arXiv:2303.17416v1 [math.FA] 30 Mar 2023

巴拿赫空间值全纯函数的多维 Bohr 半径

SHANKEY KUMAR 和 RAMESH MANNA

Abstract. 本文研究定义在 Banach 序列空间上、取值于巴拿赫空间的全纯函数的多维 Bohr 半径。对于有限维巴拿赫空间，我们给出了 Bohr 半径的精确渐近增长。为实现有限情形下的目标，我们根据多项式在 ℓ_p^n 上的一致范数，使用给定多项式的某些系数的 $\ell_{p'}$-可和性。无限情形则采用近年来基于 Defant、Maestre 和 Schwarting 的工作发展起来的技术进行处理。在分析中，我们充分利用了与一个次数为 M 的齐次多项式相关联的对称 M-线性映射的若干性质。此外，我们还研究了定义在 Banach 序列空间上的巴拿赫空间值全纯函数的算术 Bohr 半径的界，从而推广了 Defant、Maestre 和 C. Prengel 在这一方向上的工作。

1. 引言

在二十世纪九十年代初，Harald Bohr [15, 16] 为 Dirichlet 级数一般理论的发展作出了重要贡献

$$D(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

其中 $s = \sigma + it$ 和 $a_n \in \mathbb{C}$。固定 $\sigma_0 \in \mathbb{R}$。众所周知，Dirichlet 级数在由 $[\mathrm{Re}(s) > \sigma_0]$ in $\mathbb{C}$. 给出的半平面内绝对且一致收敛。Bohr 的工作主要集中于寻找上述级数的收敛区域。为解决这一问题，Bohr 发现了 Dirichlet 级数与多变量幂级数之间的深刻联系。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，借助素数分解 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$，令 $z = (p_1^{-s}, \ldots, p_r^{-s})$。Bohr 提出了以下恒等式:

$$D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} \cdots (p_r^{-s})^{\alpha_r} = \sum a_n z_1^{\alpha_1} \cdots z_r^{\alpha_r},$$

其中 $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 表示由按顺序排列的素数构成的序列。上述对应关系称为 Bohr 变换。Dirichlet 级数与无穷多个变量的幂级数之间的对应关系促使 Bohr 思考是否可以比较其系数的绝对值。这个问题如今被称为 Bohr 的不等式。Dixon [35] 将 Bohr 的不等式应用于 Banach 代数。此后，许多数学家受到启发并沿着这一方向开展研究。关于 Bohr 不等式这一主题的研究成果，可参阅 Abu-Muhanna 等人撰写的综述文章 [1]。

2020 年数学主题分类。32A05，32A10，46B45。关键词和短语。Bohr 半径、全纯函数、齐次多项式、对称 M-线性映射、Banach 空间。

Aizenberg、Boas 和 Khavinson（参见 [2, 13, 14]）将单变量中的 Bohr 半径推广到了多变量情形。特别是，他们针对一些莱因哈特域引入并研究了 Bohr 半径。莱因哈特域的例子如下：

$$B_{\ell_p^n} := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \|z\|_p < 1\}, \ 1 \le p \le \infty,$$

其中， p-范数定义为 $\|z\|_p = (\sum_{k=1}^n |z_k|^p)^{1/p}$ （对于$p = \infty$，作显然的修改）。

在 [30], Defant 等人研究了定义在多圆盘 $B_{\ell_\infty^n}$ 上的巴拿赫空间值全纯函数的 Bohr 半径。这促使我们给出定义在 $B_{\ell_p^n}$ 上的巴拿赫空间值全纯函数的 Bohr 半径的如下定义， $1 \le p \le \infty$。

定义 1.1. 设 $1 \le p \le \infty$、 $\boldsymbol{\lambda} > 1$、 $n \in \mathbb{N}$、 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$，并设 $\mathcal{V}$: $X \to Y$ 是复巴拿赫空间 X 与 Y 之间的有界（线性）算子。 $\boldsymbol{\lambda}$-Bohr 半径 $\mathcal{V}$ 记为 $K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$，它是使得下列不等式成立的所有 $r \ge 0$ 的上确界

$$\sup_{z \in r B_{\ell_p^n}} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y \le \boldsymbol{\lambda} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \big\|f(z)\big\|_X \tag{1.2}$$

对所有取值于 Y、定义在 $B_{\ell_p^n}$ 上的全纯函数 $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha$ ，该结论均成立。这里， $c_\alpha \in X$表示函数 f 的单项式级数展开中的 α_{th} 系数，而 $z^\alpha = {z_1}^{\alpha_1} \cdots {z_n}^{\alpha_n}$表示 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ （其中 0^0 解释为 1 ）。我们定义 $K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}) := K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1)$。如果 $\mathcal{V}$ 是 X 上的恒等算子，我们就简记为 $K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$；当 $X = \mathbb{C}$时，使用记号 $K(B_{\ell_p^n}, \boldsymbol{\lambda})$。

本文中，我们假设定义在 $B_{\ell_p^n}$ 上的全纯函数 f,$1 \le p \le \infty$ 是有界的，因为如果 f 是 $B_{\ell_p^n}$ 上的无界函数 $1 \le p \le \infty$，那么不等式 (1.2) 显然成立。

Bohr 的一个显著结果 [16] 指出

$$K(\mathbb{D}) = \frac{1}{3},$$

其中 $\mathbb{D} := B_{\ell_p^1}$ 表示开单位圆盘。更确切地说，Bohr 的 [16], 首先得到半径 $1/6$，后来他的同事 Riesz、Schur 和 Wiener 分别将其改进至$1/3$，并证明半径 $1/3$ 是精确的。

在 [18, 19], Bombieri 和 Bourgain 扩展了 Bohr 的结果，并研究了广义 Bohr 半径 $K(\mathbb{D}, \boldsymbol{\lambda})$ 关于 $\boldsymbol{\lambda} \ge 1$ 的性质。更确切地说，他们得到

$$K(\mathbb{D}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{3\boldsymbol{\lambda} - 2\sqrt{2(\boldsymbol{\lambda}^2 - 1)}}, \quad \text{for all } 1 \le \boldsymbol{\lambda} \le \sqrt{2},$$

并且，当 $\boldsymbol{\lambda}$ 接近 ∞时，

$$K(\mathbb{D}, \boldsymbol{\lambda}) \sim \frac{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2 - 1}}{\boldsymbol{\lambda}}.$$

另一方面，Blasco 在 [12,定理 1.2] 中指出

$$K(\mathbb{D}, \ell_p^2, 1) = 0, \text{ for every } 1 \le p \le \infty.$$

上述事实迫使我们在巴拿赫空间值 Bohr 半径 $\boldsymbol{\lambda} > 1$ $(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 的定义中考虑 K。事实上，在本文中我们证明，对于每个有界算子 $\mathcal{V}: X \to Y$，满足 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$ 和 $\boldsymbol{\lambda} > 1$，都有 $K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) > 0$。

在多维 Bohr 半径的研究方向上，Aizenberg、Boas、Dineen、Khavinson、Timoney、Defant 和 Frerick（见 [2,13,14,23,34]）确定了存在一个常数 $C \geq 1$，使得下列不等式成立

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\log n}{n \log\log n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}} \leq K(B_{\ell_p^n}) \leq C\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}},$$

对所有 $1 \leq p \leq \infty$ 和所有 n 均成立。Dineen 和 Timoney 在 [34] 中重新引起了人们对多维 Bohr 半径的兴趣，他们研究了绝对基与无限维空间上的全纯函数空间之间的联系。Khavinson 和 Boas [14] 在此基础上研究了多维 Bohr 半径，得到了上述关于$K(B_{\ell_\infty^n})$ 的上界以及其他有趣的结果。后来，对于剩余的 p 情形，Boas 在 [13] 中通过推广 Kahane-Salem-Zygmund 关于随机三角多项式的一个定理 [38]，估计了$K(B_{\ell_p^n})$ 的上界。此外，Defant 和 Frerick [23]通过建立多维 Bohr 半径与局部 Banach 空间理论之间的联系（见 [26]），得到了 $K(B_{\ell_p^n})$ 的下界。

Defant 和 Frerick 给出了上述结果的以下重大改进 [24]，并证明存在一个常数 $C \geq 1$ 使得

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}} \leq K(B_{\ell_p^n}), \tag{1.3}$$

对所有 $1 \leq p \leq \infty$ 以及所有 n均成立。重要情形 $p = \infty$ 源于一个著名事实，即“齐次多项式的 Bohnenblust-Hille 不等式是超收缩的”，并在 [25, 定理 2]中得到了证明。随后，利用不等式 $K(B_{\ell_\infty^n}) \leq K(B_{\ell_p^n})$ 处理了情形 $2 \leq p \leq \infty$，该不等式对所有 $1 \leq p \leq \infty$均成立。范围 $1 \leq p < 2$ 则需要运用对称张量积和局部 Banach 空间理论中的复杂方法。

正如我们所提到的，上述所有论文中的上估计与下估计之间的差距促使许多研究致力于计算 $K(B_{\ell_p^n})$ 在 $1 \leq p \leq \infty$下的精确渐近阶。在研究 Bohr 半径的过程中，复分析 [9, 29, 43], 、数论 [19, 20, 25],和算子代数 [35, 44] 等许多数学领域都得到了丰富发展。[31, 32]研究了布尔立方体上函数的 Bohr 半径。在 [36], 中，Galicer 等人确定了混合 (p, q)-Bohr 半径的精确渐近增长，即当变量个数 n 趋于无穷时，对每个 $1 \leq p \leq q \leq \infty$均成立。此外，许多作者也作出了贡献，推动了多维 Bohr 半径理论的发展（例如参见 [3–8, 11, 37, 39]）。

在 [30, 定理 4.1], 中，Defant 等人估计了有限维巴拿赫空间 X 的 $K(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的渐近行为，这与 $p = \infty$ 的情形（1.3）完全相同。此外，他们在 [30, 定理 4.2]中研究了无限维巴拿赫空间 X 的 $K(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的渐近行为。此外，他们还确定了算子的 Bohr 半径，主要针对 Banach 序列空间中的嵌入，以及某些特定类型的 Banach 序列空间上的有界算子

空间，例如具有余型的空间和凹巴拿赫空间（定义见预备知识部分）。所有这些结果构成了本文的研究动机。

本文主要致力于建立复巴拿赫空间之间特定算子 $\mathcal{V}$ 的 Bohr 半径$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 的上、下估计。一般而言，对于每个$\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$ 和 $1 \leq p \leq \infty$，我们得到了以下估计

$$\frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} \lesssim K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}.$$

特别地，对于有限维巴拿赫空间，我们得到了 Bohr 半径的以下精确渐近估计。

定理 1.1. 设 $\boldsymbol{\lambda} > 1$。假设 X 是有限维巴拿赫空间。那么存在常数 C、$B > 0$，使得以下不等式

$$C\frac{\boldsymbol{\lambda}-1}{2\boldsymbol{\lambda}-1}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}} \leq K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \leq B\boldsymbol{\lambda}^2\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}$$

对 $n \in \mathbb{N}$ 和每个 $1 \leq p \leq \infty$ 均成立。这里，B 表示一个普适常数，而常数 C 仅依赖于 X。

关于从 ℓ_1 空间到 ℓ_q、$1 \leq q < \infty$ 的一般有界线性算子的 Bohr 半径界，我们在以下定理中给出。

定理 1.2。设 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $1 \leq q < \infty$。假设 $\mathcal{V}: \ell_1 \to \ell_q$ 是任意有界算子。则有

$$\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\max\{2,q\}}} \lesssim K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}},$$

其中常数仅取决于 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\mathcal{V}$.

这里值得注意的是，上述定理的证明从根本上使用了过去十年中发展起来的技术和结果。特别是，这些结果的关键论证之一是对余型和凹性的多项式重述。事实上，上述结果可由以下更一般的结果推出（关于余型和凹性的定义，见第 2 节）：

定理 1.3。假设 $\mathcal{V}: X \to Y$ 是巴拿赫空间 X 和 Y 之间的有界算子，且满足 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$。则以下结论成立。

（1）假设 X 或 Y 具有余型 q，且满足 $2 \leq q \leq \infty$。则对于每个 n

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \gtrsim \begin{cases} 1, & \text{if } p \leq r, \\ \dfrac{1}{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}, & \text{if } r < p. \end{cases}$$

其中 $r = q/(q-1)$。

（2）设 $2 \le q \le \infty$。假设 Y 是一个 q-凹 Banach 格，并且存在一个 $r \in [1, q)$，使得算子 $\mathcal{V}$ 是 $(r, 1)$-可和的。那么，对于每个 n

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \gtrsim \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

我们通过一个系数映射由傅里叶变换给出的例子，说明这一关于幂级数系数映射的一般结果。注意，傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 是一个最初定义在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上并取值于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的线性算子。众所周知，第一个空间 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 经由 $\mathcal{F}$ 以范数 ≤ 1 有界地映射到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$。作为普朗歇尔定理的一个应用，第二个空间 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{F}$ 作用下映射到自身，且算子范数恰好等于 1。一般而言，傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 可自然延拓到空间 $L^s(\mathbb{R}^n)$ $1 \le s \le 2.$。根据豪斯多夫-杨不等式，该空间 $L^s, 1 \le s \le 2$ 经由 $\mathcal{F}$ 以算子范数 ≤ 1 有界地映射到对偶空间$L^{s'}(\mathbb{R}^n)$，其中 s, s' 是 H¨older 共轭。由于 L^s, $1 \le s \le 2$ 具有余型 2，我们得到如下结论：

定理 1.4。存在常数 $C > 0$ ，并且对任意 n，我们有

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{F}, \boldsymbol{\lambda}) \ge \begin{cases} C\dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{F}\|}{\boldsymbol{\lambda}}, & \text{if } p \le 2, \\ C\dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{F}\|}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}, & \text{if } 2 < p. \end{cases}$$

现在我们转向 Banach 空间的算术 Bohr 半径。Defant 等人首次在 [28] 中针对标量情形引入并研究了这一概念。算术 Bohr 半径的概念在研究多维 Bohr 半径的上界方面发挥着重要作用，同时也被 Defant 等人用于推导收敛域的上包含，作为主要技术工具 [29]。

定义 1.4。令 $\mathcal{H}(B_{\ell_p^n}, X)$ 表示定义在域 $B_{\ell_p^n}$ 上、取值于复巴拿赫空间 X 的所有全纯函数构成的集合。此外，设 $1 \le p \le \infty$、 $n \in \mathbb{N}$、 $\boldsymbol{\lambda} > 1$ 和 $\mathcal{V}: X \to Y$ 是复巴拿赫空间上的有界算子，且满足 $\|\mathcal{V}\| \le \boldsymbol{\lambda}$。则 $\boldsymbol{\lambda}$-算术 Bohr 半径的 $\mathcal{V}$ 定义为

$$A(\mathcal{H}(B_{\ell_p^n}, X), \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) := \sup\Bigg\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i,\ r \in \mathbb{R}^n_{\ge 0} : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha(f))\|_Y\ r^\alpha \le \boldsymbol{\lambda} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \big\|f(z)\big\|_X \text{ for all } f \in \mathcal{H}(B_{\ell_p^n}, X)\Bigg\},$$

其中 $\mathbb{R}^n_{\ge 0} = \{r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n : r_i \ge 0, 1 \le i \le n\}$。若 $\mathcal{H}(B_{\ell_p^n}, X)$ 是定义在$B_{\ell_p^n}$ 上并取值于复巴拿赫空间X 的所有有界全纯函数的集合，则设 $A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) := A(\mathcal{H}(B_{\ell_p^n}, X)$ $\mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$。若 $\mathcal{V}$是 X 上的恒等算子，则设$A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) := A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$。

最后，我们在下述定理中给出从 ℓ_1 空间到 ℓ_q, $1 \le q < \infty$的一般有界线性算子的算术 Bohr 半径界。

定理 1.5. 设 $1 \le p \le \infty$ 和 $1 \le q < \infty$。假设 $\mathcal{V}: \ell_1 \to \ell_q$ 是任意有界算子。则有

$$\frac{1}{n^{1/p}}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\max\{2,q\}}} \lesssim A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}},$$

其中的常数仅取决于 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $\mathcal{V}$.

注 1.5. 若在上述定理中考虑 $p = q = 2$，则有趣的是，我们得到了 $A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 的精确渐近值。

此外，对于一般的有界算子 $\mathcal{V}$，当 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$ 和 $1 \le p \le \infty$时，我们有如下估计

$$\frac{1}{n} \lesssim A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}},$$

其中的常数仅取决于 $\boldsymbol{\lambda}$和 $\mathcal{V}$。

本文结构如下：在第 2 节中，我们针对每个 $1 \le p \le \infty$，建立 Bohr 半径 $K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 和算术 Bohr 半径 $A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 的一些基本性质，以帮助证明主要结果。此外，在同一节中，我们建立了算术 Bohr 半径关于多维 Bohr 半径的一个下界。在第 3 节中，我们估计特定类型的巴拿赫空间 X 的 $K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 和 $A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的界。此外，我们还讨论这些估计的推论。

2. 基本定义与关键估计

令 $\mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)$ 表示定义在 ℓ_p^n空间上的所有 m-齐次多项式构成的空间。令 $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$，其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$。多项式 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)$ 可写成如下形式

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha,$$

其中 $\Lambda(m,n) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m\}$，且 $a_\alpha \in X$。或者，也可将多项式 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)$ 写成

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}},$$

其中 $\mathcal{J}(m,n) := \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) : 1 \le j_1 \le \cdots \le j_m \le n\}$，$z_{\mathbf{j}} := z_{j_1} \ldots z_{j_m}$，且 $c_{\mathbf{j}} \in X$。此时，元素 $(z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)}$ 或 $(z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ 被称为单项式。注意，系数 $c_{\mathbf{j}}$、a_α 通过关系式 $c_{\mathbf{j}} = a_\alpha$ 联系起来，其中 $\mathbf{j} = (\underbrace{1, \ldots}_{\alpha_1}, 1, \ldots, n, \underbrace{\ldots, n}_{\alpha_n})$。更确切地说，指标集 $\Lambda(m,n)$ 与 $\mathcal{J}(m,n)$ 之间存在一一对应关系。对于固定的 $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$，定义

$$[\mathbf{j}] = \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m : (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(m)}) = \mathbf{j} \text{ some permutation } \sigma \in S_m\}.$$

我们用 $|\mathbf{j}|$ 表示 $[\mathbf{j}]$ 中元素的数量。注意，如果索引 $\mathbf{j}$ 为 $(\underbrace{1, \ldots}_{\alpha_1}, 1, \ldots, n, \underbrace{\ldots, n}_{\alpha_n})$，那么

$$|\mathbf{j}| = \frac{m!}{\alpha!}.$$

给定集合 $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}(m,n)$，我们定义

$$\mathcal{J}^* = \{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, n) : \text{ there is } k \ge 1, \ (\mathbf{j}, k) \in \mathcal{J}\}.$$

上述记号由 Bayart 等人在 [9] 中引入。

此外，我们定义如下指标集的记号

$$\mathcal{M}(A,n)=\{1,\dots,n\}^A,$$

其中 $A\subset\mathbb{N}$ 和 $n\in\mathbb{N}$。因此，对于 m， $n\in\mathbb{N}$，我们总结为

$$\mathcal{M}(m,n)=\mathcal{M}(\{1,\dots,m\},n).$$

在 $\mathcal{M}(m,n)$ 中，当存在一个置换 $\sigma\in S_M$ 使得对所有 $1\leq k\leq M$ 都有 $i_{\sigma(k)}=j_k$ 时，$\mathrm{i}\sim\mathrm{j}$。显然，$\mathcal{M}(m,n)=\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)}[\mathrm{j}]$。容易观察到，对于每个 $\alpha\in\Lambda(m,n)$，$\mathrm{card}[\mathrm{j}_\alpha]=\frac{m!}{\alpha!}$，其中 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$。

巴拿赫空间 X 中元素 x 的绝对值定义为 $|x|=x\vee(-x)$。如果巴拿赫空间 X 是向量格，并且满足：对所有 x、$y\in X$，只要 $|x|\leq|y|$，就有 $\|x\|\leq\|y\|$，则称其为 Banach 格。若存在常数 $B>0$ 使得以下不等式成立，则称 Banach 格 X 为 q-凹的，$1\leq q<\infty$

$$\left(\sum_{k=1}^n\|x_k\|^q\right)^{1/q}\leq B\left\|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^q\right)^{1/q}\right\|,$$

对于任意选取的有限个 $x_1,\dots,x_n\in X$。

按惯例，这类最佳常数 B 记作 $M_q(X)$。设 $2\leq q\leq\infty$。那么，如果存在常数 $C>0$，使得下式成立，则称巴拿赫空间 X 具有余型 q：

$$\left(\sum_{k=1}^n\|x_k\|^q\right)^{1/q}\leq C\left(\int_0^1\left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)x_k\right\|^2dt\right)^{1/2},$$

对于任意选取的向量 $x_1,\dots,x_n\in X$，其中 r_k 表示 $[0,1]$上的第 k 个 Rademacher 函数。这类最佳常数 C 记作 $C_p(X)$。令

$$\mathrm{Cot}(X)=\max\{2\leq q\leq\infty|X\text{ has cotype }q\}.$$

容易看出，每个巴拿赫空间都具有余型 ∞；对于 $\mathrm{Cot}(X)=\infty$，我们记作$1/\mathrm{Cot}(X)=0$。当 $q\geq2$ 时，q-凹巴拿赫格具有余型 q。反过来，众所周知，每个余型 2 的巴拿赫格都是 2-凹的；对于 $q>2$，余型 q 的巴拿赫格对所有 $r>q$ 都是 r-凹的。关于这些主题的详细研究，请参阅 [41, 42]。

两个巴拿赫空间 X 和 Y 之间的一个有界线性算子称为（p,q）-求和的$1\leq p\,q<\infty$，如果存在一个常数 $C>0$ 使得下述

$$\left(\sum_{j=1}^n\|\mathcal{V}(x_j)\|_Y^p\right)^{1/p}\leq C\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{j=1}^n|x^*(x_j)|^q\right)^{1/q},\tag{2.1}$$

对任意有限多个 x_1、$\cdots$、$x_n\in X$均成立。这样的最佳常数 C照例记为 $\pi_{p,\,q}(\mathcal{V})$。当 $p=q$时，$\mathcal{V}$ 称为 p-求和的，并记为 $\pi_p(\mathcal{V})$。

定义 2.2. 设 $1\leq p\leq\infty$、$n\in\mathbb{N}$、$\boldsymbol{\lambda}>1$和 $\mathcal{V}\colon X\to Y$ 是复巴拿赫空间上的有界算子，且满足 $\|\mathcal{V}\|\leq\boldsymbol{\lambda}$。则 $K_m(B_{\ell_p^n},\mathcal{V},\boldsymbol{\lambda})$ 定义为满足下列不等式的所有 $r\geq0$ 的上确界

$$\sup_{z\in rB_{\ell_p^n}}\sum_{|\alpha|=m}\|\mathcal{V}(c_\alpha)z^\alpha\|_Y\leq\boldsymbol{\lambda}\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\big\|P(z)\big\|_X$$

对于每个 M 次齐次多项式 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)$，该不等式均成立，其中 $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$。

我们可以将上述定义改写为

$$K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) = \sup\left\{ r \geq 0 : \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y \leq \frac{\boldsymbol{\lambda}}{r^m} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \big\|P(z)\big\|_X \right. \\ \left. \text{for all } P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X) \right\}. \tag{2.3}$$

此外

$$K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{1/m} K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1)$$

and

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \max\{K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}/\|\mathcal{V}\|), K(B_{\ell_p^n}, Y, \boldsymbol{\lambda}/\|\mathcal{V}\|)\}.$$

以下引理的证明与 [30, 引理 3.2] 完全相同。因此，此处略去证明。

引理 2.1. 设 $\mathcal{V}: X \to Y$ 是复 Banach 空间 X与 Y之间的有界算子，且 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$。则

(1) $\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|} \inf_{m\in\mathbb{N}} K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \leq K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \leq \inf_{m\in\mathbb{N}} K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$.
(2) $\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|+1} \inf_{m\in\mathbb{N}} K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1) \leq K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$.

$\boldsymbol{\lambda}$- $\mathcal{V}$ 的 Bohr 半径为正这一性质由以下引理给出，该引理是 [30,命题 3.3] 的推广。

命题 2.2. 设 $1 \leq p \leq \infty$。假设算子 $\mathcal{V}: X \to Y$ 是复 Banach 空间 X 与 Y 之间的非零有界算子，且满足 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$。那么存在 $B > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq B \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}},$$

其中

$$B = \begin{cases} \max\left\{ \dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{(\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\| + 1)\|\mathcal{V}\|}, \dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|} \right\}, & \text{if } \|\mathcal{V}\| \geq 1, \\ \max\left\{ \dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\| + 1}, \dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|} \right\}, & \text{if } 0 < \|\mathcal{V}\| < 1. \end{cases}$$

证明。设 $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ 是一个 m-齐次多项式。于是，我们有

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} B_{\ell_p^n}} \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y &\leq \max_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha)\| \sup_{z \in \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} B_{\ell_p^n}} \sum_{|\alpha|=m} |z^\alpha| \\ &\leq \|\mathcal{V}\| \max_{|\alpha|=m} \|c_\alpha\| \sup_{z \in \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} B_{\ell_p^n}} (|z_1| + \cdots + |z_n|)^m \\ &\leq \|\mathcal{V}\| \max_{|\alpha|=m} \|c_\alpha\| \sup_{z \in \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} B_{\ell_p^n}} (|z_1|^p + \cdots + |z_n|^p)^{m/p} n^{m-\frac{m}{p}} \\ &\leq \boldsymbol{\lambda} \max_{|\alpha|=m} \|c_\alpha\| \leq \boldsymbol{\lambda} \|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)}, \end{aligned}$$

其中 $\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} =$ 上确界$_{z\in B_{\ell_p^n}} |P(z)|$。这意味着对于所有 m

$$K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}.$$

因此，根据引理 2.1(1)，我们有

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} \frac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}.$$

通过与上面类似的论证，对于每个 m-齐次多项式 $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ 我们得到

$$\sup_{z\in \frac{1}{\sqrt[m]{\|\mathcal{V}\|}n^{1-\frac{1}{p}}} B_{\ell_p^n}} \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y = \frac{1}{\|\mathcal{V}\|} \sup_{z\in \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} B_{\ell_p^n}} \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y \leq \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

因此，对于每个 m我们有

$$K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1) \geq \frac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{(\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\| + 1)\sqrt[m]{\|\mathcal{V}\|}} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}.$$

现在，由引理 2.1(2)可得

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1) \geq \frac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{(\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\| + 1)\|\mathcal{V}\|} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}, \quad \text{if } \|\mathcal{V}\| \geq 1$$

and

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1) \geq \frac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\| + 1} \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}, \quad \text{if } 0 < \|\mathcal{V}\| < 1.$$

至此，结果得证。 □

此外，对于恒等算子，命题 2.2 给出了 Banach 空间的 Bohr 半径的以下结果。

推论 2.3. 假设 X 是一个复巴拿赫空间，且 $\boldsymbol{\lambda} > 1$，那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \geq \frac{\boldsymbol{\lambda} - 1}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}.$$

这里有趣的是，对于 $\boldsymbol{\lambda} = 1$，我们得到平凡的下界 $K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \geq 0$。在下面的引理中，我们用 $K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 给出 $K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的下估计，其中 $1 \leq p \leq \infty$。

引理 2.4. 设 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $\boldsymbol{\lambda} > 1$。假设 X 是一个巴拿赫空间。那么对于每个$m \in \mathbb{N}$

$$B\frac{\boldsymbol{\lambda} - 1}{2\boldsymbol{\lambda} - 1}\sqrt{\frac{\log n}{n}} \leq K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \leq K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}),$$

其中 B 仅取决于 X。

证明。正如我们从 [30, 定理 4.1] 的证明中所知,

$$B\frac{\boldsymbol{\lambda}-1}{2\boldsymbol{\lambda}-1}\sqrt{\frac{\log n}{n}} \leq K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}), \text{ for every } m \in \mathbb{N}.$$

因此，为了完成证明，我们只需证明

$$K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \leq K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}).$$

对于每个 $z \in B_{\ell_p^n}$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m} \|c_\alpha z^\alpha\| &= \frac{1}{(K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}))^m} \sup_{w\in B_{\ell_\infty^n}} \sum_{|\alpha|=m} \|c_\alpha z^\alpha w^\alpha (K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}))^m\| \\ &\leq \frac{\boldsymbol{\lambda}}{(K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}))^m} \sup_{w\in B_{\ell_\infty^n}} \left\| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha w^\alpha \right\| \\ &\leq \frac{\boldsymbol{\lambda}}{(K_m(B_{\ell_\infty^n}, X, \boldsymbol{\lambda}))^m} \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \left\| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right\|.\end{aligned}$$

由此得证。 □

下一个结果 给出了 $A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 关于 $A\big(\bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)\ \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}$ 的估计).

命题 2.5. 假设 $\mathcal{V}\colon X \to Y$ 是复 Banach 空间之间的有界算子X，且 Y满足 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$。那么

(1) $\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|} A\big(\bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X), \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}\big) \leq A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \leq A\big(\bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X), \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}\big)$.
(2) $\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|+1} A\big(\bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X), \mathcal{V}, 1\big) \leq A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$.

证明. (1) 的右侧不等式很容易理解。因此，我们重点关注左侧不等式。考虑 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ 使得

$$\sum_{|\alpha|=m} \big\|\mathcal{V}(c_\alpha(P))\big\| r^\alpha \leq \boldsymbol{\lambda} \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \|P(z)\|$$

对所有 m和 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)$ 均成立。设 $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha$是定义在 $B_{\ell_p^n}$上且取值于 X 的全纯函数。那么我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha)\| \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|} r\right)^\alpha &= \|\mathcal{V}(c_0)\| + \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}\right)^m \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha)\| r^\alpha \\ &\leq \|\mathcal{V}\|\|c_0\| + \boldsymbol{\lambda} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}\right)^m \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \left\| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right\|.\end{aligned}$$

因此，由柯西-黎曼不等式，我们有

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \big\|\mathcal{V}(c_\alpha)\big\| \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda}-\|\mathcal{V}\|} r\right)^\alpha \leq \boldsymbol{\lambda} \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \|f(z)\|.$$

对于不等式 (2)，与上述过程类似，取 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ 使得

$$\sum_{|\alpha|=m} \big\|\mathcal{V}(c_\alpha(P))\big\| r^\alpha \leq \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \|P(z)\|$$

对于所有 m 和 $P \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n, X)$。于是我们得到

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha)\| \left(\frac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\| + 1} r\right)^\alpha \leq \boldsymbol{\lambda} \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \|f(z)\|.$$

证明至此完成。 □

在下述定理中，我们将给出 $\mathcal{V}$ 的多维 Bohr 半径与算术 Bohr 半径之间的重要关系（标量情形已在 [28, 引理 4.3]中讨论）。

引理 2.6. 设 $\mathcal{V}: X \to Y$ 是复巴拿赫空间中的一个有界算子，满足$\|\mathcal{V}\| \leq \boldsymbol{\lambda}$。那么对于任意的 $1 \leq \boldsymbol{\lambda} < \infty$、$1 \leq p \leq \infty$ 和 n，有

$$A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \frac{K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})}{n^{1/p}}.$$

证明. 经过简单计算可得

$$\sup_{z\in B_{\ell_p^n}} \|z\|_1 = n^{1-\frac{1}{p}}.$$

因此，对于 $0 < \epsilon < K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$，我们可以找到一个元素 $z_0 := (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in B_{\ell_p^n}$，使得 at

$$\|z_0\|_1 \geq n^{1-\frac{1}{p}} - \epsilon.$$

设 $t := K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) - \epsilon$，且 $r := t(|z_1^0|, \ldots, |z_n^0|)$。则

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha(f))\| r^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha(f)) t^{|\alpha|} z_0^\alpha\| \leq \Big\| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha(f)) z^\alpha\| \Big\|_{tB_{\ell_p^n}}.$$

由于 $t < K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$，我们有

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\mathcal{V}(c_\alpha(f))\| r^\alpha \leq \boldsymbol{\lambda} \|f\|_{B_{\ell_p^n}}.$$

这就得到

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r_i = \frac{K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) - \epsilon}{n} \|z_0\|_1 \geq \frac{K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) - \epsilon}{n} (n^{1-\frac{1}{p}} - \epsilon).$$

上述估计给出了所需的不等式。 □

由命题 2.2 和引理 2.6 可得以下结果。

命题 2.7. 设 $1 \leq p \leq \infty$。假设算子 $\mathcal{V}: X \to Y$ 是复 Banach 空间 X 与 Y 之间的非零有界算子，且满足 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$。那么存在 $B > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq B\frac{1}{n},$$

其中 B 的定义与命题 2.2 中相同。

现在，我们准备好证明主要结果了。

3. 多维 Bohr 半径主要结果的证明

本节从以下结果开始，该结果由 Bayart 等人给出 [9,引理 3.5]（另见 [27, 引理 19.11]和 [36]），它在证明定理 1.1 中起着关键作用。

引理 3.1. 设 $1 \le p \le \infty$ 和 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, \mathbb{C})$。那么，对于任意 $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, n)$,

$$\left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'} \right)^{1/p'} \le m e^{1+\frac{m-1}{p}} |\mathbf{j}|^{1/p} \|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)},$$

其中 $p' = p/(p-1)$ 且 $\|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)} = \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |P(z)|$。

*Pr*定理 1.1 的证明。我们从以下一个简单的观察开始证明 n

$$K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \le K(B_{\ell_p^n}, \mathbb{C}, \boldsymbol{\lambda}).$$

[28, 引理 4.3] 的证明表明

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathbb{C}, \boldsymbol{\lambda}) \le n^{1/p} A(B_{\ell_p^n}, \boldsymbol{\lambda}), \text{ for all } \boldsymbol{\lambda} \ge 1 \text{ and } n \in \mathbb{N},$$

这里， $A(B_{\ell_p^n}, \boldsymbol{\lambda})$称为算术 Bohr 半径。另一方面，由 [28, 定理 4.1] 可知，存在一个常数 $B > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$

$$A(B_{\ell_p^n}, \boldsymbol{\lambda}) \le B \boldsymbol{\lambda}^{\frac{2}{\log n}} \frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}}.$$

因此，对所有 $\boldsymbol{\lambda} \ge 1$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \le B \boldsymbol{\lambda}^{\frac{2}{\log n}} \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}.$$

现在，为了得到下界，由引理 2.1，只需证明

$$C(X) \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}} \le \inf_{m \in \mathbb{N}} K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}),$$

存在某个常数 $C(X) > 0$。为继续证明，我们固定 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n)$和$u \in \ell_p^n$。然后，借助引理 3.1，可得对任意 $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m, n)^*$

$$\left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k) \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'} \right)^{1/p'} = \left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'} \right)^{1/p'} \le m e^{1+\frac{m-1}{p}} |\mathbf{j}|^{1/p} \|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)}. \tag{3.1}$$

由于 X 是有限维的，存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\left(\sum_{j=1}^{h} \|x_j\|^s \right)^{1/s} \le C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{j=1}^{h} |x^*(x_j)|^s \right)^{1/s}, \tag{3.2}$$

对每个 $s \ge 1$ 和每个 $x_1 \dots x_h \in X$ 都成立。事实上，有限维巴拿赫空间 X 上的恒等算子 I 是 1-可和的，因此对于满足 $\pi_s(I) \le \pi_1(I)$ 的每个 $s \ge 1$，算子 I 都是 s-可和的，参见例如 [33, 定理 10.4]。

容易看出

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{\mathbf{j}}(P)\||u_{\mathbf{j}}|=\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)^*}\left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k)\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{(\mathbf{j},k)}(P)\||u_{\mathbf{j}}||u_k|\right)$$

现在应用 H¨older 不等式（两次），以及 (3.1) 和 (3.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{\mathbf{j}}(P)\|\ |u_{\mathbf{j}}|&\le\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)^*}|u_{\mathbf{j}}|\left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k)\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{(\mathbf{j},k)}(P)\|^{p'}\right)^{1/p'}\Big(\sum_k|u_k|^p\Big)^{1/p}\\&\le\pi_1(I)\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)^*}|u_{\mathbf{j}}|\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k)\in\mathcal{J}(m,n)}^{n}|x^*(c_{(\mathbf{j},k))}(P))|^{p'}\right)^{1/p'}\|u\|_p\\&\le\pi_1(I)me^{1+\frac{m-1}{p}}\|u\|_p\sup_{x^*\in B_{X^*}}\|x^*(P)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)^*}|\mathbf{j}|^{1/p}|u_{\mathbf{j}}|\\&\le\pi_1(I)me^{1+\frac{m-1}{p}}\|u\|_p\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|P(z)\|\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)^*}|\mathbf{j}|\ |u_{\mathbf{j}}|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)^*}1\right)^{1/p'}\\&\le\pi_1(I)me^{1+\frac{m-1}{p}}\|u\|_p\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|P(z)\|\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)}|\mathbf{j}|\ |u_{\mathbf{j}}|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)}1\right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

由于

$$\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)}|\mathbf{j}|\ |u_{\mathbf{j}}|^p\right)^{1/p}=\|u\|_p^{m-1},$$

因此我们得到

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{\mathbf{j}}(P)\|\ |u_{\mathbf{j}}|\le\pi_1(I)me^{1+\frac{m-1}{p}}\|u\|_p^m\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|P(z)\|\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)}1\right)^{1/p'}.$$

如果利用指标集 $\mathcal{J}(m-1,n)$ 中元素的数量为这一事实

$$\frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!},$$

于是我们得到

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{\mathbf{j}}(P)\|\ |u_{\mathbf{j}}|\le\pi_1(I)\left(\frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!}\right)^{1/p'}me^{1+\frac{m-1}{p}}\|u\|_p^m\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|P(z)\|.$$

不难观察到

$$\frac{(n+m-2)!}{(n-1)!(m-1)!}\le\frac{(n+m)^{m-1}}{(m-1)!}\le\frac{e^m}{m^{m-1}}(n+m)^{m-1}=e^m\left(1+\frac{n}{m}\right)^{m-1}.$$

由此可得

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\|c_{\mathbf{j}}(P)\|\ |u_{\mathbf{j}}|\le\pi_1(I)\ m\ \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{p'}}e^{\left(m+1-\frac{1}{p}\right)}\ \|u\|_p^m\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|P(z)\|.$$

通过简单观察可得

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq 2^{\frac{m-1}{m}} \max\left\{1, \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right\} \leq 2\max\left\{1, \frac{m^{1/m}n}{mn^{1/m}}\right\}.$$

注意到 $x \to xn^{1/x}$ 在 $x = \log n$ 之前递减，此后递增。因此我们得到

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq 2\frac{n}{\log n}.$$

因此，由（2.3）可得，

$$K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \geq \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{m\ \pi_1(I)}\right)^{1/m} \frac{1}{2^{\frac{1}{p'}}} \frac{1}{e^{\left(1+\frac{1}{mp'}\right)}} \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

于是，存在一个常数 $C(X)$，仅取决于 X，使得

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \geq C(X)\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

最后，利用引理 2.4，我们得到

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} K_m(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \geq C(X)\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}.$$

证明完毕。 □

容易看出，对于每个 $1 \leq p \leq \infty$，上述 $K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的渐近式与 (1.3) 中的完全相同。要获得 $A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的精确渐近估计，其证明结合定理 1.1 和引理 2.6，完全同 [28, 定理 4.1]（另见 [24, 备注2] 和 [27, 定理 19.13]）。

定理 3.2。设 $1 \leq p \leq \infty$。假设 X 是一个有限维复巴拿赫空间。则存在常数 C、$B > 0$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$

$$C\frac{\boldsymbol{\lambda}-1}{2\boldsymbol{\lambda}-1}\frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}} \leq A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \leq B\boldsymbol{\lambda}^2\frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}},$$

其中，B 是一个普适常数，而 C 仅依赖于 X。

现在我们关注无限维情形。在这种情况下，我们将看到，Bohr 半径下界的表达式中没有对数项。推论 2.3 已经给出了当 X 是不具有有限余型的巴拿赫空间时，$K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的下界。接下来在以下结果中，我们假设 X 具有余型 q。给定一个 m- 齐次多项式 P: $\mathbb{C}^n \to X$, $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$，我们将与 P 相关联的唯一对称m-线性映射记为 A: $\mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to X$。在 [17, 定理 3.2], 中，Bombal 给出了以下不等式

$$\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \|A(e_{i_1}, \cdots, e_{i_m})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(X)^m \|A\|_{B_{\ell_p^n}}, \tag{3.3}$$

我们将利用该不等式作为工具来证明以下定理。对于 $p=\infty$ 的情形， [30, 定理 4.2] 中已经得到了以下结果。

定理3.3. 设 $1\le p\le\infty$。假设 X 是一个余型为 q 且满足 $2\le q\le\infty$的无限维复Banach空间。那么我们有

$$K(B_{\ell_p^n},X,\boldsymbol{\lambda})\le\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{p}}}, & \text{if } p\le Cot(X),\\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{Cot(X)}}}, & \text{if } Cot(X)<p,\end{cases}$$

and

$$K(B_{\ell_p^n},X,\boldsymbol{\lambda})\ge\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\lambda}-1}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\dfrac{1}{e}, & \text{if } p\le r,\\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}-1}{\boldsymbol{\lambda}eC_q(X)}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}, & \text{if } r<p,\end{cases}$$

其中 $r=\frac{q}{q-1}$。

证明. 如我们从 [33, 定理14.5] 所知，对每个 $\epsilon>0$，存在 $x_1\dots x_n\in X$，使得对所有 $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$，我们有

$$\frac{1}{1+\epsilon}\|z\|_\infty\le\left\|\sum_{k=1}^n z_kx_k\right\|\le\|z\|_q.$$

特别地，取 $z=e_k$，我们有 $1\le(1+\epsilon)\|x_k\|.$。因此，对 $\epsilon>0$，存在 $x_1\dots x_n\in X$使得

$$\frac{n}{1+\epsilon}\le\sum_{k=1}^n\|x_k\|.$$

利用 $K_1(B_{\ell_p^n},X,1)$ 的定义，我们得到

$$\sum_{k=1}^n\|x_k\|\frac{1}{n^{1/p}}\le\frac{1}{K_1(B_{\ell_p^n},X,1)}\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\left\|\sum_{k=1}^n z_kx_k\right\|\le\frac{1}{K_1(B_{\ell_p^n},X,1)}\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|z\|'_{\mathrm{Cot}(X)}$$

（这里我们采用约定 $n^{\frac{1}{\infty}}=1$）。

现在，若 $p\le\mathrm{Cot}(X)$，则 $\sup_{z\in B_{\ell_p^n}}\|z\|_{\mathrm{Cot}(X)}\le1$。但若 $\mathrm{Cot}(X)<p$，则有

$$\|z\|_{\mathrm{Cot}(X)}\le\|z\|_p n^{\frac{1}{\mathrm{Cot}(X)}-\frac{1}{p}}.$$

因此我们得到

$$K_1(B_{\ell_p^n},X,1)\le\begin{cases}\dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}, & \text{if } p\le\mathrm{Cot}(X),\\ \dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{\mathrm{Cot}(X)}}}, & \text{if } \mathrm{Cot}(X)<p.\end{cases}$$

由一个简单的观察可得

$$K(B_{\ell_p^n},X,\boldsymbol{\lambda})\le K_1(B_{\ell_p^n},X,\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}K_1(B_{\ell_p^n},X,1).$$

这就完成了证明的一半。

对于证明的下一半，我们考虑满足 $1/r+1/q=1$ 的 $r>1$。利用 H¨older 不等式，对于所有 $z\in\mathbb{C}^n$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m}\|c_\alpha z^\alpha\| &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\operatorname{card}[\mathbf{j}]\|A(e_{j_1},\cdots,e_{j_m})\||z_{j_1}\cdots z_{j_m}|\\ &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}\|A(e_{i_1},\cdots,e_{i_M})\||z_{i_1}\cdots z_{i_m}|\\ &\le \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}\|A(e_{i_1},\cdots,e_{i_M})\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}|z_{i_1}\cdots z_{i_m}|^r\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

利用方程（3.3），我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m}\|c_\alpha z^\alpha\| &\le C_q(X)^m\|A\|_{B_{\ell_p^n}}\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}|z_{i_1}\cdots z_{i_m}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= C_q(X)^m\|A\|_{B_{\ell_p^n}}(|z_1|^r+\cdots+|z_n|^r)^{\frac{m}{r}}.\end{aligned}$$

如我们所知，$\|z\|_r\le\|z\|_p$ 对于 $p\le r$ 则对于所有 $z\in {}_{C_q}{}^{1}{}_{\overline{(X)}}B_{\ell_p^n}$

$$\sum_{|\alpha|=m}\|c_\alpha z^\alpha\|\le\|A\|_{B_{\ell_p^n}}\le\frac{m^m}{m!}\|P\|_{B_{\ell_p^n}}\le e^m\|P\|_{B_{\ell_p^n}}.$$

如果 $r<p$，则有

$$\|z\|_r\le n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|z\|_p.$$

因此，

$$\sum_{|\alpha|=m}\|c_\alpha z^\alpha\|\le n^{\frac{m}{r}-\frac{m}{p}}C_q(X)^m\|A\|_{B_{\ell_p^n}}\le e^m n^{\frac{m}{r}-\frac{m}{p}}C_q(X)^m\|P\|_{B_{\ell_p^n}}.$$

上述论证表明，对于每个 m,

$$K_m(B_{\ell_p^n},X,1)\ge\begin{cases}\dfrac{1}{e}, & \text{if } p\le r,\\ \dfrac{1}{en^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}C_q(X)}, & \text{if } r<p.\end{cases}$$

应用引理 2.1 (2) 后，我们最终得到

$$K(B_{\ell_p^n},X,\boldsymbol{\lambda})\ge\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{\lambda}-1}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\dfrac{1}{e}, & \text{if } p\le r,\\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}-1}{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\dfrac{1}{en^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}C_q(X)}, & \text{if } r<p,\end{cases}$$

对每个 $n>1$ 以及每个 $\boldsymbol{\lambda}>1$ 都成立。结果得证。 □

下面的结果给出了余型为 q 的无限维复Banach空间在 $2\le q\le\infty$ 下的算术 Bohr 半径估计。

定理 3.4. 设 $1 \le p \le \infty$。假设 X 是余型为 q 且满足 $2 \le q \le \infty$ 的无限维复Banach空间。则有

$$A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \le \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{n}, & \text{if } p \le Cot(X), \\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{Cot(X)}+\frac{1}{p}}}, & \text{if } Cot(X) < p, \end{cases}$$

and

$$A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \ge \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\lambda}-1}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dfrac{1}{en^{\frac{1}{p}}}, & \text{if } p \le r, \\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}-1}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dfrac{1}{en^{\frac{1}{r}} C_q(X)}, & \text{if } r < p, \end{cases}$$

其中 $r = \frac{q}{q-1}$。

证明。由引理 2.6 和定理3.3可得 $A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的下界。对于上界，我们使用定理3.3中的以下事实：对于 $\epsilon > 0$，存在 $x_1 \dots x_n \in X$，使得

$$\frac{1}{(1+\epsilon)} \le \|x_k\|, \ 1 \le k \le n.$$

设 $s := (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n_{\ge 0}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n} \|c_k(P)\| s_k \le \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \big\|P(z)\big\|, \ \text{ for every } P \in \mathcal{P}({}^1\ell_p^n, X)$$

其中 X 是一个余型为 q 且满足 $2 \le q \le \infty$ 的无限维复Banach空间。于是有

$$\frac{n}{(1+\epsilon)} \frac{\sum_{k=1}^n s_k}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| s_k \le \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \left\| \sum_{k=1}^{n} z_k x_k \right\| \le \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \|z\|_{\mathrm{Cot}(X)}.$$

因此我们得到

$$A(\mathcal{P}({}^1\ell_p^n, X), X, 1) \le \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{if } p \le \mathrm{Cot}(X), \\ \dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{\mathrm{Cot}(X)}+\frac{1}{p}}}, & \text{if } \mathrm{Cot}(X) < p. \end{cases}$$

如命题 2.5 所知

$$A(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}) \le A(\mathcal{P}({}^1\ell_p^n, X), X, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} A(\mathcal{P}({}^1\ell_p^n, X), X, 1).$$

证明至此完成。 □

注记 3.4。另一种方法是，定理 3.4 和引理 2.6 一起给出了定理3.3中 $K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda})$ 的上界。

继续之前，我们需要以下结果，它是 [30, 定理 5.3] 的直接推论：给定 $P \in \mathcal{P}({}^m\ell_p^n, X)$ 和 $z \in B_{\ell_p^n}$，将结果 [30, 定理 5.3] 应用于多项式 $Q := P(D_z)$，其中 $D_z : \ell_\infty^n \to \ell_p^n$ 是一个对角算子。因此我们得到以下结果。

定理 3.5. 设 $2 \leq q < \infty$。假设 Y 是一个 q-凹 Banach 格，且算子$\mathcal{V}$: $X \to Y$ 是一个 $(r, 1)$-求和算子，其中 $r \in [1, q]$。令

$$\rho := \frac{qrm}{q + (m-1)r}.$$

那么存在一个常数 $C > 0$ ，使得以下结论成立

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \leq C^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)},$$

对于每个多项式 $P \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n, X)$，其形式为 $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$。

值得一提的是，[30, 定理 5.3] 对余型为 q 的巴拿赫空间也成立（参见 [21]）。因此，定理 3.5 对余型为 q 的巴拿赫空间也成立。现在我们将给出定理 1.3 的以下显式版本的证明；该版本已在 [30, 定理 5.4] 中针对情形 $p = \infty$ 进行讨论。

定理 3.6。设算子 $\mathcal{V}$: $X \to Y$ 是巴拿赫空间 X 与 Y之间的有界算子。那么以下结论成立。

(1) 假设 X 或 Y的余型为 q，其中 $2 \leq q \leq \infty$。那么存在一个常数 $C > 0$，使得以下不等式成立

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \begin{cases} C\dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda}}, & \text{if } p \leq r, \\ C\dfrac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \dfrac{1}{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}, & \text{if } r < p, \end{cases}$$

对每个 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$ 以及每个 n，其中 $r = q/(q-1)$。

(2) 假设 Y 是一个 q-凹 Banach 格，其中 $2 \leq q \leq \infty$ ，并且存在一个$r \in [1, q)$，使得算子 $\mathcal{V}$是 $(r, 1)$-求和的。那么存在一个常数 $C > 0$，使得下述结论成立

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq C\frac{\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|}{2\boldsymbol{\lambda} - \|\mathcal{V}\|} \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1-\frac{1}{q}},$$

对每个 $\|\mathcal{V}\| < \boldsymbol{\lambda}$ 以及每个 n。

证明。借助以下观察，我们可以轻易得到 (1)

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \max\{K(B_{\ell_p^n}, X, \boldsymbol{\lambda}/\|\mathcal{V}\|), K(B_{\ell_p^n}, Y, \boldsymbol{\lambda}/\|\mathcal{V}\|)\}$$

而定理3.3给出了所需结果。

为证明 (2)，我们使用定理 3.5 和 H¨older 不等式，得到对于每个多项式 $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n, X)$

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y &\leq \left(\sum_{|\alpha|=m} 1 \right)^{\frac{(q-1)mr-q+r}{qmr}} \times \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{V}(c_\alpha) z^\alpha\|_Y^{\frac{qmr}{q+(m-1)r}} \right)^{\frac{q+(m-1)r}{qmr}} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|=m} 1 \right)^{\frac{(q-1)mr-q+r}{qmr}} C^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}. \end{aligned}$$

因此，根据以下事实

$$K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{1/m} K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, 1),$$

我们得到

$$K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \geq E\boldsymbol{\lambda}^{1/m} \left(1 + \frac{n}{m}\right)^{-\frac{(q-1)mr-q+r}{qmr}}.$$

因此，最终我们有

$$\inf_m \left\{ K_m(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \right\} \geq C \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{q}}.$$

最后，引理 2.1 (1) 给出了结论。 □

注 3.5。在定理 3.6 的给定条件下，算术 Bohr 半径 $A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda})$ 的下界可直接利用引理 2.6 得到。

下面的结果讨论嵌入的博尔半径。我们指出，特殊选择 $p = \infty$ 可将该结果转化为定理 1.4] [30, 。

定理 3.7。设 $1 \leq r < q < \infty$。则有

$$K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \begin{cases} \left(\dfrac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}, & \text{if } 1 \leq r \leq 2 \\ \dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}}, & \text{if } p \leq r \text{ and } 2 \leq r < \infty \\ \dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{r}}}, & \text{if } r < p \text{ and } 2 \leq r < \infty. \end{cases}$$

and

$$K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \gtrsim \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\log n}{n}}, & \text{if } 1 \leq r \leq 2 \\ \dfrac{1}{e}, & \text{if } p \leq r \text{ and } 2 \leq r < \infty \\ \dfrac{1}{n^{1-\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}}, & \text{if } r < p \text{ and } 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

其中常数仅依赖于 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 r, q。

证明。情形 $1 \leq r \leq 2$ 可利用以下观察和定理 1.1 来处理

$$K(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \leq K(B_{\ell_p^n}, \mathbb{C}, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}.$$

现在，对于情形 $2 \leq r < \infty$，我们建立了 $K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda})$ 的上界。根据 $K_1(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, 1)$ 的定义，对于每个 n,

$$n^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|_q \, \frac{1}{n^{1/p}} \leq \frac{1}{K_1(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, 1)} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \left\| \sum_{k=1}^{n} z_k e_k \right\|_r$$
$$\leq \frac{1}{K_1(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, 1)} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \|z\|_r.$$

现在，我们得到

$$K_1(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \leq \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{p}}}, & \text{if } p \leq r, \\ \dfrac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{r}}}, & \text{if } r < p. \end{cases}$$

事实

$$K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \leq K_1(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda})$$

由此得出下界。

我们利用以下三种不同情形来确定下界：

情形 $1 \leq r < q \leq 2$。众所周知，根据 Bennett-Carl定理 $[10, 22]$ ，嵌入 $\ell_r \hookrightarrow \ell_q$ 是 $(s,1)$-可求和的，其中

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r} - \max\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{2}\right\}.$$

由于 ℓ_q 是 2- 凹的，下估计由定理 3.6 得出，因此我们得到

$$K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \gtrsim \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

上述关系对 $1 \leq r < 2 \leq q$ 也成立。由于 $K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \geq K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_2, \boldsymbol{\lambda})$。

情形 $2 \leq r$。注意 $K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \geq K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_r, \boldsymbol{\lambda})$。于是定理3.3得出该结果。□

为证明定理 1.2，我们需要 Kwapie´n $[40]$ 的结果：该结果表明，每个算子 $\mathcal{V}: \ell_1 \to \ell_q$ 都是 $(r, 1)$-可和的，其中

$$\frac{1}{r} = 1 - \left|\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right|.$$

定理 1.2 的证明。上界可由定理 3.7 的证明得到。对于下界，我们使用定理 3.6、Kwapie´n 定理 $[40]$, 以及众所周知的 ℓ_q 是 $\max\{2, q\}$-凹的这一事实。□

现在我们估计嵌入的算术 Bohr 半径的上界和下界。

定理 3.8。设 $1 \leq r < q < \infty$。则有

$$A(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \begin{cases} \frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}}, & \text{if } 1 \leq r \leq 2 \\ \frac{1}{n}, & \text{if } p \leq r \text{ and } 2 \leq r < \infty \\ \frac{1}{n^{1-\frac{1}{r}+\frac{1}{p}}}, & \text{if } r < p \text{ and } 2 \leq r < \infty. \end{cases}$$

and

$$A(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \gtrsim \begin{cases} \frac{\sqrt{\log n}}{n^{1+\frac{1}{p}}}, & \text{if } 1 \leq r \leq 2 \\ \frac{1}{en^{\frac{1}{p}}}, & \text{if } p \leq r \text{ and } 2 \leq r < \infty \\ \frac{1}{n^{1-\frac{1}{r}}}, & \text{if } r < p \text{ and } 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

其中常数仅取决于 $\boldsymbol{\lambda}$、r、q。

证明。$A(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda})$ 的下界由引理 2.6 和定理 3.7 得出。对于上界，$1 \leq r \leq 2$ 的情形可以利用以下观察和定理 1.1 处理

$$A(B_{\ell_p^n}, \mathcal{V}, \boldsymbol{\lambda}) \leq A(B_{\ell_p^n}, \mathbb{C}, \boldsymbol{\lambda}) \lesssim \frac{\left(\log n\right)^{1-(1/\min\{p,2\})}}{n^{\frac{1}{2}+(1/\max\{p,2\})}}.$$

现在，对于 $2 \leq r < \infty$ 的情形，我们建立 $A(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda})$ 的上界。令 $s := (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$，使得

$$\sum_{k=1}^{n} \|\mathcal{V}(c_k(P))\|_q \, s_k \leq \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \left\|P(z)\right\|_r, \quad \text{for every } P \in \mathcal{P}(^1\ell_p^n, \ell_r^n)$$

其中 $\mathcal{V}: \ell_r \hookrightarrow \ell_q$，且 $2 \leq r \leq \infty$。于是我们有

$$\sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n} s_k \|e_k\|_q \leq \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \left\| \sum_{k=1}^{n} z_k e_k \right\|_r \leq \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \|z\|_r.$$

现在，我们得到

$$A(\mathcal{P}(^1\ell_p^n, \ell_r^n), \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \leq \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{p}}}, & \text{if } p \leq r, \\ \frac{\boldsymbol{\lambda}}{n^{1-\frac{1}{r}}}, & \text{if } r < p. \end{cases}$$

由于

$$A(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}) \leq A(\mathcal{P}(^1\ell_p^n, \ell_r^n), \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda}).$$

因此我们得到下界。 □

注3.6. 我们可以将定理 3.8 和引理 2.6 结合起来作为工具，求出定理 3.7 中 $K(B_{\ell_p^n}, \ell_r \hookrightarrow \ell_q, \boldsymbol{\lambda})$ 的上界估计。

定理 1.5 的证明。下界由定理 1.2 和引理 2.6 得出，上界则来自定理 3.8。□

致谢。第一作者的工作得到印度布巴内斯瓦尔 NISER 的博士后研究员资助。他感谢布巴内斯瓦尔国家科学教育与研究院提供了优良的研究条件。第二作者感谢研究基金（DST/INSPIRE/04/2019/001914）的资助。

References

[1] Y. Abu-Muhanna, R. M. Ali, and S. Ponnusamy, 关于 Bohr 不等式, 载于《逼近理论与应用复分析进展》（N. K. Govil 等编），Springer优化及其应用丛书，117（2016），265–295。[2] L. Aizenberg, 幂级数中 Bohr 定理的多维类比, 美国数学会会刊 128(4)（2000），1147–1155。[3] L. Aizenberg, Carath´eodory 不等式的推广及多维幂级数的 Bohr 半径, 复分析选题，Oper. Theory Adv. Appl.，第 158 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，（2005），第 87–94 页，DOI 10.1007/3-7643-7340-7 6。[4] L. Aizenberg, 幂级数 Bohr 半径相关结果的推广 , Studia Math. 180 （ 2007 ），第 2 期，161–168，DOI 10.4064/sm180-2-5。[5] L. Aizenberg, A. Aytuna, and P. Djakov, 关于 Bohr 现象的一种抽象方法, 美国数学会会刊 128（2000），第 9 期，2611–2619，DOI 10.1090/S0002-9939-00-05270-9。[6] V. Arora, 复 Banach 空间中具有间隙级数的全纯函数与调和函数的 Bohr 现象, Comp. Vari. Ell. Equ.,（2022）。DOI:10.1080/17476933.2022.2146106[7]V. Arora and S. Kumar, 复巴拿赫空间中的 Bohr 现象, https://arxiv.org/abs/2205.07111[8] F. Bayart, Dirichlet 级数的 Hardy 空间及其复合算子, Monatsh. Math. 136(3)（2002），203–236。[9] F. Bayart, A. Defant, and S. Schl¨uters, ℓ_r上全纯函数的单项式收敛, Journal d'Analyse Math´ematique, 138(1)（2019），107–134。[10] G. Bennett, ℓ^p 空间之间的嵌入映射, J. Funct. Anal. 13，20–27（1973）。[11] L. Bernal-Gonz´alez, H.J. Cabana, D. Garc´ıa, M. Maestre, G.A. Mu˜noz-Fern´andez, and J.B. Seoane- Sep´ulveda, 估计 n维Bohr半径的新方法, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, F´ısicas y Naturales. Serie A. Matem´aticas, 115（2021），文章编号：44。[12] O. Blasco, 巴拿赫空间的 Bohr 半径, Oper. Theory Adv. Appl. 201（2009），59–64。[13] H.P. Boas, 主化级数, J. Korean Math. Soc. 37（2000），321–337。[14] H.P. Boas and D. Khavinson, 多个变量中的 Bohr 幂级数定理, Proc. Am. Math. Soc. 125(10)（1997），2975–2979。.[15] H. Bohr, 关于无穷多个变量的幂级数在 Dirichlet 级数理论中的意义, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu G¨ottingen，Mathematisch- Physikalische Klasse，（1913），441–488。[16] H. Bohr, 一个关于幂级数的定理, Proc. Lond. Math. Soc. 13(2)（1914），1–5。[17] F. Bombal, Pe´rez-Garci´a and I. Villanueva, Grothendieck定理的多线性扩张, Q. J. Math. 55（2004），441–450。[18] E. Bombieri, 关于 H. Bohr 和 G. Ricci 的幂级数主化函数定理, Boll. Un. Mat. Ital., 17 (3)(1962), 276–282。[19] E. Bombieri and J. Bourgain, 关于 Bohr 不等式的一则注记, 《国际数学研究通知》80（2004），4307–4330。[20] D. Carando, A. Defant, D. Garc´ıa, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris, Dirichlet-Bohr半径, Acta Arith. 171（2015），第 1 期，23–37。[21] D. Carando, F. Marceca, andP. Sevilla-Peris, 向量值 Dirichlet 级数的 Hausdorff–Young型不等式, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (8)（2020），5627-5652。

[22] B. Carl, 从 ℓ_u 到 ℓ_v 的绝对-(p, 1)-可和恒等算子, Math. Nachr. 63，353–360（1974）。[23] A. Defant and L. Frerick, 多维 Bohr 半径的对数下界, Isr. J. Math. 152（2006），17–28。[24] A. Defant and L. Frerick, ℓ_p^n单位球的 Bohr 半径, J. Reine Angew. Math. 660（2011），131–147。[25] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerd´a, M. Ounaies and K. Seip, 齐次多项式的 Bohnenblust–Hille 不等式具有超收缩性, Ann. Math. 174（2011），1–13。[26] A. Defant, D. Garc´ıa and M. Maestre, Bohr 幂级数定理与局部 Banach 空间理论, J. Reine Angew. Math. 557（2003），173–197。[27] A. Defant, D. Garc´ıa, M. Maestre, and P. Sevilla-Peris, 高维中的 Dirichlet 级数与全纯函数, Cambridge University Press, 37（2019）。[28] A. Defant, M. Maestre, and C. Prengel, 算术 Bohr 半径, Quart. J. Math. 59(2)（2008），189–205。[29] A. Defant, M. Maestre, and C. Prengel, 无穷多个变量中全纯函数单项式展开的收敛域, J. Reine Angew. Math. 634（2009），13–49。[30] A. Defant, M. Maestre, and U. Schwarting, 向量值全纯函数的 Bohr 半径, Adv. Math. 231（2012），第 5 期，2837–2857。[31] A. Defant, M. Mastylo, and A. P´erez, 布尔立方体上函数的 Bohr 现象, J. Funct. Anal. 275（2018），第 11 期，3115–3147,[32] A. Defant, M. Mastylo, and A. P´erez, 关于布尔立方体上函数的傅里叶谱, Math. Ann. 374（2019），第 1-2 期，653–680[33] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, 绝对可和算子, 载于：Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge,（1995）。[34] S. Dineen and R. M. Timoney, 绝对基、张量积与 Bohr 定理, Studia Math. 94（1989），227–234。[35] P. G. Dixon, 满足非单位 von Neumann 不等式的 Banach 代数, Bull. Lond. Math. Soc. 27（1995），359–362。[36] D. Galicer, M. Mansilla, and S. Muro, 多个变量中的混合 Bohr 半径, Trans. Amer. Math. Soc. 373（2020），777–796。[37] H. Hamada, T. Honda, and G. Kohr, 取值于齐次球中的全纯映射的 Bohr 定理, Israel J. Math. 173（2009），177–187，DOI 10.1007/s11856-009-0087-9。[38] J. P. Kahane, 函数随机级数, 第 2 版，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第 5 卷，Cambridge University Press, Cambridge,（1985）。[39] S. Kumar and R. Manna, 多维 Bohr 半径再探, J. Math. Anal. Appl. 523（2023），第 1 期，论文编号 127023。[40] S. Kwapie´n, 关于 p、q空间中(ℓ_p)-绝对可和算子的若干注记, Stud. Math. 29（1968），327–337。[41] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, 经典 Banach 空间 I：序列空间, 载于：Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete，第 92 卷，Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977，第 XIII 页。[42] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, 经典 Banach 空间 II：函数空间, 载于：Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete，第 97 卷，Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979，第 X 页。[43] M. S. Liu and S. Ponnusamy, 精细 Bohr 不等式的多维类比, 美国数学会会刊 149（2021），2133–2146。[44] V. I. Paulsen, G. Popescu, and D. Singh, 关于 Bohr 不等式, Proc. London Math. Soc. 85 (3)（2002），第 2 期，493–512。

Shankey Kumar, School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research, Bhubaneswar, An OCC of Homi Bhabha National Institute, Jatni 752050,India

电子邮箱地址：shankeygarg93@gmail.com

Ramesh Manna, School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research, Bhubaneswar, An OCC of Homi Bhabha National Institute, Jatni 752050,India

电子邮箱地址：rameshmanna@niser.ac.in