arXiv:2303.17497v1 [math.AG] 27 Mar 2023

Toric D 模叠的对角线消解

REGINALD ANDERSON

1. Abstract

Beilinson 为复射影空间给出了对角线的一个消解，Bayer-Popescu-Sturmfels 将其推广到他们称为幺模托里克簇的情形。本文将 Bayer-Popescu-Sturmfels 的对角线消解推广到光滑托里克簇，以及由有限阿贝尔群作用于光滑托里克簇所得的全局商，并将其视为环面 Deligne-Mumford 叠。

2. Introduction

本文研究光滑射影簇 X 上凝聚层 $D^b_{Coh}(X)$ 的有界导出范畴。导出范畴 $D^b_{Coh}(X)$ 构成同调镜像对称（HMS）B 侧的一部分。Beilinson 对角线的消解 [Bei78] 对于理解 $D^b(\mathbf{P}^n)$ 至关重要。由于 $\mathbf{P}^n$ 是环面簇，我们可以探讨如何将 Beilinson 对角线的消解推广到任意环面簇。然而，这一范围过于宽泛，因此我们将研究范围限制在单纯形托里克簇。Bayer-Popescu-Sturmfels 将 Beilinson 对角线的消解推广到了幺模环面簇。我们将 Bayer-Popescu-Sturmfels 的对角线消解推广到环面 D-M 叠 $\mathcal{X}(\Sigma') = \left[X_\Sigma/\mu\right]$，该叠与一个光滑环面簇 X_Σ 被有限阿贝尔群 μ作用所得的整体商相关联。通过在 X_Σ 光滑且非幺模的情形下对幺模环面簇的消解 $\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{H}_L/L}$ 进行变形，我们可以在对应于参数 ϵ 的族中消解对角线，其中参数取自 X_Σ 的有效锥。由于光滑环面簇作为簇可由仿射空间 $\mathbf{A}^m$ 构成的开覆盖覆盖，$\left[X_\Sigma/\mu\right]$ 的局部对角对象可以粘合起来，得到 $\mathcal{X}(\Sigma')$ 的全局对角对象。

2.1. 结果。 本文着重讨论以下两个定理。

定理

(A) 由 S-自由模构成的复形 $(\mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{H}^{\epsilon}_{L}/L}, \partial^{\epsilon})$ 给出了光滑环面簇 $D^{b}_{Coh}(X_{\Sigma} \times X_{\Sigma})$ 的对角对象 $\pi(M_{\Lambda(L)})$的一个消解。

(B) 复形 $(\mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{H}^{\epsilon}_{L}/\tilde{L}}, \partial^{\epsilon})$ 消解了单纯环面簇 $X'_{\Sigma} = {}^{X_{\Sigma}}\!/_{\mu}$（视为整体商环面 Deligne-Mumford 叠）$D^{b}_{Coh}(X'_{\Sigma} \times X'_{\Sigma})$ 的对角对象 $\pi(M_{\Lambda(L)}) = M_{\Lambda(L)} \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S$，其中 X_{Σ} 是光滑环面簇， μ 是有限阿贝尔群。

射影空间的 Serre 定理给出了齐次坐标环上的拟有限生成分次模与以下等价关系下的商之间的等价： $M \sim M'$若存在一个整数 d 使得 $M_{\geq d} \cong M'_{\geq d}$ [Har77]。Cox 定理给出了单纯环面簇的齐次坐标环上的分次模（模去挠）与 X_{Σ} 上的凝聚层之间的等价： X_{Σ} [Cox92]。具体而言，Cox 关于单纯环面簇 X_{Σ} 上凝聚层与齐次坐标环上的分次模（模去挠）之间关系的定理表述如下：

˜(1) 在单纯环面簇 X_{Σ} 上，每个凝聚层都可表示为 M 齐次坐标环 S 上某个有限生成模所对应的层。（2）如果 X_{Σ} 是光滑环面簇，且 F 是有限生成的分次 S-模，那么 $\tilde{F} = 0$ 当且仅当存在某个 $k > 0$，使得 $I^{k}_{irr} F = 0$，其中 I_{irr} 是 X_{Σ} 的无关理想。

我们利用 Cox 定理的第 2 部分来解析 X_{Σ} 光滑情形下的对角线。

Cox 定理对单纯环面 D-M 叠有如下推广。设单纯环面簇 $X_{\Sigma} = (\mathbf{A}^{n} \setminus V(I_{irr}))/_{T}$为一个 GIT 商， χ 为其对应的环面 D-M 叠。设 $\mathcal{U}$ 为拟仿射簇 $\mathbf{A}^{n} \setminus V(I_{irr})$。

(1) 齐次坐标环上的有限生成模（模去挠）与 $\mathcal{U}$ 上的凝聚层范畴等价。

(2) $\mathcal{U}$ 的齐次坐标环上的分次有限生成模（模去挠）的范畴，与 $\mathcal{U}$上的等变相干层范畴等价。

(3) $\mathcal{U}$ 的齐次坐标环上的分次有限生成模（模去挠）的范畴，与环面 D-M 叠 χ上的凝聚层范畴等价。若 X_Σ 是单纯环面簇，则将其视为单纯环面 D-M 叠。

Bayer-Popescu-Sturmfels[BPS99] 给出了与幺模格 J_L 相对应的劳伦斯理想的胞腔分解 L。要求 L射影环面簇的主除子格为幺模格，这一条件相当严格：此时 L 由基本正合列中 B 的像给出[CLS11]

$$0 \to M \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^{|\Sigma(1)|} \xrightarrow{\pi} Cl(X_\Sigma) \to 0$$

满足以下性质： B 具有线性无关的列，且B 的每个极大子式都属于集合 $\{0,+1,-1\}$（这是 Bayer-Popescu- Sturmfels 中“幺模性”一词的含义[BPS99]）。这构成了光滑射影环面簇的一个真子类，因为 $\mathbb{P}^2$在一点处进行爆破、再沿例外除子进行爆破后，就不再是幺模的。此外，任何非平凡加权的加权射影空间也不再是幺模的。本文中，“幺模”一词始终指 Bayer-Popescu-Sturmfels 所采用的这一受限含义。

对于幺模环面簇 X_Σ，已知的 J_L 消解给出了对角线 $\Delta \subset X_\Sigma \times X_\Sigma$ 的理想层 $\mathcal{O}_\Delta$ 的一个有限极小消解，其形式为$X_\Sigma \times X_\Sigma$上的线丛之和。在著名的 $X_\Sigma = \mathrm{P}^n_{\mathbb{C}}$例子中，Beilinson 解消给出了如下变换的核：

该傅里叶-穆凯变换在 $D^b_{Coh}(X_\Sigma)$上诱导恒等映射。本文通过将 X'_Σ 视为环面 D-M 叠，在上述定理（A）和（B）中把这一消解推广到单纯形环面簇X'_Σ；这类簇是光滑环面簇 X_Σ 被有限阿贝尔群 μ 整体商所得。

对于定理（B），选择余有限子格 $\tilde{L} \subset L$，使得 $L/\tilde{L} \cong \mu_\circ$ 现在，Bayer-Popescu-Sturmfels 中关于 J_L 的消解的技巧和变形可以推广，从而给出对角线的一个消解

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{H}^\epsilon_L/\tilde{L}}, \partial)$$

证明见第5.1节，并在第5.3节结束。

3. Known resolutions: minimal resolution of unimodular Lawrence ideal J_L (Bayer-Popescu-Sturmfels)

这里，我们回顾 Bayer-Sturmfels[BS97] 和 Bayer-Popescu-Sturmfels[BPS99] 中的约定，以便为幺模环面簇消解对角线。对于 Σ 格 $\mathbf{Z}^m$ 中的一个完备扇，以及 X_Σ 与之对应的完备正规幺模托里克簇，其中 $\{\mathbf{b1}, \ldots, \mathbf{b}_n\} \subset \Sigma(1)$ 是 Σ 的本原射线生成元，且 B 的行向量为 $\mathbf{b}_i$ 的矩阵中，每个 $\mathbf{b}_i$ 都确定 X_i 上的一个环面不变魏尔除子 D_i；环面不变魏尔除子模线性等价所成的群 $Cl(X)$ 由下式给出：[BPS99]

$$0 \to \mathbb{Z}^m \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\pi} Cl(X) \to 0, \tag{1}$$

其中，π 将 $\mathbf{Z}^n$ 的第 i 个标准基向量映射到相应除子的线性等价类 $[D_i]$ $D_{i\circ}$

定义 $\mathbf{n}$：劳伦斯理想[BPS99] J_L 对应于 L，$\mathbb{Z}^n$ i，一个子格 s

$$J_L = \left\langle \mathbf{x^a y^b} - \mathbf{x^b y^a} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \in L \right\rangle \subset S = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$$

对于 k 域。这里$\mathbf{x^a} = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$对于一个 $= (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in \mathbf{N}^n$。

对于齐次坐标环为 $R = \mathbf{C}[x_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)] \cong \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 的幺模 X_Σ，环面簇 $X_\Sigma \times X_\Sigma$ 的齐次坐标环为

$$S = R \otimes_k R = k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n].$$

对角嵌入 $X_\Sigma \subset X_\Sigma \times X_\Sigma$ 定义了一个闭子概形，并由 $Cl(X)\times Cl(X)$-分次理想 I_X 在 S 中表示。这里， $I_X = \mathbf{ker}(\psi)$ 对于 $\psi\colon S = R\otimes_k R \to k[Cl(X)]\otimes R$，由 $\mathbf{x^u y^v} = \mathbf{x^u} \otimes \mathbf{x^v} \mapsto [\mathbf{u}] \otimes \mathbf{x^{u+v}}$ 给出。也就是说，

$$I_X = \langle \mathbf{x^u y^v} - \mathbf{x^v y^u} \mid \pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v}) \text{ in } Cl(X)\rangle \subset S.$$

证明。 首先，我们有如下

引理：设 $X = Spec(R)$ 是一个仿射簇。那么，对角映射 $\Delta : V \to V \times V$ 对应于 C-代数同态 $R\otimes R \to R$，其由 $\sum r_1 \otimes r_2 \mapsto \sum r_1 r_2$ 给出，这可由 $X \times X$ 的泛性质得出。

接下来，在局部，对于 $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$，我们有对角映射 $U_i \overset{\Delta}{\hookrightarrow} U_i \times U_i$ 对应于

$$\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M] \otimes_k \mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M] \to \mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M] \text{ given by}$$
$$\sum r_1 \otimes r_2 \mapsto \sum r_1 r_2.$$

一个选择 $\sigma \in \Sigma$ 给出[CLS11] 单项式

$$x^{\hat{\sigma}} = \prod_{\rho \not\in \sigma(1)} x_\rho \in S$$

对于 S 齐次坐标环[Cox92] 的 X。以及映射

$$\chi^m \mapsto x^{<m>} = \prod_\rho x_\rho^{<m,u_\rho>}$$

诱导出同构

$$\pi_\sigma^*\colon \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] \cong (S_{x^{\hat{\sigma}}})^G \text{对应于 } \mathbf{A}_{ss}^{|\Sigma(1)|} \text{的 GIT 商的 } G$$

$$\cong (S_{x^{\hat{\sigma}}})_0$$

它们在 S 上的 $Cl(X)$-分次中次数为 0。

因此，在局部我们有

$$(S_{x^{\hat{\sigma}}})_0 \otimes_k (S_{x^{\hat{\sigma}}})_0 \xrightarrow{\psi} (S_{x^{\hat{\sigma}}})_0 \text{ by}$$

$$\sum \mathbf{u}^{\mathbf{a}} \otimes_k \mathbf{u}^{\mathbf{b}} \mapsto \sum \mathbf{u}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

对于 U_σ中的$\mathbf{u}$ 局部坐标。

From

$$I_X = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{x}^{\mathbf{v}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mid \pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{v}) \in Cl(X) \rangle$$

$$= \ker(\psi)$$

对于 $\psi \mathcal{R} \otimes_k R \to k[Cl(X)] \otimes_k R$ 通过 $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \mapsto [\mathbf{u}] \otimes \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$，我们在局部情况下有：

$$(I_\Delta)_{x^{\hat{\sigma}} \otimes_k x^{\hat{\sigma}}} = \ker(\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \otimes_k \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \mapsto [\mathbf{u}] \otimes_k \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}}) \subset R_{x^{\hat{\sigma}}} \otimes_k R_{x^{\hat{\sigma}}}$$

Now

$$R_{x^{\hat{\sigma}}} \cong k[x_1, \ldots, x_r, w_1^{\pm}, \ldots, w_\ell^{\pm}]$$

由.....得到　通过对 $x^{\hat{\sigma}}$ 进行局部化，可以约去变量的幂，其中 r 和 ℓ为某些值，并且

$$(R_{x^{\hat{\sigma}}})_0 = k[\frac{x_1}{\mathbf{w}^{\alpha_1}}, \ldots, \frac{x_r}{\mathbf{w}^{\alpha_r}}]$$

由 X 幺模可知，对于每个 $b_k \in \sigma(1)$，都存在 $m_k \in M$ ，使得$m_k \cdot b_i = \delta_i^k$对所有 $b_k \in \sigma(1)$ 都成立。取零次部分并考虑核，得到

$$(I_\Delta)_{x^{\hat{\sigma}} \otimes_k x^{\hat{\sigma}}} = \left\langle \left\{ \frac{x_i}{w^{\alpha_i}} \otimes 1 - 1 \otimes \frac{x_i}{w^{\alpha_i}} \right\}_{i=1}^{r} \right\rangle$$

我们将其记为

$$\langle \{x^u - y^u\} \rangle$$

在仿射图上。 □

现在[BPS99], 定义对角嵌入的理想 $I_X \subset S$　$X \subset X \times X$ 等于格 J_L　$L = \mathrm{Im}(B)$ $= \ker(\pi$ 本节开头序列中的主除子 3 所对应的劳伦斯理想。这个格 L 当且仅当 X_Σ 是幺模时才是幺模；又因为劳伦斯提升

$$\Lambda(L) = \{(u, -u) \mid u \in L\}$$

同构于 L，这意味着 $\Lambda(L)$ 也是幺模的[BPS99].

接下来，我们需要以下定义：

定义：给定一个域 k，我们将劳朗多项式环 $T = k[x_1, \ldots, x_n]$视为多项式环 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$上的模。该模结构来自半群代数 [BS97]的自然包含映射 $S = k[\mathbb{N}^n] \subset k[\mathbb{Z}^n] = T$。

定义：单项式模是由单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$，$\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n$ 生成的 S-子模。

定义：当单项式模的唯一单项式生成集[BS97]在乘法下构成一个群时，M 就与格模重合 M

$$M_L := S\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in L\} = k\{\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n + L\} \subset T$$

对于某个 格 $L \subset \mathbf{Z}^n$，其与 $\mathbf{N}^n$ 的交为原点 $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$。

定义：$\mathbb{Z}^n/L$ 分次格理想 I_L 是[EB05]

$$I_L = \left\langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \in L \right\rangle \subset S.$$

断言：$I_{\Lambda(L)} = J_L$。

证明。

$$\begin{aligned} I_{\Lambda(L)} &= \left\langle \mathbb{x}^{\mathbf{a}} - \mathbb{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \Lambda(L) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}\mathbf{y}^{\mathbf{a}_2} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}\mathbf{y}^{\mathbf{b}_2} \mid \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), \mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2), \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \Lambda(L) \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}\mathbf{y}^{\mathbf{a}_2} - \mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}\mathbf{y}^{\mathbf{b}_2} \mid (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) - (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \in \{(\mathbf{u}, -\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in L\} \right\rangle \end{aligned}$$

其中最右侧的约束意味着

$$\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 = -(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1 \text{ and } \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \in L$$

得到

$$= \langle \mathbf{x}^{\mathbf{u}}\mathbf{y}^{\mathbf{v}} - \mathbf{x}^{\mathbf{v}}\mathbf{y}^{\mathbf{u}} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in L \rangle = J_L$$

□

尽管幺模劳伦斯理想 $I_{\Lambda(L)} = J_L$ 的 Hull 分解未必是极小分解，但 $I_{\Lambda(L)}$ 的极小分解确实来自 $M_{\Lambda(L)}$ 的胞腔分解，并由无限超平面排列 [BPS99] $\mathcal{H}_L$ 给出的组合构造加以描述。这里， $\mathcal{H}_L$ 是通过将格 $L = \ker(\pi) \subset \mathbb{Z}^n$ 的实张成空间 $\mathbb{R}L$ 与坐标超平面 $\{x_i = j\}$、$1 \leq i \leq n$、$j \in \mathbb{Z}$ 的所有格平移相交而得到的。Bayer-Popescu-Sturmfels[BPS99] 证明， L 中的每个格点都是仿射超平面排列 $\mathcal{H}_L$ 的顶点；并且当且仅当 L 是幺模时，$\mathcal{H}_L$ 中不存在其他顶点。此外，超平面排列模 L 的商复形 $\mathcal{H}_L/L$ 支撑 [BPS99] 的极小 S-自由分解 J_L，其原因恰在于 $\mathbb{R}L \cap \mathcal{H}_L = L$。

3.1. 胞腔分解的例子： $\mathcal{H}_L/L$ 对于$\mathbb{P}^2$。对于幺模环面簇$X_\Sigma = \mathbb{P}^2,$，我们有如下基本环面正合列，它通过以下方式定义 $Cl(X_\Sigma)$:

$$0 \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \to 0$$

with

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

以及由下式给出的 $B(a, b)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix}$$

使得 ker(π) =Im(B) 包含

$$\{e_1 - e_2, e_1 - e_3, e_2 - e_3\}$$

但可以由以下元素生成

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}.$$

Now $L = \mathbb{Z} \cdot \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ is rank 2.

如果我们用 $\mathcal{H}_L$ 的单项式模 $M_{\Lambda(L)}$ 中的元素作标记，并在 $\mathcal{H}_L/L$ 上构造相应的商胞腔复形，标记一个向上三角形和一个向下三角形，并遵循下述定向，我们得到[BPS99]:

这里，与基向量 $e_1 - e_2$ 和 $e_2 - e_3$ 对应的边以蓝色标记，边的排序由箭头编号（1-3）给出，而$\mathcal{H}_L/L$ 的朝上面在图 1中按逆时针方向定向，朝下面则按顺时针方向定向。我们按 {“向上三角形”、“向下三角形”}的顺序排列2-胞腔。胞腔复形$\mathcal{H}_L/L$ 有一个顶点、三条边和两个2-胞腔。此基本域的选取和面的排序给出了[BPS99] ($\mathbf{F}^\bullet_{\mathcal{H}_L/L}, \partial$) 的 S-自由消解 S/J_L:

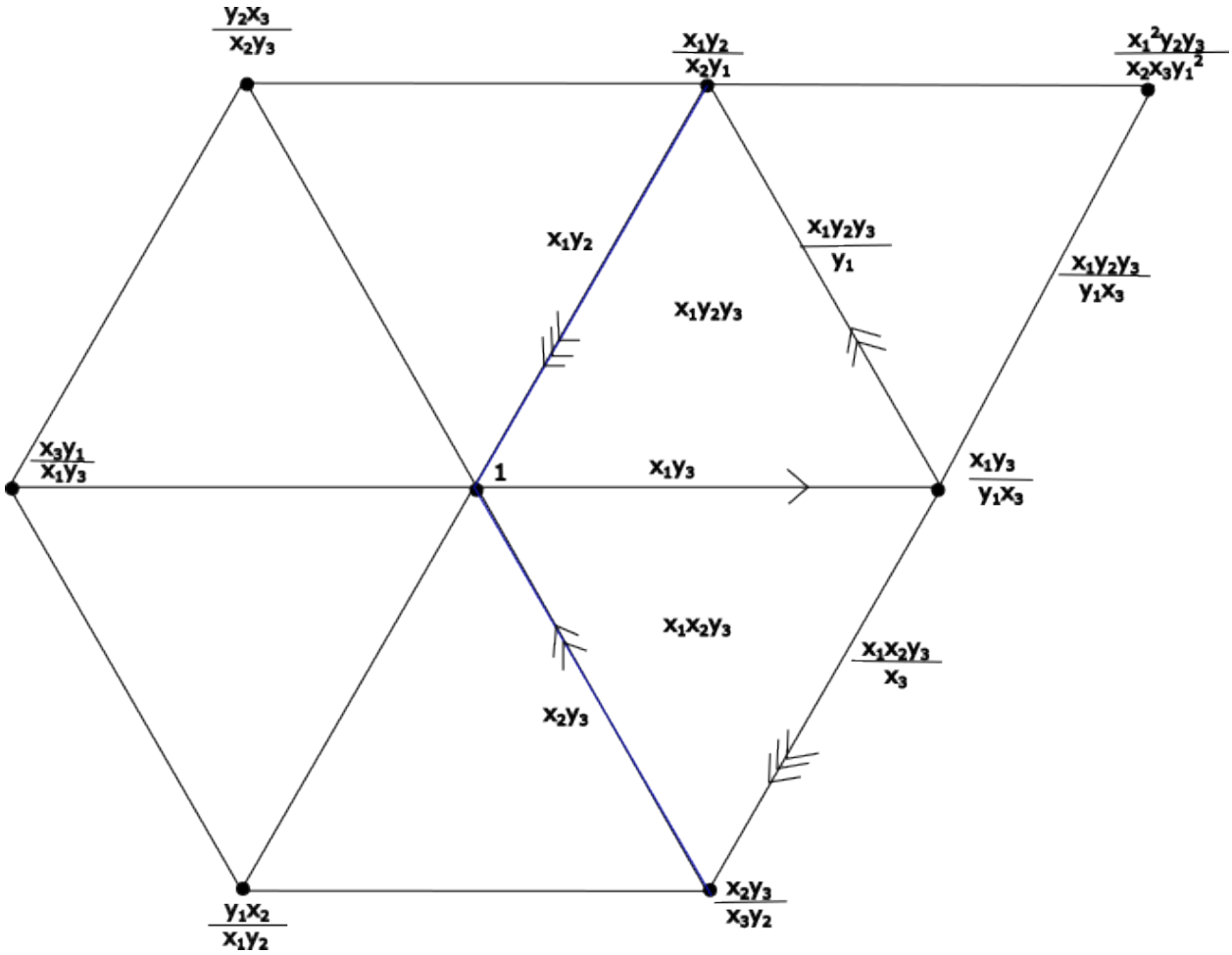

FIGURE 1. P^2 的胞腔复形 $\mathcal{H}_L/L$

$$0 \to S^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y_2 & x_2 \\ y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{pmatrix}} S^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y_1x_3 - x_1y_3 \\ x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}} S^1 \to 0 \tag{2}$$

$$S^1 \downarrow$$

$$S/J_L \to 0$$

其中

$$\partial(F) = \sum_{\substack{F' \subset F, \\ codim(F', F) = 1}} \epsilon(F, F') \frac{m_F}{m_{F'}} \cdot F'$$

对于 m_F面 F的单项式标签以及 $\epsilon(F,\ F') \in \{^+1\}$和 $\epsilon(F,\ F') = 1$，如果 F'的定向与由 F诱导的定向一致。这里， m_F是从顶点标记开始，对 F的各个面上的 $m_{F'}$取最小公倍式所得。

也就是说，由 S/J_L 在 $M_{\Lambda(L)}$ 方程2 中得到的胞腔分解$I_{\mathbb{P}^2}$ 消解了对角线 $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$。

3.2. **讨论**。 这里，针对 $M_{\Lambda(L)}$ 的胞腔分解之所以恰好成立，是因为幺模格的顶点正是 $\mathcal{H}_L$ 的顶点。为了消解与给定单纯环面簇相关的环面 D-M 叠的对角线，我们需要第4.2节中的 Morita 理论。

我们将在第 $\mathcal{H}_L/L$ 4.4 节中，将与某些单纯环面簇相关联的环面 D-M 叠的胞腔分解推广。

4. Resolution of diagonal for global quotient of unimodular toric variety by finite abelian group

4.1. 双模中对角线的消解。设 A 是 R 上的代数，而 k 是一个域。 A 不一定是交换的。我们将 $I_\Delta \leq A \otimes_k A$ 视为由乘法映射 $\mu\colon A \otimes_k A \to A$ 的核给出的子模。这里， $A \otimes_k A \geq A$ 包含 A 的一个同构副本。我们将 $A \otimes_k A$ 视为一个 $A \otimes_k A^{op}$-双模，而不是代数。这里，

$$A_\Delta = A \otimes_k A / I_\Delta$$

考虑 r 中元素的导子和微分，考虑由 b 给出的映射 y

$$\alpha \in A \mapsto \tilde{d}\alpha = \alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha \in I_\Delta$$

我们在此不考虑 I/I^2。

˜断言：$\ker \mu = I_\Delta \cong < d\alpha \mid \alpha \in A >$ 作为 $A \otimes A^{op}$-模。

Proof. ($\Rightarrow$): We construct $g : \ker \mu \to \left\langle \tilde{d}\alpha : \alpha \in A \right\rangle$ via $g(\sum_i z_i \otimes_k w_i) = \sum_i z_i \tilde{d} w_i$ as follows:

$$\sum_i z_i \otimes w_i \in \ker \mu \implies \sum_i z_i w_i = 0 \text{ so that}$$
$$\sum_i z_i \otimes w_i = \sum_i z_i (1 \otimes w_i - w_i \otimes 1) \in \left\langle \tilde{d}\alpha \mid \alpha \in A \right\rangle.$$

˜($\Leftarrow$)：显然，我们有 $d\alpha = 1 \otimes_k \alpha - \alpha \otimes_k 1 \in \ker \mu$。 □

相对于 R，如果我们假设 A 作为 R–模在 R 上由$\{f_1, \ldots, f_r\}$有限生成，那么

$$\left\langle \tilde{d}a \mid a \in A \right\rangle \cong \left\langle \tilde{d}r \mid r \in R \right\rangle \otimes \{f_1, \ldots, f_r\}$$

从而这为 I_Δ给出了一组有限生成元。

此外 ˜ ˜ ˜最后，我们注意到这里成立莱布尼茨法则 $d(\alpha\beta) = d(\alpha)\beta + \alpha d(\beta)$.

4.2. 通过 Morita 理论构造局部对角对象。 考虑 $\mathbb{A}^n/\mu$，其中 μ 是环面的有限子群。我们有 $D(\mathbb{A}^n/\mu) = D(k[z_1, \ldots, z_n] - \mathrm{Mod}^\mu)$，其中模都带有分次。这里的目标是用$D(\mathbb{A}^n/\mu)$来理解 $D(\mathbb{A}^n/\mu \times \mathbb{A}^n/\mu)$，更具体地说，是用 $\mathcal{O}_\Delta$ on $\mathbb{A}^n/\mu$来理解 $D(\mathbb{A}^n/\mu \times \mathbb{A}^n/\mu)$ 的 $\mathcal{O}_\Delta$。也就是说，我们希望用仿射空间的 Δ 来描述 $\mathbb{A}^n/\mu \times \mathbb{A}^n/\mu$ 的 $\mathcal{O}_\Delta$。这里始终存在上同调分次，但现在我们还在 $k[\mathbb{A}^n] - \mathrm{Mod}^\mu$ 上有一个额外的分次。这里，令 $S = k[\mathbb{A}^n]$。注意， $D(\mathbb{A}^n/\mu)$ 由线丛 $\mathcal{O}(\xi)$ 生成，其中 $\chi \in \mu^*$ 是特征，因此我们有生成元

$$G = \sum_{\chi \in \mu^*} \mathcal{O}(\chi)$$

注意： $Hom(\mathcal{O}(\chi_i)\ \mathcal{O}(\chi_j))$ 是带有右分次的 S。忽略分次，我们有

$$G = \sum_{|\mu|} S$$

使得

$$End^\bullet(G) = Mat_{|\mu|}(S).$$

为了纳入分次，我们接着取 0 次部分。这里我们使用 Morita 理论。

4.3. **Morita 等价背景**。 注：本小节中的记号沿用 Weibel 的记号，与后文各节所用的记号不同。

定义：两个含幺环 R, S 若存在一个$R-S$ 双模 P和一个 $S-R$ 双模 Q，使得 $P \otimes_S Q \cong R$ 作为 $R-R$ 双模，并且$Q \otimes_R P \cong S$ 作为 $S-S$ 双模，则称它们是 **Morita等价** 。接下来

$$(-) \otimes_R P \text{ gives a functor from } \mathrm{mod}-R \to \mathrm{mod}-S \text{ and}$$
$$(-) \otimes_S Q \text{ gives a functor from } \mathrm{mod}-S \to \mathrm{mod}-R$$

它们是逆的范畴等价，因为对于所有 $M \in \mathbf{mod}\ -R$，我们有

$$M \otimes_R P \otimes_S Q \cong M \otimes_R (P \otimes_S Q) \cong M$$

and

$$M \otimes_S Q \otimes_R P \cong M \otimes_S (Q \otimes_R P) \cong M$$

对于所有 $M \in \mathsf{mod}\ -S$。

˜**4.4. 选择余有限格** $L \subset L$ **作为幺模环面簇的整体商。** 对于与 X'_Σ 相关联的环面 D-M 叠，其中 X'_Σ 是一个单纯环面簇，并且是幺模环面簇 X_Σ 在有限阿贝尔群 G 作用下的整体商，我们可以选择主除子格 L 的一个同构，使其幺模且满足 $\tilde{L} \subset L$ 为余有限，并且 $L/\tilde{L} \cong G$。此外，在局部， $X'_\Sigma \cong \mathbf{A}^n/G$，因此我们可以在局部考虑 $L \cong \mathbf{Z}^n$。

4.5. **模-A 中的对角对象。** 这里，令 $R = k[\mathbb{A}^n]$ 以及 $S = R \otimes_k R \cong k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$。在 $D(\mathbb{A}^n/G)$ 中，我们有生成元 $H = \bigoplus_{\chi \in \hat{}G} \mathcal{O}(\chi)$，其自同态代数为 $A = End(H)$。现在，$A \simeq \Delta \in A \otimes A^{op} - Mod$。图 2 给出了相应的函子

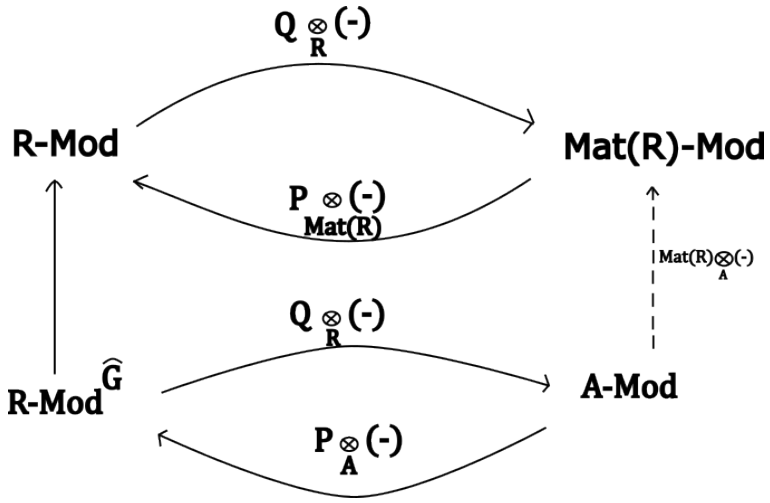

FIGURE 2. Morita 等价函子在 $R - Mod$ 与 $Mat(R)\ -Mod$之间，以及它们在 $R - Mod^{\hat{}G}$与$A - Mod$之间的分次和 ˆG-不变对应对象

Her ˙e, $P \in (R^G, Mat(R))\ - Mod$是一个在生成元上带有分次的行向量

$$P = \langle e_\chi \mid |e_\chi| = -\chi \rangle ,$$

˙$Q \in (Mat - R, R^G)\ - Mod$ 是一个带有生成元上的分次的列向量

$$Q = \langle e_\chi \mid |e_\chi| = \chi \rangle$$

并且我们有

$$Hom_{Mat}(Q, -) \simeq P \otimes_{R^{\hat{G}}} (-)$$

˙对于 $P \otimes_A (-)$：将 $A - Mod \to R - Mod^G$ 应用于 $\Delta \cong A \in Obj(A \otimes A^{op} - Mod)$，我们有

$$P \otimes_A A = \langle z^\alpha e_{\rho_1 \rho_2} \mid |z^\alpha e_{\rho_1 \rho_2}| = |z^\alpha| + \rho_1 - \rho_1 + \rho_2 \rangle$$

带有分次

$$\begin{aligned} |z^\alpha e_{\rho_1 \rho_2}| &= |z^\alpha| + \rho_1 - \rho_1 + \rho_2 \\ &= |z^\alpha| + \rho_2. \end{aligned}$$

对于 $\pi(M_{\Lambda(L)}) = M_{\Lambda(L)} \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S$，我们有

$$\pi(M_{\Lambda(L)}) = S \cdot \{\frac{x^u}{y^u} \mid u \in L\} \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S$$

其中 $S[\Lambda(\tilde{L})] = \left\langle x^{u_1} y^{u_2} \otimes z^{(v,-v)} \mid (u_1, \ u_2) \in \mathbb{N}^{2n}, \ v \in \tilde{L} \right\rangle$ 诱导出一个分次，定义在（比如说）$\{x_1, \ldots, x_n\}$ 上，这是通过约去分母中的 y^u 得到的。这里的映射

$$\phi : S[L] \to M_L \text{ via } x^{u_1} y^{u_2} \otimes z^{(v_1, v_2)} \mapsto x^{u_1 + v_1} y^{u_2 + v_2}$$

˜在 $S[\Lambda(L)]$上诱导出一个模结构 M_L，从而在 $S[\Lambda(L)]$上诱导出一个结构 $M_{\Lambda(L)}$。在 Bayer-Sturmfels[BS97], 中，映射 ϕ： $S[L] \to M_L$ 被用于证明

$$\pi(M_L) \cong {}^{S[L]}\!/_{\ker \phi} \otimes_{S[L]} S \cong {}^{S}\!/_{I_L}$$

利用这样一个事实：当我们只需考虑幺模格 L 时， $\pi(M_L)$ 是循环的。

我们还可以将其视为

$$(R-Mod)^{\hat{G}} \to Mod-A$$

by

$$\bigoplus_{\rho\in\hat{G}} M_\rho \cong M_\cdot \mapsto Hom(\bigoplus_{\rho\in\hat{G}} R(-\rho), M) \cong \bigoplus_{\rho} Hom(R(-\rho), M) \cong \bigoplus_{\rho} M_\rho$$

其中 $\bigoplus_\rho M_\rho$ 右侧包含幂等元 $e_{\rho\rho}\in A$ 。

- 我们还有 $\pi(M_{\Lambda(L)}) \in (S-Mod)^{G\times G}$ ，其中

$$\pi(M_{\Lambda(L)}) \simeq +_{\overline{u}\in\hat{G}} M_{\tilde{L}}\cdot \tilde{z}^{\overline{u}}$$

是一个和，不一定是直和，并且

$$S\cdot\left\{\frac{x^u}{y^u} \mid u\in L\right\} \subset S_{(x_1\dots x_n y_1\cdots y_n)} \cong k[\mathbb{Z}^{2n}].$$

这里，局部化环 $S_{(x_1\dots x_n y_1\dots y_n)}$ 具有一个可下降为 $L/\tilde{L}\oplus L/\tilde{L}$ 分次的 $\mathbf{Z}^{2n}$ 分次。虽然 $\pi(M_{\Lambda(L)})$ 不再是循环的，但我们确实有

$$S[L] \cong \bigoplus_{\overline{u}\in\hat{G}} S[\tilde{L}]\cdot z^{\overline{u}}$$

and

$$S[\Lambda(L)] \cong \bigoplus_{u \in \hat{G}} S[\Lambda(\tilde{L})] \cdot z^{(u,-u)}$$

带有反对角分次。现在

$$S[L] = \langle x^u \otimes z^v \mid v \in L \rangle$$

且在

$$S[\Lambda(L)] = \left\langle x^{u_1} y^{u_2} \otimes z_1^u z_2^{-u} \mid u \in L \right\rangle$$

$\tilde{S}$具有 $L \times L$ 分次，因为 $L \cong \mathbf{Z}^n$，而对 L 取 L 的商，会在 $\Lambda(L)$ 上诱导出对 $\Lambda(\tilde{L})$ 的商，从而在 $S[L]$ 上得到一个 $L/\tilde{L} \times L/\tilde{L}$- 分次。现在， $S[\tilde{L}]$ 相对于 $L/\tilde{L}$，在 z's 上具有 0 次分次。

对于 ϕ： 通过 $x^u \otimes z^v \mapsto x^{u+v}$的 $S[L] \to M_L$ ，我们有 ϕ 是满射，$\ker \phi = \langle x^u \otimes z^v - x^{u+v} \otimes 1 \rangle$ 以及

$$I_L = \langle x^u - x^v \mid u - v \in L \rangle \leq S$$

可由 $\ker \phi$ 通过令 $z's$ 等于 1 得到。这里，我们有

$$M_L \cong S[L]/\ker \phi$$

$\tilde{}$作为 $S[L]$模。作为 $S[L]$-模，我们仍然有

$$S[L] \cong \bigoplus_{\overline{u} \in \hat{G}} S[\tilde{L}] \cdot z^{\overline{u}}$$

对于 ϕ： $S[\Lambda(L)] \to M_{\Lambda(L)}$，我们有

$$\ker \phi = \left\langle y_i \otimes z^{(e_i,-e_i)} - x_i \right\rangle$$

是次数为 (1，0) 的齐次元素的一个生成集，而 $\ker\phi = \left\langle x_i \otimes z^{(-e_i,e_i)} - y_i \right\rangle$ is ˆ ˆ 是次数为 (0，1) 的齐次元素的另一个生成集 $\in (G,\ G)$。此外，我们有

$$I_{\Lambda(L)} = \langle x_j - y_j \rangle$$

˜由于 $L \cong \mathbf{Z}^n$，并将 ϕ 视为 $S[L]$-模之间的映射可知，当我们令 z' 等于 1 时，$\ker\phi$ 仍特化为 $I_{\Lambda(L)}$。

为了证明

$$\begin{aligned} A \cong \ \pi(M_{\Lambda(L)}) = M_{\Lambda(L)} \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S \in (S - Mod)^{\hat{G}\times\hat{G}} \\ || \\ M_L \otimes_{S[\tilde{L}]} S \end{aligned}$$

我们注意到，A 由以下元素在 k 上生成

$$A/k = \langle w^\alpha e_{\rho_1\rho_2} \mid |\alpha| = \rho_1 - \rho_2 \rangle$$

因此，我们通过描述 $\Psi: A \to \pi(M_{\Lambda(L)})$ 在 A/k的生成元上的像来构造映射:

$$\psi(w^\alpha e_{\rho_1\rho_2}) = x^\alpha \otimes z^{\Lambda(\rho_2)}.$$

给定 $M \in R - Mod$，我们可以使用投影算子 $e_{\rho_i\rho_i}$ 得到

$$e_{\rho_i\rho_i} M = M_{\rho_i} \in k - v.s.$$

and

$$M = \bigoplus_i M_{\rho_i}$$

作为分次 R–模。

ˆ ˆ为了在 $A \in (A \otimes A^{op}) - Mod$ 上得到 $G \times G$-分次，我们使用投影算子

$$e_{\rho\rho} A e_{\rho'\rho'}$$

ˆ ˆ 来提取 $G \times G$-分次下 A 的 $(\rho, -\rho')$-齐次分量。ˆ ˆ为了在 $\pi(M_L)$ 上得到 $G \times G$- 分次，我们有

$$|x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \otimes z_1^{\beta} z_2^{-\beta}| = (\alpha_1 + \beta, \alpha_2 - \beta).$$

此处， A 上的生成元分次 k 来自图 3。

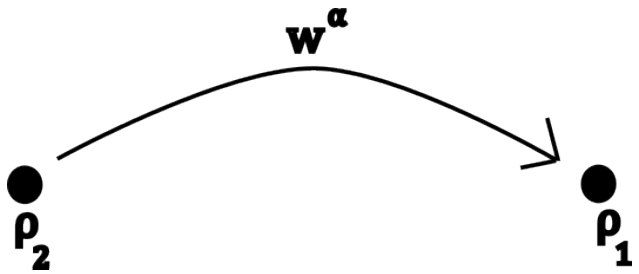

FIGURE 3. 与 $w^{\alpha} e_{\rho_1\rho_2}$ 关联的箭图

ˆˆ ˆ ˆ由于 $\pi(M_{\Lambda(L)}) \in (S - Mod)^{G\times G}$ 且 $A \simeq \Delta \in (A \otimes A^{op}) - Mod$，我们通过以下方式在 A 上赋予 $(S - Mod)^{G\times G}$ 结构

$$S = R \otimes_k R$$

并使用表示乘以 $r \in R$ 的矩阵表示来给出 $R \hookrightarrow A$ ，使得ˆ ˆ A 和 $\pi(M_{\Lambda(L)}) \in (S - Mod)^{G\times G}$ 都成立。

现在来检查 ˆ ˆk 与 $(S -$ Bimod $)^{G\times G}$ 结构相容，我们注意到的是。 t

$$x^{\beta}w^{\alpha}e_{\rho_1\rho_2} = w^{\alpha+\beta}e_{\rho_1+|\beta|,\rho_2} \qquad \text{左作用}$$

and

$$y^{\beta}w^{\alpha}e_{\rho_1\rho_2} = w^{\alpha+\beta}e_{\rho_1,\rho_2-|\beta|} \qquad \text{右作用}$$

这表明我们有一个 $S-Mod$ 同态:

$$f(s\cdot m) = s\cdot f(m)$$

由于

$$\begin{aligned}\psi(x^{\beta}w^{\alpha}e_{\rho_1\rho_2}) &= \psi(w^{\alpha+\beta}e_{\rho_1+|\beta|,\rho_2})\\ &= x^{\alpha+\beta}\otimes z^{\lambda(\rho_2)}\\ &= x^{\beta}\cdot(x^{\alpha}\otimes z^{\lambda(\rho_2)}\\ &= x^{\beta}\psi(w^{\alpha}e_{\rho_1\rho_2})\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\psi(y^{\beta}w^{\alpha}e_{\rho_1\rho_2}) &= \psi(w^{\alpha+\beta}e_{\rho_1,\rho_2-|\beta|}) \\ &= x^{\alpha+\beta}\otimes z^{(\rho_2-|\beta|,-\rho_2+|\beta|)} \\ &= (x^{\beta}\otimes z^{(-\beta,\beta)})\cdot(x^{\alpha}\otimes z^{\lambda(\rho_2)}) \\ &= y^{\beta}(x^{\alpha}\otimes z^{\lambda(\rho_2)}) \\ &= y^{\beta}\psi(w^{\alpha}e_{\rho_1\rho_2})\end{aligned}$$

最后，为了证明这是一个同构，我们构造 Ψ 的逆映射。由于 $\hat{}\pi(M_{\Lambda(L)})$ $\cong R[G]$ as $k-v.s.$，我们构造

$$\Phi : x^{\alpha}\otimes z^{\overline{v}} \mapsto w^{\alpha}e_{\alpha+\overline{v},\overline{v}}$$

作为 ψ的逆映射。

$\tilde{}$这表明，对于全局商，我们是对 $S[\Lambda(L)]$ 而非对 $S[\Lambda(L)]$ 取张量，从而得到 Δ。

4.6. 全局对角对象及其对角线的消解，适用于 $X'_{\Sigma}={}^{X_{\Sigma}}\!/_{G}$ 由幺模 X_{Σ} 被 G 有限阿贝尔群商去得到的整体商。这里，我们将给出 $\mathbf{P}^{n}/_{G}$ 的一个全局对角对象，并证明它为何是 $\mathbf{P}^{n}/_{G}$ 的全局对角对象；这一证明仅依赖于 $\mathbf{P}^{n}$ 是幺模这一事实。因此，我们也得到了更一般情形下的全局对角对象，即由幺模 X_{Σ} 被有限阿贝尔群 G 商去得到的整体商。

断言：对于 G 有限阿贝尔群，我们有 $\mathbf{P}^{n}/_{G}$ 的一个全局对角对象。

证明。局部地，$\mathbf{P}^{n}/_{G}$ 与 $\mathbf{A}^{n}/_{G}$同构。因此，在局部范围内，对于 $X_{\Sigma}=\mathbf{P}^{n}$中的开集 $\mathbf{A}^{n}$，我们有 $U'_{\sigma}={}^{U_{\sigma}}\!/_{G}$，其中 $U_{\sigma}=\mathbf{A}^{n}$。对于 $\mathbf{A}^{n}$，我们通过以下方式得到 $Cl(\mathbf{A}^{n})$ 的表示 $=0$

$$0\to M\xrightarrow{B}\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}\xrightarrow{\pi}Cl(X)\to 0$$

给出

$$0 \to \mathbb{Z}^n \xrightarrow{Id} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\pi} 0 \to 0$$

以及 $L = \ker(\pi) = Im(B) \cong \mathbf{Z}^n$。由此得到 $\Lambda(L) = \{(u, -u) \mid u \in \mathbf{Z}^n\}$。我们有 Δ for $\mathbf{A}^n/G$ as

$$\begin{aligned}\Delta \cong \pi(M_{\Lambda(L)}) &= S[\Lambda(L)]/\ker\phi \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S \\ &= \left(k[\mathbb{A}^{2n}] \otimes \left\langle z^{\Lambda(e_i)^{\pm}} \right\rangle\right)/\left\langle y_i - x_i \otimes z^{\Lambda(e_i)} \right\rangle \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} k[\mathbb{A}^{2n}] \\ &\cong R[\hat{G}]\end{aligned}$$

其中，$R[\hat{}G]$ 是变量为 w_i 和 $G \cong L/\tilde{L}$的群环。现在，$\mathbf{A}^n = U_\sigma \subset X_\Sigma =\mathbf{P}^n$ 的局部图表上坐标 x_i 的过渡映射会在 $U_\sigma \times U_\sigma$的过渡映射上诱导过渡映射，进而在 $U'_\sigma \times U'_\sigma = U_\sigma/G \times U_\sigma/G$上诱导过渡映射。这通过在 U'_σ中的 M_L 内局部写作 $x_i = y_i \otimes z^{\Lambda(e_i)}$，在 $z^{\Lambda(e_i)}$上诱导过渡映射。这意味着 $z^{\Lambda(e_i)}$的过渡映射可以粘合在一起，而 $\mathbf{A}^n/G$ 的对角对象 Δ 也可以粘合在一起，从而得到 $\mathbf{P}^n/G$的全局对角对象。

□

注意：该证明高度依赖于这样一个事实：局部而言，$\mathbf{P}^n$ 与 $\mathbf{A}^n$ 同构，即 $\mathbf{P}^n = \cup_i U_{\sigma_i}$，且每个 $U_{\sigma_i} \cong \mathbf{A}^n$。由于根据下文的**引理**，这对任意幺模环面簇也成立，因此类似的论证可为$X'_\Sigma = X_\Sigma/G$ 赋予 X_Σ 幺模的全局对角对象。

引理：一个完备的幺模环面簇 X_Σ 有一组开图表覆盖，且这些开图表都与 $\mathbf{A}^n$ 同构。

证明。 设完备幺模环面簇 X_Σ 的扇为 Σ，其最大维锥为 $\sigma \in \Sigma(n)$。那么 $\sigma^\vee \cap M$ 由 σ 各个面的法向量作为半群生成元生成，也就是说，由 $\sigma^\vee$的射线生成元生成。但这样的法向量有 n 个，并且

X_Σ 幺模性意味着 σ 是幺模的，因此 $\rho_i \in \sigma(1)$ 中大小不超过 n 的子集在 $\mathbf{Z}$ 上线性无关。这意味着 $\sigma^\vee$ 的 n 个射线生成元在 $\mathbf{Z}$ 上也线性无关。因此 $U_\sigma \cong \mathbf{A}^n$。

□

断言： $\pi(M_{\Lambda(L)})$ 可由与 $\mathcal{H}_{L}/_{\tilde{L}}$ 相关联的胞腔复形消解，我们将其视为

$$\mathcal{H}_{L}/_{\tilde{L}} \cong \bigoplus_{u \in G} \mathcal{H}_{L}/_{L}$$

连同一个到.....的覆盖映射

$$\begin{array}{c} \mathcal{H}_{L}/_{\tilde{L}} \\ \downarrow \\ \mathcal{H}_{L}/_{L} \end{array}$$

证明。 由于 $M_{\Lambda(L)}$ 是一个单项式模， $\mathcal{H}_L$ 消解了 $M_{\Lambda(L)}$。复形（$\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{H}_L}$， ∂）不是S-有限的，但其长度有限，为 $m =$ 秩(L)。它也是格模 $\mathbb{Z}^{2n}$-分次自由S消解 $M_{\Lambda(L)}$ [BPS99]的极小消解。由于 $\mathcal{H}_{L}/_{L}$ 消解了

$$M_{\Lambda(L)} \otimes_{S[\Lambda(L)]} S$$

我们有 $\mathcal{H}_{L}/_{\tilde{L}}$ 消解了

$$\pi(M_{\Lambda(L)}) = M_L \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S.$$

□

4.7. 关于 P 的消解例$\mathbf{P}^1/_{\mu_6}$。 回忆一下，对于 $\mathbf{P}^1$ ，我们有$Cl(\mathbf{P}^1) \cong \mathbf{Z}$ 的一个表示，由

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \xrightarrow{B} & \mathbb{Z}^{|\Sigma(1)|} & \xrightarrow{\pi} & Cl(\mathbb{P}^1) & \to 0 \\ & & ||\wr & & ||\wr & & ||\wr & \\ 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z} & \to 0 \end{array}$$

映射 B 和 π 由下式给出

因此 $L = \ker(11)$ 与 $L = \mathbb{Z}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{Z}^2$。若固定 $L \cong \mathbb{Z}$，则 $\tilde{L} = 6\mathbb{Z}$ 和 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{(1\ 1)} \mathbb{Z} \to 0$

$L/\tilde{L} \cong \mu_6 = G$。现在 $\mathbb{P}^1$ 在 $\mathcal{H}_L/L$ 上有单项式标签，如图 4所示:

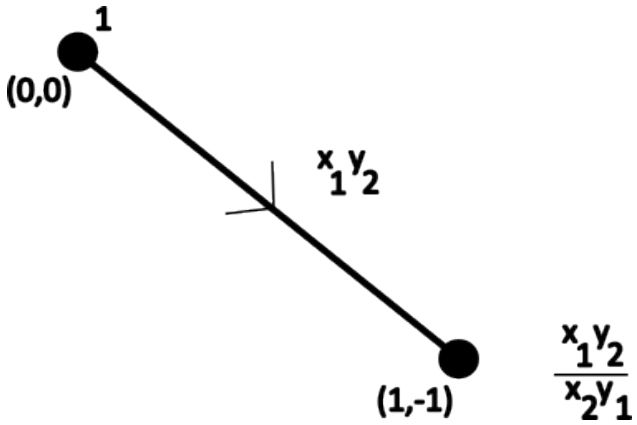

FIGURE 4. $\mathcal{H}_L/L$对于 $\mathbf{P}^1$

对于 $G = \mu_6$，我们有胞腔复形 $\mathcal{H}_L/\tilde{L}$，其如图 5所示。

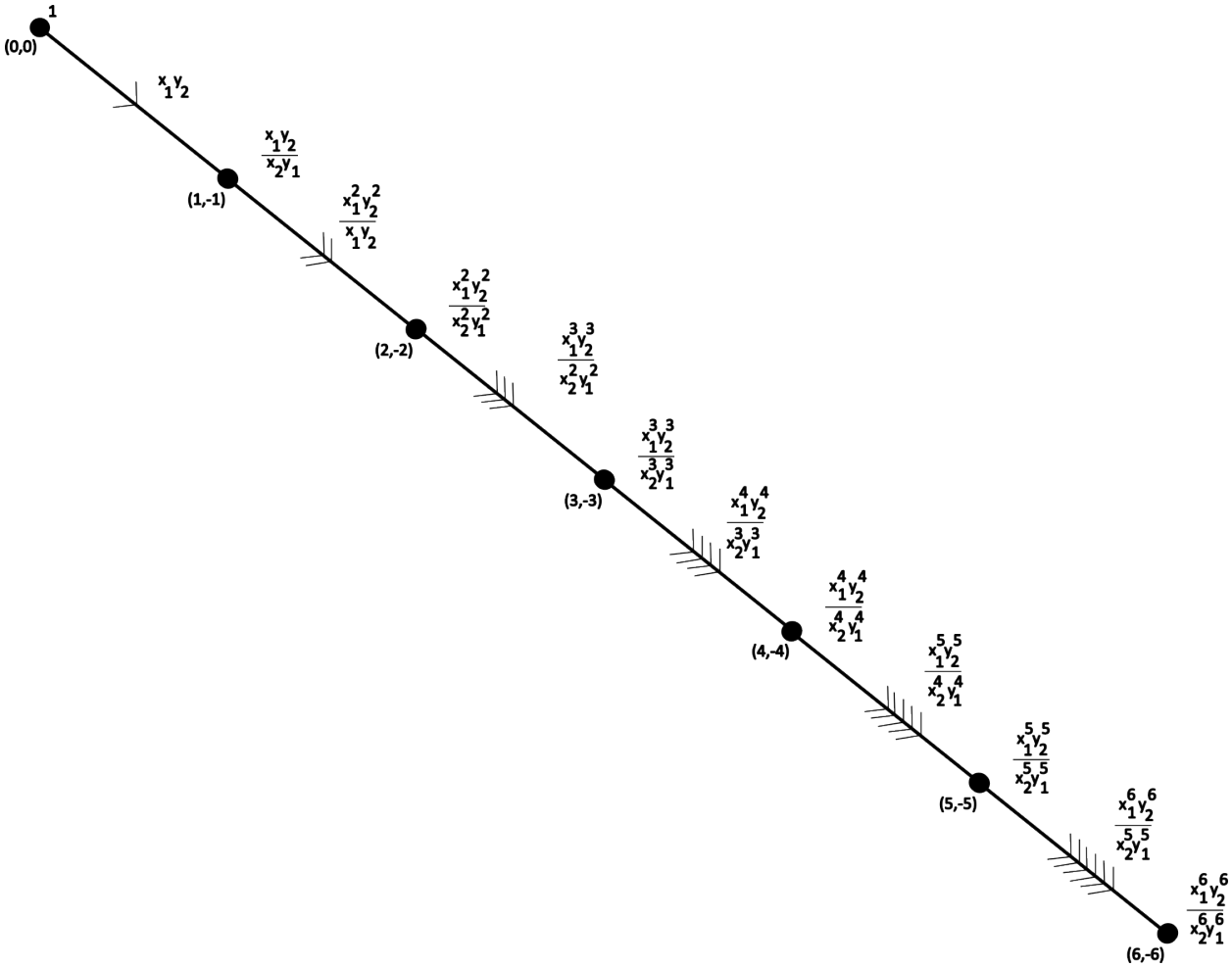

FIGURE 5. $\mathcal{H}_L/\tilde{L}$ 对于 P^1/μ_6

分解

$$\mathcal{H}_L/\tilde{L} = \bigoplus_{u \in G} \mathcal{H}_L/L$$

相应的覆盖映射 h 如图 6 所示，并给出了相应的复形和消解

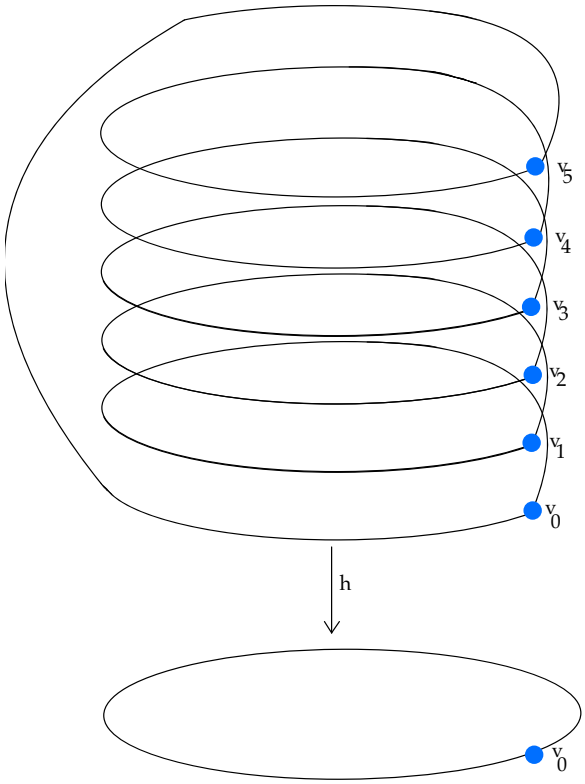

FIGURE 6. $\mathcal{H}_L/\tilde{L}$ 对于 $\mathbf{P}^1/\mu_6$

$$S^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_1y_2 & 0 & \cdots & x_2y_1 \\ x_2y_1 & -x_1y_2 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2y_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x_1y_2 \end{pmatrix}} S^6 \to 0$$

$$\downarrow$$

$$\pi(M_{\Lambda(L)}) \to 0$$

覆盖　　映射 h 对应于 $\mathbf{P}^n$ 的极大环面按 G 进行的细分。

4.8. **提升**$(S-Mod)^{G\times G}$ **上的分次**。如果我们加入一个

将 $(\mathbf{Z}\oplus G)\times(\mathbf{Z}\oplus G)$-分次赋予 $(S-Mod)^{G\times G}$，并将 $\pi(M_{\Lambda(L)})\in Ob(S-Mod)^{G\times G}$视为，例如，对具有 $R=\mathbf{C}[x_0,x_1]$ 的 $\mathbf{P}^1_{/\mu_4}$，正合列

$$0\to\mathbb{Z}\overset{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}{\to}\mathbb{Z}^2\overset{\begin{pmatrix}4&4\end{pmatrix}}{\to}\mathbb{Z}\to G\to 0$$

伴随映射

$$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{/4\mathbb{Z}}\leftarrow\mathbb{Z}^2$$

$$(a+b,\overline{a})\leftarrow(a,b)$$

and

$$|x_0^{a_0}x_1^{a_1}|=(a_0+a_1,\overline{a_0})$$

借助 $a_0=-a_1$, $a_0=4b$ 从 $L=Im(B)\subset\mathbf{Z}^2$ 得到 R 上的 $\mathbf{Z}\oplus G$-分次，从而在 S 上诱导出 $(\mathbf{Z}\oplus G)\times(\mathbf{Z}\oplus G)$-分次。

现在，借助

$$S[\Lambda(L)]\cong\bigoplus_{\overline{u}\in\hat{G}}S[\Lambda(\tilde{L})]\cdot z^{\Lambda(\overline{u})}$$

使我们能够将 $\mathbf{P}^1_{/\mu^4}$ 的消解写为

$$0 \to S^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -x_1y_2 & 0 & 0 & x_2y_1 \\ x_2y_1 & -x_1y_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2y_1 & -x_1y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2y_1 & -x_1y_2 \end{pmatrix}} \bigoplus_{\chi\in\hat{G}} \mathcal{O}(\chi,-\chi) \to 0$$

$$\downarrow$$

$$\Delta \to 0$$

其中，向下的垂直映射将 $\mathcal{O}(\chi,-\chi)$ 的基元素 e_χ 映射到 $z^{\Lambda(u)} \in \pi(M_{\Lambda(L)})$。

–

4.9. 加权射影空间 P(1，2)。 对于 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}'$ 正规环面簇上的线丛X_Σ，如果 $\mathcal{L}$ 具有截面层 $\mathcal{O}(D)$，且 $\mathcal{L}'$ 具有截面层 $\mathcal{O}(E)$，那么要计算

$$Ext^i(\mathcal{O}_{X_\Sigma}(D), \mathcal{O}_{X_\Sigma}(E))$$

我们注意到，对于 $i = 0$,

$$\mathcal{H}om(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E)) \simeq \mathcal{O}(E - D)$$

以及 $Ext^i(\mathcal{O}(D)\ \mathcal{O}(E)) = R\Gamma(\mathcal{O}(E - D)) = H^*(X_\Sigma,\ \mathcal{O}(E - D))$。

现在，对于

$$\mathbb{P}(1, 2) = \left[\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\big/\mathbb{C}^*\right]$$

其中 $\mathbb{C}^*$ 通过 $\lambda \cdot (z_1,\ z_2) = (\lambda z_1,\ \lambda z_2)$ 作用，集合

$$\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2)$$

是一个例外集合。

证明。 注意

$$H^*(\mathcal{O}(-1)) = R\Gamma Hom(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}(1))$$
$$= R\Gamma Hom(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}).$$

要在 P(1, 2) 上求出 $H^*\mathcal{O}(n)$，我们在 $\mathbb{C}^2$，上构造一个 $\check{C}$ech 覆盖，注意到 z_1 的次数为 1，而 z_2 的次数为 2。在 U_1 上，我们对 z_1 进行局部化，从而得到 $\mathcal{O}(U_1)$。在图 7 中，每个格点都标有单项式的总次数。在 U_2 上，对 z_2 进行局部化得到 $\mathcal{O}(U_2)$。这里，青绿色的格点同样标有单项式的总次数。总次数的等值集以 2 为增量突出显示。在 $\check{C}$ech 上链复形中，图 7 中的 $C^0(U_1 \cup U_2)$ 由$\Gamma(U_1) \times \Gamma(U_2)$ 给出。注意，$\Gamma(U_1)$ 和 $\Gamma(U_2)$ 都包含 (0, 0)。对于

$$H^*\left(\left[\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\big/\mathbb{C}^*\right]\right)$$

我们只考虑次数为 0 的元素。

为了构造 P(1, 2) 上 $\mathcal{O}(n)$ 的 $\check{C}$ech 复形，我们利用 d^0 将 $\mathcal{O}(U_1)$ 映射到 $\mathcal{O}(U_2)$，这会使 $\mathcal{O}(U_2)$ 向左移动 n 步。对于 $\mathcal{O}(-1)$ 和 $H^*(\mathcal{O}(-1))$，$d^0(\check{C}^0)$ 和 $\check{C}^1$ 如图 8 所示。这里，根据维数论证，H^1 是 d^1 的核。任何同时标记为红色和青绿色的格点，其元素都属于核。但对于任何次数为 0 的点，这种情况都不会发生，因此 $H^1(\mathbf{P}(1, 2)\ \mathcal{O}(-1)) = 0$。这里，$H^0$ 是余核：但所有次数为 0 的元素都在 $\check{C}^0$ 的像中，因为每个次数为 0 的格点都标记为红色或青绿色。因此，

$$H^i(\mathbb{P}(1,2), \mathcal{O}(-1)) = 0$$

对所有 i。

对于 $\mathcal{O}(-2)$，我们会将图 8 中的青绿色圆点向右移动 1 格（总共向右移动 2 步）。然而，我们仍然没有同时标记为两者的 0 度格点

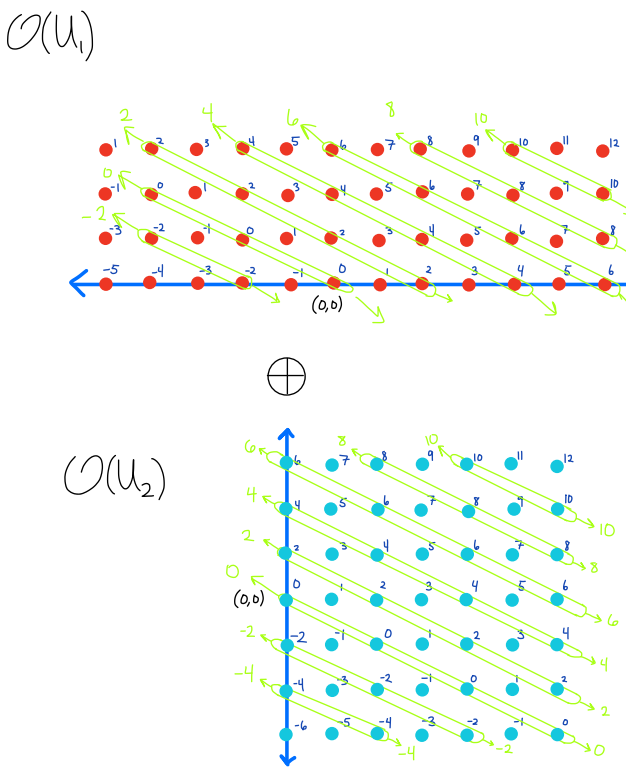

FIGURE 7. $\mathcal{O}(U_1)$ 和 $\mathcal{O}(U_2)$ 在 P(1,2) 上

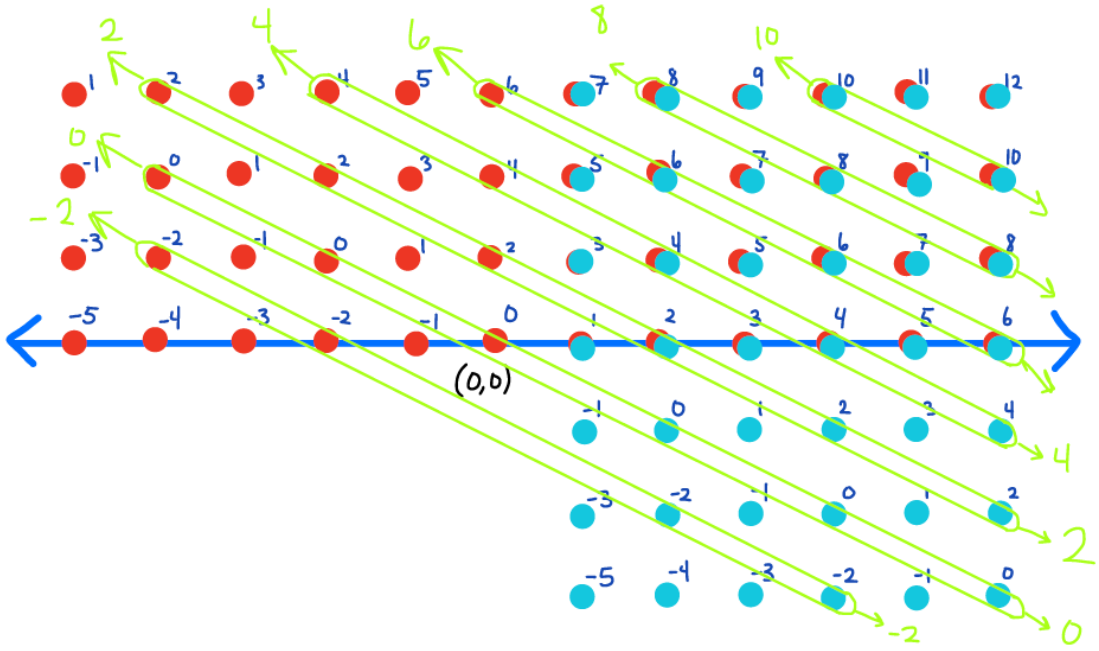

FIGURE 8. $d^0(\check{C}^0)$ 对于 P(1,2) 上的 $\mathcal{O}(-1)$

红色和青绿色格点，因此 $H^1(\mathbf{P}(1,2)\ \mathcal{O}(-2)) = 0$。同样，所有次数为 0 的格点都标记为红色或青绿色圆点，因此余核为 0，并且 $H^0(\mathcal{O}(-2)) = 0$在 P(1，2) 上。

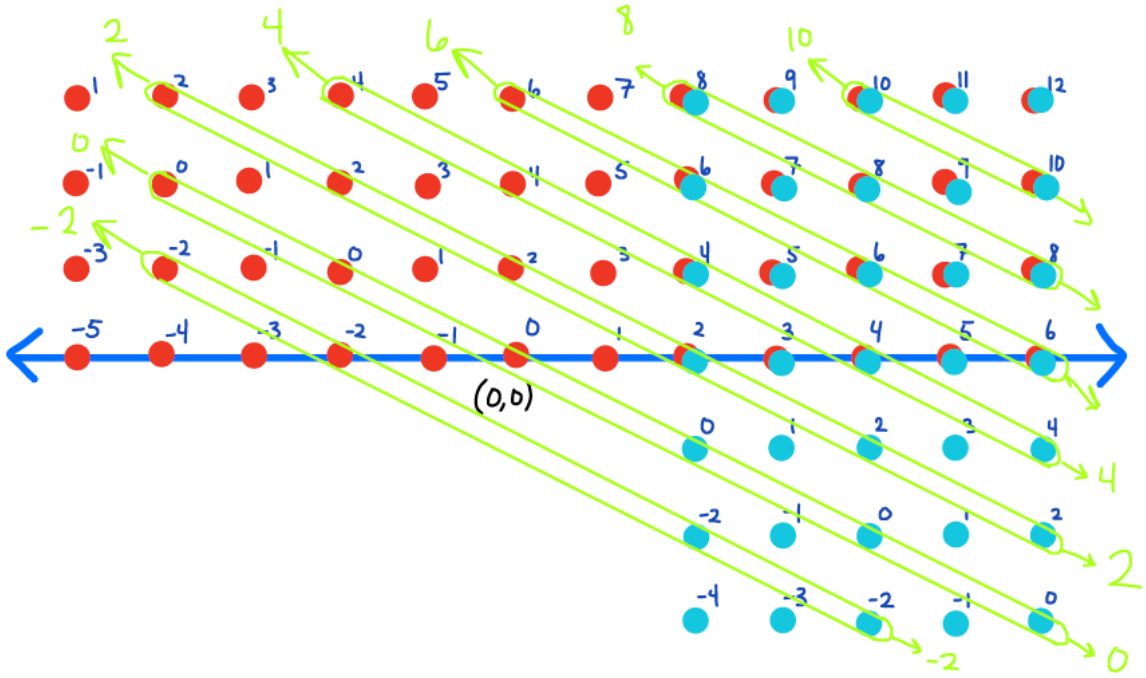

FIGURE 9. $d^0(\check{C}^0)$ 在 P(1，2) 上的 $\mathcal{O}(-2)$

因此

$$Ext(\mathcal{O}(2),\mathcal{O}(1)) \cong Ext(\mathcal{O}(1),\mathcal{O}) \cong R\Gamma(\mathcal{O}(-1))$$
$$\cong H^*(\mathcal{O}(-1)) = 0$$

and

$$Ext(\mathcal{O}(2),\mathcal{O}) = R\Gamma(\mathcal{O}(-2)) = H^*(\mathcal{O}(-2)) = 0.$$

注意， $d^0(\check{}C^0)$ 对于 $\mathcal{O}(-2)$ 的表示如图 9所示。为证明 $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(2)$ 生成$D^b(\mathbb{P}(a, b))$ 对于 $a, b > 0$ 并且互素，我们注意到以下正合性

$$0 \to \mathcal{O}(-a-b) \to \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(-b) \to \mathcal{O} \to 0$$

在 P(a, b) 上。 □

5. Resolving the diagonal for smooth toric variety X_Σ

5.1. 通过变形消解对角线： $Bl_{[1:0:0]}$(P²) 并变形为 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ ，适用于光滑且非幺模的射影环面簇。对于 Bayer-Popescu-Sturmfels 意义下光滑且非幺模的环面簇，我们需要通过一个元素 $\epsilon \in$R^A 对胞腔复形 $\mathcal{H}_L$ 进行变形。我们使用 ϵ ，使 $\mathcal{H}_L^\epsilon$(0) 中的顶点处出现横截交。这里，我们以 $Bl_{[1:0:0]}$P² 为例，将胞腔复形 $\mathcal{H}_L$ 变形为 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ ；该例是光滑、Fano 且幺模的。

回忆一下，子格 $L \subset \mathbb{Z}^n$ 称为 **幺模** ，如果 L 是一个整数矩阵 B 的像，且其列线性无关，并且 B 的所有最大子式都属于集合 $\{0, 1, -1\}$ [BPS99]。如果我们将环面不变点 $[1:0:0]$ 在 $\mathbb{P}^2$ 吹起（按照 Cox-Little-Schenck 的说法，我将 $X_\Sigma = Bl_{[1:0:0]}\mathbb{P}^2$ 称为与图 $N_\mathbb{R}$ 10 中给出的扇相关联的环面簇），那么由 L 的像给出的格 B 在

$$0 \to M \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\pi} Cl(X_\Sigma) \to 0$$

where B given by $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ is unimodular.

Here,

$$Cl(X_\Sigma) \cong \langle D_1, \ldots, D_4 \rangle \big/ (D_1 + D_2 - D_4, D_2 + D_3 - D_4)$$

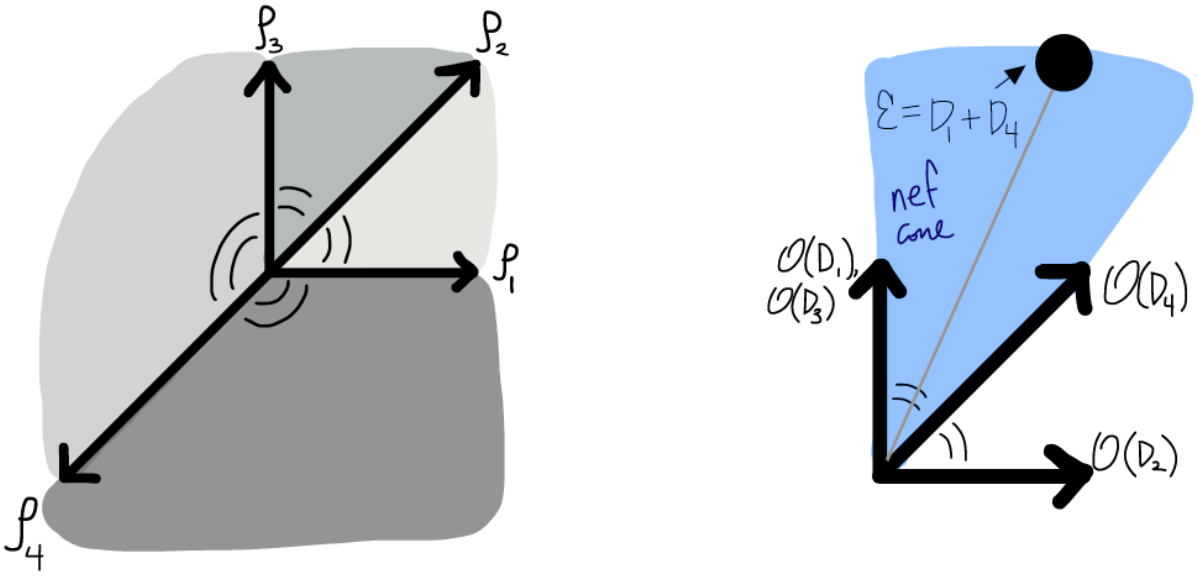

FIGURE 10. 扇 Σ和 $Bl_{[1:0:0]}\mathbb{P}^2$的 nef 锥

由于 D_2 对应于吹起中的例外除子， D_2 的自交数为 -1：

$$D_2 \cdot D_2 = -1$$

而 D_1， D_3 和 D_4 的自交数均为 1，因此 X_Σ 的 nef 锥由 D_1 和 D_4张成。对 nef 锥的这一描述来自一个映射

$$(\mathbb{R}^2)^\vee \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \mathbb{R}^4$$

它对应于 $\mathbb{R}^4$的第一卦交象限中的一个扇。这里，nef 锥中的元素 $D_1 + D_4$ 对应于 $\begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$。

5.1.1. 变形胞腔复形 $\mathcal{H}_L$。 这里假设 X_Σ 是光滑的。如果像幺模情形那样考虑 R $L = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ ，那么其交集

无限超平面排列 $\mathcal{H}_L$ 与 $\mathbb{R}L$ 将包含比 L [BPS99]中所示更多的格点。也就是说，对于 X_Σ 光滑且非幺模的情形，

$$(\mathcal{H}_L \cap \mathbb{R}L) \setminus L \neq \emptyset.$$

$\mathbb{R}L \cap \mathcal{H}_L$ 如图 11 所示，对于 $Bl_{[1:0:0]}\mathbb{P}^2$, ，它是幺模的（因此不会出现额外的顶点）。这里，黄色竖线对应 x_1 的整数值，且 x_1 在图中向右移动时数值递增。黑色横线对应 x_3 的整数值，它们向上递增。蓝色对角线给出了 x_2 和 x_4中的整数值；它们分别向右上方和左下方递增。

由于在 RL 的每个点都有多于两个超平面相交，胞腔复形 $\mathcal{H}_L$ 在每个顶点处都不存在横截交。

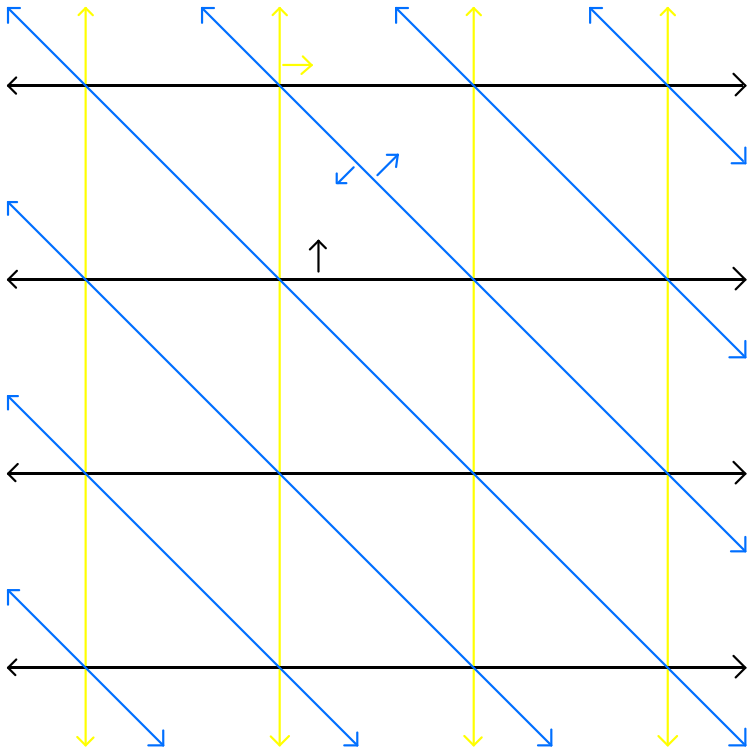

FIGURE 11. RL，显示 R$L \cap \mathcal{H}_L \subset$ R^4

为补救每个顶点 $v \in \mathcal{H}_L(0)$ 处缺乏横截交的问题，我们通过变形超平面排列来调整无限胞腔复形 $\mathcal{H}_L$，其变形方式由我们在 nef 锥中对 ϵ 的选择决定，具体如下：

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix} = 0$$

对应于 B 的第 1 行和第 2 行，为 $L \subset \mathbf{R}^4$ 提供一组基。

这给出了变形超平面排列 $\mathcal{H}_L^\epsilon$，对应于平移$e_1 + \epsilon \in \mathbb{Z}$ $e_4 + \epsilon \in \mathbb{Z}$ 对 $0 < \epsilon \ll 1$。我们将在下文构造 Hull 分解（$\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{H}_L^\epsilon}, \partial^\epsilon$）。变形复形 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ 见图 12，并附有单项式标记：对给定点 $\mathcal{H}_L^\epsilon \subset \mathbb{R}^4$中的每个坐标，取其取整函数所对应的顶点标记。图12中，具有相同颜色标记的顶点采用相同的单项式顶点标记。超平面上的箭头表示x_i 对 $1 \leq i \leq 4$的递增方向，如图 11。

这里我们强调，$\mathbf{R}L$ 是$\mathbf{R}^4$ 中的一个平面，我们正沿着该平面考察与超平面排列 $\mathcal{H}_L = \{x_i \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq i \leq 4\}$的交集。

将 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ 对 L 取商，并为来自 $M_{\Lambda(L)}$ 的每个分量赋予由取整函数给出的单项式标签，结果见图 13。

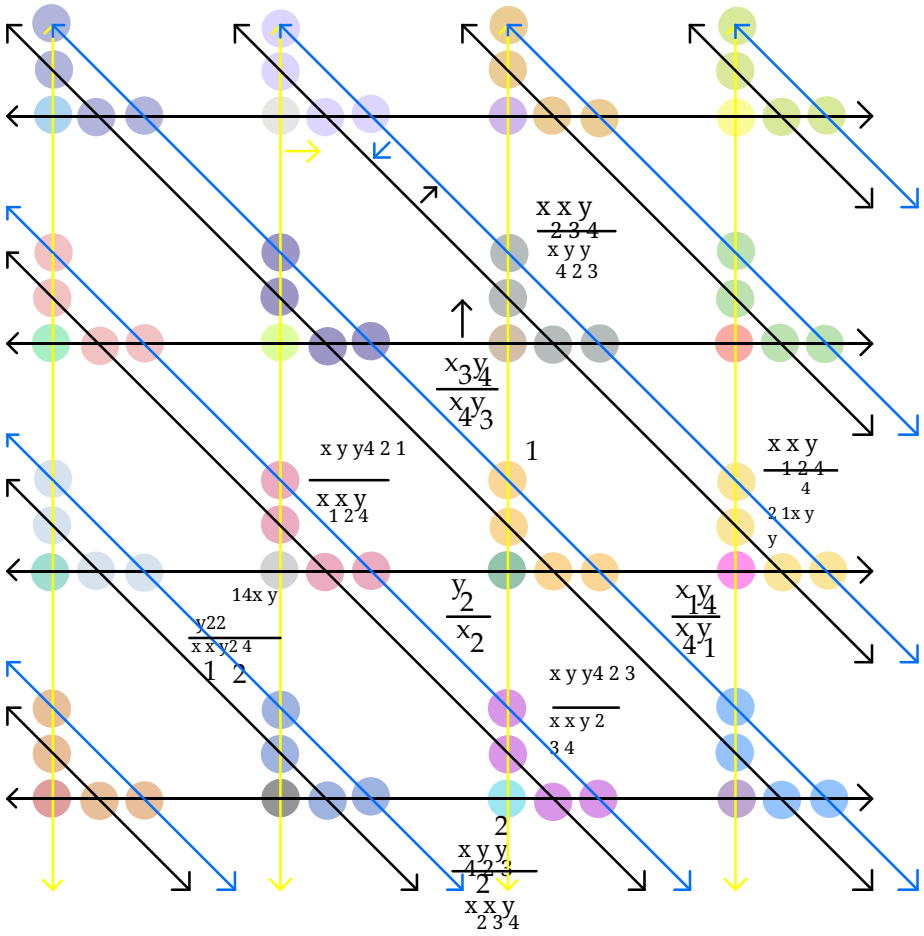

FIGURE 12. $\mathcal{H}_L^\epsilon$ 对 $Bl_{[1:0:0]}\mathbb{P}^2$ 经由 $\mathcal{O}(D_1)+\mathcal{O}(D_4)$ 变形

这里，微分

$$\partial_1^\epsilon : \bigoplus_{e\in\mathcal{H}_L^\epsilon(1)} S \to \bigoplus_{v\in\mathcal{H}_L^\epsilon(0)} S$$

由下式给出

v_4	0	0	0	0	1	-1	0	x_3y_4	0	$-x_3y_1$
v_3	0	1	$-y_2$	0	0	1	0	0	$-x_3y_1$	0
v_2	0	0	0	1	-1	0	$-x_1y_4$	0	0	x_1y_3
v_1	y_2	-1	0	-1	0	0	0	0	x_1y_3	0
v_0	$-x_2$	0	x_2	0	0	0	x_4y_1	$-x_4y_3$	0	0
	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9

依照图13中的标注。图13中顶点和边的颜色标注12中的颜色标注相对应。对于同调指标 $i = 0$ 之外的正合性，与幺模情形一样，可由 Bayer-Popescu-Sturmfels 中定理3.1所用的同一凸性论证得出[BPS99]。我们将在下一节研究 ∂_0^ϵ 的余核。

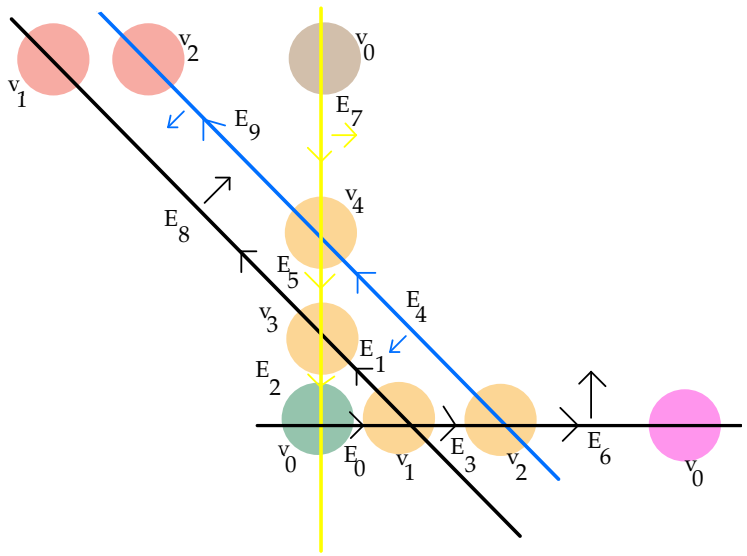

FIGURE 13. 带有来自 $M_{\Lambda(L)}$ 的单项式标记的商胞腔复形 $\mathcal{H}_L^\epsilon/L$

5.2. **余核**∂_0^ϵ。这里，我们考虑映射

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{H}_L^\epsilon}, \partial^\epsilon) \xrightarrow{f} S_{\prod x_i}$$

由 $\bigoplus_{v\in\mathcal{H}_L^\epsilon} S(-m_F) \to S_{\prod x_i}$给出，其中 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ 中的一个顶点映射到其在 $M_{\Lambda(L)}$中的顶点单项式标签。

For $Bl_{[1:0:0]}\mathbf{P}^2$, we 有 $L = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$,

$$\begin{aligned} I_L &= \langle x^{v_+} - x^{v_-} \mid v \in L \rangle \\ &= \langle x_1x_2 - x_4, x_2x_3 - x_4, x_1 - x_3 \rangle , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_L &= \langle x^u y^v - x^v y^u \mid u - v \in L \rangle \\ &= \langle x_1x_2y_4 - x_4y_1y_2, x_2x_3y_4 - x_4y_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1 \rangle \end{aligned}$$

以及 $M_{\Lambda(L)}$ 作为一个 $S-$子模 T 具有无限生成集 $\{x^u y^{-u} \mid u \in L\}$。在模 L取商后，胞腔复形 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ 携带的单项式标签如图 14所示。当我们考虑商 $\mathcal{H}_L^\epsilon/L$中顶点上的单项式标签时，只需考虑图 14 所示的顶点单项式标签，因为 $\mathcal{H}_L^\epsilon(0)$ 中的顶点具有相同的单项式标签。

这里， $L \cap \mathbb{N}^n = \{0\}$ 意味着 $M_{\Lambda(L)} \ni 1$，因此 $M_{\Lambda(L)} \subset Im(f$上文中的情况，可通过考虑 L 对图 14所示商的作用得到。模去 L的作用后，在 $\frac{y_2}{x_2}$ 的 $Im(f)$ 中有一个额外的单项式，它不包含在 $M_{\Lambda(L)}$中。注意，由于

$$\{\frac{x_1x_2y_4}{x_4y_1y_2}, \frac{x_2x_3y_4}{x_4y_2y_3}, \frac{x_1y_3}{x_3y_1}\} \subset M_{\Lambda(L)},$$

我们还有

$$\{\frac{x_4y_1y_2}{x_1x_2y_4}, \frac{x_4y_2y_3}{x_2x_3y_4}, \frac{x_3y_1}{x_1y_3}\} \subset M_{\Lambda(L)}.$$

现在对于 $X_\Sigma = Bl_{[1:0:0]}\mathbf{P}^2$,

$$I_{irr} = \langle x_3x_4, x_1x_4, x_1x_2, x_2x_3\rangle$$

$$= \langle x_1, x_3\rangle \cap \langle x_2, x_4\rangle$$

且 I_{irr} 对于 $X_\Sigma \times X_\Sigma$ 由下式给出

$$\langle x_1, x_3\rangle \cap \langle x_2, x_4\rangle \cap \langle y_1, y_3\rangle \cap \langle y_2, y_4\rangle .$$

现在，对于 I_{irr} 中的任意单项式 q，对于 $X_\Sigma \times X_\Sigma$，我们必须有 x_2 或 x_4 整除 q。如果 x_2 整除 q，那么

$$x_2\left(\frac{y_2}{x_2}\right) = y_2 \in M_{\Lambda(L)}$$

因为 $M_{\Lambda(L)} \ni 1$ 表明 $q \cdot \frac{y_2}{x_2} \in M_{\Lambda(L)}$。如果 $x_4|q$，那么

$$y_3x_4 \cdot \left(\frac{y_2}{x_2}\right) = \left(\frac{x_4y_2y_3}{x_2x_3y_4}\right) \cdot x_3y_4 \in M_{\Lambda(L)}$$

这表明 $q \cdot \binom{y_2}{x_2}$ 属于 S 在 $q \cdot \binom{y_2}{x_2}$ 上的作用像。因此，对于 $X_\Sigma \times X_\Sigma$，$M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)$ 的包含映射的余核相对于 I_{irr} 是挠的。一般而言，我们称一个 $R-$模 M 为 I 挠的，当且仅当存在 $k \in \mathbf{Z}_+$ 使得 $I^kM = 0$。此处，$k = 1$ 只需证明，对于 $X_\Sigma \times X_\Sigma$，
$M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)$ 的包含映射的余核相对于 I_{irr} 是挠的。

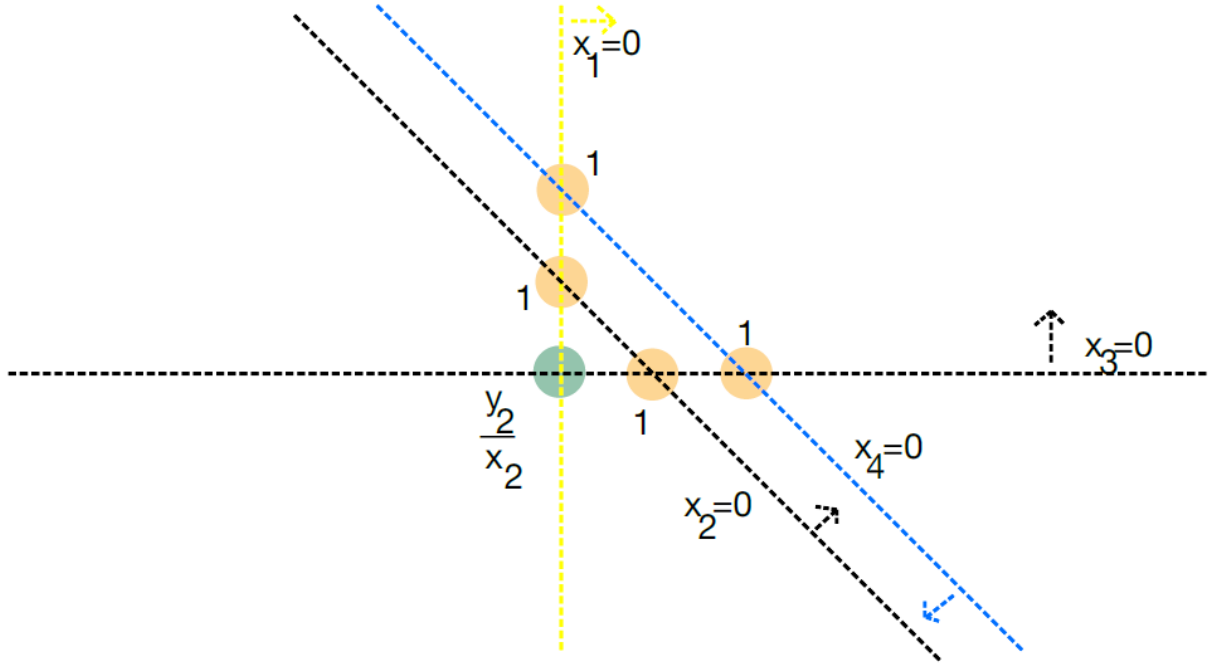

FIGURE 14. 顶点上的单项式标签 $v \in \mathcal{H}_L^{\epsilon}(0)$ 模 L

5.3. 在有效锥中移动。此处我们考虑当 ϵ 位于有效锥的另一个室的内部时的 coker ($M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)$)；该室由 $\mathcal{O}(D_2)$ 和$\mathcal{O}(D_4)$ 张成。（同样， D_2 对应于 $Bl_{[1:0:0]}\mathbf{P}^2$ 的吹起的例外除子。）我们先前在第5.2节对 coker($M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)$) 的讨论是在 $N^1(X_\Sigma)$ 的 nef 锥内进行的，其中 $N^1(X_\Sigma) \cong Cl(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{R}$，因为 X_Σ 是光滑的。更一般地，我们可以询问 $M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)$ 在有效锥的另一个室中的包含映射的余核；该室如图15所示。

在由 $\mathcal{O}(D_2)$ 和 $\mathcal{O}(D_4)$ 在 $Cl(X_\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{R}$ 中张成的这个锥内，我们有一个对应的扇，其中射线 ρ_2 被移除。这给出了 $\mathbf{P}^2$，的扇，不过我们保留了这样的信息： ρ_2 不再位于任何极大锥中，因此 X_Σ 的无关理想变为

$$I_{irr} = \langle x_1, x_3, x_4 \rangle \cap (x_2)$$

并且在此情况下， $X_\Sigma \times X_\Sigma$ 的无关理想为

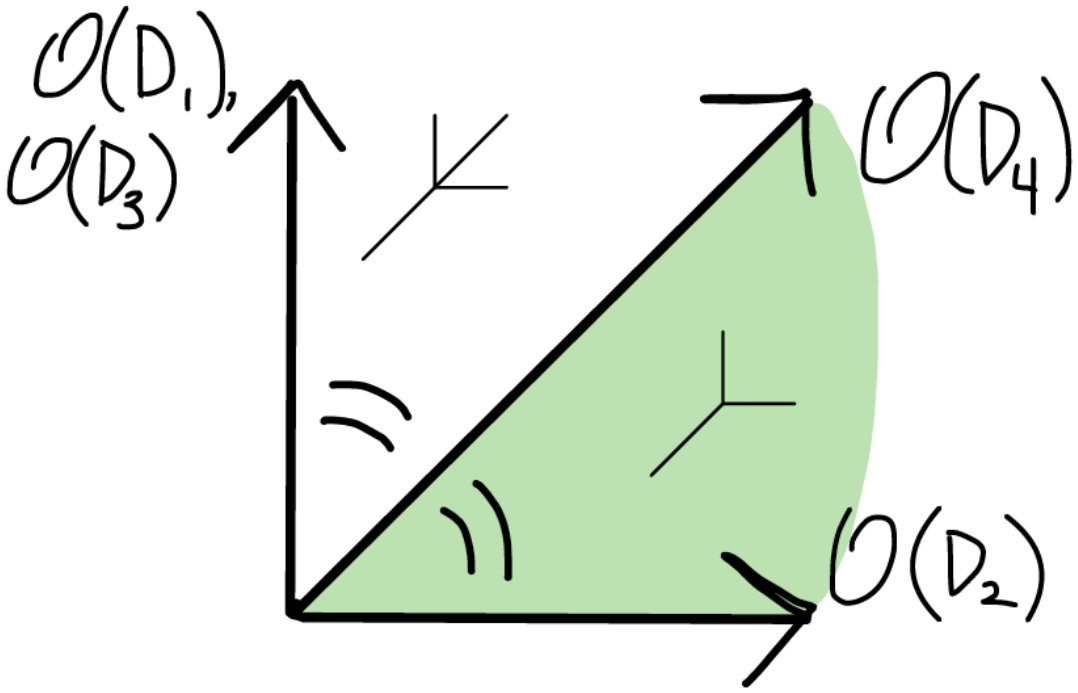

FIGURE 15. 有效锥的腔室

$I_{irr} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ \epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix}, x_3, x_4 \rangle \cap (x_2) \cap \langle y_1, y_3, y_4 \rangle \cap (y_2)$。取与室内部的 $\mathcal{O}(D_2) + \mathcal{O}(D_4)$ 相对应的 $\epsilon =$

由 $\mathcal{O}(D_2)$ 和 $\mathcal{O}(D_4)$ 张成的有效锥，我们有变形后的胞腔复形 $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{\epsilon}$，其关于 L 的商如图 16 所示。这里，$x_2 = 0$ 和 $x_4 = 0$ 分别标为蓝色和黄色，因为这些平面在 RL 中发生了变形。在这种情况下，$X_\Sigma \times X_\Sigma$ 对应的 I_{irr} 如上所示，且 coker$(M_{\Lambda(L)}) \ni \frac{y_1}{x_1}, \frac{y_3}{x_3}$，并由这些元素在 L 下的平移张成。注意，在这种情况下，x_1、x_3 或 x_4 中至少有一个必须整除无关理想 I_{irr} 中的任意单项式 q，该无关理想属于 $X_\Sigma \times X_{\Sigma^\circ}$。

对于 L 的 $\frac{y_1}{x_1}$ 平移，我们注意到，如果 x_1 整除 q，那么

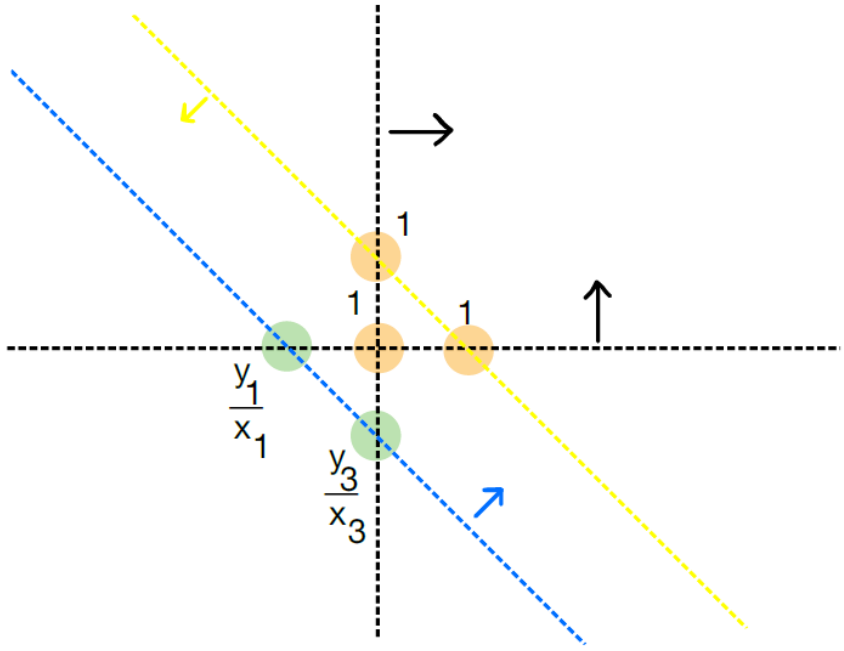

FIGURE 16. 变形复形 $\mathcal{H}_L^\epsilon$ 对于 ϵ 对应于 $\mathcal{O}(D_2)+\mathcal{O}(D_4)$

$$x_1\cdot(\frac{y_1}{x_1})=y_1\in M_{\Lambda(L)}$$

由于 $1\in M_{\Lambda(L)}$，且 $M_{\Lambda(L)}$ 是 $T=k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ 的 $S-$ 子模。如果 x_3 整除 q，那么

$$x_3\cdot\frac{y_1}{x_1}=y_3\cdot\left(\frac{x_3y_1}{x_1y_3}\right)\in M_{\Lambda(L)}.$$

如果 x_4 整除 q，那么

$$x_4y_2\left(\frac{y_1}{x_1}\right)=x_2y_4\left(\frac{x_4y_1y_2}{x_1x_2y_4}\right)\in M_{\Lambda(L)}$$

使得 $\frac{y_1}{x_1}=0\in\mathrm{coker}(M_{\Lambda(L)}\hookrightarrow Im(f))$。

接下来，对于（L–的平移）$-\frac{y_3}{x_3}$，我们再次有： I_{irr} 中的任意单项式 q，至少能被 x_1, x_3 或 x_4 中的一个整除； I_{irr} 是 $X_\Sigma \times X_\Sigma$ 的无关理想。若 x_1 整除 q，则

$$\frac{y_3}{x_3} \cdot x_1 = \left(\frac{x_1 y_3}{x_3 y_1} \right) \cdot y_1 \in M_{\Lambda(L)}$$

如果 x_3 整除 q，那么

$$\frac{y_3}{x_3} \cdot x_3 = y_3 \in M_{\Lambda(L)}$$

因为 $1 \in M_{\Lambda(L)}$。最后，如果 $x_4 | q$，那么

$$\left(\frac{y_3}{x_3} \right) x_4 y_2 = \left(\frac{x_4 y_2 y_3}{x_2 x_3 y_4} \right) x_2 y_4 \in M_{\Lambda(L)}.$$

这表明 $\frac{y_3}{x_3} = 0 \in$余核$(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f))$。因此，

$$\operatorname{coker}(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)) = 0$$

模 I_{irr}，对于次级扇的有效锥中由 $\mathcal{O}(D_2)$ 和 $\mathcal{O}(D_4)$ 张成的室内部内的 $X_\Sigma \times X_\Sigma$ 对应的 $\epsilon = \mathcal{O}(D_2) + \mathcal{O}(D_4)$。

5.4. 余核的一般论证$(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f))$ 对于 ϵ 在有效锥中。 给定X_Σ 光滑且射影，并且没有环面因子，我们有以下正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \leftarrow & Cl(T)_{\mathbb{R}} & \leftarrow & \mathbb{R}^A & \leftarrow & L_{\mathbb{R}} & \leftarrow & 0 \\ & & & & \cup & & & & \\ & & & & \epsilon & & & & \end{array}$$

其中， $\epsilon \mapsto \epsilon$ 位于 $\mathcal{F}_{\Sigma(A)}$的有效锥中。现在， ϵ 给出一个凸函数 g_ϵ： $N_{\mathbb{R}} \to \mathbf{R}$，该函数在相应扇 Σ_ϵ 的所有锥上都是线性的，使得极大线性区域对应于 Σ_ϵ中的极大锥。因此，g_ϵ 给出了扇 Σ_ϵ 及其相应的

无关理想 I_{irr}，对于 $\Sigma_\epsilon \times \Sigma_\epsilon$，其定义为

$$\left\langle \prod_{i\in I_\emptyset} x_i \prod_{\rho\not\in\sigma} x_\rho \mid \sigma \in \Sigma_{max} \right\rangle \cap \left\langle \prod_{i\in I_\emptyset} y_i \prod_{\rho\not\in\sigma} y_\rho \ \sigma \in \Sigma_{max} \right\rangle$$

继续考察映射（$\mathcal{F}^\bullet_{\mathcal{H}^\epsilon_L}$，$\partial^\bullet_\epsilon$）$\xrightarrow{f} S_{\prod x_i}$ 以及我们对$coker(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f))$ 模 I_{irr}（对于 $\Sigma_\epsilon \times \Sigma_\epsilon$）的考察，我们考虑 $p \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$，使得$p \mapsto p \in \mathcal{H}^\epsilon_L(0)$ 在 $\mathbb{R}L$ 中接近 0。我们之前将 $\underline{p} \in \mathbb{R}L$ 称为 p。在这里，我们取

$$\overline{p} = \bigcap_{\rho\in\mathcal{B}_p} \{x_\rho = 0\}$$

作为 $\mathcal{B}_p$的定义。现在，$\mathcal{H}^\epsilon_L$ 的横截性意味着，$\mathcal{B}_p$ 给出 $\mathbb{R}L$ 的一个基。由于 p在 $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ 中接近 $\vec{0}$，单项式标签 m_p 是平方自由的，并且 $\epsilon \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}_{\geq 0}$ 意味着 m_p 可以写成 $\frac{y_{i_1}\cdots y_{i_\ell}}{x_{i_1}\cdots x_{i_\ell}}$。

根据 $\mathcal{H}^\epsilon_L$的定义，p 上的单项式标签为

$$m_p = \frac{x^{\vec{u}}}{y^{\vec{u}}} \mid \vec{u} = \lfloor p \rfloor.$$

现在，我们减去由 ℓ_p（u_ρ）$= \epsilon_\rho$ for$\rho \in \mathcal{B}_p$确定的线性泛函 ℓ_p，从而调整 g_ϵ。由于 $\mathcal{B}_p$ 为 $\mathbb{R}L$ 以及 N给出一个基，因此 ℓ_p 由这些信息确定。也就是说，我们构造

$$\tilde{g}_\epsilon := g_\epsilon - \ell_p$$

从而得到

$$p = \tilde{g}_\epsilon(\{u_\rho\})$$

除去 $I_\emptyset$ 中的坐标。由于对应于 $I_\emptyset$ 中任一元素的变量总是出现在无关理想中任意单项式的支撑内，我们不妨假设 $p = \tilde{g}_\epsilon$。为证明 $coker(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)) = 0$ 模 I_{irr}，令 σ 为 Σ_{max} 中任意一个极大锥。由 g_ϵ 的凸性可知，$\tilde{g}_\epsilon$ 也是凸的。这给出了对 Σ 中极大锥的一个细分，使得以下任一情况成立：

(i) $\sigma \subseteq \tilde{g}_\epsilon^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$

（ii） $\sigma \subseteq \tilde{g}_\epsilon^{-1}(\mathbf{R}_{<0})$

(iii) (i) 和 (ii) 均不成立

在情形 (i) 中，由于我们只需关注不属于 $I_\emptyset$的部分，可以假设$g_\epsilon(u_\rho) = \epsilon_\rho$ ，使得 $p = \tilde{g}_\epsilon(\{u_\rho\})$。如果我们选择 ϵ 足够小，使得 $|\epsilon| << 1$，那么作为 ϵ 的连续函数， ℓ_p仍然很小；这意味着 $p \in (-1, 1)$的坐标以及所有坐标的取整函数都属于集合 $\{-1, 0\}$。因此，对于满足 x_{i_j} 位于 m_p 的支撑中的指标$\{i_j\}$ ，其对应的坐标恰好是取整函数返回 -1的坐标。由于 $x^{\hat{\sigma}} = \prod_{\rho \notin \sigma} x_\rho$ 是 I_{irr} 的生成元（忽略 $I_\emptyset$），我们可知，与 σ 的射线相对应的所有变量都不在 m_p的支撑中，因此 $x^{\hat{\sigma}}$ 可以消去分母，得到 $x^\sigma \cdot m_p \in M_{\Lambda(L)}$。

在情形（ii）中，我们有 $\sigma \subseteq \tilde{g}_\epsilon^{-1}(\mathbf{R}_{<0})$、 $m_p = \frac{y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}}{x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}}$ 和 $x^{\hat{\sigma}} = \prod_{\rho \notin \sigma} x_\rho$。对于 p 接近 $\vec{0}$ 的情形，我们证明存在 $k > 0$，使得 $I_{irr}^k \cdot m_p \in M_{\Lambda(L)}$ 和 $coker(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)) = 0$，其依据是补充假设 X_Σ 为 Fano。若 X_Σ 为 Fano，则反典范除子$D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho$ 是非常丰沛的，因此我们可以定义 $v \in L$ 为 $v(u_\rho) = -1$ （对于 $\rho \in \sigma$ ），而在 σ之外定义为 $v(\rho')$ > -1 （对于 $\rho' \notin \sigma$）。由于 $v \in L$ 是格 L的一个元素， $v(u_\rho) \in \mathbf{Z}$ 对所有 $\rho \in \Sigma$均成立；(1) 蕴含对于所有 $\rho' \notin \sigma$， $v(\rho') \geq 0$ 。

现在 $\frac{x^{\vec{v}}}{y^v} \in M_{\Lambda(L)}$ ，我们只需考虑 m_p 的支撑中的变量；根据我们先前对 I_{irr}的描述，这些变量满足 $\rho \in \sigma$。这里，存在某个 $\vec{w} \in \mathbf{N}^{\mathcal{A}}$ 满足 $y^{\vec{w}} \in S$ ，以及某个 $\{s_\rho\} \subset \mathbf{N}$，使得

$$\prod_{\rho \notin \sigma} x_\rho^{s_\rho} \cdot m_p = y^w \cdot \frac{x^{\vec{v}}}{y^{\vec{v}}} \in M_{\Lambda(L)}$$

and

$$(x^{\hat{\sigma}})^{\max\{s_\rho\}} \cdot m_p = q \cdot \prod_{\rho \notin \sigma} x_\rho^{s_\rho} m_p \in M_{\Lambda(L)}$$

对于某个 $q \in S$。这里我们利用 $|\mathcal{A}| < \infty$ 可以取最大值这一事实，以及 S 是诺特的，因此 I_{irr} 具有有限生成集这一事实。

在下一小节中，我们将在不作 Fano假设的情况下推广陈述 (i)-(iii)，因此这里略去对 (iii) 的讨论。

5.4.1. 对于 $p \in \mathcal{H}_L^\epsilon(0)$ 远离 $\vec{0}$。对于远离 p $\vec{0}$ 且 X_Σ 光滑（此处不假设为 Fano）的情形，我们将用到以下引理：

引理 1：给定 $p \in \mathcal{H}_L^\epsilon(0)$和 σ_1， $\sigma_2 \in \Sigma(n)$，存在满足$(x^{\hat{\sigma}_1} y^{\hat{\sigma}_2})^k \cdot m_p \in M_{\Lambda(L)}$的 $k > 0$，当且仅当存在 $v \in L$和一个 $\ell > 0$，使得$(x^{\hat{\sigma}_1} y^{\hat{\sigma}_2})^\ell \cdot m_{p+v} \in M_{\Lambda(L)}$。

证明。任意 $v \in L$ 都有整数坐标，使得 $\lfloor v \rfloor = v$ 且 $m_v = \frac{x^{\lfloor v \rfloor}}{y^{\lfloor v \rfloor}} = \frac{x^v}{y^v}$。这意味着将 $v \in L$ 加到 p 上只会使所有坐标发生整数倍的平移，因此取取整函数时不会发生抵消：

$$\lfloor p + v \rfloor = \lfloor p \rfloor + v$$

特别地，我们注意到，如果 p 和 v 都在 L中，那么 $m_{p+v} = m_p \cdot m_v$，因为$p, v \in L \implies p + v \in L$。因此，如果存在 $k > 0$ 使得 $(x^{\hat{\sigma}_1} y^{\hat{\sigma}_2})^k \cdot m_p \in M_{\Lambda(L)}$，那么 $(x^{\hat{\sigma}_1} y^{\hat{\sigma}_2})^k \cdot m_{p+v} = (x^{\hat{\sigma}_1} y^{\hat{\sigma}_2})^k \cdot m_p m_v \in M_{\Lambda(L)}$，因为 $M_{\Lambda(L)}$ 在 $S[L]$的作用下保持闭合。现在，$M_{\Lambda(L)}$ 在 $S[L]$ 的作用下保持闭合，也证明了反向成立。

□

对于以下**断言**，我们需要**分离引理**[Ful93], 它可以用超平面分离凸集：

分离引理：如果 σ 和 σ' 是凸多面体锥，且它们的交集 τ 是各自的一个面，那么存在一个 u 属于 $\sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$，使得

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp.$$

将第 5.4 节中此前的情形 (i)–(iii) 推广后，我们作出如下断言。

断言：给定 $p \in \mathcal{H}_L^\epsilon(0)$，对于所有 σ_1， $\sigma_2 \in \Sigma(n)$，存在 $u \in L$， $k \in \mathbf{N}$ 和 α， $\beta \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$，使得 $(x^{\hat{\sigma}_1} y^{\hat{\sigma}_2})^k m_p = x^\alpha y^\beta m_u \in M_{\Lambda(L)}$。

Proof. 该**断言**成立，当且仅当存在 $u \in L, k \in \mathbf{N}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^{\Sigma(1)}$ 使得 t

$$(x^{\hat{\sigma}_1}y^{\hat{\sigma}_2})^k m_p m_{-u} = x^\alpha y^\beta \in S$$

令 $\lfloor p_{\rho_i} \rfloor := \tilde{a}_{\rho_i}$ 对所有 i，使得

$$\begin{aligned}\lfloor p \rfloor &= (\lfloor p_{\rho_1} \rfloor, \ldots, \lfloor p_{\rho_{\Sigma(1)}} \rfloor) \\ &= (\tilde{a}_{\rho_1}, \ldots, \tilde{a}_{\rho_{|\Sigma(1)|}})\end{aligned}$$

并定义集合 A_+，A_- 如下：

$$m_p = \frac{\prod_{A_+} x_\rho^{a_\rho} \prod_{A_-} y_\rho^{a_\rho}}{\prod_{A_+} y_\rho^{a_\rho} \prod_{A_-} x_\rho^{a_\rho}}$$

对于所有 ρ，均有 $a_\rho = |\tilde{a_\rho}|$。由于 X_Σ 是光滑的，存在 $u_1 \in L$，使得对于所有 $\rho \in$，$u_1(e_\rho) = a_\rho$ $(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ $(\mathbf{1})$ $= \sigma_1$ $(\mathbf{1})$ $\cap \sigma_2$ $(\mathbf{1})$。根据**分离引理**，存在 $u_2 \in L$，使得

$$u_2\Big|_{\sigma_1 \cap \sigma_2} = 0, u_2\Big|_{\sigma_1 \setminus \sigma_2} > 0, u_2\Big|_{\sigma_2 \setminus \sigma_1} < 0.$$

由于 $x^{\hat{\sigma}_1}y^{\hat{\sigma}_2}$ 是 I_{irr}的生成元，除去 I_{irr} 所导致的挠，只需考虑 m_p 的分子和分母中变量 x_ρ 和 y_ρ 对应的因子（在 S上）。现在存在 $k_0 \in \mathbf{N}$，使得

$$\begin{aligned}(x^{\hat{\sigma}_1}y^{\hat{\sigma}_2})^{k_0} m_p &= \frac{f_1}{\prod_{\sigma_2 \cap A_+} y_\rho^{a_\rho} \prod_{\sigma_1 \cap A_-} x_\rho^{a_\rho}} \\ &= \frac{f_2}{\prod_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap A_+} y_\rho^{a_\rho} \prod_{(\sigma_2 \setminus \sigma_1) \cap A_+} y_\rho^{a_\rho} \prod_{\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap A_-} x_\rho^{a_\rho} \prod_{(\sigma_1 \setminus \sigma_2) \cap A_-} x_\rho^{a_\rho}} \quad [\text{subdivision of sets } A_+, A_-]\end{aligned}$$

对某些单项式 f_1，$f_2 \in S$。现在 $m_p m_{-u_1} = m_{p-u_1}$ 由于 $u_1 \in L$ 可得，存在$k_1 \in \mathbf{N}$，使得

$$(x^{\hat{\sigma}_1}y^{\hat{\sigma}_2})^{k_1}m_{p-u_1} = \frac{f_3}{\prod_{(\sigma_2\setminus\sigma_1)\cap A_+} y_\rho^{b_\rho}\prod_{(\sigma_1\setminus\sigma_2)\cap A_-} x_\rho^{b_\rho}}$$

对某个 $\{b_\rho\} \subset \mathbf{N}$ 和某个单项式 $f_3 \in S$，因此存在 $\ell \in \mathbf{N}$，使得 $m_{p-u_1}m_{-\ell u_2} = m_{p-u_1-\ell u_2}$ 由于 $\ell u_2 \in L$ 可得

$$(x^{\hat{\sigma}_1}y^{\hat{\sigma}_2})^{k}m_{p-u_1-\ell u_2} = f_4$$

对于某个单项式 $f_4 = x^\alpha y^\beta \in S$，对于某个 $\alpha,\ \beta \in \mathbf{N}^{|\Sigma(1)|}$。

□

根据引理 1，这意味着存在 $k \in \mathbf{N}$，使得 $(x^{\hat{\sigma}_1}y^{\hat{\sigma}_2})^k \cdot m_p \in M_{\Lambda(L)}$ 对于任意选择的 σ_1，$\sigma_2 \in \Sigma(n)$，从而 $coker(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)) = 0$ 对于有效锥中的 ϵ 成立。

事实上，这个论证表明，对于 $p \in \mathcal{H}_L(0)$，$coker(M_{\Lambda(L)} \hookrightarrow Im(f)) = 0$，因此对于任意光滑环面簇 X_Σ，我们都有一个对角线的消解，而无需变形 $\mathcal{H}_L^\epsilon$。

6. Resolution of diagonal for toric D-M stack associated to global quotient of smooth toric variety by finite abelian group

上一节中针对 $D^b_{Coh}(X'_\Sigma)$里 X_Σ 光滑情形的对角线消解，也强化了对角对象的构造；该对象给出了傅里叶-穆凯变换的核，并且在 $X'_\Sigma = {}^{X_\Sigma}\!/_\mu$ 是光滑环面簇 X_Σ 被有限阿贝尔群 μ作整体商的情形下，该变换诱导恒等映射。

也就是说，由于光滑托里克簇可以由仿射空间开集覆盖 s:

$$X_\Sigma = \cup_{\sigma \preceq \Sigma(n)} U_\sigma$$

对于 $U_\sigma = \mathbf{Spec}\ \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] \cong \mathbf{A}^m$，若 $m = \mathbf{rank}\,(M) = \mathbf{rank}\,(N)$，则同一个对角对象

$$\pi(M_{\Lambda(L)}) = M_{\Lambda(L)} \otimes_{S[\Lambda(\tilde{L})]} S$$

相应的消解 $(\mathcal{F}_{\mathcal{H}^\epsilon_{\tilde{L}}/\tilde{L}},\ \partial)$ 在整体商的情况下也同样成立

$$X'_\Sigma = X_\Sigma \diagup \mu$$

其中 X_Σ 光滑（不一定是幺模的），且 μ 一个有限阿贝尔群 p.

附录

第 5.4.1 节中的引理 2 适用于 X_Σ 光滑、Fano，且不一定是幺模的：

对于任意 $p \in \mathcal{H}_L^c(0)$ 和 $\sigma \in \Sigma(n)$，存在 $v_\sigma \in L$，使得 $(p+v_\sigma)_\rho < 0$ 仅在 $\sigma(1)$ 上成立，并且 $(p+v_\sigma)_\rho > 0$ 对于 $\rho \notin \sigma(1)$ 成立。

证明。 我们先前指出，由于 X_Σ 是 Fano，因此存在 $v \in L$ 使得

$$\begin{cases} v(u_\rho) < 0 & \forall\ \rho \in \sigma(1), \\ v(u_{\rho'}) \geq 0 & \forall \rho' \notin \sigma(1) \end{cases}$$

现在存在 $r \in \mathbb{Z}$，使得对于满足 $\rho \in \sigma(1)$ 的所有坐标，$(r \cdot v)_\rho << 0$ 成立，从而所有 $\rho \in \sigma(1)$ 都远小于任意坐标 $\rho' \notin \sigma(1)$。此外，存在唯一的 $\tilde{v} \in L$ 使得

$$\begin{cases} (p+\tilde{v})(u_\rho) = 0 & \forall\ \rho \in \sigma(1) \\ (p+\tilde{v})(u_{\rho'}) > 0 & \forall\ \rho' \notin \sigma(1). \end{cases}$$

现在，在 v 和 $\tilde{v}$ 上加上足够大的倍数，确保存在 r，$k \in \mathbb{Z}$，使得 $v_\sigma = rv + k\tilde{v}$ 表明 $p + v_\sigma$ 满足

$$\begin{cases} (p+v_\sigma)_\rho < 0 & \text{iff } \rho \in \sigma(1), \\ (p+v_\sigma)_\rho > 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

References

[Har77] R. Hartshorne。《代数几何》。研究生数学教材。Springer，1977 年。 ISBN: 9780387902449。 URL:

https://books.google.com/books?id=3rtX9t-nnvwC。

[Bei78] A. A. Beilinson.《$\mathbb{P}^n$ 上的凝聚层与线性代数问题》。载于：泛函分析及其应用 12.3（1978），第 214–216 页。 DOI:10.1007/BF01681436。 URL: https://doi.org/10.1007/BF01681436。

[Cox92] David A. Cox.《“环面簇的齐次坐标环”勘误及原论文》。载于：（1992）。 DOI：10.48550/ARXIV.ALG-GEOM/9210008。 URL：https://arxiv.org/abs/alg-geom/9210008。[Ful93] WilliamFulton.《托里克簇导论》。（*AM-131*）。普林斯顿大学出版社

y

出版社，1993年。 ISBN: 9780691000497。 URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctt1b7x7vc （访问于 08/09/2022）。[BS97] Dave Bayer 和 Bernd Sturmfels。单项式模的细胞分解。1997年。 DOI: 10.48550/ARXIV.ALG-GEOM/9711023。 URL: https://arxiv.org/abs/alg-geom/9711023。[BPS99] Dave Bayer、Sorin Popescu 和 Bernd Sturmfels。幺模劳伦斯理想的奇异关系。1999年。 DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/9912247。 URL:https://arxiv.org/abs/math/9912247。[EB 05] E. Miller 和 B. Sturmfels。组合交换代数。第1版，第1卷。Springer，纽约州纽约市，2005年。[CLS11] David A. Cox、John B. Little 和 Henry K. Schenck。托里克簇。美国英语。第124卷。数学研究生课程。美国：美国数学会，2011年。 ISBN: 978-0-8218-4819-7。 DOI: 10.1090/gsm/124。
电子邮件地址: rcanders@ksu

.edu