arXiv:2303.17399v1 [quant-ph] 30 Mar 2023

Zeta 演算

Nicklas Bot¨o FabianForslundboton@chalmers.se
fabfors@chalmers.se

瑞典哥德堡查尔姆斯理工大学

我们提出了一种量子编程语言，它推广了 λ-演算。该语言是非线性的；重复出现的变量表示的不是量子数据的克隆，而是对量子比特状态的共享；也就是说，生成一对纠缠量子比特，使它们相对于所选基具有相同的振幅。该语言有两个抽象算子，ζ 和 ξ，分别对应 Z 基和 X 基；每个抽象算子还带有一个相位参数，表示在输入被共享之前对其施加的旋转。我们为该语言给出了 ZX 演算中的语义，并证明其等式理论是可靠的。我们展示了这种语言如何为量子领域中的高阶函数提供良好的表示。

1 引言

由于不可克隆定理 [11], 指出量子态无法被复制，这一著名结论使得大多数旨在为量子计算创建类似 λ-演算的语言的尝试都采用了线性类型系统。例如，Quipper[6], Lineal[2]和 Q WIRE[8]都提供了线性类型系统，并为经典数据提供非线性规则。

然而，克隆数据并不是解释重复变量的唯一可能方式。我们还可以将重复变量解释为表示对量子比特的共享。也就是说，如果变量 x持有对处于 $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$态的量子比特的引用，那么使用 x两次的表达式应被解释为形成处于 $\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle$态的纠缠量子比特对的指令。这就是 QML[1],中对重复变量的解释，但 QML 不支持高阶函数。

本文介绍了 ζ演算，这是一种非线性类型系统，支持高阶函数，并将重复变量解释为共享。我们给出了 ζ的语法、类型规则、将项映射为 ZX 演算[5][10] 图的操作语义，以及一个相对于 ZX 规则而言是可靠的等式理论。我们展示了如何将线性 λ演算嵌入 ζ演算中，并讨论了多个示例以展示该语言的能力，其中包括演示高阶函数用法的项示例。

请注意，为了共享一个量子比特，我们必须选择一个基。我们将此操作称为跨基 β 共享。因此，跨基 $Z=\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 共享是将 $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ 映射为 $\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle$ 的操作，而跨基 $X=\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 共享则是将 $\alpha|+\rangle+\beta|-\rangle$ 映射为 $\alpha|++\rangle+\beta|--\rangle$ 的操作。

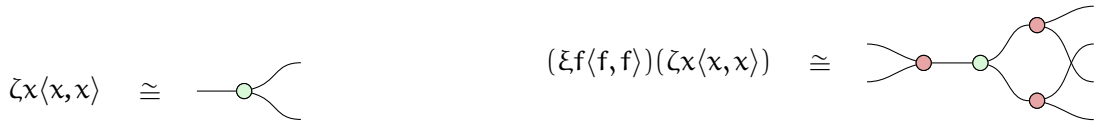
不同于优先采用标准基，ζ演算为每个基引入一种不同的绑定抽象。它有两个绑定符，ζ 和 ξ，分别对应 Z 基和 X 基。因此，ξxM 应读作“执行计算 M；如果变量 x出现多次，则在基 X上共享x 的态”，而 ζxM则按照同样的方式理解，只是对应 Z 基。

提交至:
QPL 2023

© N. Bot¨o，F.Forslund 本作品采用知识共享署名-非商业性使用-相同方式共享许可协议授权。

1.1 示例：高阶共享。

我们希望强调该语言语义的两个主要特征：共享和高阶函数。在 ζ演算中，基 Z 上的共享由项 $\zeta x\langle x,x\rangle$表示，它会复制在 Z中引入的变量。这应像 λ演算中的项 $\lambda x.(x,x)$ 那样理解。该项的语义以 ZX图的形式呈现在图 1a 中。



(a) 常规　　(b) 高阶

图 1：共享示例。

高阶函数（HOF）这一术语对函数式程序员来说应该很熟悉，它指的是一个函数接受另一个函数作为输入。在图 1b 中，我们将函数 $\xi f\langle f,f\rangle$ 应用于共享函数 $\zeta x\langle x,x\rangle$。也就是说，我们共享这个共享函数。其推导见附录 C。

2 语法

我们如图 2 所示定义 ζ-演算的项集 z（algiz）。变量 x 在项 $\beta^\alpha xM$中受约束，并且我们将相差 α-转换的项视为相同。我们用 βxM 表示 $\beta^0 xM$。

$$\frac{}{* \in \divideontimes}\ \text{UNIT} \qquad \frac{}{x \in \divideontimes}\ \text{VAR} \qquad \frac{\beta \in \{\zeta,\xi\} \qquad \alpha \in [0,2\pi) \qquad n \in \mathbb{Z}}{\beta^\alpha_n \in \divideontimes}\ \text{GEN}$$

$$\frac{\beta \in \{\zeta,\xi\} \qquad \alpha \in [0,2\pi) \qquad M \in \divideontimes}{\beta^\alpha xM \in \divideontimes}\ \text{ABS}_\beta \qquad \frac{M \in \divideontimes \qquad N \in \divideontimes}{MN \in \divideontimes}\ \text{APP} \qquad \frac{M \in \divideontimes \qquad N \in \divideontimes}{\langle M,N\rangle \in \divideontimes}\ \text{TUP}$$

$$\frac{M \in \divideontimes \qquad N \in \divideontimes \qquad \beta \in \{\zeta,\xi\}}{\text{let } \langle x,y\rangle =_\beta M \text{ in } N \in \divideontimes}\ \text{LET}$$

图 2：演算的语法。

非正式地说，抽象 $\beta^\theta xM$ 可以理解为：“对变量 x执行计算 M，使其绕基 β 旋转 θ角度；如果 x 在 M中出现多次，则将其共享到 M中。”GEN规则根据给定基的基向量生成值。对于某个基 β、角度 α和正的 n，会引入形如 $|\beta_0\rangle^{\otimes n} + e^{i\alpha}|\beta_1\rangle^{\otimes n}$ 的态。对于负的 n，我们得到效应；对于$n = 0$，值则变为标量。我们定义一些常用的语法糖，

$$\hat{\beta}^\alpha :\equiv \beta^\alpha xx \qquad M \circ N :\equiv \beta^0 xM(Nx) \qquad H :\equiv \hat{\zeta}^{\frac{\pi}{2}} \circ \hat{\xi}^{\frac{\pi}{2}} \circ \hat{\zeta}^{\frac{\pi}{2}} \quad .$$

3 类型判断

类型集合 es 在图 3 中定义，由数词类型、张量积和类型对偶组成。

$$\frac{n \in \mathbb{N}}{\underline{n} \in \mathsf{Type}} \qquad \frac{A \in \mathsf{Type} \qquad B \in \mathsf{Type}}{A \otimes B \in \mathsf{Type}} \qquad \frac{A \in \mathsf{Type}}{A^* \in \mathsf{Type}}$$

图 3：类型的定义。

类型为 $\underline{n}$ 的项表示（一个输出） n个量子比特。张量积和对偶类型具有其通常的解释。我们将函数类型 $A \to B$ 定义为 $A^* \otimes B$。由于希尔伯特空间范畴是闭幺半范畴，函数 $A \to B$ 可以表示为类型为 $A^* \otimes B$ [3]的态。单位类型 $\top$ 定义为零数词 $\top := \underline{0}$。类型上下文由文法$\Gamma ::= / 0 \mid \Gamma, x :_\beta A$给出。

ζ演算的判断形式为 $x_1 :_{\beta_1} A_1, \ldots\ldots, x_n :_{\beta_n} A_n \vdash M : B$。这表示一个量子过程，它接受类型为 $A_1, \ldots\ldots, A_n$ 的输入，并输出类型为 B的态。如果变量 x_i 在项 M中出现多次，则它将在基 β_i之间共享。

ζ演算的类型规则见图 4 和图 5。

$$\frac{\Gamma \vdash M : B}{\Gamma, x :_\beta A \vdash M : B}\ \mathrm{W} \qquad \frac{\Gamma, x_1 :_\beta A, \ldots, x_n :_\beta A \vdash M : B}{\Gamma, x :_\beta A \vdash M[x_1 := x, \ldots, x_n := x] : B}\ \mathrm{C} \qquad \frac{\Gamma_1, \Delta, \Gamma_2, \Phi, \Gamma_3 \vdash M : A}{\Gamma_1, \Phi, \Gamma_2, \Delta, \Gamma_3 \vdash M : A}\ \mathrm{X}$$

图 4：结构规则。

$$\frac{}{\Gamma \vdash * : \top}\ \mathrm{U} \qquad \frac{x :_\beta A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}\ \mathrm{V} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta^\alpha_n : \underline{n}}\ \mathrm{G} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta^\alpha_{-n} : \underline{n} \to \top}\ \mathrm{D} \qquad \frac{\Gamma, x :_\beta A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \beta^\alpha x M : A \to B}\ \mathrm{B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}\ \mathrm{A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : A \otimes B}\ \mathrm{T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \otimes B \qquad \Gamma, x :_\beta A, y :_\beta B \vdash N : C}{\Gamma \vdash \mathrm{let}\ \langle x, y \rangle =_\beta M\ \mathrm{in}\ N : C}\ \mathrm{E}$$

图 5：类型规则。

除了 (U) 和 (V) 的平凡公理外，我们还有基生成元 (G, D) 的类型。在 $n \geq 0$ 的情况下，类型只是一个等于生成元大小的数字，而负号的情况定义了一种效应（即一个指向单位类型的函数）。规则 (B) 引入了函数类型。函数类型的消去规则是 (A)，即通常的应用规则。张量积类型由 (T) 引入，并通过 let规则 (E) 消去。该系统的结构规则包括弱化 (W)、收缩 (C) 和交换 (X)。

4 语义

我们通过将每个可推导判断映射为 ZX 演算的一个图来给出该系统的语义，具体如下。每个类型 A 和上下文 Γ 都被解释为一个标签集合，即 $[\![\Gamma]\!]$ 和 $[\![A]\!]$。其意图是，可推导判断 $\Gamma \vdash M : A$ 将被映射为一个图：其开放输入线（图的左侧）由 $[\![\Gamma]\!]$ 的元素标记，而其开放输出线（图的右侧）由 $[\![A]\!]$ 的元素标记。下面给出了这样一种标记方式。

$$
\begin{aligned}
[\![\underline{n}]\!] &:= \{0, 1, \ldots, n-1\} \\
[\![A \otimes B]\!] &:= \{(0, a) : a \in [\![A]\!]\} \cup \{(1, b) : b \in [\![B]\!]\} \\
[\![A^*]\!] &:= \{a^* : a \in [\![A]\!]\}
\end{aligned}
$$

定义图 $K(A, \beta, n)$，其中 A 是类型，$\beta \in \{\zeta, \xi\}$ 且 $n \in \mathbb{N}$ 如图 6 所示，其中 K^* 是共享图的水平反射。其意图是表示这样一种操作：生成 n 个类型为 A 的值的共享副本，并在基 β 上共享这些副本。

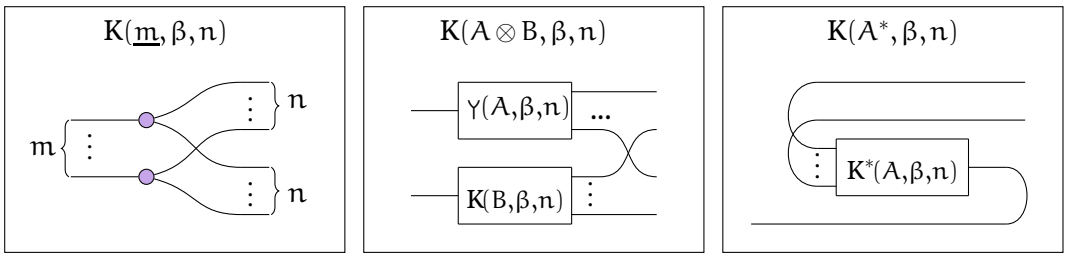


图 6：共享操作 K（kaun）的定义。

随后可以使用这些操作来定义结构规则的解释，参见图7。

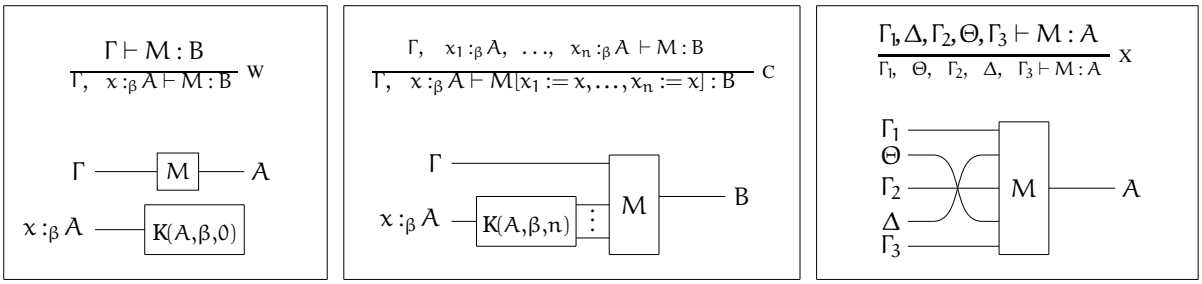


图7：结构规则的解释。

将上下文共享 $K(\Gamma, n)$ 定义为这样一种操作：在上下文的引入基中复制每个变量（$x :_\beta A \mapsto K(A, \beta, n)$），并将它们相应地交换到 n 上下文中。随后利用该操作在操作语义中生成 Γ 的多个副本。注意，每条线和每个蜘蛛都会按其类型的大小（即标签数量）进行倍增。类似于蜘蛛和线在 SZX-演算 [4]中对整数所起的作用。

现在，我们将图 8 中的弦图类型判断定义为 ζ 的语义。

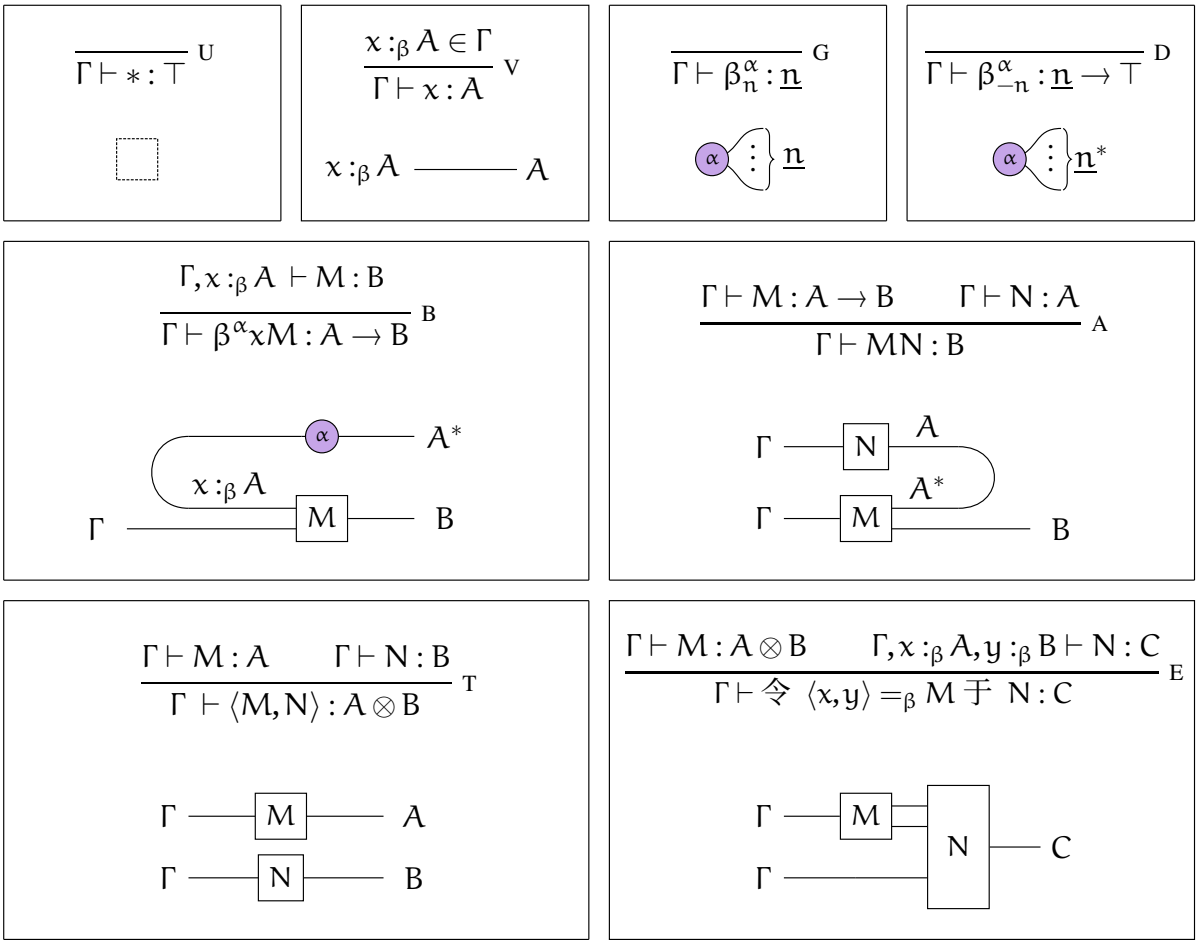
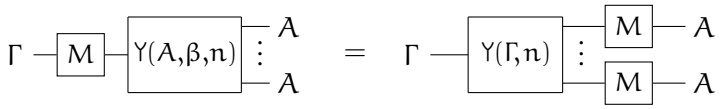


图 8：该演算的操作语义。

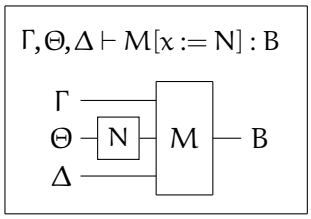
我们希望定义 λ-演算中熟悉的代换概念。由于涉及共享时并非所有项都可以进行代换，因此这会带来一些困难。为了辅助代换证明，我们定义如下内容。

定义 1. 设 $\Gamma \vdash M : A$ 是一个可推导判断， β 是一个基。当且仅当 M 与共享在 β 和 Γ 上可交换

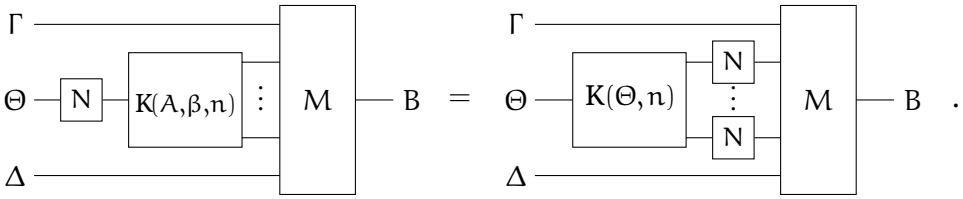


我们将在 ζ 的等式理论中使用 ZX 演算的规则，更具体地定义哪些项可以在共享上进行交换。利用此定义，我们可以证明下面这个引入代换的命题。

命题2（代换）。设 Γ、$x :_\beta A$、$\Delta \vdash M : B$ 和 $\Theta \vdash N : A$。如果 N 在 β 和 Θ 上与共享交换，那么



证明。通过对 $\Gamma, x :_\beta A, \Delta \vdash M : B$ 的推导进行归纳来证明。这里详细说明收缩的情况。设 $\Gamma, x_1 :_\beta A, \ldots, x_n :_\beta A, \Delta \vdash M : B$ 和 $\Theta \vdash N : A$。那么，由于 N 与共享在 β 和 Θ 上可交换，我们有



由此我们得到 $\Gamma, \Theta, \Delta \vdash M[x := N] : B$。 □

5 等式理论

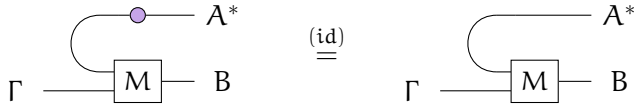
本节介绍一些关于 ζ-演算中的项的简单等式规则。我们引入关系 $M \equiv N$ 来表示两个项相等。对于谓词 Φ，此关系与方程 (1) 中所有有效判断的 ζ语义相关。

$$M \equiv N \quad (\Phi) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \qquad \Gamma \vdash N : A \qquad \Phi}{M \equiv N} \tag{1}$$

因此，如果两个项可以通过 $(\equiv)$ 的自反传递闭包变为相等，我们就记作 $\zeta \vdash M \equiv N$。

5.1 嵌入线性 λ-演算

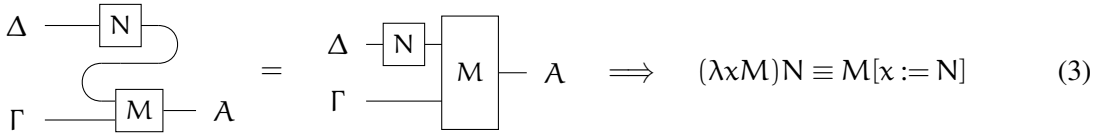
通过定义 λ-抽象 $\lambda x M :\equiv \beta^0 x M$，可以将线性 λ-演算嵌入 ζ 中，其中 x 在 M 中只出现一次（记作 $\omega_x(M) = 1$）。随后，ZX 演算的恒等消除规则允许我们从抽象的解释中完全移除蜘蛛，从而得到形式如方程 (2) 所示的图。



(2)

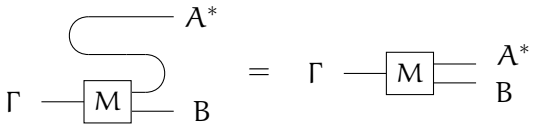
然后，由于由 λ-基引入的变量只出现一次，因此不会发生共享，代入它的每一项都可交换通过。根据命题2，我们证明，当

代入以这种方式引入的变量时，{v2}-归约对所有项都成立。



$$\Longrightarrow \quad (\lambda x M)N \equiv M[x := N] \tag{3}$$

我们也用同样的逻辑得到 η-归约。由于 λ-抽象引入的变量最多只出现一次，因此条件 $x \notin FV(M)$ 对于 $\lambda x M x$ 总是成立。

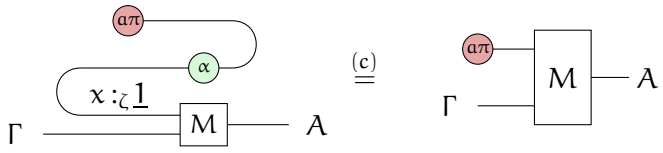


$$\Longrightarrow \quad \lambda x M x \equiv M \tag{4}$$

5.2 由代换得到的等式规则

在定义 1 中，引入了项穿过共享的交换。这一定义预设了附录 A 中展示的 ZX 演算交换规则（主要是 (π) 和 (c)）。我们将利用这些规则定义一些关于 ζ-项的等式。

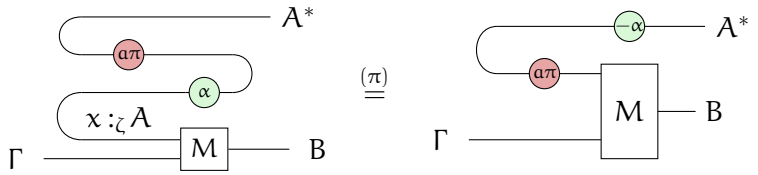
首先来看项 $(\zeta^{\alpha} x M)\xi^{a\pi}$，其中 $a \in \{0,1\}$。利用基态复制规则，我们可以证明如下结论：



(5)

再次使用 (c) 规则，我们注意到项 $\xi^{a\pi}$ 可以与共享在 ζ 和 /0 上交换。因此，通过代换，我们得到等式 $(\zeta^{\alpha} x M)\xi^{a\pi} \equiv M[x := \xi^{a\pi}]$。

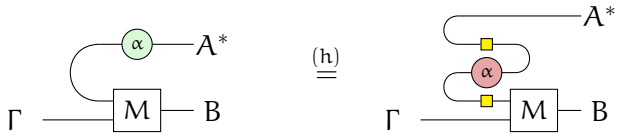
现在我们再次考察项 $(\zeta^{\alpha} x M) \circ \hat{\xi}^{a\pi}$，其中 $a \in \{0,1\}$。然后我们可以应用 π交换规则来证明：



(6)

同样，我们注意到，根据 π交换规则，$\hat{\xi}^{a\pi} x$ 与关于 ζ 和 $\{x :_{\zeta} A\}$ 的共享可交换（因为共享中的蜘蛛始终具有零相位）。通过代换，我们定义等式 $(\zeta^{\alpha} x M) \circ \hat{\xi}^{a\pi} \equiv \zeta^{-\alpha} x M[x := \hat{\xi}^{a\pi} x]$。

最后，我们将考察颜色变换。在对抽象 $\zeta^{\alpha} x M$的解释中，请注意，我们可以应用颜色变换规则得到：



(7)

项 Hx 与 ζ 和 $\{x :_{\xi} A\}$上的共享可交换，通过将 Hadamard 穿过共享蜘蛛来切换引入 x 所使用的基。再次查看方程（7），我们看到这是

预期的，因为抽象已改变其基。通过代换，我们得到项 $\xi^\alpha x M[x := Hx]$，然后将其与 H 复合，以重构原始图。由此，我们得到 ζ 中的颜色变换规则，即 $\zeta^\alpha x M \equiv (\xi^\alpha x M[x := Hx]) \circ H$。

5.3 完整理论

其余的等式规则涉及蜘蛛融合，以及适用于简单项的更平凡规则。将这些规则与前几节介绍的规则结合起来，我们在图 9 中给出了 ζ-演算的完整等式理论。

$$\begin{aligned}
\beta x M &\equiv \lambda x M \qquad (\omega_x(M) = 1) \\
(\lambda x M)N &\equiv M[x := N] \\
\lambda x M x &\equiv M \\
(\zeta^\alpha x M)\xi^{a\pi} &\equiv M[x := \xi^{a\pi}] \\
(\zeta^\alpha x M) \circ \hat{\xi}^{a\pi} &\equiv \zeta^{-\alpha} x M[x := \hat{\xi}^{a\pi} x] \\
\zeta^\alpha x M &\equiv (\xi^\alpha x M[x := Hx]) \circ H
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\beta^\alpha x M &\equiv \beta^\alpha x N \qquad (M \equiv N) \\
(\beta^\alpha x M)\beta^\theta &\equiv (\beta x M)\beta^{\theta+\alpha} \\
(\beta^\alpha x M) \circ \hat{\beta}^\theta &\equiv \beta^{\alpha+\theta} x M \\
H\zeta_n^\alpha &\equiv \xi_n^\alpha \\
H(HM) &\equiv M \\
\langle M, * \rangle &\equiv M \\
\langle *, M \rangle &\equiv M
\end{aligned}$$

图 9：等式理论的规则。

此处给出的等式理论并不完备。要使其完备，需要更全面的共享理论，甚至可能还需要更多内容。第 6 节将重点讨论这一问题；届时我们将改为依赖 ZX 与 ζ 之间的翻译。尽管如此，以下定理表明该等式理论是可靠的。

定理 3（可靠性）。 $\zeta \vdash M \equiv N \implies \mathrm{ZX} \vdash [\![\Gamma \vdash M : A]\!] = [\![\Gamma \vdash N : A]\!]$

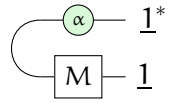
证明。证明方法是展示 ZX 演算等式理论中每条规则的解释相等。完整证明见附录 B。

□

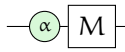
6 个示例

为了突出 ζ 演算的主要特征，本节将介绍一些示例。重点包括 ZX 演算中的常见结构，以及高阶函数和共享。为了帮助理解 ζ 项如何在 ZX 中表示，我们引入了闭合 ζ 项 M 与带有盒子的 ZX 图 D 之间的关系 $M \cong D$。其意图是将解释 $[\![\vdash M : A]\!]$ 表示为一个图，其中可能包含由盒子表示的任意项，并将函数类型“外置”。也就是说，将对偶类型反转为输入。一个简单的例子是：

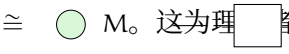
$$[\![\vdash \zeta^\alpha x M : \underline{1} \to \underline{1}]\!] \quad = \quad$$



$$\rightsquigarrow$$

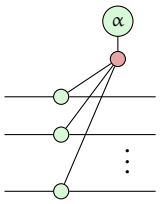


(8)

对此，我们会写作 $\zeta^\alpha x M \cong$  M。这为理解如 ζ-演算中高阶函数作为 ZX 图的作用提供了一种清晰的方式。

6.1 相位小工具、连接函数和多量子比特幺正算子

相位小工具是形式为 (9) 的 ZX 图，用于实现幺正算子 U_f 在一串输入线 $|\vec{x}\rangle := |x_1 \dots x_n\rangle$ 上的作用，即 $U_f|\vec{x}\rangle = e^{if(\vec{x})}|\vec{x}\rangle$，其中 $f(\vec{x}) = \alpha(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n)$，相位为 α [10]。



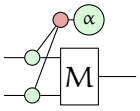
(9)

我们可以通过向小工具函数 $G^\alpha : \underline{n} \to \top$ 提供共享参数，实现作用于基抽象输入的相位小工具，

$$G^\alpha :\equiv \lambda x\, \xi_k\langle \zeta^\alpha, x\rangle \quad \cong \quad \text{where } k = -n-1. \tag{10}$$

随后，我们可以将此小工具函数与任意基抽象结合起来，根据输入的奇偶性为其添加相位，

$$\zeta x \zeta y\, \langle G^\alpha\langle x, y\rangle, M\rangle \quad \cong \quad . \tag{11}$$

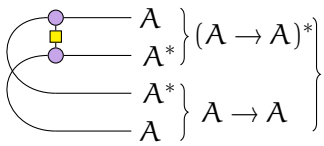


一般来说，我们可以使用这种形式的函数来连接基中引入的变量。通过恒等连接两个变量的函数为 $L :\equiv \zeta_{-2} \cong$，而通过 Hadamard 连接的函数则为 $L_H :\equiv \zeta^{\frac{\pi}{2}}_{-2} \circ \hat{\xi}^{\frac{\pi}{2}} \cong$ 。使用这类连接函数可以简洁地构造多量子比特幺正算子，例如 $\mathrm{CNOT} \equiv \zeta c \xi t \langle L\langle c, t\rangle, c, t\rangle$ 和 $C_z \equiv \zeta c \zeta t \langle L_H\langle c, t\rangle, c, t\rangle$。

6.2 通过共享实现高阶函数

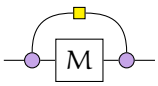
为了进一步阐述第 1.1 节中展示的 ζ 特性，我们将考察一个使用高阶共享的函数。我们在式 (12) 中定义了 Pauli 切换函数 $switch_\beta : (A \to A) \to A \to A$。

$$[\![\vdash \beta f\, f \circ H \circ f : (A \to A) \to A \to A]\!] \quad = \tag{12}$$



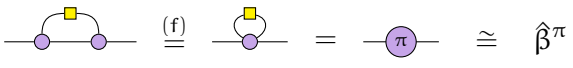
A将 $switch_\beta$ 应用于某个项 $M : A \to A$，我们可以以更易理解的方式来审视它：

$$switch_\beta\, M \quad \cong \tag{13}$$

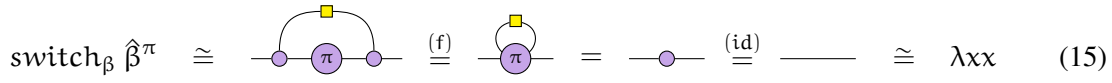


我们称其为 Pauli 切换函数，是因为它应用于 Pauli 门（$\sigma_x \equiv \hat{\xi}^\pi$、$\sigma_z \equiv \hat{\zeta}^\pi$ 和 $\sigma_y \equiv \hat{\xi}^\pi \circ \hat{\zeta}^\pi$）时所表现出的行为。当应用于恒等函数时，它会“打开”与其共享所在基的 Pauli 门。

$$switch_\beta\, (\lambda x x) \quad \cong \quad \overset{(f)}{=} \quad = \quad \cong \quad \hat{\beta}^\pi \tag{14}$$

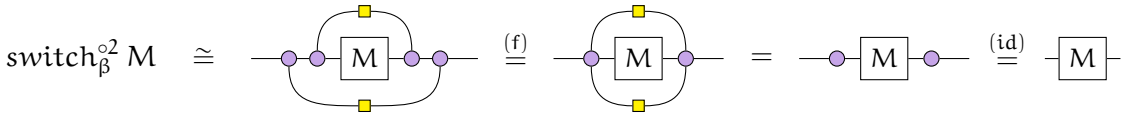


然后，将 switch_β 应用于基 β 中的 Pauli 门会将其关闭。



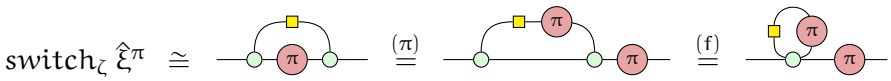
(15)

我们可以看到，更一般地说，这种行为是意料之中的，因为该函数是自逆的（16）。

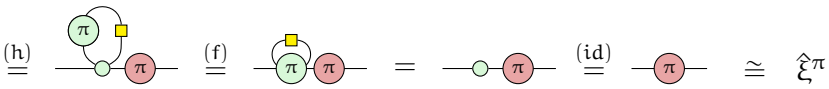


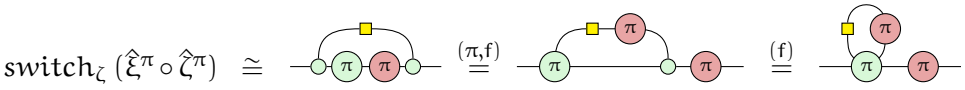
(16)

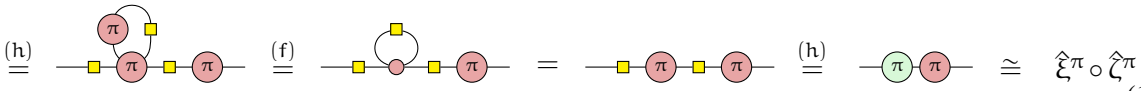
这个函数也说明了在不同的基中进行共享所产生的差异。将它应用于不同基上的 Pauli 门不会产生任何作用。



(17)







(18)

切换函数展示了在高阶函数中使用共享的一些独特性质。这个具体实例说明了如何利用共享函数的自复合来改变其作用，同时也提供了一些直观认识，帮助理解在不同的基中进行共享会产生怎样的差异。

请注意，本节所进行的计算无法使用本文提出的等式规则来完成。未来的工作是扩展这些等式规则，构建一个可靠的系统，以便证明此类事实。

7 结论与后续工作

我们介绍了 ζ 演算，这是一种用于表示量子操作的形式系统，支持高阶函数，其中重复出现的变量表示量子态的共享。我们给出了基于 ZX 演算的语义，并提供了可靠的等式理论。该演算包含代换的概念，它与 ZX 演算的交换规则相结合，可导出实用的重写规则。我们展示了若干示例，说明 ζ 的抽象机制如何用于表示 ZX 图，包括相位小工具和链接函数。我们还展示了 ζ 中高阶函数的实例，以及它们作为 ZX 图的表示。

未来的工作中，我们希望扩展等式规则集，以便刻画诸如 Pauli 切换函数等高阶函数的行为。

我们还注意到，ζ演算在很大程度上并不依赖于这样一个事实：我们使用的是复向量空间的基 Z和 X 。对于任意向量空间上的任意一组基，都可以轻松地为该演算生成类型规则。

我们已经开始研究针对不同计算阶数的 ζ演算的不同版本，记为 o_n：

- o_0 — 如果我们将 ζ 演算应用于 Z_2-向量空间 Z_2^2 的单个基 $\{0,1\}$，就会得到熟悉的 λ 演算，我们知道它可以应用于经典计算。
- o_1 — 我们可以将 ζ 演算应用于实向量空间 R_2，通过单个蜘蛛定义的轴来操控态。
- o_2 — 我们可以将 ζ 演算应用于 C^2 的基 Z 和 X，从而得到本文提出的、适用于表示量子计算的系统。
- o_3 — 我们可以将 ζ 演算应用于四元数向量空间 H^2 的基 T、 X、 Y、 Z（W），从而得到一种适用于涉及狄拉克旋量的计算的演算，并由此展现出时空计算这一令人振奋的可能性。

对于每个阶数，形式为 $\beta^{\pi}\chi\chi : \underline{1} \to \underline{1}$ 的 ζ-抽象似乎都与克利福德层级[7]不同层级的生成元有关。在 o_2 中，这些生成元是泡利矩阵；而在 o_3 中，则是 γ-矩阵 [9] 。我们希望这有助于揭示不同阶数之间更深层的联系。无论如何，每个阶数都扩展了前一个阶数；我们希望各层级之间的对应关系有助于分析和推理这些不同形式的计算及其共性。

致谢

我们谨向导师 Robin Adams 致以最诚挚的谢意，感谢他就该系统的语义提供了极有帮助的讨论，并协助编辑论文。本文介绍的理论构成了两位作者目前正在撰写的 ζ-演算硕士论文的基础。

参考资料

[1] T Altenkirch 与 J Grattage（2005）：一种函数式量子编程语言。载于：第 20 届 IEEE 逻辑与计算机科学年会研讨会（LICS'05），第 249–258 页，doi:10.1109/LICS.2005.1。[2] Pablo Arrighi 与 Gilles Dowek（2017）：Lineal：一种线性代数λ演算。《计算机科学逻辑方法》13(1)，第 8 页。[3] John C Baez 与 Michael Stay（2009）：物理学、拓扑学、逻辑学与计算：一块罗塞塔石碑。《物理学讲义》813，第 95–172 页。[4] Titouan Carette、Dominic C Horsman 与 Simon Perdrix（2019）：SZX-演算：可扩展的图形化量子推理。载于：数学基础与计算机科学国际研讨会。[5] Bob Coecke 与 Ross Duncan（2011）：相互作用的量子可观测量：范畴代数与图示方法。《新物理学杂志》13(4)，第 043016 页，doi:10.1088/1367-2630/13/4/043016。参见 https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/4/043016。[6] Alexander S. Green、Peter LeFanu Lumsdaine、Neil J. Ross、Peter Selinger 与 Benoˆıt Valiron（2013）：Quipper。《ACM SIGPLAN 通知》48(6)，第 333–342 页，doi:10.1145/2499370.2462177。[7] B J Hiley（2011）：过程、区分、群胚与克利福德代数：量子形式体系的另一种观点。《物理学讲义》813，第 705–752 页，doi:10.1007/978-3-642-12821-9_12。

[8] Jennifer Paykin、Robert Rand 与 Steve Zdancewic（2017）：QWIRE：一种用于量子电路的核心语言。载于：第 44 届 ACM SIGPLAN 编程语言原理研讨会论文集，POPL ’17，计算机协会，纽约，美国纽约州，第 846–858 页，doi:10.1145/3009837. 3009894。参见 https://doi.org/10.1145/3009837.3009894。[9] Steven Weinberg（1995）：量子场论。剑桥大学出版社，doi:10.1017/ CBO9781139644167。[10] John van de Wetering（2020）：面向量子计算机科学家的 ZX 演算。[11] W K Wootters 与 W H Zurek（1982）：单个量子不可克隆。《自然》299(5886)，第 802–803 页，doi:10.1038/299802a0。参见 https://www.nature.com/articles/299802a0。

一种字符串图语言

字符串图语言本质上就是 ZX 演算[10], ，唯一的修改是用紫色节点表示一般蜘蛛。字符串图的语义和等式理论见图 10 和图 11。在图中为蜘蛛的基命名时，我们遵循以下命名和颜色约定。

- β是一般基，颜色为紫色。
- ζ和 ξ 分别是 Z 基和 X 基，颜色沿用通常的约定。

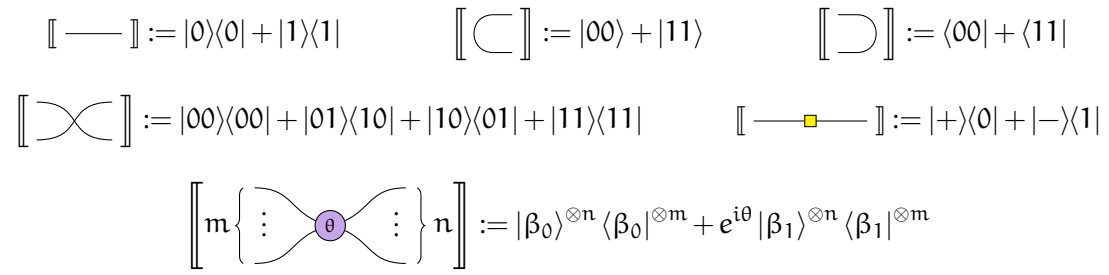


图 10：字符串图语言的指称语义。

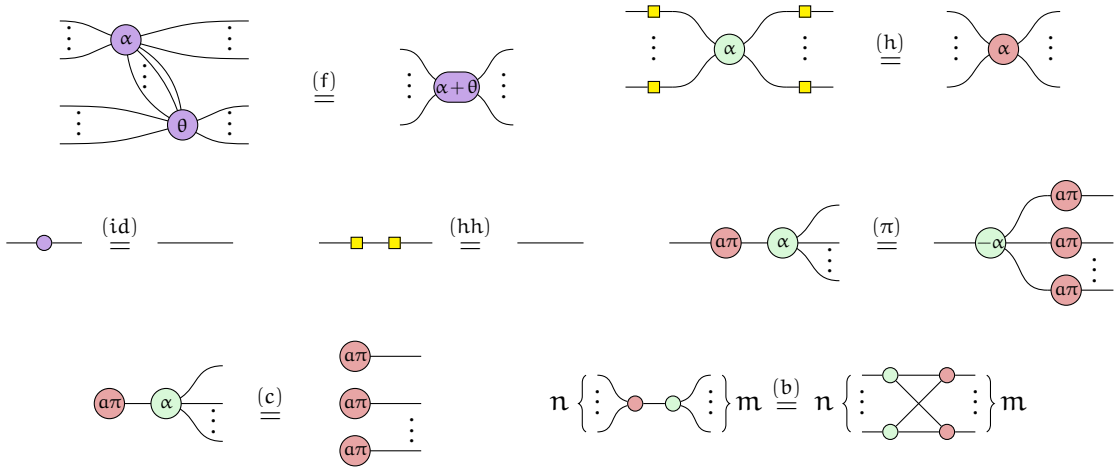
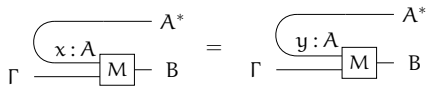


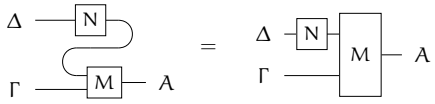
图11：字符串图语言的等式规则。

B 等式理论的可靠性

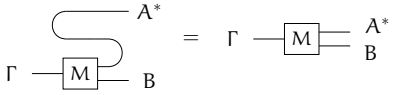
$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x M : A \to B \quad \Gamma \vdash \lambda y M[x := y]}{\lambda x M \equiv \lambda y M[x := y]}$$



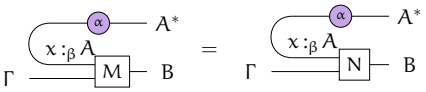
$$\frac{\Delta, \Gamma \vdash (\lambda x M)N : A \quad \Delta, \Gamma \vdash M[x := N] : A}{(\lambda x M)N \equiv M[x := N]}$$



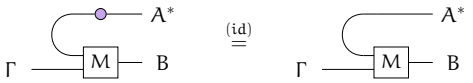
$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x M x : A \to B \quad \Gamma \vdash M : A \to B}{\lambda x M x \equiv M}$$



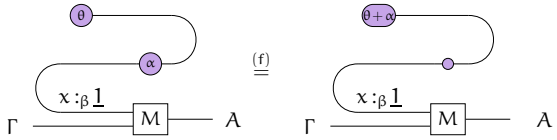
$$\frac{\Gamma \vdash \beta^{\alpha} x M : A \to B \quad \Gamma \vdash \beta^{\alpha} x N : A \to B \quad M \equiv N}{\beta^{\alpha} x M \equiv \beta^{\alpha} x N}$$



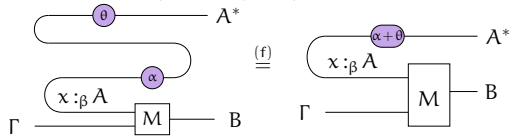
$$\frac{\Gamma \vdash \beta x M : A \to B \quad \Gamma \vdash \lambda x M : A \to B \quad \omega_x(M) = 1}{\beta x M \equiv \lambda x M}$$



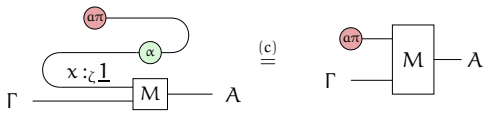
$$\frac{\Gamma \vdash (\beta^{\alpha} x M)\beta^{\theta} : A \quad \Gamma \vdash (\beta x M)\beta^{\theta+\alpha} : A}{(\beta^{\alpha} x M)\beta^{\theta} \equiv (\beta x M)\beta^{\theta+\alpha}}$$



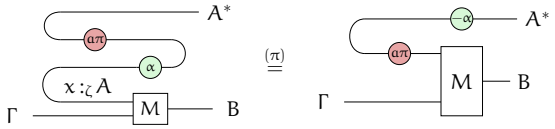
$$\frac{\Gamma \vdash (\beta^{\alpha} x M) \circ \hat{\beta}^{\theta} : A \to B \quad \Gamma \vdash \beta^{\alpha+\theta} x M : A \to B}{(\beta^{\alpha} x M) \circ \hat{\beta}^{\theta} \equiv \beta^{\alpha+\theta} x M}$$



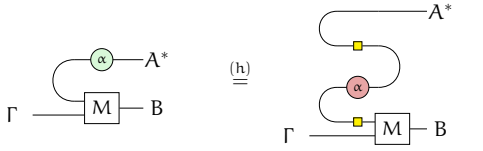
$$\frac{\Gamma \vdash (\zeta^{\alpha} x M)\xi^{a\pi} : A \quad \Gamma \vdash M[x := \xi^{a\pi}] : A \quad a \in \{0, 1\}}{(\zeta^{\alpha} x M)\xi^{a\pi} \equiv M[x := \xi^{a\pi}]}$$



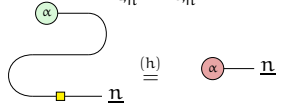
$$\frac{\Gamma \vdash (\zeta^{\alpha} x M) \circ \hat{\xi}^{a\pi} : A \to B \quad \Gamma \vdash \zeta^{-\alpha} x M[x := \hat{\xi}^{a\pi} x] : A \to B}{(\zeta^{\alpha} x M) \circ \hat{\xi}^{a\pi} \equiv \zeta^{-\alpha} x M[x := \hat{\xi}^{a\pi} x]}$$



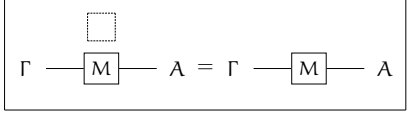
$$\frac{\Gamma \vdash \zeta^{\alpha} x M : A \to B \quad \Gamma \vdash \xi^{\alpha}(Hx)M[x := Hx] : A \to B}{\zeta^{\alpha} x M \equiv \xi^{\alpha}(Hx)M[x := Hx]}$$



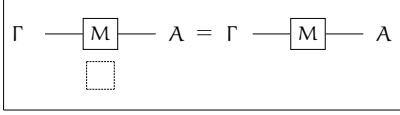
$$\frac{\vdash H\zeta_{\underline{n}}^{\alpha} : \underline{n} \quad \vdash \xi_{\underline{n}}^{\alpha} : \underline{n}}{H\zeta_{\underline{n}}^{\alpha} \equiv \xi_{\underline{n}}^{\alpha}}$$



$$\frac{\Gamma \vdash \langle *, M\rangle : \top \otimes A \quad \Gamma \vdash M : A}{\langle *, M\rangle \equiv M}$$

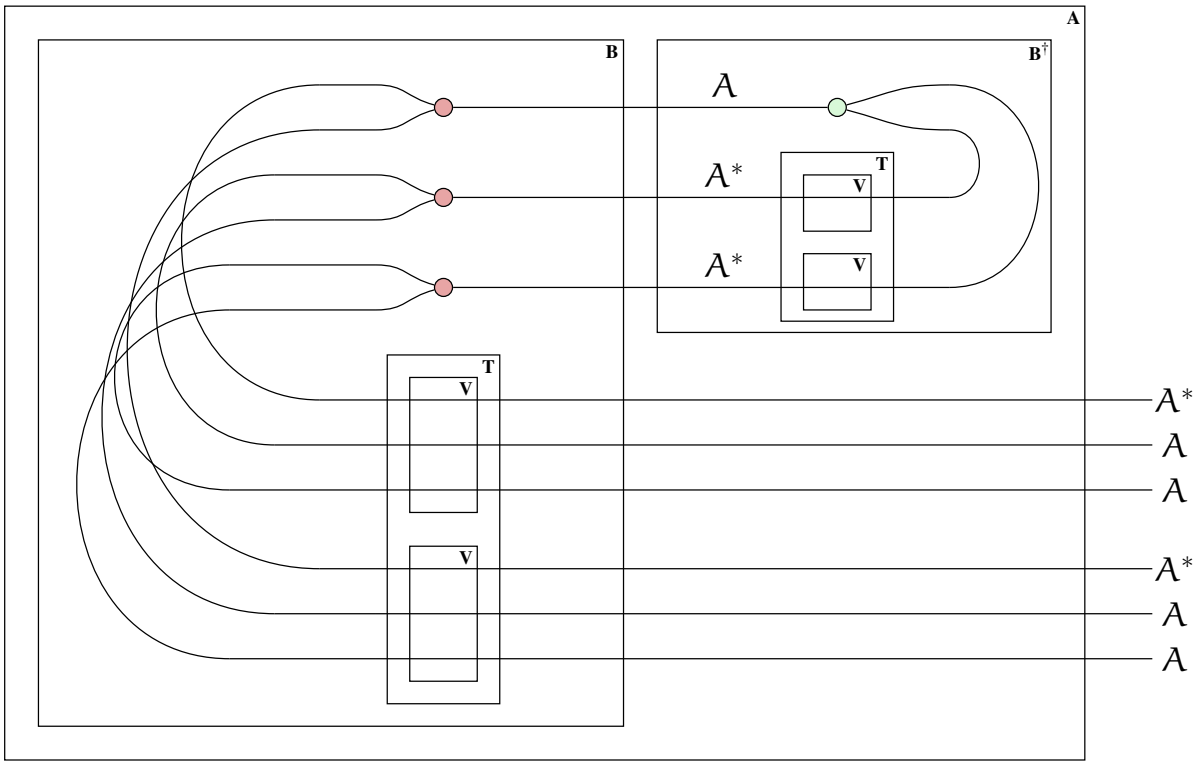


$$\frac{\Gamma \vdash \langle M, \ *\rangle : A \otimes \top \quad \Gamma \vdash M : A}{\langle M, \ *\rangle \equiv M}$$



C 高阶共享推导

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f :_\xi A \to A \in \{f :_\xi A \to A\}}{f :_\xi A \to A \otimes A \vdash f : A \to A \otimes A}\,\mathrm{V} \quad \dfrac{f :_\xi A \to A \in \{f :_\xi A \to A\}}{f :_\xi A \to A \otimes A \vdash f : A \to A \otimes A}\,\mathrm{V}}{f :_\xi A \to A \otimes A \vdash \langle f, f\rangle : (A \to A \otimes A) \otimes (A \to A \otimes A)}\,\mathrm{T}}{\vdash \xi f\langle f, f\rangle : (A \to A \otimes A) \to (A \to A \otimes A) \otimes (A \to A \otimes A)}\,\mathrm{B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x :_\zeta A \in \{x :_\zeta A\}}{x :_\zeta A \vdash x : A}\,\mathrm{V} \quad \dfrac{x :_\zeta A \in \{x :_\zeta A\}}{x :_\zeta A \vdash x : A}\,\mathrm{V}}{x :_\zeta A \vdash \langle x, x\rangle : A \otimes A}\,\mathrm{T}}{\vdash \zeta x\langle x, x\rangle : A \to A \otimes A}\,\mathrm{B}}{\vdash (\xi f\langle f, f\rangle)(\zeta x\langle x, x\rangle) : (A \to A \otimes A) \otimes (A \to A \otimes A)}\,\mathrm{A}$$



$$\left[\!\left[\;\right]\!\right] = \begin{matrix}(\mathbb{1}\otimes\sigma\otimes\mathbb{1}) \\ (|{+}{+}\rangle\langle{+}|+|{-}{-}\rangle\langle{-}|)^{\otimes 2} \\ (|00\rangle\langle 0|+|11\rangle\langle 1|) \\ (|+\rangle\langle{+}{+}|+|-\rangle\langle{-}{-}|)\end{matrix}$$