arXiv:2303.17389v1 [math.MG] 30 Mar 2023

平面高斯-明科夫斯基问题

陈世炳、胡胜男、刘伟如和赵一鸣

Abstract. 本文聚焦于二维的高斯-闵可夫斯基问题。具体而言，我们证明，若高斯曲面面积测度与球面勒贝格测度成正比，则相应的凸体必为中心圆盘。作为应用，我们通过度理论方法，利用这一“唯一性”结果证明了高斯-闵可夫斯基问题存在光滑的小解。

1. 引言

对闵可夫斯基型问题及其相关等周不等式的研究，是凸几何分析的核心内容。这一研究脉络可追溯至闵可夫斯基的开创性工作 [55]，以及布伦和闵可夫斯基在19世纪提出的著名布伦-闵可夫斯基不等式。加德纳的综述 [24] 深入探讨了布伦-闵可夫斯基不等式（及其各种推广）与其他几何和解析等周型不等式之间的诸多联系。布伦-闵可夫斯基不等式与经典闵可夫斯基问题密切相关；后者探究的是，是否存在唯一一个凸体，其曲面面积测度由给定的博雷尔测度 μ 在 S^{n-1}上规定。这里，凸体指具有非空内部的 $\mathbb{R}^n$ 紧凸子集；若 K 是一个凸体，其曲面面积测度定义为

$$S_K(\eta) = \mathcal{H}^{n-1}(\nu_K^{-1}(\eta)),$$

对于每个博雷尔集 $\eta \subset S^{n-1}$，其中 ν_K^{-1} 是逆高斯映射。曲面面积测度可以视为体积泛函的微分。闵可夫斯基问题等价于 S^{n-1}上的以下偏微分方程：

$$\det(\nabla^2_{S^{n-1}} h + hI) = \mu,$$

并推动了上世纪蒙日-安培方程的诸多发展。参见闵可夫斯基 [56], 亚历山德罗夫 [1], 陈-丘 [16], 波戈列洛夫 [58], 和 Caffarelli [10–12]的著作。特别是在微分几何中，这对应于指定高斯曲率的问题。若要直观地理解布伦-闵可夫斯基不等式与闵可夫斯基问题为何天然交织在一起，可以注意到，布伦-闵可夫斯基不等式大致指出，体积泛函 $V^{\frac{1}{n}}$ 的 n 次方根是凹函数，而闵可夫斯基问题研究的是曲面面积测度——即体积泛函的“导数”。

日期：2023年3月31日。2010年数学主题分类：52A40、52A38、35J96。关键词和短语：闵可夫斯基问题、高斯闵可夫斯基问题、Monge-Amp`ere 方程、度理论。Chen 的研究得到中国国家重点研发计划项目 2022YFA1005400、国家自然科学基金委员会项目 12225111、国家自然科学基金委员会项目 12071482 和国家自然科学基金委员会项目 12141105 的资助。Zhao 的研究部分得到美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS–2132330。

受经典布伦-明可夫斯基理论成功的启发，过去三十年间，经典闵可夫斯基问题出现了若干重要变体——这些问题都涉及指定某些几何测度；这些测度是通过类似于导出曲面面积测度的方式，对几何不变量进行“微分”而得到的。在光滑情形下，这些闵可夫斯基问题可视为指定不同曲率函数的问题，并由此引出许多新的（且颇具挑战性的）蒙日-安培方程。最著名的闵可夫斯基型问题包括 L_p 闵可夫斯基问题（见 [17, 34, 49]）、对数明可夫斯基问题（见 [9]）以及对偶明可夫斯基问题（见 [32]）。后文将提供更多细节。

尝试将这一理论推广到其他可测空间是很自然的。尤其令人感兴趣的是 $\mathbb{R}^n$，当其配备由下式给出的高斯概率测度 γ_n 时

$$\gamma_n(E) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_E e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx.$$

需要注意的是，与勒贝格测度相比，高斯概率测度的一个非常显著的特征是：它不是均匀的，甚至也不是齐次的。这使得人们在概念上很难相信，$(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$中竟然会成立布伦-闵可夫斯基不等式——注意，布伦-闵可夫斯基不等式中的指数 $\frac{1}{n}$ 对应于凸体缩放时体积的缩放方式。相反，高斯概率空间中的等周型不等式是埃尔哈德不等式（2.3），该不等式并不利用齐次性。令人相当惊讶的是，对于关于原点对称的凸体，$(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$中实际上成立维数布伦-闵可夫斯基不等式。该猜想最初由 Gardner-Zvavitch [22],提出，Kolesnikov-Livshyts [38]作出了重要贡献，随后 Eskenazis-Moschidis [19]最近给出了证实。Gardner-Zvavitch [22] 观察到，这一不等式既不蕴含埃尔哈德不等式，也不被埃尔哈德不等式蕴含。维数布伦-闵可夫斯基不等式还与猜想中的对数布伦-明可夫斯基不等式有关（平面情形已在 [8]中得到证明）——后者是勒贝格测度空间中的一个不等式，但采用了不同的加法运算；这一联系源于 Livshyts-Marsiglietti-Nayar-Zvavitch [45], 的一个结果，并且最近在 [31]中得到了推广。我们还想提及 Borell [5]的工作。

受 $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ 中关于等周不等式的丰富理论启发，Huang、Xi 和最后一位作者 [33] 研究了 $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ 中的闵可夫斯基问题。设 K 为 $\mathbb{R}^n$中的一个包含原点作为内点的凸体。 K的高斯表面积记为 $S_{\gamma_n,\ K}$，它是满足以下条件的唯一博雷尔测度：

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma_n(K+tL) - \gamma_n(K)}{t} = \int_{S^{n-1}} h_L dS_{\gamma_n, K}$$

对于 $\mathbb{R}^n$ 中每一个包含原点作为内点的凸体 L均成立。这里， h_L 是 L的支撑函数，见 (2.1)。$S_{\gamma_n,\ K}$ 的一个更明确公式见 (2.2)。

高斯闵可夫斯基问题。给定一个有限博雷尔测度 μ，关于 μ 需要满足哪些充要条件，才能存在一个满足 $o \in \operatorname{int} K$ 的凸体 K，使得

$$\mu = S_{\gamma_n, K}? \tag{1.1}$$

如果 K 存在，那么它在多大程度上是唯一的?

当给定测度 μ 具有密度 $d\mu = f dv$时，(1.1) 等价于定义在 S^{n-1}上的以下偏微分方程：

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\nabla h|^2 + h^2}{2}} \det(\nabla^2 h + hI) = f. \tag{1.2}$$

由于高斯密度的独特性质，在 [33], 中，关于高斯闵可夫斯基问题的结果仅适用于子集 $\gamma_n(K) \geq 1/2$。在该条件下，埃尔哈德不等式可直接推出高斯闵可夫斯基问题解的唯一性：若 $S_{\gamma_n,\ K} = S_{\gamma_n,\ L}$ 且$\gamma_n(K)$ $\gamma_n(L)$ $\geq 1/2$，则 $K = L$。参见 [33]中的定理 1.1。我们指出，若不加此限制，埃尔哈德不等式对高斯闵可夫斯基问题解的唯一性毫无帮助。特别是，当 $\gamma_n(K) < \frac{1}{2}$时，(1.1) 实际上可能有多个解。从概念上说，这使得高斯闵可夫斯基问题的存在性部分更具挑战性，因为解不唯一往往意味着，要为解决闵可夫斯基问题提供所需的 C^0估计会更加困难。

在本文中，我们研究二维[1]高斯闵可夫斯基问题的存在性与唯一性，且不要求 $\gamma_2(K) \geq 1/2$。

为了充分认识高斯闵可夫斯基问题所面临的独特挑战，我们将介绍其他研究相对较为深入的闵可夫斯基型问题的背景，以作比较。

经典布伦-明科夫斯基理论有两种主要变体。

一种是由 Lutwak 在20世纪90年代初发表的两篇里程碑式论文 L_p 所开创的布伦-明科夫斯基理论；他在其中定义了 [49,50] 曲面面积测度，这一概念是如今蓬勃发展的 L_p 布伦-明科夫斯基理论的基础，而该理论在现代凸几何分析中居于核心地位。必须指出，这种推广极具挑战性，往往需要新的技术。例如，可参见L_p ，其中列出了[6, 17, 29, 34, 36, 46, 47, 52, 53, 62, 63, 65, 69] 布伦-明科夫斯基理论中的一些研究成果（远非详尽无遗）。尤其是，当 L_p 时，理论会变得难得多。这包括关键的中心仿射情形$p < 1$和对数情形 $p = -n$ 。这两种情形下的等周不等式和闵可夫斯基问题都尚未得到彻底解决。特别是，对数闵可夫斯基问题（针对锥体积测度）尚未完全解决。例如，可参见 Bianchi-B $q = 0$、¨oczky-Colesanti-Yang ¨、Chou-Wang [4], 、Guang-Li-Wang [17], 、Zhu [27],等诸多研究。事实上， [68, 69] 情形蕴含着对数布伦-闵可夫斯基猜想（例如参见 B $p = 0$ 或¨oczky-LYZ ¨）；可以说，这是过去十年凸几何分析中最重要的猜想。对数布伦-闵可夫斯基猜想已在二维以及若干特殊类别的凸体中得到验证。例如，可参见 Chen-Huang-Li- Liu [8]、Colesanti-Livshyts-Marsiglietti [14], 、Kolesnikov-Livshyts [18], 、Kolesnikov-Milman [37], 、Milman [39],、Putterman [54], 、Saroglou [59], 。如果该猜想得以证明，它将比经典的布伦-闵可夫斯基不等式强得多。

另一种是由 Lutwak 于20世纪70年代创立的对偶布伦-闵可夫斯基理论。与更关注凸体的投影和边界形状的经典理论相比，对偶布伦-闵可夫斯基理论更关注凸体的交集和内部性质。这解释了为什么对偶理论在20世纪90年代解决著名且长期悬而未决的布塞曼-佩蒂问题时发挥了关键作用。例如，参见 [23, 26, 48,66]。对偶理论中拟混合体积的对应概念是对偶拟混合体积。然而，直到 Huang-Lutwak-Yang-Zhang（Huang-LYZ）的开创性工作 [32] 问世，与对偶拟混合体积相关的几何测度才得以揭示。这由此引出了与 Federer曲率测度相对偶的对偶曲率测度。对偶曲率测度的闵可夫斯基问题，即如今所称的对偶明可夫斯基问题，在过去几年中一直是凸几何和全非线性椭圆偏微分方程领域关注的焦点，并且已在短时间内催生了多篇论文。例如，参见 B¨or¨oczky-Henk-Pollehn [7],

[1]严格来说，二维情形下的高斯表面积更适合称为高斯周长测度。不过，为与高维情形保持一致，我们仍沿用其原名。

Chen-Huang-Zhao [13], Chen-Li [15], Gardner-Hug-Weil-Xing-Ye [25], Henk-Pollehn [30], Li-Sheng-Wang [42], Zhao [67]。需要指出的是，这份名单绝非详尽无遗。

近期，Lutwak-Xi-Yang-Zhang [51]提出了积分几何中的第一个闵可夫斯基型问题，即弦闵可夫斯基问题。

尽管 L_p 闵可夫斯基问题和（L_p）对偶闵可夫斯基问题仍有许多情形尚未解决，但这些问题有一个共同特性：其中涉及的几何测度总是具有某种齐次性。因此，若给定测度 μ 与球面勒贝格测度成比例，则存在且仅存在一个常数解（唯一一个以原点为中心的球）。然而，对于高斯闵可夫斯基问题，若 $f \equiv C > 0$，则取决于 C的取值，方程 (1.2) 可能有一个唯一的常数解、恰有两个常数解，或者根本没有常数解。这是因为函数 $t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}$ 随着 t 从 0 增至 ∞，先严格递增，继而严格递减。

上述观察到的现象表明，当 $|\mu|$足够大时，方程 (1.1) 无解。这使高斯闵可夫斯基问题有别于上述闵可夫斯基型问题。特别是，根据 Ball [3] 和 Nazarov [57], 的研究，维数为 n的凸体 K的高斯表面积渐近有界于 $n^{\frac{1}{4}}$。因此，若要彻底解决高斯闵可夫斯基问题，就需要一种全新的条件。此外， [33] 附录中的例子表明，这种条件是非线性的，也就是说，即使 μ和 ν都能使 (1.1) 有解，对于给定的 $t \in (0, 1)$，也不一定能保证 $t\mu+(1-t)\nu$使 (1.1) 有解。 L_p 闵可夫斯基问题或 (L_p) 对偶闵可夫斯基问题则不存在这种情况。

在当前这项工作中，我们研究平面 Gaussian Minkowski 问题。我们的第一个结果涉及 μ 与球面勒贝格测度成正比时的解。特别地，我们研究满足下式的非负解 h

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h) = C, \tag{1.3}$$

关于 S^1。

定理 1.1. 设 K 是 $\mathbb{R}^2$ 中包含原点的凸体。若 K 的高斯曲面面积测度与球面勒贝格测度成正比；也就是说，存在 $C > 0$，使得 $h = h_K$ 是方程 (1.3) 的一个非负解，那么 K 必须是一个中心圆盘，或者等价地， h 必须是一个常数解。特别地，

(1) 若 $0 < C < e^{-\frac{1}{2}}/(2\pi)$，则恰有两个解；(2) 若 $C = e^{-\frac{1}{2}}/(2\pi)$，
则有唯一解；(3) 若 $C > e^{-\frac{1}{2}}/(2\pi)$，则无解。

证明的思路是将非常数解的存在性转化为一个涉及精心选取的积分估计的问题。这一思路受 Andrews [2] 的启发。近期，Andrews 的方法被改用于研究平面（L_p）对偶闵可夫斯基问题的解的数目，参见 Liu-Lu [44] 和 Li-Wan [41]。

利用定理 1.1，采用度理论方法证明了原点对称情形下以下平面 Gaussian Minkowski 问题的解的存在性。

定理 1.2（光滑小解的存在性）。设 $0 < \alpha < 1$ 和 $f \in C^{2,\,\alpha}(S^1)$ 是满足 $\|f\|_{L^1} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 的正偶函数。那么，存在一个 $C^{4,\,\alpha}$、关于原点对称的 K，满足

$\gamma_2(K) < \frac{1}{2}$，使其支撑函数 h 满足

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h) = f.$$

回想一下，在 $(\mathbb{R}^2, \gamma_2)$ 中的等周不等式对于类$\gamma_2(K) \geq 1/2$之外的情况并无特别帮助。从概念上说，这使得获得 C^0 估计要困难得多。这正是我们需要假设 f 被一个正常数从上方和下方同时界定的原因。在定理 1.2 的情形下，这由 $f \in C^2$, $^{\alpha}(S^1)$ 是正函数这一事实保证。

结合 [33, 定理 1.4], ，利用逼近论证，我们立即得到

定理 1.3. 设 $f \in L^1(S^1)$ 是一个偶函数，且满足$\|f\|_{L^1} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。若存在 $\tau > 0$，使得在 S^1 上几乎处处有 $\frac{1}{\tau} < f < \tau$，则至少存在两个关于原点对称的凸体 K_1 和 K_2，使得

$$dS_{\gamma_2,K_1} = dS_{\gamma_2,K_2}(v) = f(v)dv.$$

最后，我们指出，非齐次测度的闵可夫斯基问题通常被称为奥尔利奇-闵可夫斯基型问题，其源于 [28] Haberl-Lutwak-Yang-Zhang 关于奥尔利奇闵可夫斯基问题的研究。该问题推广了经典闵可夫斯基问题和 L_p 闵可夫斯基问题。另见 [20, 21, 25, 35, 64]，其中介绍了经典布伦-明可夫斯基理论的奥尔利奇推广方面的更多结果和贡献。最近，Kryvonos-Langharst[40] 研究了赋有对数凹测度的环境空间。不过，在上述所有工作中，解都只确定到一个常数。在高斯概率空间的情形下，例如，对于给定的有限博雷尔测度 μ on S^{n-1}，我们试图寻找一对 (c, K)，其中 $c > 0$，且 K 是一个凸体，使得

$$\mu = cS_{\gamma_n,K}. \tag{1.4}$$

需要注意的是，引入这个 c后，我们提到的关于高斯闵可夫斯基问题的所有挑战都不会出现。但一般来说，这也会使我们失去证明任何唯一性结果的可能性。特别是， [33] 中的定理 1.4（或当前工作中的定理 1.2，在二维且对 μ的正则性作出某些限制的情况下）立即表明，存在无穷多对满足 (1.4) 的（c， K）。事实上，解的数目与 $\mathbb{R}$的基数一样多！

2. Preliminaries

本节将介绍一些关于凸体的基本知识和记号。关于凸体理论的一般参考资料，读者可参阅 Schneider 所著的书 [61] 。

对于博雷尔测度 μ，我们采用标准记号 $|\mu|$表示其总测度。我们用 γ_n 表示 $\mathbb{R}^n$中的高斯概率测度；也就是说，

$$\gamma_n(E) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_E e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx.$$

我们将 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内部的紧凸子集称为凸体。注意，如果凸体还关于原点对称，那么它必然包含原点作为内点。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的紧凸子集。 K 的支撑函数 h_K 定义为

$$h_K(y) = \max\{x \cdot y : x \in K\}, \tag{2.1}$$

对每个 $y \in \mathbb{R}^n$。显然， h_K 是1次齐次且次线性的。另一方面，若 f 是定义在 S^{n-1} 上的正连续函数，则 $[f]$ 的 Wul夫形 f 是由下式定义的凸体:

$$[f] = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v \le f(v), \text{ for all } v \in S^{n-1}\}.$$

不难看出，在 S^{n-1} 上，我们有 $h_{[f]} \le f$。若 $f = h_K$，则 $[f] = K$。若 K 关于原点对称，根据支撑函数的定义，我们有以下有用的估计:

$$h_K(v) \ge |x \cdot v|, \forall v \in S^{n-1}, \forall x \in K.$$

通过采用豪斯多夫度量， $\mathbb{R}^n$ 中的凸体空间可以构成一个度量空间。设 K_i 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体序列。若 K_i 在豪斯多夫度量下收敛到紧凸子集 $K \subset \mathbb{R}^n$ ，则称

$$\max\{|h_{K_i}(v) - h_K(v)| : v \in S^{n-1}\} \to 0,$$

当 $i \to \infty$时。

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸子集 K 及 $v \in S^{n-1}$， K 在 v 处的支撑超平面 $H(K, v)$ 由下式给出:

$$H(K, v) = \{x \in K : x \cdot v = h_K(v)\}.$$

根据定义，支撑超平面 $H(K, v)$ 非空，且只包含 K 的边界点。对于 $x \in H(K, v)$，我们称 v 是 K 在 $x \in \partial K$ 处的外单位法向量。

由于 K 是凸的，对于几乎所有 $\mathcal{H}^{n-1}$ $x \in \partial K$， K 在 x 处的外单位法向量是唯一的。在这种情况下，我们用 ν_K 表示将 $x \in \partial K$ 映射到其唯一外单位法向量的高斯映射。因此，映射 ν_K 在 ∂K 上几乎处处有定义。我们用 ν_K^{-1} 表示逆高斯映射。由于不假设 K 是严格凸的，映射 ν_K^{-1} 是集值映射，并且对于每个集合 $\eta \subset S^{n-1}$，我们有

$$\nu_K^{-1}(\eta) = \{x \in \partial K : \text{ 存在 } v \in \eta \text{ ，使得 } v \text{ 是 } x\}. \text{处的外单位法向量}$$

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点这一内点的凸体。 K 的高斯曲面面积测度记为 $S_{\gamma_n,\, K}$，它是定义在 S^{n-1} 上的博雷尔测度，定义为

$$S_{\gamma_n,K}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\nu_K^{-1}(\eta)} e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}(x), \tag{2.2}$$

对每个博雷尔可测的 $\eta \subset S^{n-1}$。可以证明， $S_{\gamma_n,\, K}$ 在 K 中是弱连续的（相对于豪斯多夫度量）：如果 K_i、 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点这一内点的凸体，并且 K_i 在豪斯多夫度量下收敛于 K ，那么 $S_{\gamma_n,\, K_i}$ 弱收敛于 $S_{\gamma_n,\, K}$。例如，参见 [33] 中的定理 3.4。

根据高斯曲面面积测度的定义，通过简单计算可知，如果$K \in \mathcal{K}_o^n$ 是凸体，那么$S_{\gamma_n,\, K}$ 相对于曲面面积测度是绝对连续的，并且

$$dS_{\gamma_n,K} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{|\nabla h_K|^2 + h_K^2}{2}} dS_K.$$

此外，如果凸体 K 是 C^2，那么$S_{\gamma_n,\ K}$ 相对于球面勒贝格测度是绝对连续的，并且

$$dS_{\gamma_n,K}(v)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{|\nabla h_K|^2+h_K^2}{2}}\det(\nabla^2 h_K+h_K I)dv.$$

当 $P\in\mathcal{K}_o^n$ 是一个具有单位法向量 v_i 及其对应面 F_i的多面体时，高斯曲面面积测度$S_{\gamma_n,\ P}$ 是一个离散测度，其定义为

$$S_{\gamma_n,P}(\cdot)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\delta_{v_i}(\cdot),$$

其中 α_i 定义为

$$\alpha_i=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{F_i}e^{-\frac{|x|^2}{2}}d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

设 K、L 是 $\mathbb{R}^n$中的两个凸体。埃尔哈德不等式指出，对于 $0<t<1$，有

$$\Psi^{-1}(\gamma_n((1-t)K+tL))\geq(1-t)\Psi^{-1}(\gamma_n(K))+t\Psi^{-1}(\gamma_n(L)).\tag{2.3}$$

这里，$(1-t)K+tL=\{(1-t)x+ty:\ x\in K、\ y\in L\}$ 是 K与 L之间的闵可夫斯基组合，并且

$$\Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

此外，当且仅当 $K=L$时，等号成立。

高斯等周不等式指出，在 $\mathbb{R}^n$ 中，对于每个凸体 K，若 K 属于 $\mathbb{R}^n$，则有

$$|S_{\gamma_n,K}|\geq\psi(\Psi^{-1}(\gamma_n(K))),\tag{2.4}$$

其中 $\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$。注意，高斯等周不等式可直接由埃尔哈德不等式推出。在本文中，我们需要（2.4）的以下特殊情形：若 $\gamma_n(K)=\frac{1}{2}$，则 $|S_{\gamma_n,\ K}|\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。

第 3 节和第 4 节致力于研究方程的解的数目

$$dS_{\gamma_2,K}=Cd\mathcal{H}^1,$$

在包含原点的 $\mathbb{R}^2$ 中凸体上的解，或者等价地，方程的非负解的数目

$$e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h)=c,\tag{2.5}$$

注意，通过研究函数 $te^{-\frac{t^2}{2}}$ 的单调性，很容易确定方程（2.5）的常数解的数目。为便于查阅，我们将其表述为一个命题。

命题 2.1。我们有

(i) 若 $0<c<e^{-\frac{1}{2}}$，则方程 (2.5) 恰有两个常数解；(ii) 若 $c=e^{-\frac{1}{2}}$，则方程 (2.5) 恰有一个常数解；(iii) 若 $c>e^{-\frac{1}{2}}$，则方程 (2.5) 没有常数解。

我们注意到，如果记 $h_1\equiv r_1$、$h_2\equiv r_2$ 与 $r_1>r_2$ 为当 $c\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时方程 (2.5) 的两个常数解，那么容易看出，当 $c\to 0$ 时，我们有 $r_1\to\infty$ 和 $r_2\to 0$。

3. An integral associated with number of nonconstant solutions

本节中，我们构造一个带参数积分，其值估计将导出方程 (1.3) 的非常数解的个数。

为简 便起见，我们将 (1.3) 中的常数 2π 移到另一边，并将方程改写为 s

$$e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h)=c, \tag{3.1}$$

对于某个给定的 $c>0$。基于 Caffarelli [10–12], 建立的正则性理论，显然，若 h 是 (3.1) 的非负解，则 $h\in C^\infty$。此外，

$$(e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}})'=e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h)(-h') \ =-ch',$$

其中，在第二个等式中，我们用到了 h 是 (3.1) 的解这一事实。因此，存在一个常数 E，使得

$$e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}+ch\equiv E, \qquad \text{on } S^1. \tag{3.2}$$

令

$$h_0=\min_{\theta\in S^1}h(\theta), \quad \text{and} \quad h_1=\max_{\theta\in S^1}h(\theta). \tag{3.3}$$

注意到， h 为常函数等价于 $h_0=h_1$。考虑函数

$$\phi(t)=ct+e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

直接计算可得,

$$\phi'(t)=c-te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

当$c\geq e^{-\frac{1}{2}}$时，基于对该情形下 ϕ 单调性的简单观察，方程（3.1）的解的数目显而易见。

定理 3.1. 若$c\in[e^{-\frac{1}{2}},\infty)$且 h是方程（3.1）的非负解，则 h必为常数解。特别地,

（1）若 $c=e^{-\frac{1}{2}}$，则恰有一个包含原点的凸体 K，使得$dS_{\gamma_2,\ K}=cd\mathcal{H}^{n-1}$ 且 K 是一个中心圆盘；（2）若 $c>e^{-\frac{1}{2}}$，则不存在包含原点的凸体 K满足$dS_{\gamma_2,\ K}=cd\mathcal{H}^{n-1}$。

证明。由 (3.2)、 ϕ 的定义，以及 h_0 和 h_1 为极值这一事实，可得

$$\phi(h_0)=\phi(h_1)=E.$$

简单计算可得，当 $c\geq e^{-\frac{1}{2}}$ 时，函数 ϕ 在 $[0,\infty)$ 上严格单调。因此 $h_0=h_1$，这意味着 h 是一个常数解。该定理的其他结论由命题 2.1 得出。□

为简便起见，我们记

$$g(t)=te^{-\frac{t^2}{2}}.$$

注意， g 在 $[0,1]$ 上严格单调递增，在 $[1,\infty)$ 上严格单调递减。此外， $g(1)=\max_{t\in[0,\infty)}g(t)=e^{-\frac{1}{2}}$。

本节余下部分和第 4 节将着重证明，当 $c\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时，方程 (3.1) 不存在非常数解。注意，在这种情况下，方程

$$g(t)=c \tag{3.4}$$

恰有两个非负解，记作 m_1 和 m_2，其中 $m_1 < 1 < m_2$。为此，我们假设 h 是方程 (3.1) 的一个非负非恒定解。

引理 3.2. 若 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，且 h 是方程 (3.1) 的非负非恒定解，则 h 的临界点是孤立的。

证明. 假设 h 的临界点存在一个聚点；也就是说，存在一列互不相同的 $\theta_i \in S^1$ 收敛到 $\theta_0 \in S^1$，使得 $h'(\theta_i) = 0$。由于 h 是光滑的，我们得出 $h'(\theta_0) = 0$。此外，

$$h''(\theta_0) = \lim_{i\to\infty} \frac{h'(\theta_i) - h'(\theta_0)}{\theta_i - \theta_0} = 0.$$

方程 (3.1) 现在推出

$$g(h(\theta_0)) = h(\theta_0)e^{-\frac{h^2(\theta_0)}{2}} = c.$$

因此，$h(\theta_0) = m_1$ 或 $h(\theta_0) = m_2$，其中 m_1 和 m_2 是方程 (3.4) 的非负解。回想一下，$h'(\theta_0) = 0$。于是，h 是以下初值问题的一个解

$$\begin{cases} e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h'' + h) = c, \\ h(\theta_0) = m, \quad h'(\theta_0) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 m 要么是 m_1，要么是 m_2。因此，$h \equiv m$ 是方程 (3.5) 的唯一解，这与 h 非常数的假设相矛盾。□

引理 3.3. 如果 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 且 h 是方程 (3.1) 的非负非恒定解，则 $h_0 < m_1 < h_1 \le m_2$，其中 m_1 和 m_2 是方程 (3.4) 的非负解，而 h_0、h_1 如 (3.3) 中所给出。

证明. 注意到 $\phi'(t) = c - g(t)$。这意味着 ϕ 在 $[0, m_1]$ 上以及在 $[m_2, \infty)$ 上严格递增，而在 $[m_1, m_2]$ 上严格递减。按照定理 3.1 的证明中的相同方法，我们得出

$$\phi(h_0) = \phi(h_1) = E, \tag{3.6}$$

其中 $h_0 < h_1$。

任取 $h \in (h_0, h_1)$。根据介值定理，存在 $\theta \in S^1$ 使得 $h(\theta) = h$。由 (3.1) 和 (3.2)，我们有

$$\phi(h) = \phi(h(\theta)) = ch(\theta) + e^{-\frac{h^2(\theta)}{2}} \ge ch(\theta) + e^{-\frac{h'^2(\theta)+h^2(\theta)}{2}} = E.$$

结合 ϕ 的单调性，立即得到所需结果。 □

特别是，这表明

$$\phi'(h_0) > 0, \quad \text{and} \quad \phi'(h_1) \le 0.$$

受此启发，我们给出如下定义。

定义 3.4. 若一对常数 $a < b$ 满足 $\phi(a) = \phi(b)$ 且 $\phi'(a) > 0$, $\phi'(b) \le 0$，则称其关于 c 为良好对。

显然，对于 $t \in (a, b)$，有 $\phi(t) > \phi(a) = \phi(b)$。特别地，如果 h 是方程 (3.1) 的非负非恒定解，那么 (h_0, h_1) 是一个良好对。

引理 3.5. 如果 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 且 h 是方程 (3.1) 的非负非恒定解，那么 h 的临界点要么是极小点，要么是极大点。

证明。若 θ_0 是 h的临界点，则 $h'(\theta_0) = 0$，因此 (3.2) 蕴含 $\phi(h(\theta_0)) = E$。结合 $h_0 \le h(\theta_0) \le h_1$ 这一事实以及 (h_0, h_1) 是一个良好对，可知 $h(\theta_0)$ 要么是 h_0，要么是 h_1。换言之，它要么是极小点，要么是极大点。□

以下推论可由引理 3.2 和引理 3.5 直接得到。

推论 3.6. 若 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，且 h 是方程 (3.1) 的非负非恒定解，则 h 的极小点与极大点交替出现，且其个数有限。此外， h 的临界点个数为偶数。

令 h 为方程 (3.1) 的一个非负非恒定解。设 θ_0 是 h的一个极小点；即 $h(\theta_0) = h_0$，并设 $\theta_1 \in [0, 2\pi$是 h最近的极大点；即 $h(\theta_1) = h_1$。不失一般性，假设 $\theta_1 > \theta_0$。注意，这意味着对于 $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$，有 $h'(\theta) > 0$。由 (3.2)，可得

$$h'(\theta) = \sqrt{-h^2(\theta) - 2\log(E - ch(\theta))}.$$

作变量代换 $u = h(\theta)$，得到

$$\theta_1 - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta = \int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{h'(\theta(u))} du = \int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{\sqrt{-u^2 - 2\log(E - cu)}} du.$$

注意，这表明 $\theta_1 - \theta_0$ 仅取决于 h_0 和 h_1 的取值（换言之，与极小点/极大点的具体位置无关）。令 $r = h_1 - h_0$，并作变量代换 $t = \frac{u - h_0}{r}$，由 (3.6) 可得

$$\theta_1 - \theta_0 = \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{-(tr + h_0)^2 - 2\log(e^{-\frac{h_0^2}{2}} - ctr)}} dt := \Theta(c, h_0, r). \tag{3.7}$$

结合推论 3.6，便立即得到下面这个关键引理。

引理 3.7. 设 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$。如果集合

$$\left\{(h_0, r) : \Theta(c, h_0, r) = \frac{\pi}{k} \text{ for some positive integer } k \text{ and } (h_0, h_0 + r) \text{ is a good pair w.r.t. } c\right\}$$

为空，那么方程 (3.1) 的唯一非负解是常数解。

证明. 如果 h 是方程 (3.1) 的非负非恒定解，那么根据 (3.7)， h 的任意两个相邻临界点之间的 θ 差值都相同，与临界点的位置无关。由推论 3.6，存在正整数 k，使得 $\Theta(c, h_0, r) = \frac{\pi}{k}$。根据良好对的定义，$(h_0, h_0 + r)$ 关于 c 是一个良好对。因此，该集合非空，矛盾。□

注记 3.8。实际上可以证明，引理 3.7 中集合的基数恰好等于方程 (3.1) 的非负非恒定解的数量（模旋转）。但是，这一点对于当前工作并非必要。

4. 估计 Θ

本节的主要目的是，在 (h_0, h_0+r) 关于 c 构成良好对这一约束下，对积分 $\Theta(c, h_0, r)$ 给出估计。

在本节余下部分，我们将始终固定参数 c、 h_0 或 r 中的一个。条件 (h_0, h_0+r) 关于 c 是一个良好对，这意味着其余两个参数中的一个将唯一确定另一个。需要注意的是，固定其中一个参数后，其他参数未必可以任意选取。例如，当 $c \to 0^+$ 时， h_0 也必须趋于 0。我们会在需要时给出这类细节。

现在，我们固定 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，并将 h_0 视为 r 的函数。为说明这是可行的，回想一下，$0 < m_1 < 1 < m_2$ 是方程的两个非负解

$$te^{-\frac{t^2}{2}} = c.$$

若 $\phi(m_2) > \phi(0) = 1$，那么根据 ϕ 的单调性，存在唯一的 $0 < q < m_1$，使得 $\phi(q) = \phi(m_2)$。此外，对于每个 $h_0 \in [q, m_1)$，都存在唯一的 $r > 0$，使得$h_0 + r \in (m_1, m_2]$ 且 $\phi(h_0 + r) = \phi(h_0)$。根据定义，这样的一对 $(h_0, h_0 + r)$ 关于 c 是一个良好对。很容易看出，若 $h_0 \notin [q, m_1)$，则不存在任何 $r > 0$ 使得 $(h_0, h_0 + r)$ 是一个良好对。

另一方面，如果 $\phi(m_2) \le \phi(0) = 1$，运用类似的论证，我们可以得出结论：存在唯一的 $r > 0$，使得 $(h_0, h_0 + r)$ 关于 c 是良好对，当且仅当 $h_0 \in [0, m_1)$。

注意，由于 ϕ 的单调性， r 随着 h_0 的增加而严格递减。令

$$\mathbb{H} = \begin{cases} [0, m_1), & \phi(m_2) \le \phi(0), \\ [q, m_1), & \phi(m_2) > \phi(0). \end{cases}$$

对于 $h_0 \in \mathbb{H}$，我们将 r 写成关于 h_0 的函数；即 $r = r(h_0)$。容易看出， $r(h_0)$ 关于 h_0 连续，并且当 $h_0 \to m_1$ 时 $r \to 0$。现在令

$$r_c = \begin{cases} r(0), & \phi(m_2) \le \phi(0), \\ r(q), & \phi(m_2) > \phi(0). \end{cases}$$

因此， $r(h_0)$： $\mathbb{H} \to (0, r_C]$ 是一个双射， consequently 我们可以对 $r \in (0, r_c]$ 写作 $h_0 = h_0(r)$。注意，由于 ϕ 是光滑的，且 h_0、 r 由 $\phi(h_0 + r) = \phi(h_0)$ 隐式定义，因此函数 $h_0(r)$ 也是光滑的。

我们将使用这样一个事实： $\phi(h_0 + r) = \phi(h_0)$ 等价于

$$e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}} - e^{-\frac{h_0^2}{2}} + cr = 0. \tag{4.1}$$

引理 4.1. 设 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 和 $h_0(r)$ 满足：$(h_0(r)\ h_0(r) + r)$ 关于 c 是 $r \in (0, r_c]$ 的良好对。那么

$$\lim_{r \to 0} h_0'(r) = -\frac{1}{2},$$

and

$$\lim_{r \to 0} r h_0''(r) = 0.$$

证明. 回忆一下， $h_0(r) \to m_1$ 当 $r \to 0$。因此，我们定义 $h_0(0) = m_1$，使得 $h_0(r)$ 在 $[0, r_c]$ 上连续。由于 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，我们有 $m_1 < 1$，从而 $\phi''(m_1) = (m_1^2 - 1)e^{-\frac{m_1^2}{2}} \neq 0$。将泰勒定理应用于 ϕ 在 m_1 处，得到

$$\phi(t) = \phi(m_1) + \frac{1}{2}\phi''(m_1)(t - m_1)^2 + o((t - m_1)^2).$$

这里我们用到了 $\phi'(m_1) = 0$ 这一事实。因此

$$\phi(h_0(r)) = \phi(m_1) + \frac{1}{2}\phi''(m_1)(h_0(r) - m_1)^2 + o((h_0(r) - m_1)^2)$$

and

$$\phi(h_0(r) + r) = \phi(m_1) + \frac{1}{2}\phi''(m_1)(h_0(r) + r - m_1)^2 + o((h_0(r) + r - m_1)^2).$$

根据良好对的定义，我们有 $\phi(h_0(r)) = \phi(h_0(r) + r)$，且 $h_0(r) < m_1 < h_0(r) + r$。因此， $|h_0(r) - m_1|, |h_0(r) + r - m_1| \leq r$，并且

$$\frac{1}{2}\phi''(m_1)(h_0(r) - m_1)^2 = \frac{1}{2}\phi''(m_1)(h_0(r) + r - m_1)^2 + o(r^2),$$

这意味着

$$(h_0(r) - m_1)^2 = (h_0(r) + r - m_1)^2 + o(r^2),$$

因为 $\phi''(m_1) \neq 0$。因此,

$$h_0(r) - h_0(0) = h_0(r) - m_1 = -\frac{1}{2}r + o(r).$$

Thus

$$h_0'(0) = -\frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

对 (4.1) 关于 r 求导，得到

$$e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}}(h_0 + r) - c + [e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}}(h_0 + r) - e^{-\frac{h_0^2}{2}}h_0]h_0' = 0.$$

注意到 m_1 的定义以及 $h_0(0) = m_1$ 可得

$$c = g(h_0(0)) \quad \text{and } g'(h_0(0)) > 0. \tag{4.4}$$

其中 g 由（3.4）给出。因此,

$$h_0'(r) = \frac{g(h_0(0)) - g(h_0(r))}{g(h_0(r) + r) - g(h_0(r))} - 1. \tag{4.5}$$

根据中值定理，存在介于 $h_0(0)$ 与 $h_0(r)$ 之间的 s_1，以及介于 $h_0(r)$ 与 $h_0(r)$ 之间的 $s_2 + r$，使得

$$h_0'(r) = \frac{g'(s_1)(h_0(0) - h_0(r))}{g'(s_2)r} - 1.$$

令 $r \to 0$。由（4.2）和（4.4），我们得到

$$\lim_{r\to 0} h_0'(r) = -\frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

对于本引理陈述中的第二个等式，直接计算可得

$$h_0''(r)=\frac{-g'(h_0(r))h_0'(r)}{g(h_0(r)+r)-g(h_0(r))}-\frac{(g(h_0(0))-g(h_0(r)))\left(g'(h_0(r)+r)(h_0'(r)+1)-g'(h_0(r))h_0'(r)\right)}{(g(h_0(r)+r)-g(h_0(r)))^2}.$$

根据 (4.5) 和中值定理，我们有

$$rh_0''(r)=\frac{-g'(h_0(r))h_0'(r)}{g'(s)}-(h_0'(r)+1)\frac{g'(h_0(r)+r)(h_0'(r)+1)-g'(h_0(r))h_0'(r)}{g'(s)},$$

对于 $s\in(h_0(r)\ h_0(r)+r)$。令 $r\to 0$。根据 (4.6)，我们有

$$\lim_{r\to 0} rh_0''(r)=0.$$

□

利用引理 4.1，我们可以证明以下估计。

引理 4.2。设 $c\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 和 $h_0(r)$ 满足：相对于 c，当 $r\in(0,r_c]$ 时，$(h_0(r)\ h_0(r)+r)$ 是一对良好对。记

$$\Theta(r)=\Theta(c,h_0(r),r).$$

则，

$$\liminf_{r\to 0}\Theta(r)\geq\frac{\pi}{\sqrt{1-m_1^2}}$$

证明。如引理 4.1 中所述，我们设 $h_0(0)=m_1$。

由法图引理，

$$\liminf_{r\to 0}\Theta(r)\geq\int_0^1\liminf_{r\to 0}\sqrt{\frac{r^2}{-(tr+h_0)^2-2\log(e^{-\frac{h_0^2}{2}}-ctr)}}dt$$

我们断言

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{-2\log(e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}-ctr)-(tr+h_0)^2}=\frac{-1}{(1-h_0^2(0))(t^2-t)}.\tag{4.7}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\int_0^1\liminf_{r\to 0}\sqrt{\frac{r^2}{-(tr+h_0)^2-2\log(e^{-\frac{h_0^2}{2}}-ctr)}}dt\\=&\int_0^1\sqrt{\frac{-1}{(1-h_0^2(0))(t^2-t)}}dt\\=&\frac{1}{\sqrt{(1-h_0^2(0))}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(-t^2+t)}}dt\\=&\frac{\pi}{\sqrt{1-h_0^2(0)}}.\end{aligned}$$

所需结果立即得出。

还需证明 (4.7)，这可通过反复应用洛必达法则得出。为简洁起见，记 $d(r,t):=e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}-crt$。根据洛必达法则，

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2}{-2\log(d(r,t))-(tr+h_0)^2}\\&=\lim_{r\to 0^+}\frac{r}{-\frac{e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}(-h_0(r))h_0'(r)-ct}{d(r,t)}-(tr+h_0(r))(t+h_0'(r))}\\&=e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}\lim_{r\to 0^+}\frac{-r}{e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}(-h_0(r))h_0'(r)-ct+(tr+h_0(r))(t+h_0'(r))d(r,t)}\end{aligned}$$

由于 $e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}h_0(0)=c$，根据引理 4.1，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\left(e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}(-h_0(r))h_0'(r)-ct+(tr+h_0(r))(t+h_0'(r))d(r,t)\right)\\&=\frac{c}{2}-ct-c(t-\frac{1}{2})\\&=0.\end{aligned}$$

因此，我们可以再次使用洛必达法则。直接计算可得，

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}(-h_0(r))h_0'(r)-ct+(tr+h_0(r))(t+h_0'(r))d(r,t)\right)\\=&\lim_{r\to 0}\frac{d}{dr}\left(e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}(t^2r+th_0(r)+trh_0'(r))-ct-(tr+h_0(r))(t+h_0'(r))ctr\right)\\=&e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}(t^2+2t\lim_{r\to 0}h_0'(r))-cth_0(0)(2\lim_{r\to 0}h_0'(r)+t)\\=&\left(e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}-ch_0(0)\right)(t^2-t),\end{aligned}$$

其中，第二个和第三个等式用到了引理 4.1 以及 $e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}h_0(0)=c$ 这一事实。

根据洛必达法则，

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0}\frac{r^2}{-2\log(e^{-\frac{h_0^2(r)}{2}}-ctr)-(tr+h_0)^2}\\=&e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}\frac{-1}{\left(e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}-ch_0(0)\right)(t^2-t)}\\=&\frac{-1}{t^2-t}\frac{1}{1-h_0^2(0)},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式是由 $e^{-\frac{h_0^2(0)}{2}}h_0(0)=c$ 得出的。 □

现在固定 $h_0\in[0,1)$，并利用 (h_0,h_0+r) 关于 c 是良好对这一事实，将 c 表示为 r 中的函数。注意，c 由 r 通过 (4.1) 确定。然而，以下情况并非总是成立：

对于任意 $r>0$，由 (4.1) 确定的 c 都会使 (h_0, h_0+r) 关于 c 成为良好对。我们需要几个引理来确定 r 的允许取值。

引理 4.3. 设 $h_0 \in [0,1)$。若 $r_*>0$ 和 $c_* \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 满足 (h_0, h_0+r_*) 关于 c_* 是良好对，则对每个 $0<r<r_*$，存在 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，使得 (h_0, h_0+r) 关于 c 是良好对。

证明。由于这里的 c 正在变化，我们将 ϕ 写作 ϕ_c，以强调其对 c 的依赖。类似地，我们也将 $m_1(c)$ 和 $m_2(c)$ 写作这样。

注意，对于每个 $c \in (h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}}, c_*)$，根据 ϕ_c 和 $m_1(c)$ 的定义，我们有 $h_0 < m_1(c)$。这里，$h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}} < c_*$ 这一事实是由 (h_0, h_0+r_*) 关于 c_* 是良好对推出的。我们声称 $\phi_c(h_0) \geq \phi_c(m_2(c))$。事实上，

$$\begin{aligned}
\phi_c(h_0) &= ch_0 + e^{-\frac{h_0^2}{2}} \\
&= \phi_{c_*}(h_0) + (c-c_*)h_0 \\
&\geq \phi_{c_*}(m_2(c_*)) + (c-c_*)h_0 \\
&= \phi_c(m_2(c_*)) + [\phi_{c_*}(m_2(c_*)) - \phi_c(m_2(c_*)) + (c-c_*)h_0] \\
&= \phi_c(m_2(c_*)) + (c-c_*)(h_0 - m_2(c_*)) \\
&> \phi_c(m_2(c_*)) \\
&\geq \phi_c(m_2(c)).
\end{aligned}$$

这里，在倒数第二个不等式中，我们使用了 $h_0 < 1 < m_2(c_*)$ 这一事实。在最后一个不等式中，我们使用了 $m_2(c) > m_2(c_*)$ 这一事实，以及 $\phi_c(t)$ 对于 $t \in [m_2(c_*), m_2(c)]$ 是严格递减的这一事实。

因此，根据 ϕ_c 的单调性，对于每个 $c \in (h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}}, c_*)$，都存在唯一的 $r>0$，使得对 (h_0, h_0+r) 而言，相对于 c，该数对是一个良好对。注意，当 $c \to h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}}$ 时，我们有 $r \to 0$。还要注意，r 关于 c 连续变化。所需结果现由介值定理得出。□

引理 4.4. 设 $h_0 \in [0,1)$。记

$r_{h_0} = \sup\{r>0:$ 存在 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，使得 (h_0, h_0+r) 相对于 $c\}$. 是一个良好对

Then

$$0 < r_{h_0} < \infty.$$

证明。我们首先断言该集合非空。事实上，对于 $h_0 \in (0,1)$，选取 $r_0>0$ 使得$h_0 + r_0 < 1$。令

$$c_0 = \frac{-e^{-\frac{(h_0+r_0)^2}{2}} + e^{-\frac{h_0^2}{2}}}{r_0}.$$

注意，当 $r \to 0$ 时，我们有 $c_0 \to h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}} < e^{-\frac{1}{2}}$。因此，通过选取充分小的$r_0>0$，我们有 $c_0 \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$。根据 c_0 的选取，我们有 $\phi_{c_0}(h_0) = \phi_{c_0}(h_0+r_0)$。注意，$h_0+r_0 < 1 < m_2(c_0)$。现在，$\phi_{c_0}$ 的单调性保证了 (h_0, h_0+r_0) 是关于 c 的良好对。因此，$r_{h_0} > 0$。

要理解为什么 $r_{h_0} < \infty$，请注意，$(h_0, h_0 + r)$ 是关于 c 的良好对这一事实意味着

$$\phi_c'(h_0) > 0, \quad \text{and} \quad \phi_c'(h_0 + r) \le 0.$$

因此，我们有

$$(h_0 + r)e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}} > h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}}.$$

这意味着 r 有上界，因此 $r_{h_0} < \infty$。 □

引理4.3和4.4意味着，对于每个固定的 $h_0 \in [0, 1)$，如果 $r \in (0, r_{h_0})$，则数对（h_0， $h_0 + r$）相对于 $c = c(r)$ 是良好对，其中

$$c(r) = \frac{-e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}} + e^{-\frac{h_0^2}{2}}}{r}. \tag{4.8}$$

计算很简单

$$c'(r) = \frac{(h_0 + r)e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}} - c(r)}{r} = -\frac{\phi'(h_0 + r)}{r} \ge 0, \tag{4.9}$$

其中，最后一个不等式是因为（h_0， $h_0 + r$）相对于 c 是良好对。

引理 4.5. 令 $h_0 \in [0, 1)$。积分

$$\Theta(r) = \Theta(c(r), h_0, r)$$

在 $(0, r_{h_0})$ 上递增。

证明。记

$$\eta(r, t) = -2\log(e^{-\frac{1}{2}h_0^2} - c(r)rt) - (rt + h_0)^2.$$

根据 $\Theta(r)$ 的定义（见 (3.7)），只需证明 $\eta^{\frac{1}{2}}{}_{(r,t)}$ 关于 r 递增，其中 $t \in$ 固定且属于 $(0, 1)$。由于

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\eta^{\frac{1}{2}}(r, t)}\right) = \frac{1}{\eta^{\frac{3}{2}}(r, t)}[\eta(r, t) - \frac{1}{2}r\eta'(r, t)], \tag{4.10}$$

其中，此处及证明的其余部分中的导数均始终取关于 r 的导数。

记

$$\omega(r, t) = e^{-\frac{h_0^2}{2}} - c(r)rt.$$

注意，对于 $t \in [0, 1]$， $\omega(r, t) > 0$。由 (4.9) 和 (4.8)，

$$\begin{aligned}
\eta'(r, t) &= 2\frac{c'(r)rt + c(r)t}{\omega(r, t)} - 2(rt + h_0)t \\
&= 2\frac{[(h_0 + r)e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}} - c(r)]t + c(r)t}{\omega(r, t)} - 2(rt + h_0)t \\
&= 2\frac{[(h_0 + r)(e^{-\frac{h_0^2}{2}} - c(r)r) - c(r)]t + c(r)t}{\omega(r, t)} - 2(rt + h_0)t,
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\eta(r,t)-\frac{1}{2}r\eta'(r,t)\\=&-2\log\omega(r,t)-(rt+h_0)^2\\&-\frac{[(h_0+r)(e^{-\frac{h_0^2}{2}}-c(r)r)-c(r)]tr+c(r)tr}{\omega(r,t)}+(rt+h_0)tr.\end{aligned}\tag{4.11}$$

记 $G(r,t)=[\eta(r,t)-\frac{1}{2}r\eta'(r,t)]\omega(r,t)$。由于 $\omega(r,t)>0$，由 (4.10) 和 (4.11)，要证明所需结果，只需证明 $G(r,t)\geq 0$。注意

$$\begin{aligned}G(r,t)=&-2\omega(r,t)\log(\omega(r,t))-\omega(r,t)(rt+h_0)^2\\&-[(h_0+r)(e^{-\frac{h_0^2}{2}}-c(r)r)-c(r)]tr-c(r)tr+(rt+h_0)tr\omega(r,t)\\=&-2\omega(r,t)\log(\omega(r,t))+t^2r^2c(r)h_0\\&+t[c(r)rh_0^2+c(r)r^2h_0+r^3c(r)-2rh_0e^{-\frac{h_0^2}{2}}-r^2e^{-\frac{h_0^2}{2}}]-h_0^2e^{-\frac{h_0^2}{2}}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\partial_tG(r,t)=&2c(r)r\log(\omega(r,t))+2c(r)r+2tr^2c(r)h_0+c(r)rh_0^2\\&+c(r)r^2h_0+r^3c(r)-2rh_0e^{-\frac{h_0^2}{2}}-r^2e^{-\frac{h_0^2}{2}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2G(r,t)}{\partial t^2}=&\frac{-2c(r)^2r^2}{\omega(r,t)}+2r^2c(r)h_0\\=&\frac{1}{\omega(r,t)}[2r^2c(r)h_0(e^{-\frac{h_0^2}{2}}-c(r)rt)-2c(r)^2r^2]\\=&\frac{1}{\omega(r,t)}[2r^2c(r)(h_0e^{-\frac{h_0^2}{2}}-c(r))-2r^3c(r)^2h_0t]\\\leq&0,\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们利用了这样一个事实：由于 (h_0,h_0+r) 是一个良好对，$\phi'(h_0)=c-h_0e^{-\frac{h_0^2}{2}}>0$。因此，$G(r,t)$ 是关于 t 的凹函数。

现在，直接计算可得

$$G(r,0)=-2\omega(r,0)\log(\omega(r,0))-h_0^2e^{-\frac{h_0^2}{2}}=0,$$

由 (4.8) 得,

$$\begin{aligned}G(r,1)=&e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}}(h_0+r)^2+c(r)r(r+h_0)^2-(h_0+r)^2e^{-\frac{h_0^2}{2}}\\=&(r+h_0)^2(e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}}+c(r)r-e^{-\frac{h_0^2}{2}})\\=&0.\end{aligned}$$

由于 G 关于 t 是凹函数，因此对所有 $t\in[0,1]$，均有 $G(r,t)\geq 0$。 □

现在固定 $r>0$，并考察 c 与 h_0 之间的依赖关系。回顾一下，$m_1(c)$ 和 $m_2(c)$ 是方程 (3.4) 的两个非负解，并且当 $c\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时，$m_1(c)<1<m_2(c)$。

假设 $h_*, r \in (0,1)$ 且 $c_* \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 满足： $h_* + r < 1$，并且 $(h_*, h_* + r)$ 关于 c_* 构成一个良好对。对于每个 $h_0 \in (0, h_*]$，令

$$c(h_0) = \frac{e^{-\frac{h_0^2}{2}} - e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}}}{r}. \tag{4.12}$$

注意，根据 $c = c(h_0)$ 的定义，我们有 $\phi_c(h_0) = \phi_c(h_0 + r)$。这意味着 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，否则函数 $\phi_c(t)$ 将严格递增，这与 $\phi_c(h_0) = \phi_c(h_0 + r)$ 矛盾。因此，我们有 $h_0 + r < h_* + r < 1 < m_2(c)$。根据 ϕ_c 的单调性，数对 $(h_0, h_0 + r)$ 相对于 $c(h_0)$ 是一个良好对。因此，

$$c'(h_0) = \frac{-h_0 e^{-\frac{h_0^2}{2}} + (h_0 + r)e^{-\frac{(h_0+r)^2}{2}}}{r} = \frac{\phi_c'(h_0) - \phi_c'(h_0 + r)}{r} > 0, \tag{4.13}$$

其中，最后一个不等式由良好对的定义得出。由于

$$\lim_{h_0 \to 0} c(h_0) = \frac{1 - e^{\frac{r^2}{2}}}{r} := c_r, \tag{4.14}$$

函数 $c(h_0) : (0, h_*] \to (c_r, c_*]$ 是一个双射，因此我们可以将其反函数写为 $h_0 = h_0(c) : (c_r, c_*] \to (0, h_*]$。注意，

$$h_0'(c) > 0, \text{ for every } c \in (c_r, c_*).$$

引理 4.6. 设 $h_*, r \in (0,1)$ 且 $c_* \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$，使得 $h_* + r < 1$ 且 $(h_*, h_* + r)$ 关于 c_* 是一个良好对。积分

$$\Theta(c) = \Theta(c, h_0(c), r),$$

在 $(c_r, c_*]$ 上递增。

证明。令

$$f(c) = -(tr + h_0(c))^2 - 2\log(e^{-\frac{h_0^2(c)}{2}} - ctr).$$

根据 (3.7)，只需证明对于任意固定的 $t \in (0,1)$，函数 f 关于 c 递增。我们有

$$f'(c) = \frac{2rt}{e^{-\frac{h_0^2(c)}{2}} - crt}[1 - h_0'(c)(e^{-\frac{h_0^2(c)}{2}} - crt - ch_0(c))].$$

注意到根据 (4.12) 和 (4.13)，

$$c'(h_0) = e^{-\frac{h_0^2(c)}{2}} - cr - ch_0(c) \le e^{-\frac{h_0^2(c)}{2}} - crt - ch_0(c),$$

对每个 $t \in (0, 1)$。

因此，

$$f'(c) \le \frac{2rt}{e^{-\frac{h_0^2(c)}{2}} - crt}[1 - h_0'(c)c'(h_0)] = 0.$$

□

最后，我们可以证明当 $(h_0, h_0 + r)$ 相对于 c构成良好对时， $\Theta(c, h_0, r)$ 的所需估计。

引理 4.7. 设 $c \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$。若 $h_0, r > 0$ 满足 $(h_0, h_0 + r)$ 相对于 c 构成良好对，则

$$\Theta(c, h_0, r) > \pi.$$

证明。注意到 b 根据良好对的定义，我们有 $h_0 < m_1(c) < 1$。由引理 4.5，我们有 e

$$\Theta(c, h_0, r) \geq \Theta(c(\mathfrak{r}), h_0, \mathfrak{r}), \tag{4.15}$$

对于每个 $\mathfrak{r} \in (0, r)$。令 $c' = e^{-\frac{h_0^2}{2}} h_0$。由于 $\lim_{\mathfrak{r}\to 0} c_{\mathfrak{r}} = 0$，其中 $c_{\mathfrak{r}}$ 在 (4.14) 中给出，因此存在 $\delta_0 > 0$，使得对于每个 $\mathfrak{r} \in (0, \delta_0)$，都有 $c_{\mathfrak{r}} < c'$。我们还要求 $\delta_0 > 0$ 充分小，使得 $h_0 + \delta_0 < 1$。

h 由于 $(h_0, h_0 + \mathfrak{r})$ 是关于 $c(\mathfrak{r})$ 的良好对，我们有 $0 < \phi'_{c(\mathfrak{r})}(h_0) = c(\mathfrak{r}) - h_0 e^{-02} = c(\mathfrak{r}) - \frac{2}{}c'$。因此 $c(\mathfrak{r}) > c'$。由引理 4.6，对于每个固定的 $\mathfrak{r} \in (0, \delta_0)$，我们有

$$\Theta(c(\mathfrak{r}), h_0, \mathfrak{r}) \geq \Theta(c', h_0(c'), \mathfrak{r}). \tag{4.16}$$

结合 (4.15) 和 (4.16)，我们得到

$$\Theta(c, h_0, r) \geq \Theta(c', h_0(c'), \mathfrak{r})$$

对每个 $\mathfrak{r} \in (0, \delta_0)$ 都成立。注意，由于 c' 固定， $h_0(c')$ 会随着 $\mathfrak{r}$ 的变化而依赖于 $\mathfrak{r}$。因此，由引理 4.2,

$$\Theta(c, h_0, r) \geq \liminf_{\mathfrak{r}\to 0} \Theta(c', h_0(\mathfrak{r}), \mathfrak{r}) \geq \frac{\pi}{\sqrt{1 - m_1^2(c')}} > \pi.$$

□

定理 1.1 现在可直接由引理 3.7 和 4.7 以及命题 2.1 得出。

5. Existence of symmetric solutions to the planar Gaussian Minkowskiproblem

本节旨在在光滑情形下求解二维的平面偶高斯闵可夫斯基问题。设 $\alpha \in (0,1)$，且 $f \in C^{2,\alpha}(S^1)$ 是一个正偶函数，我们将求解方程

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{h'^2 + h^2}{2}} (h'' + h) = f, \tag{5.1}$$

在 S^1 上。事实上，结合 [33], 中给出的存在性结果，我们证明 (5.1) 至少有两个解。

以下先验估计至关重要。

引理 5.1. 设 $f: S^1 \to \mathbb{R}$ 是一个偶正函数，并且对于某个关于原点对称的凸体 $K \subset \mathbb{R}^2$, $h = h_K \in C^2(S^1)$ 是方程 (5.1) 的偶解。如果存在 $\tau > 0$ 使得

$$1/\tau < f < \tau,$$

则存在仅依赖于 τ 的 $\tau' > 0$，使得

$$\frac{1}{\tau'} < h < \tau'.$$

证明。我们首先证明 h 有上界。假设 h 在 $v_0 \in S^1$ 处取得其最大值，且 $h(v_0) = h_{\max}$。将 (5.1) 代入可得

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{h_{\max}{}^2}{2}} h_{\max} \geq f(v_0) > \frac{1}{\tau}.$$

注意到，当 $t \to \infty$ 时，函数 $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} t$ 趋于 0。因此，存在 $\tau_1 > 0$ 使得

$$h_{\max} < \tau_1. \tag{5.2}$$

W现在我们还要证明 $h_{\max}$ 有下界。注意，在 S^1 上，我们有 e

$$(h'' + h) \geq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}} (h'' + h) = f > \frac{1}{\tau}.$$

还要注意，$h'' + h$ 在 S^1 上的总积分等于凸体 K 的周长（其支撑函数为 h）。因此，我们有

$$\mathcal{H}^1(\partial K) > \frac{2\pi}{\tau} > 0.$$

另一方面，由于周长是凸体集合上的单调泛函（关于集合包含关系），我们有

$$\mathcal{H}^1(\partial K) \leq 2\pi h_{\max}.$$

结合上述两个不等式，我们可以找到某个 $\tau_2 > 0$，使得

$$h_{\max} > \tau_2.$$

最后，我们证明 h 有下界。假设 h 在 $u_0 \in S^1$处取得其最小值，且 $h(u_0) = h_{\min}$。注意，由 (5.1) 可得

$$\frac{1}{2} h(h'' + h) = \pi h e^{\frac{h'^2+h^2}{2}} f \geq \pi h f > \pi h/\tau,$$

其中我们使用了 h 非负这一事实，而这源于 h 是偶函数这一事实（或等价地，K 关于原点对称）。注意，$\frac{1}{2} h(h'' + h)$在 S^1 上的总积分是 K的面积。因此，我们有

$$\mathcal{H}^2(K) > \frac{\pi}{\tau} \int_{\mathbb{S}^1} h dv.$$

根据支撑函数的定义，我们有

$$h(v) \geq h_{\max} |v \cdot v_0|.$$

因此，存在 $\tau_3 > 0$ 使得

$$\mathcal{H}^2(K) > \frac{\pi}{\tau} h_{\max} \int_{\mathbb{S}^1} |v \cdot v_0| dv = \tau_3 h_{\max} > \tau_3 \tau_2. \tag{5.3}$$

另一方面，注意到

$$K \subset (h_{\max} B_1) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : |x \cdot u_0| \leq h_{\min}\},$$

这意味着

$$\mathcal{H}^2(K) \leq 4 h_{\max} h_{\min} < 4 \tau_1 h_{\min}. \tag{5.4}$$

结合（5.3）和（5.4）立即得到 $\tau_4 > 0$，使得

$$h_{\min} > \tau_4. \tag{5.5}$$

由 (5.2) 和 (5.5) 可立即得出 $\tau' > 0$ 的存在性。 □

一旦得到临界的 C^0 估计，高阶估计便可按照 [33] 中的相同方法推出。注意，在 [33], 中，高阶估计（ [33, 引理 6.5]）仅依赖于 C^0 估计（ [33, 引理 6.4]）。因此，我们不再重复 [33] 中给出的相同证明，而直接陈述以下高阶估计。

引理 5.2（先验估计）。设 $0<\alpha<1$。假设 $f\in C^{2,\alpha}(S^1)$ 是一个偶函数，且存在 $\tau>0$，使得 $\frac{1}{\tau}<f<\tau$ 且 $\|f\|_{C^{2,\alpha}}<\tau$。若 $K\in\mathcal{K}_e^n$ 的支撑函数为 $_{C^{4,\alpha}}$，并且满足

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h)=f,$$

那么存在一个仅依赖于 τ 的 $\tau'>0$，使得

(1) $\frac{1}{\tau'}<\sqrt{h'^2+h^2}<\tau'$

(2) $\frac{1}{\tau'}<h''+h<\tau'$(3)

$\|h\|_{C^{4,\alpha}}<\tau'$.

现在我们可以陈述主要的存在性结果了。

定理 5.3（光滑小解的存在性）。设 $0<\alpha<1$，且 $f\in C^{2,\alpha}(S^1)$ 是一个满足 $\|f\|_{L^1}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 的正偶函数。那么，存在一个 $C^{4,\alpha}$、关于原点对称的 K，满足 $\gamma_2(K)<\frac{1}{2}$，使其支撑函数 h 满足

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h)=f. \tag{5.6}$$

证明。我们使用 Li [43] 中提出的二阶非线性椭圆算子度理论来证明解的存在性。

根据定理 1.1，当 $c_0>0$ 充分小时，方程

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{h'^2+h^2}{2}}(h''+h)=c_0$$

有两个常数解。设 $h_1\equiv r_1>0$ 和 $h_2\equiv r_2>0$ 为这两个常数解，其中 $r_1>r_2$。那么，对于 $i=1$, 2，我们有

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r_i^2}{2}}r_i=c_0.$$

对函数 $e^{-t^2/2}t$ 的快速分析表明，当 c_0 充分小时，有 $\gamma_2(r_1B)>_{1\,2}$ 且 $\gamma_2(r_2B)<\frac{1}{2}$。我们还要求 $c_0>0$ 足够小，使得 $\|c_0\|_{L^1}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。此外，我们要求选取 $c_0>0$，使算子 $L\phi=\phi''+(1-r_2^2)\phi$ 可逆。

令 $F(\cdot;t):C^{4,\alpha}(S^1)\to C^{2,\alpha}(S^1)$ 定义为

$$F(h;t)=h''+h-2\pi e^{\frac{h'^2+h^2}{2}}f_t,$$

对于 $t\in[0,1]$, 其中

$$f_t=(1-t)c_0+tf.$$

注意，由于 $f>0$ 是 $C^{2,\alpha}$，存在 $\tau>0$ 使得 $\frac{1}{\tau}<f_t<\tau$ 且 $\|f_t\|_{C^{2,\alpha}}<\tau$。也很容易看出 $\|f_t\|_{L^1}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。我们根据引理5.1和5.2选取 $\tau'>0$。定义 $O\subset C^{4,\alpha}(S^1)$如下:

$$O=\left\{h\in C^{4,\alpha}(S^1)\text{ is even}:\frac{1}{\tau'}<h<\tau',\frac{1}{\tau'}<h''+h<\tau',\|h\|_{C^{4,\alpha}}<\tau',\gamma_2(h)<\frac{1}{2}\right\}.$$

这里 $\gamma_2(h)=\gamma_2(K)$，其中 K 是支撑函数为 h的关于原点对称的凸体。由于 $h\in O$ 是严格凸的，这样做是可行的。注意， $h_2\equiv r_2\in O$，而 $h_1\equiv r_1\notin O$。

现在我们断言，对于每个 $t\in[0,1]$，如果 $h\in\partial O$，那么

$$F(h;t)\neq 0.$$

事实上，如果 $F(h;\ t)=0$，那么根据引理5.1和5.2，必有 $\gamma_2(h)=\frac{1}{2}$。然而，根据高斯等周不等式，这意味着 $|S_{\gamma_2,\ K}|\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。这与以下事实矛盾： $F(h;\ t)=0$，并且 $\|f_t\|<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。

因此，映射 $F(\cdot,t)$ 在 O 上的度是良定义的。此外，根据 Li [43], 中的命题2.2

$$\deg(F(\cdot;0),O,0)=\deg(F(\cdot;1),O,0). \tag{5.7}$$

现在计算 $\deg(F(\cdot;0)\ O,0)$。为简便起见，记 $F(\cdot)=F(\cdot;0)$。回顾一下， $f=c_0$ 的选取使得 $h\equiv r_2$ 是 O 中方程（5.6）的唯一解。直接计算可得， F 在常函数 r_2 处的线性化算子为：

$$L_{r_2}\phi=\phi''+(1-r_2^2)\phi,$$

其可逆是因为我们对 c_0 的选择。根据 Li [43], 中的命题 2.3，这意味着

$$\deg(F,O,0)=\deg(L_{r_2},O,0)\neq 0, \tag{5.8}$$

其中，最后一个不等式由 Li [43] 中的命题 2.4[2] 得出。方程 (5.7) 和 (5.8) 立即推出 $\deg(F(\cdot;1)\ O,0)\ \neq\ 0$，进而推出解的存在。□

我们指出，通过一个简单的逼近论证，可以去掉关于 f 的正则性假设。

定理5.4. 设 $f\in L^1(S^1)$ 是一个满足 $\|f\|_{L^1}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 的偶函数。若存在 $\tau>0$，使得在 S^1 上几乎处处有 $\frac{1}{\tau}<f<\tau$，则存在一个关于原点对称的 K，满足$\gamma_2(K)<\frac{1}{2}$，使得

$$dS_{\gamma_2,K}(v)=f(v)dv.$$

证明. 我们可以用一列光滑函数 f_i 逼近 f，使得 $\mu_i=f_idv$ 弱收敛到 $\mu=fdv$，且在 S^1 上有 $\frac{1}{\tau}<f_i<\tau$。由于弱收敛，我们可以（舍去有限多个首项后）假设 $|\mu_i|<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$。

根据定理 5.3，存在 $C^{4,\ \alpha}$，一个关于原点对称的 K_i，满足 $\gamma_2(K_i)<\frac{1}{2}$，使得$S_{\gamma_2,\ K_i}=\mu_i$；或者，等价地，其支撑函数 h_i 满足方程

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{h_i'^2+h_i^2}{2}}(h_i''+h_i)=f_i$$

根据引理 5.1，存在 $\tau'>0$，且与 i 无关，使得

$$\frac{1}{\tau'}B\subset K_i\subset\tau' B. \tag{5.9}$$

利用布拉施克选择定理，我们不妨假设（必要时取一个子序列） K_i在豪斯多夫度量下收敛到一个关于原点对称的凸体 K。由 (5.9) 得，

$$\frac{1}{\tau'}B\subset K\subset\tau' B.$$

[2]命题 2 Li 的 .4 [43] 中包含一些排版错误，Li 已在其个人网页上进行了更正 .

$S_{\gamma_2,\ K}$ 的弱连续性 K 现在意味着

$$S_{\gamma_2,K} = \mu.$$

注意到，由于 γ_2的连续性，我们有 $\gamma_2(K) \leq \frac{1}{2}$。由高斯等周不等式以及 $\|f\|_{L^1} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$这一事实可知，不等式是严格的。□

我们指出，先验估计，即引理5.1和5.2，在更高维数下仍然成立，证明过程没有实质性变化。因此，能否将存在性结果——定理5.3、5.4——推广到更高维数，取决于我们能否将常数 f 的唯一性结果（定理 1.1）推广到更高维数。

猜想5.5。设 $n \geq 3$。如果 h 是方程的非负解

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{|\nabla h|^2+h^2}{2}} \det(\nabla^2 h + hI) = c > 0,$$

那么 h 必为常数解。

References

.[1] A. Aleksandrov。关于凸体的表面积函数。（关于“凸体混合体积理论”一文的注记）。Rec. Math. N.S. *[*《数学汇刊》*]*, 6(48):167–174，1939。[2] B. Andrews。各向同性曲线流的极限形状分类。《美国数学会杂志》（JAMS），16:443–459（电子版），2003。[3] K. Ball。高斯测度的反向等周问题。《离散与计算几何》，10(4):411–420，1993。[4] G. Bianchi、K. B¨or¨oczky、A. Colesanti 和 D. Yang。 L_p-闵可夫斯基问题及其关于 $-n < p < 1$的问题。Adv. 数学，341:493–535，2019。[5] C. Borell。高斯空间中的布伦-闵可夫斯基不等式。《发明数学》，30(2):207–216，1975。[6] K. J. B¨or¨oczky 和 M. Henk。一般中心对称凸体的锥体积测度。Adv. 数学，286:703–721，2016。[7] K. J. B¨or¨oczky、M. Henk 和 H. Pollehn。对称凸体的对偶曲率测度的子空间集中。《微分几何杂志》，109(3):411–429，2018。[8] K. J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。对数布伦-明可夫斯基不等式。Adv. 数学，231:1974–1997，2012。[9] K. J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。对数明可夫斯基问题。《美国数学会杂志》，26(3):831–852，2013。[10] L. Caffarelli。Monge-Amp`ere 方程解的内部 $W^2$、$^p$ 估计。《数学年刊》（第二辑），131:135–150，1990。[11] L. A. Caffarelli。完全非线性方程解的内部先验估计。《数学年刊》（第二辑），130(1):189–213，1989。[12] L. A. Caffarelli。Monge-Amp`ere 方程粘性解的局部化性质及其严格凸性。《数学年刊》（第二辑），131(1):129–134，1990。[13] C. Chen、Y. Huang 和 Y. Zhao。 L_p 对偶闵可夫斯基问题的光滑解。Math. Ann.，373(3-4):953–976，2019。[14] S. Chen、Y. Huang、Q.-R. Li 和 J. Liu。关于 L_p-布伦-闵可夫斯基不等式及其关于 $p < 1$的问题。Adv. 数学，368:107166，21，2020。[15] S. Chen 和 Q.-R. Li。关于平面对偶闵可夫斯基问题。Adv. 数学，333:87–117，2018。[16] S. Y. Cheng 和 S. T. Yau。关于 n维闵可夫斯基问题解的正则性。《纯粹与应用数学通讯》，29:495–516，1976。[17] K.-S. Chou 和 X.-J. Wang。 L_p-闵可夫斯基问题与中心仿射几何中的闵可夫斯基问题。Adv. 数学，205:33–83，2006。[18] A. Colesanti、G. Livshyts 和 A. Marsiglietti。关于布伦-闵可夫斯基型不等式的稳定性。《函数分析杂志》，273(3):1120–1139，2017。

[19] A. Eskenazis 和 G. Moschidis。高斯空间中的维数布伦-闵可夫斯基不等式。预印本，2020。[20] R. Gardner、D. Hug 和 W. Weil。Orlicz-布伦-闵可夫斯基理论：一般框架、补充内容与不等式。《微分几何杂志》，97(3):427–476，2014。[21] R. Gardner、D. Hug、S. Xing 和 D. Ye。Orlicz-布伦-闵可夫斯基理论中的广义体积及相关闵可夫斯基问题 II。《变分学与偏微分方程》，59(1):第15号论文，33页，2020。[22]R. Gardner 和 A. Zvavitch。高斯布伦-闵可夫斯基不等式。《美国数学会汇刊》，362(10):5333–5353，2010。[23] R. J. Gardner。三维布塞曼-佩蒂问题的肯定解。《数学年刊》（第二辑），140:435–447，1994。[24] R. J. Gardner。布伦-闵可夫斯基不等式。《美国数学会通报》（新系列），39(3):355–405，2002。[25] R. J. Gardner、D. Hug、W. Weil、S. Xing 和 D. Ye。Orlicz-布伦-闵可夫斯基理论中的广义体积及相关闵可夫斯基问题 I。《变分学与偏微分方程》，58(1):第12号论文，35页，2019。[26] R. J. Gardner、A. Koldobsky 和 T. Schlumprecht。关于凸体截面的布塞曼-佩蒂问题的解析解。《数学年刊》（第二辑），149:691–703，1999。[27] Q. Guang、Q.-R. Li 和 X.-J. Wang。具有超临界指数的 l_p-闵可夫斯基问题，2022。[28] C. Haberl、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。偶Orlicz闵可夫斯基问题。Adv. 数学，224(6):2485–2510，2010。[29] M. Henk 和 E. Linke。多胞体的锥体积测度。Adv. 数学，253:50–62，2014。[30] M. Henk 和 H. Pollehn。偶对偶闵可夫斯基问题的必要子空间集中条件。Adv. 数学，323:114–141，2018。[31] J. Hosle、A. Kolesnikov 和 G. Livshyts。关于对数凹测度的 L_p-布伦-闵可夫斯基猜想和维数布伦-闵可夫斯基猜想。预印本。[32] Y. Huang、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。对偶布伦-闵可夫斯基理论中的几何测度及其相关的闵可夫斯基问题。《数学学报》，216(2):325–388，2016。[33] Y. Huang、D. Xi 和 Y. Zhao。高斯概率空间中的闵可夫斯基问题。Adv. 数学，385:第107769号论文，36页，2021。[34] D. Hug、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang。关于多胞体的 L_p 闵可夫斯基问题。《离散与计算几何》，33:699–715，2005。[35] H. Jian 和 J. Lu。奥尔利奇闵可夫斯基问题解的存在性。Adv. 数学，344:262–288，2019。[36] H. Jian、J. Lu 和 X.-J. Wang。关于 L_p-闵可夫斯基问题解的非唯一性。Adv. 数学，281:845–856，2015。[37] A. V. Kolesnikov 和 G. Livshyts。关于对数布伦-闵可夫斯基猜想的局部版本及若干相关的新几何不等式。《国际数学研究通知》，(18):14427–14453，2022。[38] A. V. Kolesnikov 和 G. V. Livshyts。关于 Gardner-Zvavitch 猜想：布伦-闵可夫斯基型不等式中的对称性。Adv. 数学，384:107689，23页，2021。[39] Alexander Kolesnikov 和 Emanuel Milman。关于 L^p-布伦-闵可夫斯基不等式及其关于 $p < 1$的局部结果。《美国数学会回忆录》，277(1360)，2022。[40] L. Kryvonos 和 D. Langharst。测度论闵可夫斯基存在定理与投影体，2022。[41] H. Li 和 Y. Wan。平面各向同性 l_p 对偶闵可夫斯基问题的解分类，2022。[42] Q.-R. Li、W. Sheng 和 X.-J. Wang。通过高斯曲率流求解亚历山德罗夫问题和对偶闵可夫斯基问题。《欧洲数学会杂志》（JEMS），22(3):893–923，2020。[43] Y.-Y. Li。二阶非线性椭圆算子的度理论及其应用。《偏微分方程通讯》，14(11):1541–1578，1989。[44] Y. Liu 和 J. Lu。关于平面对偶闵可夫斯基问题解的数目，2022。[45] G. Livshyts、A. Marsiglietti、P. Nayar 和 A. Zvavitch。关于一般测度的布伦-闵可夫斯基不等式及其在新等周型不等式中的应用。《美国数学会汇刊》，369(12):8725–8742，2017。[46] M. Ludwig。一般仿射表面积。Adv. 数学，224:2346–2360，2010。[47] M. Ludwig 和 M. Reitzner。SL(n)不变赋值的分类。《数学年刊》（第二辑），172:1219–1267，2010。[48] E. Lutwak。交体与对偶混合体积。Adv. 数学，71:232–261，1988。

[49] E. Lutwak. Brunn-Minkowski-Firey理论。I. 混合体积与闵可夫斯基问题。《微分几何杂志》，38:131–150，1993.[50] E. Lutwak. Brunn-Minkowski-Firey理论。II. 仿射和半仿射曲面面积。Adv. 数学，118:244–294，1996.[51] E. Lutwak, D. Xi, D. Yang, 和 G. Zhang. 线段测度在几何积分中的明科夫斯基问题。《纯粹与应用数学通讯》，即将出版.[52] E. Lutwak, D. Yang, 和 G. Zhang. Sharp affine L_p Sobolev 不等式。《微分几何杂志》，62:17–38，2002.[53] E. Lutwak, D. Yang, 和 G. Zhang. 关于 L_p-闵可夫斯基问题。《美国数学会汇刊》，356:4359–4370，2004.[54] E. Milman. 中心仿射微分几何与log-明科夫斯基问题，2021.[55] H. Minkowski. 体积与表面。Math. Ann.，页码 447–495，1903.[56] H. Minkowski. 体积与表面。Math. Ann.，57(4):447–495，1903.[57] F. Nazarov. 关于 $\mathbb{R}^n$ 中凸集相对于高斯测度的最大周长。载于《泛函分析的几何方面》，数学讲义丛书第1807卷，页码169–187。Springer，柏林，2003.[58] A. V. Pogorelov. 明科夫斯基多重问题。V. H. Winston & Sons，华盛顿特区；Halsted Press [John Wiley & Sons], 纽约-多伦多-伦敦，1978.[59] E. Putterman. L^p-布伦-闵可夫斯基不等式的局部版本与整体版本的等价性。《泛函分析杂志》，280(9):论文编号108956，20，2021.[60] C. Saroglou. 关于拟议的log-Brunn-Minkowski不等式的注释。《几何论丛》，177:353–365，2015.[61] R. Schneider. 凸体: Brunn-Minkowski理论，数学及其应用百科全书第151卷。剑桥大学出版社，剑桥，增订版，2014.[62] A. Stancu. 离散平面 L_0-闵可夫斯基问题。Adv. 数学，167:160–174，2002.[63] A. Stancu. 关于离散二维 L_0-闵可夫斯基问题解的数目。Adv. 数学，180:290–323，2003.[64] D. Xi, H. Jin, 和 G. Leng. Orlicz-Brunn-Minkowski不等式。Adv. 数学，260:350–374，2014.[65] G. Xiong. 凸多面体体体积函数极值问题。Adv. 数学，225:3214– 3228，2010.[66] G. Zhang. R^4 中布塞曼-佩蒂问题的一个正解。《数学年刊》(2)，149:535–543，1999.[67] Y. Zhao. 偶调和明科夫斯基问题解的存在性。《微分几何杂志》，110(3):543–572，2018.[68] G. Zhu. 多面体对数明科夫斯基问题。Adv. 数学，262:909–931，2014.[69] G. Zhu. 多面体中心仿射明科夫斯基问题。《微分几何杂志》，101:159–174，2015.

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China,Hefei, 230026, China
电子邮件地址：chenshib@ustc.edu.cn

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China,Hefei, 230026, China
电子邮件地址：helenhsn@mail.ustc.edu.cn

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China,Hefei, 230026, China
电子邮件地址：lwr19997@mail.ustc.edu.cn

Department of Mathematics, Syracuse University, Syracuse, NY 13244, USA电子
邮件地址：yzhao197@syr.edu