，这些算符表示于 N维韦尔基 X 和 Y 中，并满足对易关系$qXY = YX$ [19]。在三角晶格上采用相同的方法时，如下所示： [20] 添加第3个基 Z使其满足 $qZX = XZ$ 以及 $qYZ = ZY$。这些模型的谱可以通过求解Bethe拟设类型的代数方程来表示 [19, 20, 21]。离散系统中的磁平移由韦尔基矩阵的乘积给出，其对易关系伴随着一个全局相位因子，例如 $q^2T_xT_y = T_yT_x$ ，这是由于韦尔对易关系所致。

在连续坐标系中，磁平移由微分算子构成，其相位因子不再是全局性的，而是包含局部参数，如（1.6）所示，并且哈密顿量无法用那些量子群生成元表示。然而，有趣的是，确实存在由磁平移 U_q（sl_2）表示的量子代数生成元 [22] ，其形式在某种程度上与晶格系统的情形相平行。赋予这些生成元莫亚尔型局部参数（1.6）后，还可以进一步将其扩展为 q-变形 Virasoro（超）代数 [23, 24] ，并在场论背景下加以研究 [25, 26, 27, 28, 29, 30]。尽管这些变形代数并非量子代数，而是无限维李代数，但其中一个显著的有趣之处无疑是磁平移呈现出的莫亚尔非交换特征。尽管紧束缚哈密顿量在连续极限下与连续系统有明确的对应关系，但磁平移的性质（如量子群和韦尔基）是否得以继承仍不清楚。换言之，尽管它们具有上述类似特征，人们仍认为这些性质在极限中会消失，或不会出现在极限中。

与量子霍尔效应和 q-变形代数相关的另一种有趣方法，是采用 Tsallis统计 [31] 进行热力学计算 [32, 33, 34]。

1.3 量子空间与 CZ代数

为了揭示真相并解决这种矛盾的局面，量子群和平面或许能有所助益。量子群 [35] 是描述非交换几何的另一种概念，其构造方式使其成为量子代数 [36, 37]的对偶对象。它们是矩阵群的变形，其矩阵元素遵循某些由变形参数 q决定的对易关系。量子空间具有非对易坐标 X^i 及其微分 $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial X^i}$，它们满足以下关系

$$X^iX^j = B^{ij}_{kl}X^kX^l\,, \quad \partial_i\partial_j = F^{lk}_{ji}\partial_k\partial_l\,, \quad \partial_jX^i = \delta^i_j + C^{ik}_{jl}X^l\partial_k\,, \tag{1.16}$$

其中系数矩阵 B、 C 和 F 满足某些杨-巴克斯特关系 [38]。这确保坐标及其导数在量子群矩阵作用下具有协变性。一个引人入胜且最简单的例子是 $GL_q(1,1)$ 量子超空间的玻色子部分

$$\partial_x x = 1 + q^{-2}x\partial_x\,, \tag{1.17}$$

因为该量子空间中的Virasoro算子

$$L_n = -q^{-1}x^{n+1}\partial_x \tag{1.18}$$

满足另一种称为 Curtright-Zachos（CZ）代数 [39] 的 q-变形Virasoro代数

$$[\,L_n\,,L_m\,]_{(m-n)} = [n-m]L_{n+m}\,, \tag{1.19}$$

其中符号 $[x]$ 定义于（1.7）中，左侧的括号表示变形对易子 $[A,B]_{(x)} = q^x AB - q^{-x}BA$. 关于 CZ代数表示的研究成果众多，例如： q-谐振子 [40], 中心扩张 [41, 42] 以及算符乘积公式（OPE） [42], 矩阵表示 [43],量子空间微分演算[44, 45, 46], 和分数自旋表示 [47]。多参数变形 [48, 49] 和超对称扩展 [44, 45, 50] 也得到了研究。受其在物理系统中的应用启发，人们开展了若干研究：孤子方程的变形[51, 52], 变换为对易子形式[52], Jacobi一致性条件 [42, 53], 等。

1.4 内容

本文的目的有三点：第一，阐明代数（1.19）对易子变形中所使用相位因子的动力学起源。第二，阐明相位因子与量子平面图像之间的关系，该图像与具有量子代数对称性的物理模型相关。第三，介绍构造 CZ 生成元的各种方法。我们研究基于 MT 代数和离散磁平移（DMT）代数的 CZ 生成元的一些性质，并讨论它们与紧束缚模型（TBM）相关的哈密顿系统之间的关系。紧束缚模型是在恒定磁场中描述二维晶格上粒子的离散模型。我们期望看到空间量子化，或者更确切地说，量子平面结构，是 TBM 中空间离散化所产生的自然效应；此外，已知 TBM 还具有量子代数对称性 $U_q(sl_2)$（见附录 A）。

在第 2 节中，我们回顾 CZ 代数的一些性质，并介绍数学框架和 MT 代数，将其作为我们的基本工具。第 5 节回顾 TBM 中的磁平移。在第 3 节中，我们从代数的 q-导数表示出发，考察 CZ 代数的 MT 实现。我们提出一个广义代数 CZ^*，其中包含作为子代数的 CZ 代数。这些代数的生成元由特定 MT 算符的某些组合构成，所有这些代数以及 MT 代数都可以通过具有 $*$-乘积结构的变形对易子统一表示。 [1] CZ^* 生成元的结构由交换 MT 部分和非交换 MT 部分组成。交换部分起基本 CZ 代数关系（代数的结构常数）的作用，非交换部分则起 $*$-交换平移的非局域算符（变形 U（1））的作用，同时也用于定义 $*$-乘积相位因子的权重。

在第4节中，我们构造了 CZ^* 的矩阵表示，并验证了第3 节中给出的表示的性质（我们将第3 节中的表示称为“交换表示”）。我们研究了量子平面结构和 $*$-括号结构如何在 CZ^* 代数中产生的机制。 CZ^* 包含两个子代数 $CZ^{\pm}$，它们对应于 TBM 中量子平面上的两个正交方向。第4.2节概述了交换表示的作用和意义。第4.3 节定义了CZ^* 表示的代数族，这些表示为 TBM 哈密顿量序列提供了基础，以便进行具体验证

1) 目前尚不清楚我们的 $*$-乘积是否与 Moyal $*$-乘积相同，不过为方便术语使用，我们采用相同的符号，不会造成严重混淆。

第 5 节中对此有说明。第 4.4 节提出了我们 $*$-乘积的另一种定义。我们首先证明，交换表示由两个方向上的 DMT 单位的复合算符组成。然后，利用交换表示并引入 $*$-排序乘积的概念，我们基于 TBM 中 DMT 的量子平面图像，阐述 CZ^* 交换子的相位因子的出现。DMT 的矩阵表示的推导见附录 B，其中也验证了它们满足 MT 代数。

在第 5节中，我们讨论由 CZ^* 代数的矩阵表示普遍表示的 TBM 哈密顿量序列。在第 5.1节中，我们推导 DMT 代数（交换、融合和环流规则），并观察到 AB 相位与伴随 DMT 运动的量子平面涨落之间的对应关系。在第 5.2节中，我们利用 H_k 的 $n = \pm 1$模态描述 TBM 哈密顿量序列 $\check{}\, CZ^*$ 族生成元。第 5.3 节讨论了将 CZ^* 族的一般模态扩展至哈密顿系统 $\hat{}\, H_n$ 的情况，其中磁晶格的有效间距从 1 扩展到 n。在第 5.4节中，更一般的序列 $\hat{}\, H_{(n,k)}$ （量子平面涨落的幂次为 q）从 1 扩展到 k，并由真正的 CZ^* 生成元表示。为帮助理解第 5节中使用的一些公式，我们回顾原始 TBM 哈密顿量的量子群对称性，并在附录 q中补充关于哈密顿量的 -反演对称性的说明A。

2 Curtright-Zachos（CZ）代数

我们简要回顾 CZ 代数的数学框架。括号变形有两种类型，它们引入相位因子的方式不同。相位因子的引入方式取决于 CZ 代数生成元的具体实现。也就是说，相位因子如何引入并无先验的确定方法，因此我们必须从生成元的一种实现入手。然而，目前唯一已知且具有物理意义的实现是谐振子的变形，因此我们需要其他实现来探究 CZ 代数的物理和数学性质。为此，在第2.2节中，我们引入磁平移（MT）代数，它是物理系统中 Moyal 正弦代数（FFZ 代数）的一种典型实现。MT 算符对易时产生相位因子的性质与 CZ 代数的变形对易关系相容，因此非常便于研究 CZ 代数的各种特征。在后续章节中，我们将利用 MT 表示说明存在一个包含 CZ 代数的更大的代数，并探讨这些代数整体的 $*$-括号表述。

2.1 括号变形

CZ代数既不是标准李代数，也不是量子代数，而是一种 Hom-Lie 代数 [54, 55,56], ，即满足斜对称性和 Hom-Jacobi 条件的变形李代数 [56]。Hom-Lie 代数最初由 [54] 提出，其动机是向量场经过扭曲离散化后得到的变形李代数实例。斜对称性由以下关系给出

$$[L_n, L_m]_{(m-n)} = -[L_m, L_n]_{(n-m)} \,. \tag{2.1}$$

CZ代数的 Hom-Jacobi条件表示为

$$(q^n + q^{-n})[L_n, [L_m, L_\ell]_{(\ell-m)}]_{(m+\ell-n)} + \text{cyc. perm.} = 0\,, \tag{2.2}$$

而这一条件由两部分组成。一部分是 Yang-Baxter结合关系

$$[L_n, [L_m, L_\ell]_{(\ell-m)}]_{(m+\ell-2n)} + \text{cyc. perm.} = 0\,, \tag{2.3}$$

另一部分是一致性条件 [42]

$$[L_n, [L_m, L_\ell]_{(\ell-m)}]_{(m+\ell)} + \text{cyc. perm.} = 0\,. \tag{2.4}$$

在 q-谐振子和量子超空间中的表示，以及（1.18）已知满足这些条件 [44, 45, 52]。

区别于通常 Virasoro代数的另一个特征是中心元的存在 S_0 [42]

$$S_0 = 1 + (q - q^{-1})L_0\,, \tag{2.5}$$

满足对易关系

$$S_0^k L_n = q^{-2nk} L_n S_0^k\,, \quad \text{or} \quad [S_0^k, L_n]_{(nk,-nk)} = 0\,. \tag{2.6}$$

不同于标准量子代数和李代数，CZ代数是根据变形括号定义的。根据定义变形对易子的方式，我们有两种表达 CZ代数（1.19）的选择：一种是外在型

$$[\,A\,,B\,]_{(x,y)} = q^x AB - q^y BA\,, \tag{2.7}$$

$$[A, B]_{(x)} = [A, B]_{(x,-x)} = q^x AB - q^{-x} BA\,, \tag{2.8}$$

另一种是内在型

$$[A, B]_* = A * B - B * A\,. \tag{2.9}$$

附加在公式（2.7）和（2.8）中乘积上的相位因子 q^x 是手动给出的。另一方面，在（2.9）中，这些因子被隐含地包含在 $A * B$ 的定义中；根据由相空间结构 [2)] 确定的某种乘积机制，该定义应当产生相位因子，这与莫亚尔对易子类似。这并不一定意味着要提供莫亚尔星积。

暂且不讨论为什么这些乘积采用以下形式以及其本质来源是什么，我们假设

$$L_n * L_m = q^{m-n} L_n L_m\,, \tag{2.10}$$

$$S_0^k * L_n = q^{nk} S_0^k L_n\,, \tag{2.11}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} [L_n, L_m]_* &= [\,L_n\,, L_m\,]_{(m-n)} \\ &= q^{m-n} L_n L_m - q^{n-m} L_m L_n\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2)我们在原始论文中将乘积定义为 $(A_n B_m)_{\ q} = q^{m-n} A_n B_m$ [42]。

为了寻找式（2.10）的某种起源，我们将在第3节考察 CZ 代数的 MT 表示。在第4.4节，我们还将进一步探讨二维方格晶格上的紧束缚模型（TBM）中离散磁平移（DMT）的数学特征（量子平面和 $*$-有序乘积）。

2.2 磁平移代数（MTA）

恒定磁场中连续坐标曲面上的带电粒子的磁平移$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}}$ 以微分算子的形式以下述非局域方式表示（单位选择 $\phi_0 = hc/e = 1$）

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}} = e^{2\pi i \xi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{R})} T_{\boldsymbol{R}}\,, \tag{2.13}$$

其中，$T_{\boldsymbol{R}}$ 表示平移 $\boldsymbol{R}$，ξ 是由下式定义的规范函数

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \nabla \xi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{R})\,. \tag{2.14}$$

它们满足以下代数关系（交换与融合规则）：

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2} = e^{2\pi i\phi}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\,, \tag{2.15}$$

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2} = e^{2\pi i\xi(\boldsymbol{R_1},\boldsymbol{R_2})}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R_2}+\boldsymbol{R_1}}\,, \tag{2.16}$$

由此可导出环流代数 [3]

$$\hat{\tau}^{-1}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}^{-1}_{\boldsymbol{R}_2}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2} = e^{2\pi i\phi}\,, \tag{2.17}$$

其中，ϕ 是磁通量（与圆周运算端点所围成的面积 $|\boldsymbol{R}_1 \times \boldsymbol{R}_2|$ 成正比）。它由两点之间规范函数的差给出

$$\phi = \xi(\boldsymbol{R_1},\boldsymbol{R_2}) - \xi(\boldsymbol{R_2},\boldsymbol{R_1})\,, \tag{2.18}$$

其中我们记

$$\boldsymbol{R_1} = (n_1, m_1) = (n, k)\,, \quad \boldsymbol{R_2} = (n_2, m_2) = (m, l)\,. \tag{2.19}$$

本文将交换、融合和环流规则统称为 MTA（磁平移代数）。引入参数 q，其磁长为 $l_B = \sqrt{\hbar c/eB}$、单位长度为 a，磁场为 B,

$$q = \exp\left(2\pi i \frac{Ba^2}{\phi_0}\right) = \exp\left(ia^2 l_B^{-2}\right)\,, \tag{2.20}$$

在选择对称规范的情况下，我们有

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2} = q^{nl-mk}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\,, \tag{2.21}$$

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2} = q^{\frac{nl-mk}{2}}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R_1}+\boldsymbol{R_2}}\,. \tag{2.22}$$

$$\hat{\tau}^{-1}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}^{-1}_{\boldsymbol{R}_2}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_1}\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_2} = q^{nl-mk}\,. \tag{2.23}$$

将归一化变换应用于（2.22）

$$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}_i} = \hat{\tau}^{(m_i)}_{n_i} = (q - q^{-1})\hat{T}^{(m_i)}_{n_i}\,, \tag{2.24}$$

我们通过 MTA 得到 FFZ 代数的实现（1.9） [1]

$$[\hat{T}_n^{(k)}, \hat{T}_m^{(l)}] = [\frac{nl - mk}{2}]\hat{T}_{n+m}^{(l+k)} . \tag{2.25}$$

作为$\hat{\tau}_n^{(k)}$的一个简单例子，让我们考察圆柱坐标 $w = \ln z$ 的单位圆 $z = e^{i\theta}$ 上的角动量相空间（连同一个自旋值 Δ）。不同于通常由规范协变导数$\hat{\pi}_i = \hat{p}_i + \frac{e}{c}A_i$ 描述的形式$\hat{\tau}_{\boldsymbol{R}} = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\pi}}$，在这种情况下我们有

$$\hat{\tau}_n^{(k)} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\Theta}\right) = z^n q^{-k(z\partial+\frac{n}{2}+\Delta)} , \tag{2.26}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta} = (\frac{\hbar}{l_B}\theta, -\frac{1}{l_B}\mathcal{J}_3 - \frac{\hbar}{l_B}\Delta) = (-i\frac{\hbar}{l_B}\ln z, -\frac{\hbar}{l_B}(z\partial + \Delta)) , \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{R} = (nl_B, k\frac{a^2}{l_B}) , \qquad \mathcal{J}_3 = -i\hbar\partial_\theta = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) . \tag{2.28}$$

可以 验证（2.26）满足 MTA（2.21）（2.22）（2.23）（为简单起见，可令 $a = l_B = \hbar = 1$。）

3 $*$-括号表述和 CZ^*代数

从 CZ 生成元的 q-微分算子表达式出发，我们给出了通过 MT算子实现 CZ代数的方法，这引出了 $*$-括号表述的思想。在本节中，我们讨论三类 CZ代数系统 $CZ^{\pm}$ 和 CZ^*。

第3.1 节阐述了产生相位因子的原理，使 MT 呈现交换性（即变形U(1)）。通过为 MT 算符和 CZ 生成元（MT 的特殊组合）赋予权重，我们展示了 $*$-括号可由某些规则实现。MT 的两个闭子代数 $\hat{T}^{(0)n}$ 和 $\hat{T}_n^{(2)}$，在 CZ 算符的构造中发挥着重要作用。普通交换算子 $\hat{T}_n^{(0)}$定义了 CZ代数的结构常数，而另一个 $*$-括号交换算子 $\hat{T}_n^{(2)}$则承载着 CZ 算符的权重。

在第 3.2 节中，我们展示了另一个特殊组合 CZ^-，它与 CZ^+ 在q-反演下相互变换。二者 $CZ^{\pm}$ 可在 CZ^* 框架下结合为一个代数系统 $*$-括号。

3.1 q-导数表示的 CZ 代数

考虑微分算子 ∂_q 的 q类比（称为 q-导数），其定义如下：

$$\partial_q f(z) = \frac{f(z) - f(zq^{-2})}{(q - q^{-1})z} . \tag{3.1}$$

它满足以下莱布尼茨法则和公式：

$$\partial_q(f(z)g(z)) = g(z)\partial_q f(z) + f(zq^{-2})\partial_q g(z) , \tag{3.2}$$

$$\partial_q z^n = q^{-n}[n]z^{n-1} . \tag{3.3}$$

通过将 ∂_z 替换为 ∂_q 来定义 $l_n = -z^{n+1}\partial_z$ 的类似物，

$$\hat{L}_n = -z^{n+1}\partial_q \tag{3.4}$$

我们可以验证 $\hat{}\ L_n$ 满足 CZ代数方程（1.19）。

$$[\,\hat{L}_n\,,\hat{L}_m\,]_{(m-n)}=[n-m]\hat{L}_{n+m}\,. \tag{3.5}$$

注意到式（3.1）和（3.4）， q-导数可改写为普通导数的非局域表达式 ∂_z，于是有

$$\hat{L}_n=-z^n\frac{1-q^{-2z\partial}}{q-q^{-1}}\,. \tag{3.6}$$

这与 q-谐振子有关

$$a_q^\dagger=qz\,,\quad a_q=\frac{1}{qz}[z\partial]\,,\quad N=z\partial\,, \tag{3.7}$$

它们满足以下关系

$$a_qa_q^\dagger-qa_q^\dagger a_q=q^{-N}\,,\quad [N]=a_q^\dagger a_q \tag{3.8}$$

$$[N,a_q]=-a_q\,,\quad [N,a_q^\dagger]=a_q^\dagger\,, \tag{3.9}$$

$$\hat{L}_n=-q^{-N}(a_q^\dagger)^{n+1}a_q\,. \tag{3.10}$$

现在，将磁平移（2.26）作用于（3.6），并采用记号（2.24），我们得到 CZ 生成元的另一种表示

$$\hat{L}_n=-\hat{T}_n^{(0)}+q^{n+2\Delta}\hat{T}_n^{(2)}\,. \tag{3.11}$$

为联系 $*$-括号形式，我们考虑 $\hat{}\ L_n$ 和 $\hat{}T_m^{(k)}$的变形对易子。基本代数关系（2.21）和（2.22）使我们能够计算各种变形对易子，例如

$$[\,\hat{L}_n\,,\hat{\tau}_m^{(k)}\,]_{(2m,nk)}=-q^{m+\frac{nk}{2}}[m]\hat{\tau}_{n+m}^{(k)}\,, \tag{3.12}$$

$$[\,\hat{L}_n\,,\hat{T}_m^{(k)}\,]_{(m-\frac{nk}{2})}=-[m]\hat{T}_{n+m}^{(k)}\,, \tag{3.13}$$

$$[\hat{L}_n,\hat{T}_m^{(k)}]=-[\frac{nk}{2}]\hat{T}_{n+m}^{(k)}-[m-\frac{nk}{2}]\hat{T}_{n+m}^{(k+2)} \tag{3.14}$$

利用 ∂_q 与 $q^{-kz\partial}$之间的交换关系即可轻易验证这些结果

$$q^{-kz\partial}\partial_q=q^k\partial_q q^{-kz\partial}\,. \tag{3.15}$$

在这一阶段，还没有准则可以用来从中选出一种。因此，我们需要一个极限条件或原则，以约束附加到对易子变形上的相位因子的形式。

一种可能的策略是依据这样一个事实：当磁场消失时，磁平移应当退化为通常的平移。这自然引出了这样的想法：$\hat{}T_n^{(k)}$应满足平移群 $U(1)$ 的一种变形。因此，最可能的变形方式是在 (2.8) 中附加相位因子，使其抵消融合规则 (2.22) 带来的相位因子，即

$$[\,\hat{T}_n^{(k)}\,,\hat{T}_m^{(l)}\,]_{(\frac{mk-nl}{2})}=0\,. \tag{3.16}$$

我们将 $\hat{}T_n^{(k)}$ 中的上标 k 称为“权重”，并定义 $\hat{}\ L_n$ 的权重为 2。考虑以下对所有整数 n 和 k都成立的算符集合

$$\mathscr{M}=\{\,\hat{T}_n^{(k)},\hat{L}_n\,\} \tag{3.17}$$

并且仅允许与 $\hat{}\ L_n$ 以及 $\hat{}T_n^{(k)}$相同的相位因子，如 (3.16)，由此我们发现，仅有以下三种类型的变形对易子是允许的

$$[\hat{T}_n^{(k)}\,,\hat{T}_m^{(l)}\,]_{(\frac{mk-nl}{2})}\,,\quad [\hat{L}_n\,,\hat{T}_m^{(l)}\,]_{(m-\frac{nl}{2})}\,,\quad [\hat{L}_n\,,\hat{L}_m\,]_{(m-n)}\,, \tag{3.18}$$

其中我们令 $k=2$ 取第二个括号，从而化为（3.13），而令 $k=l=2$ 取第三个括号，从而化为（3.5）。注意，由于括号（2.8）的反对称性，我们省略了一种类型

$$[\,A\,,B\,]_{(x)}=-[\,B\,,A\,]_{(-x)}\,. \tag{3.19}$$

这样，我们采用方程（3.5）、（3.13）、（3.16）作为 $\mathscr{M}$的基本闭代数集合，其中（3.5）是作为Virasoro代数变形的 CZ代数，而（3.16）是磁平移群的一个变形 $U(1)$ 代数，它由 $U(1)$ 平移群变形而来。

总　结论中，我们确认对每个权重为 k 的元素 $X_n^{(k)}\in\mathscr{M}$，都可以定义 $*$-括号（2.9）

$$X_n^{(k)}*X_m^{(l)}=q^{-x}X_n^{(k)}X_m^{(l)}\,,\quad x=\frac{nl-mk}{2} \tag{3.20}$$

并将方程（3.5）、（3.13）、（3.16）整理为统一的括号形式

$$[\hat{T}_n^{(k)},\hat{T}_m^{(l)}]_*=0\,, \tag{3.21}$$

$$[\hat{L}_n,\hat{L}_m]_*=[n-m]\hat{L}_{n+m}\,, \tag{3.22}$$

$$[\hat{L}_n,\hat{T}_m^{(l)}]_*=-[m]\hat{T}_{n+m}^{(l)}\,. \tag{3.23}$$

注意，中心元的代数 (2.6) 表示为

$$[\hat{S}_0^k,\hat{L}_n]_*=0\,,\quad \text{where}\quad \hat{S}_0=1+(q-q^{-1})\hat{L}_0\,, \tag{3.24}$$

若将 (S_0^k 在 $2k$ 中的权重视为 $2k$，则 $2k$ 在 (3.20) 中。

3.2　$CZ^{\pm}$ 与 CZ^{*} 代数

考察 CZ 算符 $\hat{}\ L_n$ 由 $\hat{}T_n^{(k)}$的子代数组成的结构，我们考虑 q对称性反演 $\mathscr{M}$，因为代数集合 (3.21)-(3.23) 在交换 $q\leftrightarrow q^{-1}$时并非不变。

为考察 CZ 代数 (3.22) 的结构，令 $\hat{}T_n^{(k)}$与 $\hat{}L_n$具有相同的相位因子。于是有

$$[\hat{T}_n^{(k)}\,,\hat{T}_m^{(l)}\,]_{(m-n)}=[\frac{n(l-2)-m(k-2)}{2}]\hat{T}_{n+m}^{(k+l)}\,. \tag{3.25}$$

将 k、$l=0$、2 代入此方程，可得 $\hat{}T_n^{(k)}$上权重为 0 和 2 的以下闭子代数，它们是由 (3.11) 定义的 $\hat{}\ L_n$ 的一部分

$$[\hat{T}_n^{(2)}\,,\hat{T}_m^{(2)}\,]_{(m-n)}=0\,,\qquad [\hat{T}_n^{(0)}\,,\hat{T}_m^{(0)}\,]_{(m-n)}=[m-n]\hat{T}_{n+m}^{(0)}\,, \tag{3.26}$$

$$[\hat{T}_n^{(2)}\,,\hat{T}_m^{(0)}\,]_{(m-n)}=[-n]\hat{T}_{n+m}^{(2)}\,,\qquad [\hat{T}_n^{(0)}\,,\hat{T}_m^{(2)}\,]_{(m-n)}=[m]\hat{T}_{n+m}^{(2)}\,. \tag{3.27}$$

$\hat{}\ \hat{}$ 根据这些代数，$[\,L_n\,,L_m\,]_{(m-n)}$ 经验证在不涉及任何其他权重的情况下是封闭的:

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_n\,,\hat{L}_m\,]_{(m-n)} &= (q^n[n]-q^m[m])q^{2\Delta}\hat{T}_{n+m}^{(2)}+[m-n]\hat{T}_{n+m}^{(0)}\\
&= [n-m](q^{n+m+2\Delta}\hat{T}_{n+m}^{(2)}-\hat{T}_{n+m}^{(0)})\\
&= [n-m]\hat{L}_{n+m}\,.
\end{aligned}$$

我们应注意，$\hat{}T_n^{(0)}$是一个可交换局部算子，不包含关于z的微分算子；而$\hat{}T_n^{(2)}$则是一个非可交换非局部微分算子。然而，如式（3.26）所示，从变形对易子的角度看，这一非对易性特征恰好彼此相反。若能找到一组类似于式（3.26）和（3.27）的子代数，就有可能找到另一组类似于$\hat{}$ L_n的算符。

事实上，通过考虑 $\hat{}T_n^{(k)}$的 q反演版本，可以很容易地找到这样的组合（3.25）

$$[\hat{T}_n^{(k)}, \hat{T}_m^{(l)}]_{(n-m)} = [\frac{n(l+2)-m(k+2)}{2}]\hat{T}_{n+m}^{(k+l)}, \tag{3.28}$$

并令 k， $l=0$， -2 我们找到另一个分别对应于方程（3.26）和（3.27）的子代数

$$[\hat{T}_n^{(-2)}, \hat{T}_m^{(-2)}]_{(n-m)} = 0, \qquad [\hat{T}_n^{(0)}, \hat{T}_m^{(0)}]_{(n-m)} = [n-m]\hat{T}_{n+m}^{(0)}, \tag{3.29}$$

$$[\hat{T}_n^{(-2)}, \hat{T}_m^{(0)}]_{(n-m)} = [n]\hat{T}_{n+m}^{(-2)}, \quad [\hat{T}_n^{(0)}, \hat{T}_m^{(-2)}]_{(m-n)} = [-m]\hat{T}_{n+m}^{(-2)}. \tag{3.30}$$

用新记号 $\hat{}L_n^{\pm}$定义 q-反演版本的$\hat{}$ L_n

$$\hat{L}_n^{+} = \hat{L}_n, \qquad \hat{L}_n^{-} = \hat{T}_n^{(0)} - q^{-n-2\Delta}\hat{T}_n^{(-2)}, \tag{3.31}$$

我们得到

$$[\hat{L}_n^{+}, \hat{L}_m^{+}]_{(m-n)} = [n-m]\hat{L}_{n+m}^{+}, \qquad [\hat{L}_n^{-}, \hat{L}_m^{-}]_{(n-m)} = [n-m]\hat{L}_{n+m}^{-} \tag{3.32}$$

$$[\hat{L}_n^{\pm}, \hat{T}_m^{(k)}]_{(\pm m-\frac{nk}{2})} = -[m]\hat{T}_{n+m}^{(k)}, \tag{3.33}$$

其中，我们将（3.32）中的两个代数分别记为 $CZ^{\pm}$ 。我们注意到，（$L_n^{\pm}$ ）中 $\hat{}$3.32的相位因子符号完全相反，而（3.33）中的相位因子关于 $\hat{}L_n^{\pm}$的交换并不对称。这一事实源于 q-反演对称性

$$\hat{\hat{T}}_n^{(k)} \leftrightarrow -\hat{T}_n^{(-k)}, \quad \hat{L}_n^{+} \leftrightarrow \hat{L}_n^{-}. \tag{3.34}$$

$\hat{}$ 然而，如果我们将 L_n^{-} 并入 $\mathscr{M}$，并假设 $\hat{}$ L_n^{-} 的权重为 -2，这一笨拙的组合便会完全消失。因此，将其记号从 $\mathscr{M}$ 改为

$$\mathscr{M}^{*} = \{ \hat{L}_n^{\pm}, \hat{T}_n^{(k)} \}, \tag{3.35}$$

我们可以让新的元素 $\hat{}$ L_n^{-} 参与以下扩展代数，包括式（3.21）-（3.23），以及式（3.20）：

$$[\hat{L}_n^{\pm}, \hat{L}_m^{\pm}]_{*} = [n-m]\hat{L}_{n+m}^{\pm}, \tag{3.36}$$

$$[\hat{L}_n^{\pm}, \hat{T}_m^{(l)}]_{*} = -[m]\hat{T}_{n+m}^{(l)}. \tag{3.37}$$

尽管这两个代数 $CZ^{\pm}$ 分别由式（3.36）表示，但剩余的交叉代数[$\hat{}L_n^{+}$， $\hat{}L_m^{-}]_{*}$ 尚未明确能否纳入可能的 $\mathscr{M}^{*}$ 代数。利用式（3.31），我们得到

$$[\hat{L}_n^{+}, \hat{L}_m^{-}]_{(n+m)} = q^{-m}[n]\hat{L}_{n+m}^{+} - q^{n}[m]\hat{L}_{n+m}^{-}, \tag{3.38}$$

并且，其相位因子经验证确实由（3.20）给出，其中权重 $k = \pm 2$ 作用于$X_n^{(k)} = \hat{}L_n^{\pm}$。

现在我们来证明，（3.36）和（3.38）可以整理成闭代数形式。引入记号 ϵ，η 以表示 $\pm$ 符号，（3.36）和（3.38）可写为

$$[\hat{L}^{\epsilon}_n, \hat{L}^{\epsilon}_m]_* = [n-m]\hat{L}^{\epsilon}_{n+m}\,, \tag{3.39}$$

$$[\hat{L}^{\epsilon}_n, \hat{L}^{\eta}_m]_* = q^{\eta m}[n]\hat{L}^{\epsilon}_{n+m} - q^{\epsilon n}[m]\hat{L}^{\eta}_{n+m}\,. \quad (\epsilon \neq \eta) \tag{3.40}$$

此外，利用公式

$$q^{\epsilon m}[n] - q^{\epsilon n}[m] = [n-m]\,, \tag{3.41}$$

我们可以将 $CZ^{\pm}$ 及其混合代数（3.39）和（3.40）整理为一个最终的紧凑形式

$$[L^{\epsilon}_n, L^{\eta}_m]_* = q^{\eta m}[n]L^{\epsilon}_{n+m} - q^{\epsilon n}[m]L^{\eta}_{n+m}\,, \tag{3.42}$$

我们将其记作 CZ^* 代数。

最后，在本节结束时，我们对 q-导数表达式作简要说明。（3.31）等价于另一种q-导数表示（类似于（3.6）与（3.11）之间的等价关系）

$$\hat{L}^{-}_n = -z^{n+1}\partial^{-}_q = -z^n\frac{q^{2z\partial}-1}{q-q^{-1}}\,, \tag{3.43}$$

其中

$$\partial^{-}_q f(z) = \frac{f(zq^2)-f(z)}{z(q-q^{-1})}\,. \tag{3.44}$$

结合（3.4），我们得到 $q \leftrightarrow q^{-1}$ 对标准 q-导数的对称形式（将 q 替换为q^2）

$$\partial_{q^2} := \frac{\partial^{+}_q + \partial^{-}_q}{q+q^{-1}} = -\frac{\hat{L}^{+}_{-1} + \hat{L}^{-}_{-1}}{q+q^{-1}} = \frac{1}{z}[z\partial]_{q^2}\,. \tag{3.45}$$

这种 q导数用于 CZ^+ 代数 [42, 52]的算符乘积展开形式中。

4 CZ^*的矩阵表示

本节研究 CZ^* 及其相关代数的矩阵表示。我们讨论$CZ^{\pm}$ 交换表示的作用及其与量子平面和 $*$-括号结构的联系。我们还给出 CZ^* 相关代数与 TBM 哈密顿量序列之间关系的初步结果。

首先，我们在第 $CZ^{\pm}$ 节引入矩阵 4.1。 $CZ^{\pm}$ 算符由交换部分和非交换部分组合而成，这一点可从 MT 实现中看出。第 4.2节考察交换表示 X^n 和 Y^n的含义与作用，它们发挥着与 MT 算符 $\hat{T}^{(0)}_n$相同的作用。交换表示在与量子平面图像及 $*$-括号的联系中展现出其重要性。具体验证将在第 4.4节进行。 CZ^* 的矩阵表达式也将在第 4.2节给出。第 4.3 节定义表示序列 CZ^* 族，该序列通过替换 $q \to q^k$得到。我们介绍一些与 TBM 哈密顿量相关的 CZ^* 族的矩阵表示（具体对应关系将在第 5节验证）。

在第4.4节中，考虑 DMT 的一种特殊组合，它为 $CZ^{\pm}$提供交换表示，由此我们基于 TBM 的量子平面图像，推导出 $*$-乘积的另一种定义。DMT 使粒子移动所关联的 AB 相位（见第5.1节）对应于量子平面的涨落

，而连续 DMT 操作产生的相位因子则可表示为某个有序乘积，从而重现 $*$-括号。

4.1 $CZ^{\pm}$ 代数的循环表示

为了研究 CZ^* 代数，我们必须首先建立其生成元。关于 CZ^-的矩阵表示已经 [43], 已知，但其他代数的矩阵表示尚未知。因此，我们必须寻找满足（ CZ^+ 生成元的一般表达式（3.36）。本小节得到的一般表达式并不总是满足 CZ^* 关系式（3.38）。在第 $CZ^{\pm}$ 4.2节中，利用的一个代数自同构可以解决这一问题。

让我们遵循 [43]中给出的基本思想。当 CZ 是单位根时，q 生成元的循环矩阵表示为

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right), \quad N > 2 \tag{4.1}$$

L_n 元素的最小集合如下，具体取决于 N 是偶数还是奇数:

$$\{L_{-m+1}, \cdots, L_{-1}, L_0, L_1, \cdots, L_m\} \quad \text{for} \quad N = 2m \tag{4.2}$$

$$\{L_{-m}, \cdots, L_{-1}, L_0, L_1, \cdots, L_m\} \quad \text{for} \quad N = 2m+1\,. \tag{4.3}$$

称为“基本胞”的最小集合[43] 以及平移群 $G_N = \{G_N^k\colon\ n \to n+kN;\ k \in Z\}$ 在周期为 N（> 2）的一维晶格上产生 CZ 代数的代数自同构

$$L_n \to L_{n+kN}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.4}$$

它们分别对应布洛赫电子系统中的磁性原胞和磁平移群。

引入满足 $X^N = Y^N = 1$ 的 $N \times N$ Wyle 基矩阵 X 和 Y

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q^N \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

或者更确切地说，分量表示

$$(X)_{jk} = \delta_{j,k+1}\,, \quad (Y)_{jk} = q^j \delta_{jk}\,, \quad \text{for} \quad j,k \in [1,N] \pmod N \tag{4.6}$$

我们得到 $CZ^{\pm}$ 满足（3.36）的代数循环矩阵表示

$$\mathrm{L}_n^{\pm} = \mp\left(\frac{1-\mathrm{Q}^{\pm 2}}{q-q^{-1}} + A_n^{\pm}\mathrm{Q}^{\pm 2}\right)\mathrm{H}^n\,, \quad A_n^{\pm} = a_{\pm} + b(q^{\pm 2n}-1)\,, \tag{4.7}$$

其中 $a_{\pm}$ 和 b 是自由参数。H 和 Q 是 [43] 中使用的矩阵。它们与 Wyle 基矩阵的关系为 $\mathrm{H} = X^{-1} = X^T$ 和 $q\mathrm{Q} = Y$，其中 X 和 Y满足以下关系

$$Y^m X^n = q^{mn} X^n Y^m\,. \tag{4.8}$$

4.2 平凡形式与 $CZ^{\pm}$ 的作用

这里我们同时处理 $\mathrm{L}_n^{\pm}$，以便稍后考虑将 $CZ^{\pm}$ 扩展到 CZ^{*}（见本小节末尾）。如后文（第 4.4 节）所述，$\mathrm{L}_n^{\pm}$ 的变形对易子的相位因子对应于在量子平面两个正交方向上的平移，并伴有相位 $q^{\pm 1}$。这是我们在本文中将 CZ 代数扩展到 $CZ^{\pm}$ 的原因之一。

在讨论 CZ^{*} 扩张之前，有必要先作几点说明。首先，Q^2 作为中心元 [43] 的作用可以扩展到 $Q^{\pm 2}$ 以下 $CZ^{\pm}$ 代数：

$$[\mathrm{Q}^2, \mathrm{L}_n^{+}]_{*} = [\mathrm{Q}^2, \mathrm{L}_n^{+}]_{(n,-n)} = 0\,, \quad [\mathrm{Q}^{-2}, \mathrm{L}_n^{-}]_{*} = [\mathrm{Q}^{-2}, \mathrm{L}_n^{-}]_{(-n,n)} = 0\,, \tag{4.9}$$

其中，这些元素与中心元 $S_0^{\pm}$ ($S_0^{+} = S_0$) 相关

$$S_0^{\pm} = 1 \pm (q - q^{-1}) L_0^{\pm} = \{1 - A_0^{\pm}(q - q^{-1})\}\mathrm{Q}^{\pm 2}\,. \tag{4.10}$$

采用统一表达式（$\epsilon = \pm$）的形式，可得到以下关系

$$[\mathrm{Q}^{\epsilon 2k}, \mathrm{L}_n^{\epsilon}]_{(\epsilon nk, -\epsilon nk)} = 0\,, \tag{4.11}$$

and

$$S_0^{\epsilon k} L_n^{\epsilon} = q^{-2\epsilon nk} L_n^{\epsilon} S_0^{\epsilon k}\,, \quad \text{or} \quad [S_0^{\epsilon k}, L_n^{\epsilon}]_{*} = [S_0^{\epsilon k}, L_n^{\epsilon}]_{(\epsilon nk, -\epsilon nk)} = 0\,. \tag{4.12}$$

由此，我们再次识别出 $S_0^{\pm} \propto Q^{\pm 2}$。

第二点说明涉及平凡（可交换）表示

$$\mathrm{L}_n'^{\pm} = \frac{\mp g_n}{q - q^{-1}}\,, \quad g_n g_m = g_{n+m}\,. \tag{4.13}$$

g_n 的两个例子见 [43]

$$g_n = c^n \mathrm{H}^n\,, \quad \text{or} \quad g_n = q^{cn^2} \mathrm{Q}^{2cn} \mathrm{H}^n\,. \quad (\text{for const. } c) \tag{4.14}$$

如（4.7）所示，$\mathrm{L}_n^{\pm}$ 是平凡部分 H^n 和非平凡部分 $\mathrm{Q}^{\pm 2}\mathrm{H}^n$的线性组合。现在回顾一下，$\hat{}L_n^{\pm}$ 也由平凡（交换）$\hat{}T_n^{(0)}$和非平凡（非交换）$\hat{}T_n^{(\pm 2)}$部分组成，如前文（3.26）下方所述。从这个意义上说，交换表示 H^n（本质上是 X^{-n}）在 $CZ^{\pm}$ 代数中发挥着关键作用。值得注意的是，代换

$$\hat{T}_n^{(0)} = \frac{q^n}{q - q^{-1}} \mathrm{H}^n\,, \quad \hat{T}_n^{(\pm 2)} = \frac{q^{\pm 2}}{q - q^{-1}} \mathrm{H}^n \mathrm{Q}^{\pm 2}\,, \tag{4.15}$$

满足与（3.26）、（3.27）、（3.29）和（3.30）相同的代数。这里我们根据（4.19），将 $\mathrm{Q}^{\pm 2}\mathrm{H}^n$ 的顺序颠倒了。

还有另一种以 Y表示的平凡表示

$$g_n = c^n Y^n \tag{4.16}$$

并且我们进一步注意到 X^n 和 Y^n 对于理解量子平面与 $*$-括号（2.9）之间的关系起着重要作用，正如我们将在第4.4节讨论的那样。在那里，我们将表明，交换表示由磁性晶格两个方向上的 DMT 单位的复合算符非平凡地实现。

对易算符在量子平面框架下表现得如同非对易算符，在算符交换时会产生相位因子。事实证明，系统 TBM 中 X^n andY^n 的 $*$-括号与这种量子平面图像完美契合。

为了结束本小节，我们给出基于（ CZ^* 4.7）的代数的矩阵表示。为了补全代数集合（3.42），除3.36）中的代数外，还应满足剩余的代数 $[L_n^+, L_n^-]_*$。 $CZ^\pm$ 代数（3.36）。

若在矩阵表示（ $b=0$ 4.7）中取，并记 $\tilde{\mathscr{L}}_n^\pm$，则有

$$\tilde{\mathscr{L}}_n^\pm = \mp\left(\frac{1-\mathrm{Q}^{\pm 2}}{q-q^{-1}} + a_\pm \mathrm{Q}^{\pm 2}\right)\mathrm{H}^n\,, \tag{4.17}$$

这不满足（3.38），而是满足一个略有不同的关系

$$[\,\tilde{\mathscr{L}}_n^+\,,\tilde{\mathscr{L}}_m^-\,]_{(n+m)} = q^m[n]\tilde{\mathscr{L}}_{n+m}^+ - q^{-n}[m]\tilde{\mathscr{L}}_{n+m}^-\,. \tag{4.18}$$

然而，应用以下保持 $CZ^\pm$ 不变的变换

$$\mathscr{L}_n^\pm = \mathrm{H}^n\tilde{\mathscr{L}}_n^\pm\mathrm{H}^{-n}\,, \tag{4.19}$$

我们验证（3 .38）确实成立，即 .e.,

$$[\,\mathscr{L}_n^+\,,\mathscr{L}_m^-\,]_{(n+m)} = q^{-m}[n]\mathscr{L}_{n+m}^+ - q^n[m]\mathscr{L}_{n+m}^-\,. \tag{4.20}$$

由于 $CZ^\pm$ 在变换（4.19）下保持不变， $\mathscr{L}_n^\pm$也满足（3.36）和（3.42）。因此，CZ^* 代数得以确认。请注意，（4.18）和（4.20）均不适用于 $b\neq 0$，此后我们只考虑$b=0$ 情形。

4.3 TBM 的初步表示

本节初步探讨 CZ^* 代数与 TBM（紧束缚模型）哈密顿量（A.11）之间的联系。TBM 是一种二维晶格模型，在连续极限下可再现电子在静磁场中的薛定谔方程。我们的目标（见第5节）是展示 TBM 哈密顿量可以用 CZ^* 生成元 $\mathscr{L}_{\pm 1}^\pm$ 表示，其基本思路见附录A。不过，为了先获得整体认识，我们将重点关注由（4.17）和（4.19）导出的一些表示，之后再进行详细研究。

这些表示与寻找 CZ^* 代数和 TBM 之间关系的三种方法相关：(i) 根据量子平面的结构修改 Schr¨丁格方程；(ii) 算子分解；(iii) 改变 q CZ^* 代数中的参数。在后两种情况下，需要对 CZ^* 进行修改。

第一个表示为

$$\mathscr{L}_n^\pm = \mp\mathrm{H}^n\frac{1\mp iq^{\pm 2}\mathrm{Q}^{\pm 2}}{q-q^{-1}} = \mp X^{-n}\frac{1\mp iY^{\pm 2}}{q-q^{-1}}\,, \tag{4.21}$$

取

$$a_\pm = \frac{1\mp iq^{\pm 2}}{q-q^{-1}}\,. \tag{4.22}$$

由于 TBM 哈密顿量 $\hat{}H$ 是 $X^{\pm 1}$ 和 $Y^{\pm 1}$ 中的线性组合，如附录 A

$$\hat{H}(X,Y;q) = iY^{-1}(X^{-1}-X) + i((X^{-1}-X)Y\,. \tag{4.23}$$

$Y^{\pm 2}$ 在这种表示中有些不便。在这种情况下，我们必须考虑一个略作修改的哈密顿量，以符合量子平面上的另一种薛定谔方程¨，其有效长度和相位涨落幅度是线性哈密顿系统的两倍。（第 5.4节）。

第二种表示例如为

$$\mathscr{L}_n^{\pm} = \mp \mathrm{H}^n \frac{1-q^{\pm 2}\mathrm{Q}^{\pm 2}}{q-q^{-1}} = X^{-n}Y^{\pm 1}[Z]\,, \quad Y = q^Z\,. \tag{4.24}$$

取

$$a_{\pm} = \frac{1+q^{\pm 2}}{q-q^{-1}}\,. \tag{4.25}$$

在这种情况下，我们可以通过提出算子 $[Z]$ 来提取线性 TBM 哈密顿量（详情见（5.24））。为了展示因式分解，我们采用 $CZ^{*\prime}$ 以下代数

$$[\,L'^{-}_n\,, L'^{-}_m\,]_{(n-m)} = [n-m]L'^{-}_{n+m}\,, \tag{4.26}$$

$$[\,L^{+}_n\,, L'^{-}_m\,]_{(n+m)} = [n]L^{+}_{n+m} - [m]L'^{-}_{n+m}\,, \tag{4.27}$$

通过引入

$$L'^{-}_n = q^n L^{-}_n \tag{4.28}$$

其中可以应用任意表示。

第三类候选并非完全等同于 $\mathscr{L}_n^{\pm}$，而是略作修正的算符 $\check{}\mathscr{L}_n^{\pm}$；这里我们考虑由下式给出的代数 $Y^{\frac{1}{2}}$，而非 Y 在第一种表示中（4.21）；

$$\check{\mathscr{L}}_n^{\pm} = \mp \mathrm{H}^n \frac{1 \mp i q_1^{\pm 2}\mathrm{Q}_1^{\pm 1}}{q_1-q_1^{-1}} = \mp X^{-n}\frac{1 \mp i Y_1^{\pm 1}}{q_1-q_1^{-1}}\,, \quad Y_1^2 = Y\,. \tag{4.29}$$

通过替换 $q \to q_1 = q^{\frac{1}{2}}$，并将矩阵 $\{Y^2, \mathrm{Q}^2\}$ 改为 $\{Y_1, \mathrm{Q}_1\}$，即可得到（4.21）。此时，条件 $q^N = 1$ 也应改为 $q_1^N = 1$，矩阵元素 q 在 Y_1 中也应改为 q_1。对易关系 $qXY = YX$ 随之改为 $q_1XY_1 = Y_1X$。总之，除 Y 和 Q 中幂次的变化外，其余一切均可理解为 $q \to q_1 = q^{\frac{1}{2}}$。为便于后续讨论，我们引入更一般的修正

$$\check{\mathscr{L}}_n^{\pm} = \mp X^{-n}\frac{1 \mp i Y_k^{\pm 1}}{q_k-q_k^{-1}}\,, \tag{4.30}$$

$$Y_k = diag(q_k, q_k^2, \cdots, q_k^N)\,, \quad q_k^N = 1\,, \quad q_k XY_k = Y_k X\,. \tag{4.31}$$

$\check{}\mathscr{L}_n^{\pm}$的修正代数通过在 $CZ^*(q)$ 中将 $q \to q_k$ 替换为 $q \to q_k$ 得到，由此得到代数序列 $CZ^*(q_k)$，我们称之为 CZ^* 族（代数）。于是有

$$[\check{\mathscr{L}}_n^{\pm}, \check{\mathscr{L}}_m^{\pm}]_{*_k} = [n-m]_k \check{\mathscr{L}}_{n+m}^{\pm}\,, \tag{4.32}$$

$$[\check{\mathscr{L}}_n^{+}, \check{\mathscr{L}}_m^{-}]_{*_k} = q_k^{-m}[n]_k \check{\mathscr{L}}_{n+m}^{+} - q_k^{n}[m]_k \check{\mathscr{L}}_{n+m}^{-}\,, \tag{4.33}$$

其中

$$[n]_k := \frac{q_k^n - q_k^{-n}}{q_k - q_k^{-1}}\,, \tag{4.34}$$

$$[\check{\mathscr{L}}_n^+, \check{\mathscr{L}}_m^-]_{*_k} = [\check{\mathscr{L}}_n^+, \check{\mathscr{L}}_m^-]_{(n+m)}\big|_{q\to q^k} \,. \tag{4.35}$$

我们假设 $Y_k = Y^k$ 且 $q_k = q^k$ 对于 $k \geq 2$，并且（4.21）乘以 $q + q^{-1}$ 对应于 $k = 2$ 情形。（4.29）被视为一种例外情形 $k = 1$，其中 $Y_1^2 = Y$ （$\leftrightarrow q_1^2 = q$）。这就是通过改变 H（X， Y_k； q_k）的 $\mathscr{L}_n^{\pm}$来获得 TBM 形式 $\hat{}\, q$ 参数，从 CZ^* 表示中得到该形式的策略概要。详情见第 5.2节。

4.4 量子平面与 $*$-括号

我们在离散磁平移的框架下讨论 $CZ^{\pm}$ 代数在 TBM 中的量子平面图像 $\hat{}\, T_x$和 $\hat{}\, T_y$ 。离散磁平移（DMT）与 Wyle 基矩阵之间的关系X 以及 Y 总结于附录B ，以便查阅。

例如，考虑 DMT 的矩阵表达式（B.6）：

$$\hat{T}_x = -iXY \,, \quad \hat{T}_y = -iY^{-1}X \tag{4.36}$$

$$\hat{T}_x^\dagger = iY^{-1}X^{-1} \,, \quad \hat{T}_y^\dagger = iX^{-1}Y \tag{4.37}$$

如图 1所示，这些 DMT 算符分别描述了二维晶格（m， n）上四个方向的平移。

考虑直线 Y_j 上、 $j = n + m$ 固定为常数值的点 A、B、C 和 D，以及从点 A 出发通过 DMT 进行连续移动的一条路径。从 A 到 B 有两条最短路径，即经过 Y_{j-1} 和经过 Y_{j+1}。在经过 Y_{j-1}的情况下，我们有

$$\hat{T}_y^\dagger \hat{T}_x = (X^{-1}Y)(XY) = qY^2 \,, \tag{4.38}$$

我们将此关系解释为： Y^2 对应于沿着 Y_j 从 A 移动到 B，并带有由经过 Y_{j-1}的涨落所导致的相位因子q 。如果经过 Y_{j-1} 两次从 A 移动到 C，那么我们可以理解为， Y^4 是沿着 Y_j的移动算符，而 q^2 是涨落相位因子。

类似地，在经由 Y_{j+1} 的情形下，我们有

$$\hat{T}_x \hat{T}_y^\dagger = (XY)(X^{-1}Y) = q^{-1}Y^2 \,, \tag{4.39}$$

并将 Y^2 解释为：从 A 沿着 Y_j 移动到 B，并带有由经由 Y_{j+1} 的涨落所产生的相位因子 q^{-1} 。至于从 A 到 D 的移动，由于其沿着 Y_j 的方向与指向 B 的方向相反，我们也可用类似的方式理解： Y^{-2} 对应于从 A 到 D 的移动，并带有由经由 $Y_{j\pm1}$ 的涨落所产生的相位因子$q^{\pm1}$ 。

我们将 Y_j 的正方向定义为竖直轴上 n 递增的方向；沿着 Y_j 正方向移动到任意一点时，若该点沿Y_j 距离起点 $k + l$ 个点，则经由 Y_{j+1} （分别为 Y_{j-1}）的涨落次数记为 k （分别为 l）；沿负方向移动时，则分别记为 $-k$ 和 $-l$ 。于是，由沿着 Y_j 的 $k + l$ 次平移构成的平移算符可表示如下，其总相位因子为

$$q^{-k+l}Y^{2(k+l)} \,. \tag{4.40}$$

例如，在图 Y_{j+1} 中从 D 移动到 C 时，若经由 Y_{j-1} 涨落一次，经由 qY^6 涨落两次，则可写作 qY^6 ，因为我们有 $k = 1$ 和 $l = 2$。

现在，我们将 $*$-乘积定义为如下有序乘积：(i) 首先将沿正方向涨落的算子（即经由 Y_{j+1}）置于左侧，将沿负方向涨落的算子（经由Y_{j-1}）置于右侧。(ii) 然后，为正向涨落附加相位因子 q^{-1}，为负向涨落附加相位因子 q。

然后，我们可以利用4.40式，结合 $*$-乘积的定义，将其表示为

$$(Y^{2k}Y^{2l})_* = q^{l-k}Y^{2(k+l)}\,. \tag{4.41}$$

顺便一提，Y^{2n} 不过是平凡表示（4.13），其中（4.16），因此我们得到定义为（CZ^+代数（4.41）

$$[\mathrm{L}_n'^+, \mathrm{L}_m'^+]_* = [n-m]\mathrm{L}_{n+m}'^+\,, \quad \mathrm{L}_n'^+ = \frac{-Y^{2n}}{q-q^{-1}}\,. \tag{4.42}$$

直线上的对易算符 Y^2 Y_j 会获得一个非平凡相位因子，该相位因子与 $*$-乘积（4.41）有关，这是经由 $Y_{j\pm1}$产生涨落的结果。$*$-乘积的作用是将对易算符乘积投影为非对易算符乘积。我们得出结论：这一事实可由 L'^+来表述，它是一个平凡 CZ^+表示。换言之，我们得到这样的图景：量子线（一维量子平面）上的对易平移算符会因量子平面的量子涨落而产生相位因子。 Y_j

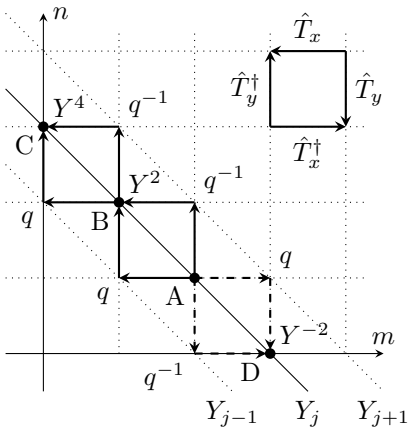


图1： Y_j 线上的平移（$j = m + n$）

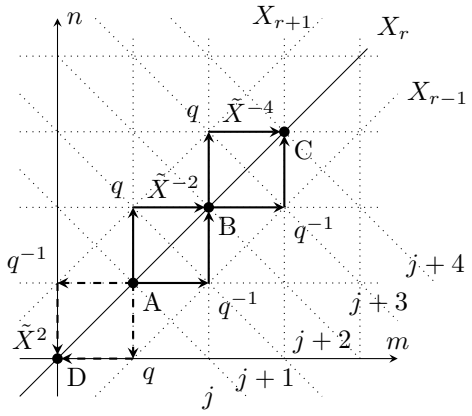


图2： X_r 线上的平移（$r = n - m$）

为了完成这项研究，我们还必须考虑与 Y_j正交的另一个方向。论证很直接，但应注意矩阵归一化，以便与上文的讨论保持一致。因此，我们参照图 2详细说明相关细节。考虑直线 X_r 上的点 A、B、C 和 D，$r = n - m$以及 DMT 从 A 经由 $X_{r\pm1}$到 B 的双向连续运动。在经由 X_{r-1}的情况下，我们有

$$\hat{T}_y^\dagger \hat{T}_x^\dagger = -(X^{-1}Y)(Y^{-1}X^{-1}) = -X^{-2} = q^{-1}\tilde{X}^{-2}\,, \quad \tilde{X} = iXq^{-1/2}\,, \tag{4.43}$$

这意味着，$\tilde{X}^{-2}$ 对应于沿着 X_r 从 A 移动到 B，并通过 X_{r-1}产生由涨落引起的相位因子 q^{-1}。因此，如果我们通过 X_{r-1} 从 A 到 C 两次，就会得到沿着 X_r 的移动算符 $\tilde{X}^{-4}$，并产生因子 q^{-2}。

类似地，在通过 X_{r+1}的情况下，我们有

$$\hat{T}_x^\dagger \hat{T}_y^\dagger = -(Y^{-1}X^{-1})(X^{-1}Y) = -q^2X^{-2} = q\tilde{X}^{-2} \tag{4.44}$$

这意味着， $\tilde{X}^{-2}$ 对应于从 A 沿着 X_r 移动到 B，并带有一个由经由 X_{r+1}产生的涨落所引起的相位因子 q 。从 A 到 D 的移动方向与沿着 X_r到 B 的方向相反，其理解方式类似： $\tilde{X}^2$ 对应于从 A 到 D 的移动，并带有一个由经由 $X_{r\pm1}$产生的涨落所引起的因子 $q^{\pm1}$ 。

我们将 X_r 的正方向定义为沿竖直轴 n 递增的方向。对于沿 X_r 正方向移动到任意一点（该点沿 X_r相距 $k+l$ 个点），经由 X_{r+1} （分别是 X_{r-1}）发生的涨落次数记为 k （分别是 l）；沿负方向时，则分别记为 $-k$和 $-l$。于是，由沿 X_r 平移 $k+l$ 次所组成的平移算符可表示如下，其总相位因子为

$$q^{k-l}\tilde{X}^{-2(k+l)}\,. \tag{4.45}$$

例如，在图 X_{r+1} 中经由 X_{r-1} 发生一次涨落、经由 2发生两次涨落并从 D 移动到 C 时，表达式为 $q^{-1}\tilde{X}^{-6}$，因为我们有 $k=1$ 和 $l=2$。

与 Y^2 相同，我们也在此为 $\tilde{X}$ 定义有序乘积：(i) 首先，将具有正方向涨落（即通过 X_{r+1}）的算符置于左侧，将具有负方向涨落（通过 X_{r-1}）的算符置于右侧。(ii) 然后，对正方向涨落附加相位因子 q，对负方向涨落附加相位因子 q^{-1} 。请注意，与先前的 Y^2 情形相比，相位取了逆。

接下来，我们可以使用4.45）通过 $*$-乘积表示为

$$(\tilde{X}^{-2k}\tilde{X}^{-2l})_* = q^{k-l}\tilde{X}^{-2(k+l)}\,. \tag{4.46}$$

同样， $\tilde{X}^{2n}$ 不过是一个平凡表示（4.13），其中（4.14），而我们得到具有定义（ CZ^- ）的代数（4.46）

$$[\mathrm{L}_n^{\prime -},\mathrm{L}_m^{\prime -}]_* = [n-m]\mathrm{L}_{n+m}^{\prime -}\,,\quad \mathrm{L}_n^{\prime -} = \frac{\tilde{X}^{-2}}{q-q^{-1}} \tag{4.47}$$

因此，我们验证了与 CZ^+ 相同的图景成立。也就是说，量子线 X_r 上的对易算符 $\tilde{X}^2$ 因经由 $X_{r\pm1}$产生的量子涨落效应，获得了与 $*$-乘积（4.46）相关的非平凡相位因子。由于 X_r 与 Y_j正交，因此可以说，$\mathrm{L}_n^{\prime\pm}$是分别属于彼此正交方向的代数。

最后需要指出， $\tilde{X}^{-2}$ 沿着 X_r使位置 j 增加 2，因此若采用对偶晶格，$\tilde{X}^{-1}$ 的有效移动距离可能达到 $\Delta j=1$ 。类似地， Y^2 沿着 Y_j使 r 增加 2，因此 Y^{-1} 的有效增加量可能达到 $\Delta r=1$。

5 CZ^*与 TBM 哈密顿量

在第5节中，我们展示了 TBM 的矩阵表示对应于CZ^*的 Wyle表示，该表示描述了涵盖各种磁性晶格的哈密顿量序列。在第5.1节中，我们推导了 TBM 中的 DMT 代数（交换、融合和环流规则），并讨论了其与量子平面图像的关系。在第5.2节中，我们展示了 TBM 哈密顿量序列可以使用

该 ± 1 矩阵表示的模态 CZ^* 代数族来描述。第5.3 节讨论了一般模态的扩展。 X 的幂对应于有效间距从 1 扩展到 n的磁晶格哈密顿量。 Y 的幂对应于将量子平面涨落（ q阶）从 1 扩展到 k 的哈密顿量序列（第5.4节）。这些哈密顿量可以表示为 CZ^* 生成元。

5.1 TBM 中的 DMT 与量子平面

本小节旨在通过证明离散磁平移（DMT）满足与第 2.2 节回顾的连续磁平移的 MTA（交换、融合和环流）相同的性质，来验证紧束缚模型（TBM）的量子平面图像。与第 4.4 节的讨论不同，我们不使用 DMT 的矩阵表示。根据这一图像，TBM 可视为构造在量子平面上的哈密顿系统。

TBM 哈密顿量由二维晶格上的 DMT 给出，如下所示 [19, 20, 21, 57]:

$$H = \hat{T}_x + \hat{T}_y + \hat{T}_x^\dagger + \hat{T}_y^\dagger \,, \tag{5.1}$$

$$\hat{T}_x = \sum_{n,m} e^{i\theta^x_{mn}} c^\dagger_{m+1,n} c_{m,n} \,, \quad \hat{T}_y = \sum_{n,m} e^{i\theta^y_{mn}} c^\dagger_{m,n+1} c_{m,n} \,. \tag{5.2}$$

其中 $c^\dagger_{m,\ n}$ 和 $c_{m,\ n}$ 表示位于 (m,n) 各个格点处的产生/湮灭算符，而 θ^x_{mn} 和 θ^y_{mn}是与沿 x 和 y各方向移动单位长度 a 相关的 AB 相位

$$\theta^x_{mn} : (m,n) \to (m+1,n) \,, \quad \theta^y_{mn} : (m,n) \to (m,n+1) \,. \tag{5.3}$$

引入波函数

$$\Psi = \sum_{m,n} \psi_{m,n} c^\dagger_{m,n} |0\rangle = \sum_{m,n} \psi_{m,n} |\psi_{m,n}\rangle \,, \quad \psi_{m,n} \in \mathbf{C} \,, \tag{5.4}$$

本征值方程 $H\Psi = E\Psi$ （5.1）已知可化为以下薛定谔方程¨ [19, 21]

$$e^{i\theta^x_{m-1,n}} \psi_{m-1,n} + e^{i\theta^y_{m,n-1}} \psi_{m,n-1} + e^{-i\theta^x_{m,n}} \psi_{m+1,n} + e^{-i\theta^y_{m,n}} \psi_{m,n+1} = E\psi_{m,n} \,. \tag{5.5}$$

注意，这在 $\mathcal{O}(a^2)$阶上重现了哈密顿量 $H' = -tH$ 的连续薛定谔方程,

$$\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A})^2 \psi_{m,n} = \mathcal{E}\psi_{m,n} \,, \quad \mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{E+4t}{t} \,, \tag{5.6}$$

其中 $\mathcal{O}(a)$在连续极限 $a \to 0$下消失。

根据（5.2）和（5.4）中的公式,

$$\hat{T}_x \hat{T}_y |\psi_{m,n}\rangle = e^{i\theta^x_{m,n+1} + i\theta^y_{m,n}} |\psi_{m+1,n+1}\rangle \,, \tag{5.7}$$

$$\hat{T}_y \hat{T}_x |\psi_{m,n}\rangle = e^{i\theta^y_{m+1,n} + i\theta^x_{m,n}} |\psi_{m+1,n+1}\rangle \,, \tag{5.8}$$

我们得到交换代数和环流代数

$$\hat{T}_y \hat{T}_x |\psi_{m,n}\rangle = e^{2\pi i\phi} \hat{T}_x \hat{T}_y |\psi_{m,n}\rangle \,, \tag{5.9}$$

$$\hat{T}_y^\dagger \hat{T}_x^\dagger \hat{T}_y \hat{T}_x |\psi_{m,n}\rangle = e^{2\pi i\phi} |\psi_{m,n}\rangle \,, \tag{5.10}$$

其中

$$2\pi\phi = (\theta^y_{m+1,n} - \theta^y_{m,n}) - (\theta^x_{m,n+1} - \theta^x_{m,n})\,. \tag{5.11}$$

ˆ 关于融合代数，我们需要定义新的复合算符 T_{x+y}，使其满足以下融合关系，并带有相位因子 $\xi_{m,\ n}$，其具体形式将在后文确定

$$\hat{T}_x\hat{T}_y\,|\psi_{m,n}\rangle := e^{i\xi_{m,n}}\hat{T}_{x+y}\,|\psi_{m,n}\rangle\ , \tag{5.12}$$

$$\hat{T}_y\hat{T}_x\,|\psi_{m,n}\rangle := e^{-i\xi_{m,n}}\hat{T}_{x+y}\,|\psi_{m,n}\rangle\ . \tag{5.13}$$

结合（5.7）、（5.8）以及这些关系，可得

$$\hat{T}_{x+y}\,|\psi_{m,n}\rangle = e^{-i\xi_{m,n}}e^{i\theta^x_{m,n+1}+i\theta^y_{m,n}}\,|\psi_{m+1,n+1}\rangle \tag{5.14}$$

$$= e^{i\xi_{m,n}}e^{i\theta^y_{m+1,n}+i\theta^x_{m,n}}\,|\psi_{m+1,n+1}\rangle\ . \tag{5.15}$$

利用（5.11），该方程右侧的一致性条件为

$$2\pi\phi + 2\xi_{m,n} = 0\,, \tag{5.16}$$

因此，我们得到融合代数

$$\hat{T}_x\hat{T}_y\,|\psi_{m,n}\rangle := e^{-i\pi\phi}\hat{T}_{x+y}\,|\psi_{m,n}\rangle\ , \tag{5.17}$$

$$\hat{T}_y\hat{T}_x\,|\psi_{m,n}\rangle := e^{i\pi\phi}\hat{T}_{x+y}\,|\psi_{m,n}\rangle\ . \tag{5.18}$$

引入参数 q，定义为

$$q = e^{-i\pi\phi}\,, \tag{5.19}$$

我们将交换、融合和环流关系总结如下

$$\hat{T}_x\hat{T}_y = q^2\hat{T}_y\hat{T}_x\,,\quad \hat{T}_x\hat{T}_y = q\hat{T}_{x+y}\,,\quad \hat{T}^\dagger_y\hat{T}^\dagger_x\hat{T}_y\hat{T}_x = q^{-2}\,. \tag{5.20}$$

如果我们将融合规则和交换规则结合起来，得到

$$\hat{T}_{x+y} = q^{-1}\hat{T}_x\hat{T}_y = q\hat{T}_y\hat{T}_x\,, \tag{5.21}$$

ˆ 该方程可作如下解释：平移 T_{x+y} 对应于沿着第X_r 节中定义的直线进行的平移4.4，而第一个和第二个等式分别蕴含了不同的相位因子 $q^{\pm1}$，这与涨落绕行至相邻的 $X_{r\pm1}$ 再返回 X_r时的情况相符，对应于ˆ T_x 和ˆ T_y 算符的不同排序。注意，相位因子 q 由（5.19）给出，但不一定是常数，因为 ϕ由（5.11）给出，且取决于其所在位置（m，n）。如第4.4节所述，q 可视为量子平面的涨落，并且与（5.11）中的 AB 相位有关。

这种解释表明，鉴于离散化，$*$-乘积是由空间量子化（量子平面）产生的。有趣的是，量子平面图像可以被理解为考虑周期条件之前的底层结构。

5.2 CZ^* 和 TBM 哈密顿量族

ˆ 接下来我们讨论 TBM 哈密顿量 H 与在 (4.21)-(4.26) 中定义的 CZ^* 矩阵表示$\mathscr{L}^{\pm}_{\pm 1}$ 之间的关系。由于我们的三个表示 (4.21)、(4.24) 和 (4.29) 对 ˆH （见 (A.11)）具有不同的 Y依赖关系，因此不容易确定它们之间的关系。为便于讨论，我们明确指出 CZ^* 和 TBM 哈密顿量 ˆH对形变参数 q 和矩阵尺寸 N 的依赖关系，例如 $CZ^*(q,N)$ 和 ˆ$H(q,N')$，其中后者的 TBM 矩阵尺寸由$N'=2Q$给出。虽然在 CZ^* 和 ˆH中， q 和 N 使用了相同的符号，但它们最初是独立引入的，因此通常并不相同。接着，当两者 q 相关时，以 q_k 表示 TBM 的变形参数；我们考虑哈密顿量 ˆ$H(q_k,Q)$ 与 ˇ H_k重合的情形，后者是 $CZ^*(q_k,N)$ 生成元的线性组合。保持 $CZ(q_k,N)$ 与其母体$CZ(q,N)$的关系，并设定 N 与 Q之间的某种关系后，我们将确定每种情形下 q 和q_k 的取值。（对于因式分解 (4.24)，无需考虑这个问题，因为 q_k与 q重合，而后者不过是尺寸为 $N=2Q$的 Y 的一个矩阵元。）

我们首先考虑第二类表示，即因式分解形式 (4.24)，其中 Y的幂与 ˆH 中的幂相同，除了 $[Z]$的因式分解。在这种情况下， CZ^* 代数略作修改，变为 $CZ^{*'}$ 代数，其定义如下： $\mathscr{L}^{+}_{n}$以及 $\mathscr{L}^{'-}_{1}$

$$\mathscr{L}^{'-}_{n}=q^{n}\mathscr{L}^{-}_{n}\,, \tag{5.22}$$

满足 (3.36)、(4.26)、(4.27)。利用 H_Z 生成元，定义 ˆ $CZ^{*'}$ 较为方便，具体如下：

$$\hat{H}_Z=i(\mathscr{L}^{+}_{1}-\mathscr{L}^{+}_{-1})+i(\mathscr{L}^{'-}_{1}-\mathscr{L}^{'-}_{-1})\,. \tag{5.23}$$

ˆ 利用关系式 $qXY=YX$，我们发现 $[Z]$ 可由 H_Z 因式分解为

$$\hat{H}_Z=i(X^{-1}-X)Y[Z]+iY^{-1}(X^{-1}-X)[Z]=\hat{H}[Z] \tag{5.24}$$

因此，TBM 哈密顿量 (A.11) 与 CZ^* 生成元的关系如下：

$$\hat{H}=\hat{H}_Z[Z]^{-1}\,. \tag{5.25}$$

这意味着，ˆ H_Z 的本征值由 TBM 本征值 (A.10与相位因子矩阵 $[Z]$的乘积给出，

$$\hat{H}_Z\tilde{\psi}=E[Z]\tilde{\psi}\,,\quad \tilde{\psi}=[Z]^{-1}\psi\,. \tag{5.26}$$

接下来，考虑情形（4.29），它属于第三类，其对应的代数为$CZ^*(q_1)$，定义见（4.32）和（4.33）。我们需要说明 ˇ$\mathscr{L}^{\pm}_{n}$的厄米共轭记号

$$\check{\mathscr{L}}'^{\pm}_{n}=\mathrm{H}^{-n}\check{\mathscr{L}}^{\pm}_{n}\mathrm{H}^{n}\,,\qquad (\check{\mathscr{L}}^{\pm}_{n})^{\dagger}=\check{\mathscr{L}}'^{\mp}_{-n}\,, \tag{5.27}$$

其中，ˇ$\mathscr{L}'^{\pm}_{n}$ 满足与 ˇ$\mathscr{L}^{\pm}_{n}$相同的代数关系。该关系与（ $\mathscr{L}^{\pm}_{n}$和 $\tilde{\mathscr{L}}^{\pm}_{n}$4.19）中所示的关系完全相同：

$$\tilde{\mathscr{L}}^{\pm}_{n}=\mathrm{H}^{-n}\mathscr{L}^{\pm}_{n}\mathrm{H}^{n}\,,\qquad (\mathscr{L}^{\pm}_{n})^{\dagger}=\tilde{\mathscr{L}}^{\mp}_{-n}\,. \tag{5.28}$$

根据 $CZ^*(q_1)$ 生成元 ˇ $\mathscr{L}^{+}_{\pm 1}$ 和 (ˇ$\mathscr{L}^{+}_{\pm 1}$)† 定义 ˇ H_1

$$\check{H}_1=(q_1-q_1^{-1})(\check{\mathscr{L}}^{+}_{1}-\check{\mathscr{L}}^{+}_{-1})+(q_1-q_1^{-1})(\check{\mathscr{L}}'^{-}_{1}-\check{\mathscr{L}}'^{-}_{-1})\,, \tag{5.29}$$

并将 (4.29) 代入其右端后，我们得到与 TBM 哈密顿量 $\hat{}H$

$$\check{H}_1 = i(X^{-1} - X)Y_1 + iY_1^{-1}(X^{-1} - X) = \hat{H}(X, Y_1; q_1)\,, \tag{5.30}$$

其中 Y_1 和 q_1 分别代入 Y 和 q 于（4.23）中。在此表示下，我们有条件$X^N = Y_1^N = 1$ 以及 $Y^N = 1$。两者都应满足，具体实现方式如下： Y_1 其关系为 $q = q_1^2$ 与 Y在 CZ^* 表示（4.21）中的设定相关，关系为 $Y_1^2 = Y$。请注意，这并不意味着（4.21）与（4.29）相同。若选择 $N = 2Q$ 并记住 $2Q$ 是 H的矩阵尺寸，则有

$$Y_1^{2Q} = 1\,, \quad q_1^{2Q} = 1\,, \quad \therefore\, q_1 = e^{\pm i\pi\phi}\,, \tag{5.31}$$

以及对于 Y和 q

$$Y^Q = 1\,, \quad q^Q = 1\,, \quad \therefore\, q = e^{\pm 2\pi i\phi}\,, \tag{5.32}$$

其中引入双重符号 $\pm$ 表示复共轭系统。因此我们有

$$(Y_1)_{jk} = q_1^j \delta_{jk}\,, \quad (Y)_{jk} = q^j \delta_{jk}\,, \quad Y_1^N = Y^{\frac{N}{2}} = 1\,. \tag{5.33}$$

矩阵表示（4.29）描述了由（ H_1 给出的 TBM 哈密顿量 ˇ（5.30），其中使用的不是 $q = e^{-i\pi\phi}$而是

$$q = e^{\pm 2\pi i\phi}\,, \quad \text{or} \quad q_1 = e^{\pm i\pi\phi}\,. \tag{5.34}$$

此调整相当于在采用 q 时，将（ q_1 中的 A.9替换为 $q = e^{-2\pi i\phi}$，而不是在推导薛定谔方程（A.8）时使用参数化形式（A.9）。A.9）。

最后，我们在相同的形式体系下处理其余部分，即第一类（4.21）和第三类（4.30）CZ^*（q_k），因为（4.21）是第三类在 $k = 2$时的特殊情形。定义 ˇ H_k 为

$$\check{H}_k = (q_k - q_k^{-1})(\check{\mathscr{L}}_1^+ - \check{\mathscr{L}}_{-1}^+) + (q_k - q_k^{-1})(\check{\mathscr{L}'}_1^- - \check{\mathscr{L}'}_{-1}^-)\,, \tag{5.35}$$

并将（4.30）代入右端，我们得到 $k = 2$

$$\check{H}_2 = i(X^{-1} - X)Y_2 + iY_2^{-1}(X^{-1} - X) = \hat{H}(X, Y_2; q_2)\,, \tag{5.36}$$

其中 $q_2 = q^2$。在此表示下，我们有条件 $X^N = Y_2^N = 1$。注意，此时 $Y^N \neq 1$。Y_2 满足关系 $q_2 = q^2$ 与 Y 在 CZ^* 表示（4.21）下通过关系 $Y_2 = Y^2$相关。若取 $N = Q$，则有

$$Y_2^Q = 1\,, \quad q_2^Q = 1\,, \quad \therefore\, q_2 = e^{\pm 2\pi i\phi}\,, \tag{5.37}$$

以及对于 Y

$$Y^{2Q} = 1\,, \quad q^{2Q} = 1\,, \quad \therefore\, q = e^{\pm \pi i\phi}\,. \tag{5.38}$$

因此我们得到

$$(Y_2)_{jk} = q_2^j \delta_{jk}\,, \quad (Y)_{jk} = q^j \delta_{jk}\,, \quad Y_2^N = Y^{2N} = 1\,, \tag{5.39}$$

而矩阵表示（4.21）因此描述了 TBM 哈密顿量 ˇ H_2，其中 q 由下式给出

$$q = e^{\pm i\pi\phi}\,. \tag{5.40}$$

至于第三种表示（4.30），以与上文相同的方式考察 CZ^* 对应于 $k \geq 3$ 的族，我们验证矩阵（4.30）描述了由（ H_k ）给出的 TBM 哈密顿量族 ˇ5.35)

$$\check{H}_k = i(X^{-1} - X)Y_k + iY_k^{-1}(X^{-1} - X) = \hat{H}(X, Y_k; q_k)\,, \tag{5.41}$$

其中， Y_k 和 q_k 分别为

$$Y_k = Y^k\,, \quad q_k = q^k = e^{\pm k\pi i\phi}\,. \tag{5.42}$$

5.3 将 ˇ $\mathscr{L}_n^{\pm}$推广到其他模态 $n \neq \pm 1$

如第4节所述， $X^{\pm 2}$ 具有使 j 沿量子线$\Delta j = 2$增加或减少 2（ X_r）的作用。反映这一特征，ˆH（X^2, Y; q）可推导出用于描述有效区间 Δj 是 ˆH（X, Y; q）两倍的系统。然后，将另一个 TBM 哈密顿量 ˆH（X^2, Y; q）记为 ˆ H_2,

$$\hat{H}_2 = i(X^{-2} - X^2)Y + iY^{-1}(X^{-2} - X^2)\,, \tag{5.43}$$

我们可以推导出薛定谔方程

$$i(q^{j+2} + q^{-j})\psi_{j+2} - i(q^{-j} + q^{j-2})\psi_{j-2} = E\psi_j \tag{5.44}$$

通过将 $\Delta j = 2$ 应用于原方程（A.9）。

ˆ 新的哈密顿量 H_2 具有 $U_q(sl_2)$ 对称性:

$$\hat{H}_2 = (q_2 - q_2^{-1})(\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-)\,, \quad q_2 = q^2\,, \tag{5.45}$$

$$\mathcal{E}_+ = \frac{i}{q_2 - q_2^{-1}}(X^{-2} - X^2)Y\,, \quad \mathcal{E}_- = \frac{i}{q_2 - q_2^{-1}}Y^{-1}(X^{-2} - X^2)\,, \tag{5.46}$$

$$\mathcal{K} = q_2 X^{-4} \tag{5.47}$$

$$[\mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-] = \frac{\mathcal{K} - \mathcal{K}^{-1}}{q_2 - q_2^{-1}}\,, \quad \mathcal{K}\mathcal{E}_\pm\mathcal{K}^{-1} = q_2^{\pm 2}\mathcal{E}_\pm\,. \tag{5.48}$$

不过，将这一对称性视为 $n = \pm 2$ 表示族的 CZ^* 部分（4.30），以考察以下哈密顿量级数，会相当方便

$$\hat{H}_n = i(X^{-n} - X^n)Y + iY^{-1}(X^{-n} - X^n)\,, \tag{5.49}$$

由此得到薛定谔方程，其有效区间为 $\Delta j = n = 2\nu$

$$i(q^{j+2\nu} + q^{-j})\psi_{j+2\nu} - i(q^{-j} + q^{j-2\nu})\psi_{j-2\nu} = E\psi_j\,. \tag{5.50}$$

也就是说，作为第5.2节的推广，根据表示（4.30）定义 $H_{(n,k)}$ CZ^*族

$$\check{H}_{(n,k)} = (q_k - q_k^{-1})(\check{\mathscr{L}}_n^+ - \check{\mathscr{L}}_{-n}^+) + (q_k - q_k^{-1})(\check{\mathscr{L}'}_n^- - \check{\mathscr{L}'}_{-n}^-)\,, \tag{5.51}$$

$$= \hat{H}_n(X, Y_k; q_k)\,, \tag{5.52}$$

因此，我们发现哈密顿量级数 ˆ H_n 与 CZ^* 族算符 ˇ$\mathscr{L}_n^{\pm}$之间的联系；这些算符是从 $n = \pm 1$ 模态 ˇ$\mathscr{L}_{\pm 1}^{\pm}$扩展而来的。

注意，前面讨论的情况 ˇ H_1 和 ˇ H_2 第 5.2 节中的内容属于 $n = 1$ ˇ 系列 $H_{(n,k)}$

$$\check{H}_k = \check{H}_{(1,k)} = \hat{H}(X, Y_k; q_k)\,, \quad \hat{H}_1 = \hat{H}\,, \quad k = 1, 2\,. \tag{5.53}$$

5.4 带有 $Y^{\pm k}$ 族的哈密顿量级数

对于第一类表示（4.21），考虑哈密顿量 $\hat{}H(X,\ Y^2;\ q)$，或许会比考虑原来的 $\hat{}H(X,\ Y;\ q)$ 更方便。这样一来，我们或许可以避免上一小节中复杂的讨论，并使（4.21）与 $\hat{}H(X,\ Y^2;\ q)$ 之间建立更直接的对应关系。

考虑以下哈密顿量族

$$\hat{H}_{(n,k)} = i(X^{-n} - X^n)Y^k + iY^{-k}(X^{-n} - X^n)\,, \tag{5.54}$$

首先令 $n = k = 2$

$$\hat{H}_{(2,2)} = i(X^{-2} - X^2)Y^2 + iY^{-2}(X^{-2} - X^2)\,. \tag{5.55}$$

这将得到以下薛定谔方程

$$i(q^{2j+4} + q^{-2j})\psi_{j+2} - i(q^{-2j} + q^{2j-4})\psi_{j-2} = E\psi_j\,, \tag{5.56}$$

它对应于这样一个系统：其有效区间 Δj 和量子涨落的尺度 q（参见 §4）均为原系统的两倍（A.9），因为（5.56）与将 A.9）中的方程作如下替换后得到的方程一致：$\Delta j = 1 \to 2$ 以及 $q \to q^2$。直接验证可知，哈密顿量（5.54）描述了具有有效区间 n 和涨落尺度 q^k的量子平面系统。

如果我们引入以下由 CZ^* 表示中的生成元 $\mathscr{L}_n^{\pm}$组成的 $\mathscr{H}_n$ 算子

(4.21)

$$\mathscr{H}_n = (q - q^{-1})(\mathscr{L}_n^+ - \mathscr{L}_{-n}^+) + (q - q^{-1})(\tilde{\mathscr{L}}_n^- - \tilde{\mathscr{L}}_{-n}^-)\,, \tag{5.57}$$

我们得到如下关系

$$\mathscr{H}_2 = \hat{H}_{(2,2)} = \hat{H}(X^2, Y_2; q_2)\,. \tag{5.58}$$

$\hat{}$ 哈密顿量 $H_{(2,2)}$ 也可以表示为量子代数 $U_q(sl_2)$ 的生成元的组合

$$\hat{H}_{(2,2)} = (q_4 - q_4^{-1})(\mathcal{E}'_+ + \mathcal{E}'_-)\,, \quad q_4 = q^4\,, \tag{5.59}$$

$$\mathcal{E}'_+ = \frac{i}{q_4 - q_4^{-1}}(X^{-2} - X^2)Y^2\,, \quad \mathcal{E}'_- = \frac{i}{q_4 - q_4^{-1}}Y^{-2}(X^{-2} - X^2)\,, \tag{5.60}$$

$$\mathcal{K}' = q_4 X^{-4} \tag{5.61}$$

$$[\mathcal{E}'_+, \mathcal{E}'_-] = \frac{\mathcal{K}' - \mathcal{K}'^{-1}}{q_4 - q_4^{-1}}\,, \quad \mathcal{K}'\mathcal{E}'_{\pm}\mathcal{K}'^{-1} = q_4^{\pm 2}\mathcal{E}'_{\pm}\,. \tag{5.62}$$

不言而喻，CZ^* 表示（421）同样适合描述 $\mathscr{H}_n$ 与 $\hat{}$ 哈密顿量级数 $H_{(n,2)}$之间的关系

$$\mathscr{H}_n = \hat{H}_{(n,2)} = \hat{H}(X^n, Y_2; q_2)\,. \tag{5.63}$$

我们还可以将其推广为

$$\hat{H}_{(n,k)} = \hat{H}(X^n, Y_k; q_k)\,. \tag{5.64}$$

如上所示，$H_{(n,k)}$ 表示由磁晶格有效区间 Δj 和量子平面涨落 q_k的不同组合所指定的多种哈密顿量。对于每一组 n 和 k，$\hat{}$ $H_{(n,k)}$系统都存在 $U_q(sl_2)$对称性，例如，$\hat{}$ $H_{(2,2)}$对应式（5.59），$\hat{}$ $H_{(2,1)}$对应式（5.45），而$\hat{}$ $H_{(1,1)}$对应式（A.15）。另一方面，若采用式（5.51）和（5.57）中所见的闭代数系统 CZ^* 或 CZ^* 族，则可以用统一的形式表示哈密顿量级数，例如式（5.52）、（5.63）和（5.64）。

6 结论与讨论

本文利用 DMT 和 MT 的代数性质，重点研究了 CZ 代数与量子平面图像之间的关系。相位因子的生成机制与 CZ 代数的 $*$-括号特征相兼容，这对于研究 CZ 代数的各种性质十分便利。因此，我们阐明了一些无法从 q-谐振子表示（3.10）中得到的性质：决定式（2.10）中相位因子的机制与量子平面上的涨落有关，而且构造 CZ 生成元的方法遵循一定规则。

交换表示尤为重要，我们需要一对特定的对易算符和非对易算符。在 MT 表示中，通过引入]MT 的权重和 CZ 算符，我们给出了 $*$-括号（3.20）的定义，从而能够以统一形式表示三种类型的 CZ 代数、 $CZ^{\pm}$和 CZ^{*}。 $CZ^{\pm}$ 算子（3.31）是交换的 $\hat{T}_n^{(0)}$算符与非对易的 $\hat{T}_n^{(\pm 2)}$算符的线性组合，而 DMT 矩阵表示（4.7）也具有相同的结构。我们实际上在第4.2节中观察到，交换表示 X^n 和 Y^n 发挥着与 MT 算符 $\hat{T}_n^{(0)}$相同的作用，如（4.15）所示。交换表示在与 $*$-括号及量子平面图像的联系中展现出其重要性。局域算符 $\hat{T}_n^{(0)}$与非局域算符 $\hat{T}_{(\pm 2)_n}$的（非）对易性，在 $*$-括号对易子中发生了反转，如（3.26）所示。交换算符在非对易 $CZ^{\pm}$ 代数关系中发挥着关键作用，而非对易算符则发挥变形的 $U(1)$ 平移群的作用，因而确定了 $*$-括号（3.20）的权重。算符 X^{-n} 和 $X^{-n}Y^{\pm 2}$ 发挥着与 $\hat{T}_n^{(0)}$和 $\hat{T}_n^{(\pm 2)}$相同的作用，如（4.15）所述。

交换算子表现得如同非交换算子，反之亦然；这一性质与量子平面的相位涨落相吻合。通过考察交换 DMT表示（4.42）和（4.47），我们发现 $CZ^{\pm}$ 代数可以由第 $*$ 节中的 4.40）和（4.45）所示的有序乘积来描述。在此基础上，我们基于 TBM 的量子平面图像，通过有序乘积统计正、负方向上的涨落次数，从而给出了 $*$-乘积的另一种定义。DMT 引起的粒子运动所关联的 AB 相位（5.11）被解释为量子平面的涨落（5.19）；因此，DMT 连续操作产生的相位因子可表示为某种有序乘积，以重现 $*$-括号。

作为量子平面图像的一个缩影，我们在第 CZ^{*} 节讨论了5中代数与 TBM 哈密顿量序列之间的关系。我们已经表明，TBM 的矩阵表示对应于 CZ^{*}的 Wyle表示，该表示描述了涵盖各种磁性晶格的一系列哈密顿量。序列中的每个哈密顿量由两个整数 n 和 k 参数化，它们分别是 Wyle基 X 和 Y的幂。参数 n 和 k 分别对应于磁晶格的有效间距和量子平面的涨落尺度（ q的幂）。所有哈密顿量都可以通过 CZ^{*} 生成元以统一方式表示，而无需引入额外的多个$U_q(sl_2)$或 CZ^{*} 族。（回顾第4.3 节中，我们引入了CZ^{*} 族的表示序列，以表示量子涨落尺度为 k的 TBM 哈密顿量。该序列为

通过依次替换 $q \to q^k$. 然而，相较于 CZ^* 代数族，考虑一个具有一系列哈密顿量的单一 CZ^* 代数在物理上更易于理解。）这样一来， CZ^*代数可以被视为一种通用代数，用于根据 n 和 k的各种量子平面设置来描述哈密顿量级数。

本文发现的 MT 表示与 DMT表示之间的相似性，或许表明各种表示具有某种普遍的共同性质。 CZ^* 这种对应关系 q-微分表示（3.6）与 MT 表示（3.11）之间的对应关系，或许揭示了 q-微分算子在具有 CZ^* 代数结构的晶格系统中的物理意义。利用 Wyle 基构造 TBM 哈密顿量级数的矩阵表示，意味着物理系统背后存在量子平面。所有这些观察都与 CZ^* 代数的表示有关，因此我们认为，本文提升了 CZ^* 代数的重要性。正如我们针对（2.10）中的问题所做的那样，我们可以从 MT 和 DMT表示等多种表示共有的某些性质出发，阐明 CZ^* 代数尚未解决的问题及其普遍性质。

TBM 中的量子群对称性

在本附录中，我们回顾 TBM 中的量子代数对称性，即 TBM 哈密顿量可写成 U_q（sl_2）升降算符[19]的形式。我们还对哈密顿量的 q-反演对称性作一说明。为考察 U_q（sl_2）结构，我们对薛定谔方程施加周期条件¨（5.5），然后利用 Wyle 基矩阵 X 和 Y将（5.5）变换为矩阵形式。

让我们将跃迁项的因子选为 [57] ，使得规范不变条件（5.11）得到满足

$$\theta^x_{m,n} = -(n+m)\pi\phi\,, \quad \theta^y_{m,n} = (m+n+1)\pi\phi\,, \tag{A.1}$$

并设定周期条件

$$\psi_{m,n} = \psi_{m+Q,n+Q} \tag{A.2}$$

其中 P、Q 为互质整数，且比值为 ϕ

$$\phi = \frac{P}{Q}\,. \tag{A.3}$$

在这些条件下， （5.5）在变换（m， n） $\to$ （$m+Q$， $n+Q$）下保持不变。根据布洛赫定理，我们有

$$\psi_{m,n} = e^{imk_x} e^{ink_y} u_{m,n}\,, \quad u_{m,n} = u_{m+Q,n+Q}\,. \tag{A.4}$$

利用 m 动量 $k_\pm = \frac{1}{2}$（$k_x \pm k_y$），并反映 $n \leftrightarrow m$ 中的交换对称性 $k_- \leftrightarrow -k_-$，其中

$$u_{m,n} = u_{n,m} := \psi_{n+m}\,, \tag{A.5}$$

我们有

$$\psi_{m,n} = e^{ik_+(m+n)} e^{ik_-(m-n)} \psi_{m+n}\,, \quad \psi_{m+n} = \psi_{m+n+2Q}\,. \tag{A.6}$$

为 $k_\pm$ [57, 58] 选择中带谱以减少一个自由度

$$j = m+n\,, \quad (k_+, k_-) = (\frac{\pi}{2}, 0)\,, \tag{A.7}$$

并通过以下方式使 q 与 ϕ 相关

$$q = e^{-i\pi\phi}, \tag{A.8}$$

(5.5) 变为以下方程 [21]

$$-i(q^{j-1} + q^{-j})\psi_{j-1} + i(q^{-j} + q^{j+1})\psi_{j+1} = E\psi_j . \tag{A.9}$$

这是薛定谔方程的 $2Q$ 维矩阵表示的分量表达式

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{2Q})^T \tag{A.10}$$

且哈密顿量 $\hat{H}$ 可以用矩阵 X 和 Y 表示，其维数为 $N = 2Q$，定义于（4.5）

$$\hat{H} = iY^{-1}(X^{-1} - X) + i(X^{-1} - X)Y . \tag{A.11}$$

已知它可以用 $U_q(sl_2)$ 生成元 $E_\pm$ 和 $K^{\pm 1}$ 表示

$$E_+ = \frac{i}{q - q^{-1}}(X^{-1} - X)Y, \quad E_- = \frac{i}{q - q^{-1}}Y^{-1}(X^{-1} - X), \tag{A.12}$$

$$K = qX^{-2}, \tag{A.13}$$

它们满足 $U_q(sl_2)$ 代数关系

$$[E_+, E_-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad KE_\pm K^{-1} = q^{\pm 2}E_\pm . \tag{A.14}$$

利用 $YX = qXY$ 可以验证这些关系，哈密顿量为 [19, 57]

$$\hat{H} = (q - q^{-1})(E_+ + E_-) . \tag{A.15}$$

现在，我们对哈密顿量的 q 反演对称性作一些说明。直到本附录结束，我们都使用反演后的 $q = e^{i\pi\phi}$。对（5.5）取复共轭，可得哈密顿量

$$\hat{H}' = Y\hat{H}Y^{-1} = iY(X^{-1} - X) + i(X^{-1} - X)Y^{-1} \tag{A.16}$$

这看起来与 $\hat{H}$ 不同。当然，$\hat{H}$ 和 $\hat{H}'$ 描述的是相同的物理，因为 $\hat{H}'$ 可通过在（q A.11）中用 q^{-1} 替换 Y（回想一下，q^{-1}（$= Y^{-1}$）q）得到。于是我们注意到，对于每个表达式

$$\hat{H}^\dagger = \hat{H}, \quad \hat{H}'^\dagger = \hat{H}' . \tag{A.17}$$

将任意算子 $\mathcal{O}$ 变换为 q反演系统中的算子 $\mathcal{O}'$，同样可表示为

$$\mathcal{O}' = Y\mathcal{O}Y^{-1}, \tag{A.18}$$

而且算子关系彼此相同。例如，$U_q(sl_2)$ 生成元变换为

$$E'_\pm = YE_\pm Y^{-1}, \quad K' = YKY^{-1} \tag{A.19}$$

并且它们满足与（A.14）相同的关系。因此，反演后的哈密顿量具有与 $\hat{}$ 相同的形式 H

$$\hat{H}' = (q - q^{-1})(E'_+ + E'_-), \tag{A.20}$$

其写作 $E'_\pm$ $U_q(sl_2)$ 的升降算符之和。

DMT 的 B矩阵表示

在附录A中，我们给出了H （见（A.11））中所示的 TBM 哈密顿量 H （5.1）的矩阵表示。这表明，式（ T_x、T_y （5.1）中的算符与 X、Y （A.11）中的矩阵之间存在对应关系。在本附录中，我们将阐明这种对应关系，并验证其矩阵表示中的 q-反演对称性（A.18）以及 DMT 代数（5.20）。

为了看出这种对应关系，我们来考察 j 的矩阵作用的第 j 个分量以及 X 、 Y 对 ψ 的作用

$$(X^{\pm 1}\psi)_j = \psi_{j\mp 1}\,, \quad (Y^{\pm 1}\psi)_j = q^{\pm j}\psi_j\,. \tag{B.1}$$

这些关系意味着， X 将坐标 j 平移 1，而 Y 产生相位因子 q^j。

对于 $\hat{}\,X$ 和 Y 中出现的所有可能乘积，H (A.11) 和 $\hat{}H'$ (A.16)，我们有

$$(X^{\pm 1}Y\psi)_j = q^{j\mp 1}\psi_{j\mp 1}\,, \quad (Y^{-1}X^{\pm 1}\psi)_j = q^{-j}\psi_{j\mp 1}\,, \tag{B.2}$$

$$(YX^{\pm 1}\psi)_j = q^{j}\psi_{j\mp 1}\,, \quad (X^{\pm 1}Y^{-1}\psi)_j = q^{-j\pm 1}\psi_{j\mp 1}\,. \tag{B.3}$$

另一方面，以 DMT 算符（5.2）作用于波函数（5.4），例如

$$\hat{T}_x\Psi = \sum_{m,n} e^{i\theta^x_{m-1,n}}\psi_{m-1,n}\,|\psi_{m,n}\rangle \tag{B.4}$$

并提取 $e^{i\frac{\pi}{2}(m+n)}|\psi_{m\text{ 的系数，}n}\rangle$（推导（ $e^{ij\frac{\pi}{2}}$A.9）时略去整体因子），我们得到

$$\begin{aligned}\hat{T}_x\Psi &\sim e^{-i\frac{\pi}{2}(m+n)}e^{i\theta^x_{m-1,n}}\psi_{m-1,n}\\ &= -iq^{j-1}\psi_{j-1} = -i(XY\psi)_j\,.\end{aligned} \tag{B.5}$$

对其余 DMT 算符重复相同的过程，我们得到如下对应关系，即矩阵表示

$$\hat{T}_x \leftrightarrow -iXY\,, \quad \hat{T}_y \leftrightarrow -iY^{-1}X\,, \quad \hat{T}_x^\dagger \leftrightarrow iY^{-1}X^{-1}\,, \quad \hat{T}_y^\dagger \leftrightarrow iX^{-1}Y\,. \tag{B.6}$$

对于复共轭系统（$q = e^{i\pi\phi}$），改变中带条件 $k_+ \leftrightarrow -k_+$，并将 DMT 算符记为 $\hat{}\,T'_x$、$\hat{}T'_y$ 等，我们也有

$$\hat{T}'_x \leftrightarrow -iXY^{-1}\,, \quad \hat{T}'_y \leftrightarrow -iYX\,, \quad \hat{T}'^\dagger_x \leftrightarrow iYX^{-1}\,, \quad \hat{T}'^\dagger_y \leftrightarrow iX^{-1}Y^{-1}\,. \tag{B.7}$$

该表示与（B.6）在交换 $Y \leftrightarrow Y^{-1}$ 下相同，并通过 q-反演与（B.6）相关

(A.18)

$$\hat{T}'_y = Y\hat{T}_xY^{-1}\,, \quad \hat{T}'_x = Y\hat{T}_yY^{-1}\,, \quad \text{etc.} \tag{B.8}$$

该变换与（A.16）给出的哈密顿量一致

$$\hat{H}' = \hat{T}'_x + \hat{T}'_y + \hat{T}'^\dagger_x + \hat{T}'^\dagger_y\,. \tag{B.9}$$

最后，我们检验 DMT代数（5.20）。利用矩阵表示（B.6），我们得到交换（5.9）和环流（5.10）规则之间的对应关系

$$\hat{T}_y\hat{T}_x = q^{-2}\hat{T}_x\hat{T}_y\,, \quad \hat{T}_y^\dagger\hat{T}_x^\dagger\hat{T}_y\hat{T}_x = q^{-2}\,, \tag{B.10}$$

并且，若我们记得 q 由（A.8）给出，则这些与（5.9）和（5.10）一致。融合规则（5.17）

$$\hat{T}_x\hat{T}_y = q\hat{T}_{x+y} \tag{B.11}$$

也可由（4.43）的厄米共轭得到

$$\hat{T}_x\hat{T}_y = -X^2 = q\tilde{X}^2 \tag{B.12}$$

and

$$\hat{T}_{x+y} = \tilde{X}^2\,. \tag{B.13}$$

CRediT 作者贡献声明

Naruhiko Aizawa：撰写—审阅与编辑、概念构思、监督。Haru-Tada Sato：撰写—初稿、概念构思、方法学、研究、验证。

利益冲突声明

作者声明，我们没有已知的可能影响本文所报告工作的财务利益冲突或个人关系。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

参考文献

[1]D.B. Fairlie、P. Fletcher 和 C.K. Zachos，“新型无限维代数的三角结构常数”，*Phys. Lett.* **B218** (1989) 203。 https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)91418-4；“经典李代数的无限维代数与三角基”，*J. Math. Phys.***31** (1990) 1088。 https://doi.org/10.1063/1.528788；D.B. Fairlie 和 C.K. Zachos，“无限维代数、正弦括号和 SU(∞)”，*Phys. Lett.***B224** (1989) 101。 https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)91057-5。

[2] H.J. Groenewold，“初等量子力学原理”，Physica **12** (1946) 405。 https://doi.org/10.1007/978-94-017-6065-2 1；J.E. Moyal，“量子力学作为统计理论”，Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99。 https://doi.org/10.1017/S0305004100000487。

[3]J. Zak，《磁平移群》，*Phys. Rev.* **134** (1964) A1602。 https://doi.org/10.1103/PhysRev.134.A1602；《磁平移群：II. 不可约表示》，*ibid.* A1607。 https://doi.org/10.1103/PhysRev.134.A1607。

[4]R.J. Szabo, 《非交换空间上的量子场论》, *Phys. Rep.* **378** (2003) 207（arXiv:hep-th/0109162）。https://doi.org/10.1016/S0370-1573(03)00059-0 。[5] N. Seiberg 和 E. Witten, 《弦理论与非交换几何》, *J. High Energy Phys.* **9909**(1999) 032（arXiv:hep-th/9908142）。https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032 。[6]W. Bu、S. Heuveline 和 D. Skinner, 《莫亚尔变形、$W_{1+\infty}$ 与天球全息》, arXiv:2208.13750 [hep-th]。https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.13750；R. Monteiro, 《天球手征代数、色运动学对偶与可积性》, arXiv:2208.11179[hep-th]。https://doi.org/10.48550/arXiv.2208.11179 。[7]I. Bakas, 《扩展共形对称性的N 极限》, *Phys. Lett.* B228 (1989) 57。https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)90525-X；C.N. Pope、Z. Shen 和 L.J. Romans, 《W_∞ 与Racah-Wigner代数》 *Nucl. Phys.* B339 (1990) 191。https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90539-P 。[8]A. Strominger, 《$w_{1+\infty}$ 与天球》, arXiv:2105.143462 [hep-th]。https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.14346；A. Guevara、E. Himwich、M. Pete 和 A. Stro-minger, 《规范理论与引力的全息对称代数》, *J. High Energy Phys.* **2021**(2021) 152（arXiv:2103.03961[hep-th]）。https://doi.org/10.1007/JHEP11(2021)152 。[9] 《量子霍尔效应》, R. E. Prange 和 S. M. Girvin（编）, 施普林格纽约公司（1987）。https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3350-3 。[10]S.M. Girvin、A.H. MacDonald 和 P.M. Platzman, 《分数量子霍尔效应中的集体激发磁旋子理论》, *Phys. Rev.* B33 (1986) 2481。https://doi.org/10.1103/PhysRevB.33.2481 。[11] A. Cappelli 和 L. Maffi, 《超越边缘的量子霍尔效应中的W无穷对称性》, *J. HighEnergy Phys.* **2021** (2021) 120（arXiv:2103.04163[hep-th]）。https://doi.org/10.1007/JHEP05(2021)120 。[12] X. Shen, *Int. Jour. Mod. Phys.* A7 (1992) 6953。https://doi.org/10.1142/S0217751X92003203 。[13] A. Cappelli、C.A. Trugenberger 和 G.R. Zemba, 《量子霍尔效应中的无限维对称性》, *Nucl. Phys.* B396 (1993) 465（arXiv:hep-th/9206027）。https://doi.org/10.1142/S0217751X92003203 。[14] A. Cappelli、C.A. Trugenberger 和 G.R. Zemba, 《量子霍尔效应中的大N极限》, *Phys. Lett.* B306 (1993) 100（arXiv:hep-th/9303030）。https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91144-C 。[15]V. G. Drinfeld, 《量子群》, 国际数学家大会会议录第1卷，第798页，纽约：Berkeley（1986），（美国数学会，1987），*J. Soviet. Math.* **41** (1988) 898。https://doi.org/10.1007/BF01247086；M. Jimbo, 《U(g)的A q-差分类比与杨-巴克斯特方程》, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63。https://doi.org/10.1007/BF00704588；《U($\mathfrak{gl}(N+1)$)的A q-类比、Hecke代数与杨-巴克斯特方程》, *Lett. Math. Phys.* **11** (1986) 247。https://doi.org/10.1007/BF00400222；《广义Toda系统的量子 R 矩阵》, *Com-mun. Math. Phys.* **102** (1986) 537。https://doi.org/10.1007/BF01221646 。[16] E. K. Sklyanin, 《与杨-巴克斯特方程相关的某些代数结构》, *Funct. Anal.Appl.* **16** (1982) 263。https://doi.org/10.1007/BF01077848；

P.P. Kulish 和 N. Yu. Reshetikhin, 《正弦-戈登方程的量子线性问题与高阶表示》, *J. Soviet. Math.* **23** （1983年）2435。 https://doi.org/10.1007/BF01084171。

[17] L. D. Faddeev、N. Yu. Reshetikhin 和 L. A. Takhtajan, 《李群和李代数的量子化》, *Algebra Anal.* **1** （1987年）178。 https://doi.org/10.1016/B978-0-12-400465-8.50019-5。

[18]S. L. Woronowicz, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **23** （1987年）117; 《紧矩阵伪群》, *Commun. Math. Phys.* **111** （1987年）613。 https://doi.org/10.1007/BF01219077; 《紧矩阵伪群上的微分演算（量子群）》, *Commun. Math. Phys.* **122** （1989年）125。 https://doi.org/10.1007/BF01221411 。

[19]P.B. Wiegmann 和 A.V. Zabrodin, 《Asbel-Hofstadter问题的量子群与磁平移 Bethe拟设》: *Nucl. Phys.* **B422** (1994) 495 (arXiv:cond-mat/9312088)。 https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90443-X; 《磁场中 Bloch电子的 Bethe拟设》: *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 1890。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.1890。

[20] L.D. Faddeev 和 R.M. Kashaev, 《Hofstadter问题的广义Bethe拟设方程》: *Commun. Math. Phys.* **169** (1995) 181 (arXiv:hep-th/9312133)。https://doi.org/10.1007/BF02101600。

[21]Y. Hatsugai、M. Kohmoto 和 Y-S. Wu, 《磁场中布洛赫电子的贝特拟设方程的显式解》 *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 1134 (arXiv:cond-mat/9405028)。 https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.1134 。

[22] H-T. Sato, 《费米子系统中的量子群与 q-Virasoro 对称性》 *Prog. Theor. Phys.* **93**(1995) 195 (arXiv:hep-th/9312174)。https://doi.org/10.1143/ptp/93.1.195; 《朗道能级与量子群》 *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 451 (arXiv:hep-th/9311111)。https://doi.org/10.1142/S0217732394000472; 《环面上的量子群对称性与量子霍尔波函数》*Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 1819 (arXiv:hep-th/9312019)。 https://doi.org/10.1142/S0217732394001672; N. Aizawa、S. Sachse、H-T.Sato, 《球面上的 Laughlin 态作为 $U_q(sl_2)$的表示》 *Mod. Phys. Lett.* **A10**(1995) 853 (arXiv:hep-th/9412017)。 https://doi.org/10.1142/S0217732395000922 。

[23]A. Jellal 和 H-T. Sato, 《变形超 Virasoro 代数的 FFZ 实现——Chaichian-Presnajder 型》, *Phys. Lett.* B483 (2000) 451 (arXiv:hep-th/0003268)。 https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00603-1。[24]R. Kemmoku 和 H-T.Sato, 《变形场与变形超 Virasoro 代数的 Moyal 构造》, *Nucl. Phys.* B595 (2001) 689 (arXiv:hep-th/0007122)。 https://doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00610-6。[25] M. Chaichian 和 P. Preˇsnajder, 《Virasoro（超）代数的 Sugawara 构造与 q 变形》, *Phys. Lett.* B277 (1992) 109。 https://doi.org/10.1016/0370-2693(92)90965-7。[26] A.A. Belov 和 K.D. Chaltikian, 《Virasoro 代数的 q 变形与格点共形理论》, *Mod. Phys. Lett.* A8 (1993) 1233。https://doi.org/10.1142/S0217732393002725。 [27] H-T. Sato, 《二维无质量费米子的非局域 Virasoro 对称性》, *Nucl. Phys.* B393 (1993) 442。 https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90253-L。

[28] H-T. Sato, 《变形超 Virasoro 代数的 OPE公式》 *Nucl. Phys.* **B471** (1996) 553(arXiv:hep-th/9510082)。https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00185-X。

[29] H-T.Sato, "q-Virasoro算子源自诺特流的一种类比形式", *Z. Phys.***C70** (1996年) 349 (arXiv:hep-th/9510189v1). https://doi.org/10.1007/s002880050113.

[30]M. Chaichian 和 P.P. Preˇsnajder, "离散时间量子场论与变形的超Virasoro代数", *Phys. Lett.* **A322** (2004年) 156 (arXiv:hep-th/0209024).https://doi.org/10.1016/j.physleta.2003.12.061; "q-Virasoro代数、q-共形维数与自由q-超弦", *Nucl. Phys.* **B482** (1996年) 466 (arXiv:hep-th/9603064).https://doi.org/10.1016/S0550-3213(96)00568-8 .

[31] "非广延统计力学导论", C. Tsallis, Springer, 纽约公司 (2009).https://doi.org/10.1007/978-0-387-85359-8 .

[32] W.S. Chung 和 H. Hassanabadi, "基于 q-变形狄拉克δ分布的超统计与相互作用气体模型", *Physica* **A516** (2019) 496. https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.10.037.

[33]W.S. Chung 和 A. Algin, 《基于以自由哈密顿量为随机变量的超统计的微正则系综》, *Eur. Phys. J. Plus* **137** (2022年) 620。https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02809-1。[34] E. Mohammadikhabaz、B. Lari 和 H. Hassanabadi, 《基于费米气体模型的 q-形式体系中的量子霍尔效应》, *Mod. Phys. Lett.* A37 (2022年) 2250126。https://doi.org/10.1142/S0217732322501267; 《q-形式体系中的室温量子霍尔效应》, *Eur. Phys. J. Plus* **137** (2022年) 655。https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-02831-3。[35] Yu. I. Manin, 《量子群与非交换几何》, Les publications du Centre de Recherches Math´ematiques, Univ. Montr´eal (1988)。https://doi.org/10.1007/978-3-319-97987-8; 《一般线性超群的多参数量子变形》, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989) 163。https://doi.org/10.1007/BF01244022。[36]L. A. Takhtajan, 《量子群导论》, 载于: Doebner, H.D.、Hennig, J.D.（编）, 《量子群》, 《物理学讲义》370卷。Springer, 柏林, 海德堡, (1990) 第3-28页。https://doi.org/10.1007/3-540-53503-9 39。[37] S. Majid, 《拟三角 Hopf代数与杨-巴克斯特方程》, *Int. Jour. Mod. Phys.* A5 (1990) 1。https://doi.org/10.1142/S0217751X90000027; 《编织群与编织矩阵的例子》, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 3246。https://doi.org/10.1063/1.529485。[38] J. Wess 和 B. Zumino, 《量子超平面上的协变微分演算》, 《核物理B（会议增刊）》18B卷 (1990) 302。https://doi.org/10.1016/0920-5632(91)90143-3。[39] T. Curtright 和 C. Zachos, 《量子代数的变形映射》, *Phys. Lett.* B243 (1990) 237。https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90845-W。[40]M. Chaichian、P.P. Kulish 和 J. Lukierski, 《q-变形 Jacobi恒等式、q-振子与q-变形无限维代数》, *Phys. Lett.* B237 (1990)

401。https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)91196-I；《q-振子的超协变系统与q-超对称哈密顿量》，*Phys. Lett.* B262 (1991) 43。https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90640-C。[41] M. Chaichian、D. Ellinas 和 Z. Popowicz，《带中心扩张的量子共形代数》，*Phys. Lett.* B248 (1990) 95。https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90021-W；M. Chaichian、A.P. Isaev、J. Lukierski、Z. Popowicz 和 P. Preˇsnajder，《Virasoro代数的q-变形与共形维数》，*Phys. Lett.* B262 (1991) 32。https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90638-7。[42] N. Aizawa 和 H. Sato，《带中心扩张的Virasoro代数的q-变形》，*Phys. Lett.*B256 (1991) 185。https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90671-C。[43] F.J. Narganes-Quijiano，《Virasoro代数的一种 q-变形的循环表示》，*J. Phys.*A: Math. Gen. 24 (1991) 593。https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/3/017。

[44] H-T.Sato，《非交换量子超空间中超Virasoro代数的变形》，*Phys. Lett.***B415** (1997) 170 (arXiv:hep-th/9709047)。https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)01228-8。

[45]N. Aizawa、T. Kobayashi 和 H-T. Sato，《关于 osp(1,2) 和超Virasoro代数的 Curtright-Zachos变形的注记》，*Int. Jour. Mod. Phys.* **A12** (1997) 5867 (arXiv:hep-th/9706176)。https://doi.org/10.1142/S0217751X97003078 。

[46]A.El Hassouni、Y. Hassouni、E.H. Tahri 和 M. Zakkari，《在量子平面上实现变形的无中心Virasoro代数》，*Mod. Phys. Lett.* A10（1995）2169。https://doi.org/10.1142/S0217732395002325；《通过 $\bar{a}_\infty$ 代数实现 q变形U(1) Kac-Moody代数和Virasoro代数》，*Mod. Phys. Lett.* A11（1996）37。https://doi.org/10.1142/S0217732396000060。[47]M. Mansour 和 E.H. Zakkari，《通过量子（超）Virasoro代数实现分数自旋》，《应用Clifford代数进展》14（2004）69。（arXiv:hep-th/0401111）。https://doi.org/10.1007/s00006-004-0007-3。[48] R. Chakrabarti 和 R. Jagannathan，《一个（p,q）变形Virasoro代数》，*J. Phys.* A：Math. Gen. 25（1992）2607。；W.S. Chung，《Virasoro代数的双参数变形》，*J. Math. Phys.* **35**（1994）2490。https://doi.org/10.1063/1.530518；[49] M.N. Hounkonnou 和 F. Melong，《R(p,q)变形的共形Virasoro代数》，*J. Math. Phys.* **60**（2019）023501（arXiv:1805.08238 [math-ph]）。https://doi.org/10.1063/1.5079812。[50]M. Mansour，《关于量子超Virasoro代数》，*Czech. J. Phys.* **51** （2001）883（arXiv:math-ph/0010029）。https://doi.org/10.1023/A:1012392624242；[51] M. Chaichian、Z. Popowicz 和 P. Preˇsnajder，《q-Virasoro代数及其与 q变形KdV系统的关系》，*Phys. Lett.* B249（1990）63。https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90527-D；[52]H. Sato，《 q变形Virasoro代数的实现》，*Prog. Theor. Phys.* **89** （1993）531。https://doi.org/10.1143/ptp/89.2.531。[53] A.P. Polychronakos，《 q变形Virasoro代数的一致性条件与表示》，*Phys. Lett.* B256（1991）35。https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90214-B；

[54]J.T. Hartwig、D. Larsson 和 S.D. Silvestrov，《使用σ-导子的李代数的变形》，《代数杂志》295（2006）314（arXiv:math/0408064 [math.QA]）。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.036。[55] D. Larsson 和 S.D. Silvestrov，《拟 hom-Lie 代数、中心扩张与类 2-余循环恒等式》，《代数杂志》288（2005）321（arXiv:math/0408061）。https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.02.032。[56]A. Makhlouf 和 S.Silvestrov，《关于Hom-结合代数和Hom-Lie 代数的形式变形的注记》，《数学论坛》22（2010）715（arXiv:0712.3130v1 [math.RA]）。https://doi.org/10.1515/forum.2010.040。[57] K. Hoshi 和 Y. Hatsugai，《由贝特拟设方程得到的朗道能级》，*Phys. Rev.* B61（2000）4409（arXiv:cond-mat/9908254 [cond-mat.mes-hall]）。https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.4409。[58] D.J. Thouless，《准周期紧束缚模型的带宽》，*Phys. Rev.* **28**（1983）4272。https://doi.org/10.1103/PhysRevB.28.4272。