arXiv:2303.17506v1 [cs.CC] 30 Mar 2023

最稠密 k 子图的平方和下界

Chris Jo nes* Aaron Potechin† Goutham Rajendran‡ Jeff Xu§

2023年3月31日

摘要

给定一个图和一个整数 k，最稠密 k 子图问题要求找到由 k 个顶点构成且边数最多的子图。这是一个基础性问题，数十年来一直受到广泛深入的研究，其应用涵盖众多领域。目前最先进的算法是由 Bhaskara 等人提出的 $O(n^{1/4+\varepsilon})$ 倍近似算法（对任意 $\varepsilon > 0$），见 STOC '10]。此外，所谓的 对数密度框架 预测这一结果已是最优的，即高效算法不可能实现 $O(n^{1/4-\varepsilon})$ 倍近似。在平均情形下，最稠密 k 子图是一个典型的噪声推断任务，据信它存在统计-计算差距。

在这项工作中，我们通过给出针对强大的平方和（SoS）算法的匹配下界，迄今为止最有力地证明了稠密 k-子图问题的困难性。该元算法基于凸规划，在许多优化和推断问题上都能实现最先进的算法保证。对于$k \leq n^{\frac{1}{2}},$，我们针对困难区间给出了度为 n^{δ} 的平方和下界，这与对数密度框架的预测一致。

为证明这一点，我们采用 Barak 等人 [FOCS '16] 开创的现代框架，用于证明平均情形问题的平方和下界。一个关键问题是，输入中密度高于平均水平的小型子图会极大地影响候选伪期望算子在该子图附近的取值。为应对这一挑战，我们基于正最小顶点分隔集设计了一种新颖的矩阵分解方案。随后，我们证明一个交集权衡引理，表明使用该分隔集时产生的误差项确实很小。

*博科尼大学。chris.jones@unibocconi.it。部分经费由欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：834861）下的欧洲研究委员会提供。

†芝加哥大学。potechin@uchicago.edu。部分经费由美国国家科学基金会资助（CCF-2008920）。

‡卡内基梅隆大学。gouthamr@cmu.edu。部分经费由美国国家科学基金会资助（CCF-1816372 和 CCF-2008920）。§卡内基梅隆大学。jeffxusichao@cmu.edu。部分经费由美国国家科学基金会职业奖（#2047933）和 CyLab 校长奖学金提供。

目录

1 引言 **1**

1.1 我们的贡献.21.2 对数密度框架.41.3 我们的方法.51.4 相关工作.71.5 论文结构.9

2 预备知识 **9**

2.1 平方和算法.92.2 矩矩阵.102.3 p偏置傅里叶分析与图矩阵.112.4 范数界.132.5 图矩阵演算：因式分解.132.6 图矩阵演算：复合.142.7 图矩阵演算：交集.152.8 图矩阵演算：非正规形状与线性化.162.9 伪校准.18

3 正最小顶点分隔集分解 **21**

3.1 正最小顶点分隔集的动机.213.2 PMVS 子程序.233.3 交集项运算.253.4 运算总结与整体分解.26

4 组合范数收费论证 **28**

4.1 设定.284.2 中间形状的松弛量.314.3 PMVS 子程序的松弛量.324.4 交集项的松弛量.374.5 移除中间边指示变量的松弛量.454.6 最终松弛量下界.46

5 结论 **47**

A 图矩阵的补充内容 55
A.1 证明命题 2.23 .55A.2 补充定义.56

B 最稠密子图权重函数 56

C 组合调整项的要求 57

D 范数界 58
D.1 条件化. 62

E 形式化近似半正定分解 68
E.1 近似半正定分解的起点.68E.2 交互模式.70E.3 近似半正定分解.73E.4 分析 $\mathbf{\Lambda}$. 77E.5 c-函数界.85E.6 截断误差.89E.7 $\mathbf{L}$ 的良态性.93

$\widetilde{\mathbf{F}}$ 计算 $\mathbb{E}[1]$ 97

1 引言

在最稠密 k-子图问题中，给定一个含有 n 个顶点的无向图 G 和一个整数 k，我们希望输出含 k 个顶点且边数最多的子图，换言之，即边密度最高的含 k 个顶点的子图。这是 k-团问题的自然推广 [Kar72] ，数十年来一直受到广泛研究 [FS+97, SW98, FPK01, FL01, AHI02, Fei02, Kho06, GL09, BCC+10, RS10, AAM+11, BCG+12, Bar15, HWX15, Ame15, HWX16, BKRW17, Man17, BA20, KL20]。这个问题受到深入研究，部分原因在于它与其他问题和领域有许多联系（例如 [HJ06, HJL+06, KS07, Pis07, KMNT08, AC09, CHK11, HIM11, LNV14, CMVZ15, CL15, CLLR15, SFL16, CZ17, TV17, Lee17, CDK+18, MWZ23]）。该问题目前已知的最佳近似算法可实现 $O(n^{1/4+\varepsilon})$ 的近似因子，其中任意常数 $\varepsilon > 0$，该算法由 [BCC+10] 提出。另一方面，人们猜想，不存在能够实现 $O(n^{1/4-\varepsilon})$ 近似的高效算法。

最稠密 k-子图是一个引人关注的问题，因为人们推测并普遍认为，随机实例（Erdős-Rényi 图）是算法面临的“最难”实例。事实上，“最坏情况即平均情况”这一见解，对前述 [BCC+10] 中的算法至关重要。他们将平均情况实例推广到最坏情况实例的思路，后来被推广为 对数密度框架 (详见 第 1.2 节)，并进一步应用于其他各种问题 [CDK12、CDM17、CMMV17]。由于针对随机实例的算法似乎是解决所有实例问题所必需的关键概念步骤，因此深入理解这些随机实例已成为一项迫切任务。

如 [BCC+10、BCG+12、BKRW17、Man17], 随机图上的最稠密 k-子图是平均情形复杂度领域中的一个标志性问题。此外，该问题在随机实例上的猜想难度（也是我们工作的重点）已被用于金融领域的应用 [ABB+10] 以及密码学领域 [ABW10]。然而，无论在平均情形还是最坏情形下，关于最稠密 k-子图的困难性证据都仍有待加强。例如，即使在最坏情形下，也没有研究证明，基于任何合理的复杂性理论假设，最稠密 k-子图难以达到 n^{ε}-近似，其中 $\varepsilon > 0$ 为固定值（尽管有些研究已接近这一目标，见 第 1.4 节）。在更有趣的随机图平均情形中，证明其困难性的进展相对有限，更不用说达到对数密度框架所能解释的程度了。

在这项工作中，我们通过一种通用且强大的优化算法——平方和（SoS）层级，研究随机图上最密集 k-子图问题的计算困难性 [Sho87、Nes00、Par00、Gri01、Las01]。平方和层级是一族针对多项式优化问题的半定规划松弛，实现了某种“平方和推理”。近些年来，SoS 可以说已成为平均情形复杂度研究的核心，其已被证明是组合优化和连续优化中非常有效的工具。事实上，平方和层级足够强大，能够涵盖最稀疏割 [ARV04], 最大割[GW95], 所有最大 k-约束满足问题 [Rag08], 等问题的最先进凸松弛。平方和还带来了新的算法，用于

近似求解约束满足问题 [AJT19, BBK+21, BHKL22]，并推动了鲁棒统计领域的突破[KS17, HL18, RSS18, KKM18, Hop20, BP21, BK20]，，其中一个亮点是解决了高斯混合学习中长期悬而未决的问题（历经十余年研究，最终成果见 [BDJ+20, LM21]）。此外，研究表明，对于一大类问题，平方和算法在所有半定规划松弛中效果最佳[LRS15]。因此，理解平方和算法的能力边界是一项重要的研究课题；针对平方和算法的下界为算法难解性提供了有力证据 [HKP+17, Hop18, Kun21]。

本文证明，对于 $k \leq n^{\frac{1}{2}}$，度为 n^{δ} 不会带来任何显著改进，因而证实了对数密度框架所预测的稠密 k 子图随机实例猜想困难区间。由此解决了以下工作提出的开放问题 [BCG+12、Raj18、CM18]。鉴于 Bhaskara 等人[BCC+10] 提出的、与对数密度框架相匹配的算法可由平方和刻画，我们的下界完整地描绘了平方和在稠密 k 子图问题上的性能，其中 $k \leq n^{\frac{1}{2}}$。这为稠密 k 子图问题的猜想可近似性阈值正确提供了有力证据。 -

1.1 我们的贡献

现在我们将介绍关于稠密 k 子图平方和下界的结果，这些结果与对数密度框架的预测相符（该框架将在 第 1.2 节介绍）。

考虑稠密 k-子图问题的以下假设检验变体。对于整数 n 和实数 $p \in [0,1]$，令 $G_{n,p}$ 表示 Erd˝os-Rényi 随机分布，其中通过独立地以概率 p 选取每条边，使一个含有 n 个顶点的图被抽样得到。对于参数 n、$k \in \mathbb{N}$ 和 p，$q \in [0,1]$，给定一个图 G，它是从以下分布之一中抽样得到的

1. 零假设分布 $G_{n,p}$ or
2. 备择分布：我们首先采样 $G \sim G_{n,p}$，然后通过以 kn 的概率选取每个顶点，得到集合 $H \subseteq V(G)$，最后用从 $G_{|H|,q}$ 中采样的结果替换 H。 –

我们的目标是以不可忽略的概率正确判断它来自哪种分布。

假设检验问题是一个稠密 k-子图的“植入模型”，据推测该模型会呈现 统计-计算差距 [BB20, BBH+20]。以高概率，对于 q 略大于 p 时，备择分布中的子图H确实是 G 中规模为 k 的最稠密子图（因此，原假设分布与备择分布在统计上可区分），但据推测，在计算上无法区分这两种情况（在下述参数范围内）。

对这一假设检验变体的算法研究对对数密度框架至关重要 [BCC+10]，该框架既将针对假设检验变体的算法推广为最坏情况算法，也预测了假设检验问题难以求解时 n、k、p、q 之间的关系。具体而言，考虑以下情形

$$k = n^{\alpha}, \qquad p = n^{-\beta}, \qquad q = n^{-\gamma}$$

对于常数 $\alpha \in (0, 1/2], \beta \in (0, 1)$，$\gamma \in (0, 1)$，这是我们将在本文中始终使用的记号。根据该框架，如果

$$\gamma > \alpha\beta$$

也就是说，在这种情形下，任何多项式时间算法都无法以至少 2/3 的成功概率区分这两个分布。[1]

为陈述我们的结果，我们回顾一下，SoS层级是一个由整数D_{SoS}参数化的凸半定规划松弛族，D称为 SoS 的度 或层级。随着D_{SoS} 增大，松弛会变得更紧，但运行时间也会以大约$n^{O(D_{\mathrm{SoS}})}$ 的速度增长（对于度为D_{SoS} 的 SoS）。因此，从概念上说，度$O(1)$ 对应于多项式时间，而度为n^{δ} 则对应于次指数时间算法。在这项工作中，我们研究度为$D_{\mathrm{SoS}} = n^{\delta}$ 的平方和算法在稠密 k-子图问题上的表现，其中参数为常数 $\delta > 0$，并获得了强下界。

由于平方和程序与伪期望算子之间存在众所周知的对偶性，要证明下界，只需证明存在一个满足约束的可行伪期望算子即可。关于平方和的形式化定义，请参见~第 𝔼 2.1节。现在我们可以陈述我们的结果了。

定理 *1.1*. 对于所有满足 $\gamma > \alpha\beta$ 的常数 $\alpha \in (0, 1/2], \beta \in (0, 1), \gamma \in (0, 1)$，存在 $\delta > 0$，使得对于图 $G = (V,E) \sim G_{n,p}$，以高概率存在一个定义在平方和程序变量 $\{XX_u\}_{u \in V}$ 上的 n^{δ}~阶伪期望算子 $\mathbb{E}$，满足

~*1.*（归一化） $\mathbb{E}[1] = 1 \pm o(1)$。~*2.*（含$k$个顶点的子图）$\mathbb{E}[\sum_{v \in V} XX_v] = k(1 \pm o(1))$。*3.*（高密度） $\widetilde{\mathbb{E}}[\sum_{\{u,\, v\} \in E} XX_u XX_v] = k^2 q^2 (1 \pm o(1))$ ~*4.*（可行性）对应于 $\mathbb{E}$ 的矩矩阵$\mathbf{M}$ 是半正定的。

—

[1]当 $\alpha > \frac{1}{2}$，-即 $k = \omega(\sqrt{n})$时，谱算法优于对数密度阈值 [BCC+10、KL20]。谱算法由 2 阶平方和程序刻画。已有多项工作还研究了其他特殊情形（例如当 $q = 1$，或当 p、q 为常数时）。参见 第 1.4 节。[2]在病态情形下，位复杂度可能会带来问题 [O'D17、RW17]

这尤其意味着，在对数密度框架预测的困难区域中，无法使用平方和算法解决上述稠密k-子图问题。正如前文所述，这些SoS下界有力地表明，对于$k \leq \sqrt{n}$，高效算法不太可能在稠密k-子图问题上超越对数密度框架的预测。

通过设置 $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ 和 $\gamma = 1/4 + \varepsilon$，我们得到以下重要推论。

推论 1.2. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $\delta > 0$，使得度为 n^{δ} 的平方和在最稠密 k-子图问题上呈现 $O(n^{1/4-\varepsilon})$ 的整数性间隙。

该推论基本上达到了目前已知的最稠密 k-子图问题的最佳算法保证 [BCC+10]，即一种高效的 O(n) 因子近似算法，从而完善了平方和方面的研究图景。

1.2 对数密度框架

为更好地理解我们的结果，我们简要介绍一下对数密度框架[BCC+10]。参见 [KL20，第 1 节。3] 或 [CM18]，其中有更详细的介绍。

对数密度框架是一种相对较新的技术，它通过研究平均情况实例上的算法，为问题设计最坏情况算法。该框架最初是在最稠密k-子图问题的背景下提出的，此后也被用于许多其他问题，例如最低度 2-生成器、最小 p-边子图（SpES） [CDK12], 小集合二部顶点扩展（SSBVE） [CDM17], 标签覆盖、2-CSP [CMMV17], 等。

形式化地，对于一个有 n 个顶点且平均度为 d 的图，我们将其对数密度定义为 $\log d / \log n$。考虑 第 1.1 节中的假设检验问题。对数密度框架预测，当且仅当植入子图的对数密度大于植入前原始图的对数密度时，才可能通过算法区分这两种分布并解决该假设检验问题。由于从 $G_{n,p}$ 中采样得到的图的平均度为 $\approx np$，该框架预测，当某个常数 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\log(kq)}{\log k} \geq \frac{\log(np)}{\log n} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gamma \leq \alpha\beta - \varepsilon'$$

对于某个常数 $\varepsilon' > 0$。

此外，对我们而言极其重要的是，如果不等式反向成立，该框架也会预测算法难解性。也就是说，如果

$$\gamma \geq \alpha\beta + \varepsilon$$

对于某个常数 $\varepsilon > 0$，对数密度框架预测，不存在能够区分这两种分布的高效算法。为清楚起见，我们来看特殊情形$\alpha = 1/2$、$\beta = 1/2$ 和 $\gamma = 1/4 + \varepsilon$。那么，我们预计高效算法很难区分以下分布，

1. 零假设分布 $\mathcal{G}_{n,\ \frac{1}{\sqrt{n}}}$ —

2. 备择分布：我们首先采样 $G \sim G_{n,\frac{1}{\sqrt{n}}}$，然后选取集合 $H \subseteq V(G)$，方法是以概率 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 纳入每个顶点（因此 $|H| \approx \sqrt{n}$），最后用从 $G_{|H|,\ n^{1/4+\varepsilon}}$ 中采样得到的样本替换 H。

——

顺便指出，在这种情况下，由于零假设分布下最稠密k-子图的平均度为 $\widetilde{O}(\sqrt{n})$，而备择分布下的平均度为 $\widetilde{\Omega}(n^{3/4-\varepsilon})$，区分问题的困难性意味着 Densest k-Subgraph 的 $n^{1/4-\varepsilon}$-因子近似也很困难。

1.3 我们的方法

由于平方和是一个凸规划，要证明下界，只需构造一个可行点，即一个 伪期望算子 或 矩矩阵，它是一个依赖于输入的大型非线性随机矩阵。从整体上看，我们的证明借鉴了已有的策略，用于证明平方和算法在随机输入上的下界：利用 伪校准 [BHK+16] 构造候选矩矩阵，然后利用图矩阵[AMP20]研究候选矩阵的谱。这一策略已成功应用于多个场景 [BHK+16，PR20，GJJ+20，JPR+22]，尽管在每种情况下（包括我们的情况），都需要额外的重要见解。

给定一个随机输入图，第一步是构造候选伪期望算子或矩矩阵。伪校准给出了一个候选矩阵，我们可以直接使用，无需进一步推导。回想一下，半定规划是在正半定（PSD）矩阵构成的锥上进行优化；主要挑战在于证明候选矩矩阵以高概率满足可行性（即为半正定），其中概率取自随机输入图。

我们面临的主要问题是，先前工作的矩阵分解策略在我们的设定下显然无法导出主导 PSD 项。现有框架包含以下几个步骤：

1. 将候选矩矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 表示在图矩阵（即傅里叶）基下；

2. 识别 $\mathbf{\Lambda}$ 中一类谱占优图矩阵，它们整体上近似半正定；

3. 执行近似 PSD 分解，得到 PSD 项以及额外的误差项；

4. 证明所有非主导项和误差项都可以归入主导 PSD 项，也就是说，它们是“可忽略的”。

就当前讨论而言，只需知道，步骤 (1) 中的每个图矩阵都衡量一个固定的小子图（即形状）对候选矩矩阵的贡献；此外，图矩阵的谱范数可以根据小型形状图的组合性质推断出来。 JPR [JPR+22、RT23] 的研究表明，图矩阵的范数由形状的稀疏最小权重顶点分隔集（*SMVS*）决定，误差至多相差低阶因子（定理 2.21）。直观来说，分隔集越小、越稠密的形状，其范数越大。

为了在步骤 (2) 中识别范数主导形状，先前的工作通过形状最左侧和最右侧的 *MVS*（而非 *SMVS*）对形状进行分解，从而为每个形状得到一个近似半正定项，其谱范数主导原始图矩阵。随后，利用范数界和关于顶点分隔集的组合论证，证明步骤 (4) 中的所有偏差项都很小。

尽管以往工作避免将 SMVS 用作分解准则，转而使用 MVS，但在我们的设定中，SMVS 是必不可少的，因为稠密 k-子图问题对输入中的微小局部结构十分敏感。具体而言，对于固定的顶点集合U，如果U 中有许多顶点拥有公共外部邻居，或属于比平均水平更稠密的子图，那么算法就会大幅提高对U 属于该稠密子图的判断置信度。使用 SMVS 可以理解为：针对每种形状，找出对图矩阵范数影响最大的那个小型稠密子图。

基于 SMVS 的分解带来了新的概念性挑战。令人意外的是，若不加以特别处理，SMVS 分解反而可能导致某些本应为“半正定”的项变成负值。我们在给出处理图矩阵所需的定义后，将介绍这些技术挑战，以及我们采用正最小权顶点分隔集 的解决方案（参见第 3.1 节 中的技术概述）。

一旦我们正确识别出主导 PSD 项，接下来要做的就是利用交集权衡引理证明分解中的误差项足够小。这也是我们的一个创新贡献，因为它与以往工作的交集引理有显著区别。这个组合引理是证明中最关键的部分，因为它确保近似 PSD 分解中的误差项具有足够小的范数。

值得强调的是，对数密度判据 $\gamma > \alpha\beta$在我们的证明中多次出现，这令作者们颇感兴趣。对此的一种部分解释是：如果我们考察引理 4.8中每个傅里叶特征的贡献，$\gamma - \alpha\beta$这个量衡量了傅里叶特征的度增加时的衰减，也就是说，它是某种形状中的边衰减。因此，这会对分解中较高的傅里叶层级产生抑制效应。这种傅里叶衰减在低度

似然比 [HKP+17、Hop18、KWB22]，并且在先前的平均情形 SoS 下界中发挥了重要作用 [BHK+16、PR22、GJJ+20、JPR+22]。

1.4 相关工作

算法 最稠密 k-子图问题的算法已得到广泛研究，例如 [FS+97、SW98、FPK01、FL01、AHI02、ST08、GL09、BCC+10、MM15、Ame15、Bar15、BKRW17、BA20、KL20]，，本文不打算对这些工作进行概述（部分工作的简要综述可参见例如 [KL20]）。对于一般图，文献 [KP93]（该文也首次提出了这一问题）给出了一种多项式时间的 $\tilde{O}(n^{0.3885})$ 因子近似算法。随后，[FPK01] 将其改进为 $O(n^{1/3-\varepsilon})$ 因子近似（当常数$\varepsilon \approx 1/60$ 时），[GL09] 又将其改进为 $O(n^{0.3159})$ 因子近似。[BCC+10] 的开创性工作还提出了对数密度框架，并进一步给出了一种算法：对于所有常数 $\varepsilon > 0$，该算法能在 $n^{O(1/\varepsilon)}$ 时间内实现 $n^{1/4+\varepsilon}$ 因子近似。这被推测是高效算法所能达到的最佳结果。

稠密 k-子图的下界 鉴于其概念上的重要性和广泛的适用性，研究稠密k-子图问题的下界是一项重要的研究工作。下面列出一些相关的先前研究，但并不求全面。

1. 条件困难性：众所周知，稠密 k-子图问题的精确求解是 NP 困难的，但据我们所知，甚至常数因子近似的 NP 困难性也尚未得到证明。还有各种基于比$\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$更强假设的条件困难性结果，例如 [Fei02、Kho06、RS10、AAM+11、BKRW17、Man17]。我们特别指出 Manurangsi 的重要工作 [Man17]，：他基于指数时间假设，证明了该问题具有近多项式因子困难性。其他条件困难性结果的详细列表可参见同一篇论文。值得注意的是，这些结果均未达到多项式因子困难性。

   这些方法通过归约论证稠密k-子图是困难的。困难的一个来源是，归约对于平均情形问题的效果不如预期，因为归约往往会扭曲输入分布，并产生某种病态的输出。证明稠密k-子图的困难性，或许可以通过归约到一种新颖的非随机实例来实现；但是，如果稠密k-子图的困难实例确实只有随机图（或伪随机性足够强的图），那么更强大的平均情形归约理论或许是必要的前提。近期的一些研究在实现平均情形归约方面取得了令人振奋的进展 [BBH18，BB20，BABB21，HS21]。

   其余下界（包括我们的结果）都是无条件结果，不依赖任何猜想。

2. Sherali-Adams 困难性：对于度为 $\Omega(n^{\alpha(1-\alpha)-o(1)})$ 的 Sherali-Adams 层级（它是由线性规划

松弛构成的族），[BCG+12、CM18]证明了这一点。我们的结果在三个重要方面强于这些 Sherali-Adams 下界。首先，我们研究的是平方和，而非 Sherali-Adams。平方和层级涵盖 Sherali-Adams 层级，并且已知在许多情况下强得多（例如，参见 [KV15、DKSV06、CMM09、CLRS16、KMR17]，结合 [GW95、ARV09]），因此我们的结果蕴含了他们的结果。其次，我们得到的是度为n^{δ} 的下界，而不是度为 $\tilde{\Omega}$（log$n$）的下界。最后，尽管这些 Sherali-Adams 下界针对的是特定设置，即$\beta = \alpha$（在固定 α 时使整数性间隙最大的设置），我们的下界适用于参数 α、β、γ 的整个取值范围。

3. 平方和困难性：已有工作在最坏情况的平方和下界见于 [BCG+12、MM15、CMMV17]，这些结果通过在 [Tul09]开创的平方和框架内，将最大 k-CSP 的困难性结果归约而得。然而，即使针对最坏情况实例，这些平方和下界也并非最优，因为它们未达到已知的算法保证（更准确地说，它们证明了度为 n^{ε} 的平方和可达到 $n^{1/14-O(\varepsilon)}$倍下界，而猜想的困难性下界为 $n^{1/4-O(\varepsilon)}$倍）。另一方面，我们的工作研究平均情况实例（而非最坏情况实例），并达到已知算法的保证。因此，我们显著改进了先前的困难性结果，并弥合了这一差距。此外，我们的结果可按 [Tul09]的方法进行归约，从而证明其他问题的平方和困难性，例如最稠密 k-子超图 [Raj18，定理 3。17] 也可能包括最小 p-并集 [Raj18]。

平均情况平方和下界 过去十年中，针对平均情况问题的平方和下界研究大量涌现，例如植入团 [HKP15、MPW15、BHK+16]，Sherrington-Kirkpatrick哈密顿量 [MRX20、GJJ+20、Kun20]，，稀疏与张量主成分分析 [HKP+17、PR20、PR22]，以及最大 k-CSP [KMOW17]。这些研究大多针对俗称的“稠密”情形，即随机输入从 $G_{n,1/2}$ 或标准正态分布 $N(0, 1)$ 中采样。近期，针对稀疏设定（即输入从 $G_{n,p}$ 中采样且 $p = o(1)$）的最大独立集问题，也已证明存在平均情形 SoS 下界 [JPR+22、RT23]。包括我们工作在内，近期 SoS 下界研究的共同主线是对大型随机矩阵进行谱分析。有关这些下界所采用的矩阵分析框架的更多背景和直观解释，请参见 [PR20、Raj22、Jon22] 。

低次似然比假设 我们补充指出，通过分析低次似然比 [HKP+17、Hop18、KWB22]，或许也能像对数密度框架一样，对算法可区分性的阈值作出类似预测。低次似然比用于含噪统计推断问题的研究，可用于预测包括统计-计算差距是否存在在内的多种现象；也就是说，信号（植入稠密子图）在信息论意义上可检测（因而可通过暴力搜索恢复），但无法由高效算法检测到。在相同背景下，低次似然比用于预测低次多项式算法的区分能力

。在低次多项式算法中， [SW22], 分析了在稠密k-子图的某些参数范围内的低次似然比，但其结果似乎无法精确复现对数密度框架的预测。我们的 命题 2.52可以解释为：在对数密度框架的整个困难区域内，低次似然比为 $1+o(1)$ 。

植入稠密子图猜想与植入团猜想 在我们的工作中，我们主要关注以下情形 $\alpha \in (0,1/2], \beta, \gamma \in (0,1)$。近年来，这些参数的其他取值也受到广泛研究，并提出了各种猜想来预测高效算法的极限，统称为植入稠密子图猜想；在 $\gamma = 0$的情形下，则称为植入团猜想。此外，在这些猜想的假设下，研究者已针对稀疏主成分分析、随机块模型、双聚类等问题推导出不可近似性结果。例如参见[HWX15、CX14、BBH18、BBH19、BB19、MRS20、PR20、PR22] 及其中的参考文献。最稠密k-子图是许多这类归约的核心，因此，我们的困难性结果或许可以用于为其他各种问题推导出更强的不可近似性结果；这将留待未来研究。

1.5 论文结构

本文其余部分安排如下。我们首先在第 2 节简要介绍图矩阵，它们是谱分析的核心，并据此按照伪校准框架构造候选矩矩阵，详见第 2.9 节。得到矩阵后，我们将深入探讨构成主要工作内容的半正定性分析。我们在第 3 节介绍并讨论概念上新颖的 PMVS 分解，并在第4节展示半正定性证明中关键“记账”论证所需的组合分析。形式化细节及其他技术性验证则放在附录中。

致谢 感谢 Madhur Tulsiani 提供有益的讨论。本项目的大部分工作是在 CJ 和 GR 就读于芝加哥大学攻读博士学位期间完成的。

2 预备知识

2.1 平方和算法

现在我们正式描述平方和层级。关于平方和的详细介绍和综述，参见例如 [RSS18、FKP$^+$19、Sch17、Hop18、Jon22]。

平方和用于检验多项式系统的可行性。给定一个图 $G = (V,E)$，存在一个包含k 个顶点和m 条边的子图，其最简单的多项式表述将该子图的 0/1 示性函数编码为：

$$
\begin{aligned}
&\text{Variables: } \mathsf{X}_v,\ \forall v \in V \\
&\text{Constraints:} \\
&\sum_{v \in V} \mathsf{X}_v = k && && \text{(顶点数)} \\
&\sum_{\{u,v\} \in E} \mathsf{X}_u \mathsf{X}_v = m && && \text{(边数)} \\
&\mathsf{X}_v^2 = \mathsf{X}_v && \forall v \in V && \text{(布尔)}
\end{aligned}
$$

平方和算法由度数 $D_{\mathrm{SoS}} \in \mathbb{N}$参数化。我们假设$D_{\mathrm{SoS}}$为偶数。对于形式变量$\mathsf{XX}_1, \ldots, \mathsf{XX}_n$，令 $\mathbb{R}^{\le D_{\mathrm{SoS}}}[\mathsf{XX}_1, \ldots, \mathsf{XX}_n]$ 表示次数至多为D_{SoS}的多项式集合。

定义 2.1 (伪期望**).** 给定一组变量$\mathsf{XX}_1, \ldots, \mathsf{XX}_n$，一个次数为$D_{\mathrm{SoS}}$伪期望算子是一个线性泛函 $\widetilde{\mathbb{E}}\colon \mathbb{R}^{\le D_{\mathrm{SoS}}}[\mathsf{XX}_1, \ldots, \mathsf{XX}_n] \to \mathbb{R}$，满足 $\widetilde{\mathbb{E}}[1] = 1$。

定义 2.2 (满足等式约束**).** 若一个 D 次$_{\mathrm{SoS}}$ 伪期望算子 $\widetilde{\mathbb{E}}$ 满足多项式约束“$f(\mathsf{XX}) = 0$”，则对所有满足 $\deg(p) + \deg(f) \le D_{\mathrm{SoS}}$ 的多项式 $p(\mathsf{XX})$，均有 $\widetilde{\mathbb{E}}[f(\mathsf{XX})p(\mathsf{XX})] = 0$。

定义 2.3 (平方和可行**).** 若一个 D 次$_{\mathrm{SoS}}$ 伪期望算子 $\widetilde{\mathbb{E}}$ 对每个多项式 $p \in \mathbb{R}^{\le D_{\mathrm{SoS}}/2}[\mathsf{XX}_1, \ldots, \mathsf{XX}_n]$，$\widetilde{\mathbb{E}}[p(\mathsf{XX})^2] \ge 0$，则称其为平方和可行。

定义 2.4 (平方和算法**).** 给定一个由多项式约束组成的系统 $\{f_i(\mathsf{XX}) = 0\}$，其含有 n 个变量 $\mathsf{XX}_1, \ldots, \mathsf{XX}_n$，$D$ 次$_{\mathrm{SoS}}$ 平方和算法会检查是否存在一个平方和可行的 D 次$_{\mathrm{SoS}}$ 伪期望算子 $\widetilde{\mathbb{E}}$ 使其满足这些约束。若 $\widetilde{\mathbb{E}}$存在这样的算子，算法输出“可能可行”；否则输出“不可行”。这可以通过求解一个规模为 $n^{O(D_{\mathrm{SoS}})}$ 的半定规划来实现，该规划用于搜索一个可行矩矩阵（定义 *2.7*）。

如果不存在伪期望算子，那么平方和就能成功反驳该多项式系统（也就是说，它证明输入中不存在稠密子图）。另一方面，如果存在伪期望算子，平方和就无法排除该多项式系统可行的可能性（伪期望算子能蒙骗平方和，但它可能对应于可行点上的真实分布，也可能不对应）。针对平方和的下界，是指在系统实际上不可行时，存在一个可行的伪期望算子。

2.2 矩矩阵

对一个n变量多项式系统上的平方和（SoS）算法进行分析，通常通过将其表述为由 $[n]^{\ell}$ 的子集索引的大型矩阵来完成，这些矩阵称为

矩矩阵。

定义 2.5 (矩阵指标)。 设$\mathcal{I}$ 为由 $[n]$ 中大小至多为 $D_{\mathrm{SoS}}/2$ 的有序子集组成的集合。

注 2.6。 另一种合理的$\mathcal{I}$ 定义是使用 $[n]$ 的子集，而非有序子集。为简化技术处理，我们加入了一个顺序。

度为D_{SoS} 的平方和算法也可以等价地用 $\mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ 矩阵来表述，这些矩阵称为矩矩阵。

定义 2.7 (矩矩阵)。 与度为 D_{SoS}的伪期望 $\mathbb{E}$ 相关联的矩矩阵 $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\mathbb{E})$ 是一个 $\mathcal{I}$-*by*-$\mathcal{I}$ 矩阵，定义如下

$$\mathbf{\Lambda}[I,J] := \widetilde{\mathbb{E}}\left[\mathsf{X}^I \cdot \mathsf{X}^J\right].$$

事实 2.8。 $\mathbb{E}$ 是平方和可行的，当且仅当 $\mathbf{\Lambda}(\mathbb{E}) \succeq 0$。

定义 2.9 (平方和对称)。 若矩阵 $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ 满足：对于平方和对称 的情形， $\mathbf{\Lambda}[I, J]$ 仅取决于 I 与 J 的不交并，且将该并视为无序多重集。结合附加约束 ，这刻画了哪些矩阵是度为 D_{SoS} 的伪期望算子的矩矩阵。

在存在布尔约束“$\mathsf{X}\mathsf{X}^2{}_i = \mathsf{X}\mathsf{X}_i$”时，当且仅当 $\mathbf{\Lambda}[I,J]$ 仅取决于 $I \cup J$ 的并集（视为无序集合，忽略重复元素）时，矩矩阵才满足这些约束。

2.3 p-偏置傅里叶分析与图矩阵

我们关注依赖于随机图 $G \sim \mathsf{G}_{n,p}$ 的矩阵。为了将其作为 G 的函数进行分析，我们通过其边指示向量将 G 编码为 $\{0,1\}^{\binom{n}{2}}$，并进行p-偏置傅里叶分析。

定义 2.10（傅里叶特征）。 χ 表示 p-偏置傅里叶特征 r,

$$\chi(0) = -\sqrt{\frac{p}{1-p}}, \qquad \chi(1) = \sqrt{\frac{1-p}{p}}. \tag{1}$$

对于作为 $\binom{[n]}{2}$ 的子集或多重子集的 H，令 $\chi_H(G) := \prod_{e\in H}\chi(G_e)$。

定义 2.11 (带状图)。 带状图是一个元组 $R = (A_R, B_R, E(R))$ ，其中 $A_R, B_R \in \mathcal{I}$ 且 $E(R) \subseteq \binom{[n]}{2}$。对应的矩阵$\mathbf{M}_R \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ 为：

$$\mathbf{M}_R[I,J] = \begin{cases} \chi_{E(R)}(G) & I = A_R, J = B_R \\ 0 & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

带状矩阵$\mathbf{M}_R$均值为零，在矩阵上的弗罗贝尼乌斯内积期望下正交归一，并构成所有$\mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$-值函数的基$G$。它们是依赖于$G$的随机矩阵的自然傅里叶基。

在我们研究的矩阵中，带上的系数不取决于该带顶点的具体标签，而只取决于带的图结构。这种图结构称为形状。

定义 2.12 (形状)。 一个形状 α 是带在顶点重新标记下的等价类（等价地，是由 S_n 表示的排列）。每个形状都与一个代表图$(U_\alpha, V_\alpha, E(\alpha))$相关联。我们令 $V(\alpha) := U_\alpha \cup V_\alpha \cup V(E(\alpha))$。

形状的示例见 图 1。我们约定用希腊字母，例如α， γ， τ 表示形状，用拉丁字母 R，L，T 表示带。

定义 2.13 (嵌入)。 给定一个形状 α 和一个单射函数 $\varphi:\ V(\alpha) \to [n],$ ，我们将 $\varphi(\alpha)$ 定义为按自然方式标记 α 所得的带（保持 U_α 和 V_α上的顺序）。

带状图R 具有形状 α，当且仅当R 可通过将$V(\alpha)$ 嵌入$[n]$而得到。请注意，不同的嵌入可能产生相同的带状图。

定义 2.14 (图矩阵). 给定形状 α，图矩阵$\mathbf{M}_\alpha$ 为

$$\mathbf{M}_\alpha = \sum_{injective\ \varphi: V(\alpha)\to[n]} \mathbf{M}_{\varphi(\alpha)}\,.$$

图矩阵的元素是关于变量G_e的 degree-$\left|E(\alpha)\right|$ 单项式，因此我们将图矩阵视为G中的低次多项式随机矩阵。我们称它们为“非线性”，以区别于研究充分的 degree-1 情形（本质上是G的邻接矩阵）。

定义 2.15 (平凡). 带状图或形状 α 若 $E(\alpha) = \emptyset$，则称其为平凡。

定义 2.16 (对角). 带状图或形状 α 若 $V(\alpha) = U_\alpha = V$，则称其为对角 $_\alpha$.

对角形状仅在矩阵中对应于U_α的块的对角元素上非零。请注意，还有其他形状具有相同的支集，即这些形状可能在$U_\alpha = V_\alpha$之外还包含额外的边和顶点。按照我们的定义，对角形状是矩阵对角元素最重要的贡献项。

定义 2.17 (转置)。 带状图或形状的转置会交换 A_R，B_R 或 U_α，V_α，分别如此。这会产生转置带状图/形状对应矩阵的效果。

2.4 范数界

定义 2.18 (集合权重)。 对于一个图 S，令 $w(S) = |V(S)| - \log_n(1/p)|E(S)|$。

定义 2.19 (顶点分隔集)。 在图 G 中，集合 A,B 的顶点分隔集 是集合 $S \subseteq V(G)$，使得从 A 到 B 的所有路径都经过 S。

定义 2.20 (稀疏最小顶点分隔集（SMVS）)。 给定一个带状图或形状 α，稀疏最小顶点分隔集（SMVS）是 $w(S)$ 在满足分隔集U_α *and* V_α的 $S \subseteq V(\alpha)$ 上的极小化元。

注意，忽略低阶因子后，$w(S) = \log_n\left(\mathbb{E}[\text{S 在 G}_{n,p}]\right)$ 中图的副本数。因此，SMVS 是 α 中最罕见的分隔集。

定理 2.21 (范数界，非正式 [JPR+22, RT23])。 高概率下，对于所有真形状 α:

$$\|\mathbf{M}_\alpha\| \leq \widetilde{O}\left(n^{\frac{|V(\alpha)|-|w(S_{\min})|}{2}}\right)$$

其中 $S_{\min}$ 是 α 的 *SMVS*。

2.5 图矩阵演算：因式分解

鉴于顶点分隔集与图矩阵的谱密切相关，我们的方法有一个关键基础：每种形状都可以根据其顶点分隔集近似分解为三部分。在接下来的讨论中，固定一个形状 α。形状 α 的分隔集具有如下自然偏序。

定义 2.22 （左侧与右侧）。 若顶点分隔集 S 分离 U_α 和 S' （分别为 S' 和 V_α），则称顶点分隔集 S 位于顶点分隔集 S' 的左侧 （分别为右侧）。

我们将 最左 *SMVS* 定义为相对于 α位于所有其他 SMVS 左侧的 SMVS；类似地，最右稀疏最小顶点分隔集。示例见 图 1。我们将每种形状分解为三部分：“左形状”位于U_α与最左 SMVS 之间，“中间形状”位于最左和最右 SMVS 之间，而“右形状”位于最右 SMVS 与V_α之间。现在我们将对此进行形式化。

遗憾的是，并非总是存在一个唯一的SMVS 位于所有 SMVS 的左侧。尽管如此，我们可以用下面的命题以自然且规范的方式定义最左 SMVS，其证明见附录 A.1。

命题 2.23。每个形状都有一个位于所有 *SMVS* 左侧的 *SMVS*。此外，在顶点大小最小的 *SMVS* 中，存在一个唯一的、位于所有 *SMVS* 左侧的 *SMVS*。

定义 2.24 (最左和最右 SMVS)。 最左 SMVS 是位于所有 *SMVS* 左侧且顶点大小最小的 *SMVS*。最右稀疏最小顶点分隔集 的定义与此类似。

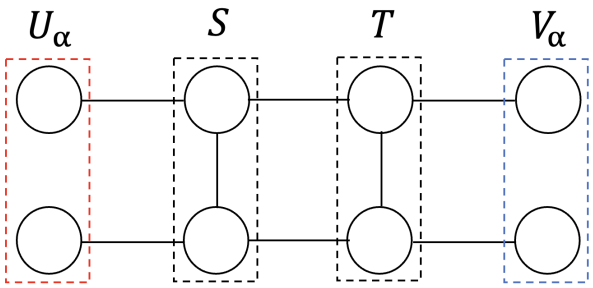

图1：形状示例 α，其最左 SMVS 为S，最右 SMVS 为T。该形状的范数为 $\tilde{O}(n^{\frac{8-2\sqrt{1-p}}{2}}p) = \tilde{O}(n\sqrt{p})$

定义2.25 (左形状)。 形状 σ 是左形状，当且仅当唯一的 *SMVS* 为 V_σ（因此它既是最左的，也是最右的）。

定义2.26 (中间形状)。 如果 U_τ 是最左 *SMVS*，且 V_τ 是最右 *SMVS*，则形状 τ 是一个中间形状。

De义2.27(右形状)。 右形状 σ 是左形状的转置。

我们也将这些定义扩展到带状图。将一条带沿其最左和最右 SMVS 拆分后，可得到以下带状图的规范分解定理，将在下一节中正式介绍。

命题 2.28 (命题 2.33的非正式版本)。 每条带 R 都可以唯一地表示为一个左带、一个中间带和一个右带的复合。

2.6 图矩阵演算：复合

图矩阵的乘法可以通过“图示化地”复合带状图或形状来实现。

定义2.29 (复合带状图)。 若两个带状图 R，S 满足 $B_R = A_S$，则称它们是可复合的。复合 $R \circ S$ 得到带状图 $T = (A_R, B_S, E(R) \cup E(S))$。尽管本文中不会出现这种情况，若 $E(R) \cap E(S) \neq \emptyset$，请参见脚注[3]。

事实2.30. 若 R，S 是可复合的带，则$\mathbf{M}_{R\circ S} = \mathbf{M}_R\mathbf{M}_S$。否则，$\mathbf{M}_R\mathbf{M}_S = 0$。

因此，将带状图的线性组合表示的两个矩阵相乘时，效果就是对每一对带状图进行复合。

[3]在此情况下，将$R \circ S$ 定义为非正规带（定义 2.39），其边多重集是$E(R)$ 与$E(S)$的不交并。

通过将两个带状图并排绘制，然后识别集合R、S 中的B_R 和A_S，可以轻松地将它们复合的过程可视化。然而，如果两个可复合带R、S 的顶点集有非平凡交叠（即超出“必要”的交叠$B_R = A_S$），那么所得带状图会比这幅图所显示的更小。我们将这类带状图称为交集项，并根据其交集模式进行分类。交集项是我们分析中的误差项，但仔细地对它们进行界定，是证明中最重要、概念上也最困难的一步。

定义 2.31（可适当复合的）。 可复合带 $R_1, \dots, R_k$ 若除必要的交集 $B^{R_i} = A^{R_{i+1}}$外没有其他交集，则称为可适当复合的。

根据上述定义和命题 2.23，我们可以推导出关于形状和带状图因式分解的主要命题。对于带状图R 和边集$F \subseteq \binom{[n]}{2}$，我们使用记号$R \setminus F$ 表示带状图$(A_R,\ B_R,\ E(R) \setminus F)$。

定义 2.32（浮动分量）。 带状图 R 中未与 $A_R \cup B_R$ 相连的连通分量称为浮动分量。

Pro命题 2.33（带状图分解）。 每个带状图 R 都可以表示为 *as*

$$R = (L \setminus E(B_L)) \circ M \circ (R' \setminus E(A_{R'}))$$

其中 L，M，R' 分别是可适当复合的左带、中间带和右带，使得 $E(B_L) = E(A_M)$ 且 $E(B_M) = E(A_{R'})$。除 $B_L = A_M$ 和 $B_M = A_{R'}$ 的排序以及浮动分量外，该分解是唯一的。

证明。 该分解的存在性可通过沿最左和最右 SMVS 将R 拆分得到。SMVS 内部的边应放入中间带状图中。任何游离分量都可以放入中间带状图中。

为说明其唯一性，假设 R $= (\mathrm{L} \setminus \mathrm{E}(\mathrm{B}_L)) \circ \mathrm{M} \circ (\mathrm{R}' \setminus \mathrm{E}(\mathrm{A}_{R'}))$。那么 $\mathrm{B}_L = \mathrm{A}_M$ 是 R 的一个 SMVS，且位于 R 的所有其他 SMVS 左侧。根据结构性结果命题 A.1，若要使 L 具有唯一的 SMVS，B_L 必须是 R 的最左 SMVS。对于 R′，相对于最右稀疏最小顶点分隔集，结论也相同。 ∎

注 2.34。 分解带状图时，我们总是将游离分量放入中间部分。

2.7 图矩阵演算：交集

根据带状图的分解定理，理想情况下，对于任意形状$\alpha = \sigma \circ \tau \circ \sigma'$，我们也能得到一个精确的矩阵等式

$$\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{M}_\sigma \cdot \mathbf{M}_\tau \cdot \mathbf{M}_{\sigma'}\,.$$

遗憾的是，这种方法行不通，因为除了边界上必需的交集之外，还可能出现一些“意外”的交集。下面我们进一步详细说明这些“交集项”。

定义 2.35 (形状复合)。 给定形状 α， β，如果 $V_\alpha = U^\beta$ 是 $\mathcal{I}$ 的子集，则称它们可复合 $\alpha \circ \beta$ 是这样一个形状：其多重图是将 α 和 β 沿着 V_α 和 U^β 粘合而成（遵循各自的次序）[4]，其左侧为 U_α，右侧为 V^β。关于另一项技术细节，参见脚注[5]。

定义 2.36 (交集模式)。 对于可复合形状 α_1， α_2， 。 。 。 ， α_k，令 $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha k$。交集模式 P 是 $V(\alpha)$ 的一个划分，使得对于所有 i 以及 v， $w \in V(\alpha i)$，v 和 w 不属于该划分中的同一个块。若某个顶点所在的块大小至少为 2，我们就称该顶点为“相交”顶点，并令 $Vintersected(\alpha i)$ 表示αi 中相交顶点的集合。

令 $\mathcal{P}_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k}$ 表示 α_1， α_2， 。 。 。 ， α_k之间交集模式的集合。

定义 2.37 (交形状)。 对于可复合形状 α_1， α_2， 。 。 。 ， α_k 以及交集模式 $P \in \mathcal{P}_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k}$，令 $\alpha_P = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_k$，然后将 P 中每个块里的所有顶点识别为同一个顶点，即将它们收缩为单个顶点。保留所有边。[6]

命题 2.38。 对于可复合形状 α_1， α_2， ……， α_k，

$$\mathbf{M}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{M}_{\alpha_k} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \mathbf{M}_{\alpha_P}.$$

证明。 所声称的结论展开为

$$\prod_{i=1}^{k} \sum_{\text{injective } \varphi_i : V(\alpha_i) \to [n]} \mathbf{M}_{\varphi_i(\alpha_i)} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \sum_{\text{injective } \varphi : V(\alpha_P) \to [n]} \mathbf{M}_{\varphi(\alpha_P)}.$$

左侧的每个带状图都是从 α_i 到 $[n]$ 的单射嵌入；然而，联合嵌入未必是单射。交集模式 P 记录了哪些顶点相互重叠。

■

2.8 图矩阵演算：非正规形状与线性化

我们需要处理以带图基或形状基表示的矩阵，例如，根据某些边是否存在进行分类，或将两个矩阵相乘。为简化中间处理，我们允许带状图是非正规的。这样会失去带图基中表示的唯一性（同一个矩阵可以有多种表示方式，即多个非正规带状图的线性组合），但增广使我们能够轻松追踪组合特征，例如特定边或子图的存在。在证明的最后，我们通过对非正规带状图进行线性化，将其转换回适当带状图。

我们的带状图可能以三种方式不正规：边指示量、傅里叶特征的乘积以及孤立顶点。以下一般定义涵盖了所有这些情况。

[4]虽然本文中不会出现这种情况，但如果一条边同时出现在 V_α 和 U^β中，那么复合$\alpha \circ \beta$ 就是一个非正规形状（定义 2.39）。[5]如果 V_α 和 U^β 中的某个顶点的度为 0，那么它会成为 $\alpha \circ \beta$ (定义 2.41) 中的孤立顶点。[6]保留重复边及其重数； α_P 可能是非正规的（定义 2.39）。

定义 *2.39*（非正规带）。非正规带是一个元组 R，记作 $R = (A_R, B_R, V(R), E(R), \mathrm{Yes}(R))$，其中 A_R、B_R 如前所述，此外 $A_R \cup B_R \subseteq V(R) \subseteq [n]$，，$E(R)$ 还是一个定义在 $V(R)$ 上且没有自环的多重图，而 $\mathrm{Yes}(R) \subseteq \binom{V(R)}{2}$。我们将 $M_R \in \mathbb{R}^{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ 的定义扩展为：

$$\mathbf{M}_R[I,J] = \begin{cases} \prod_{e\in\mathsf{Yes}(R)} \mathbf{1}_{e\in E(G)} \prod_{e\in\binom{V(R)}{2}} \chi_e(G)^{\text{multiplicity of } e \text{ in } E(R)} & I = A_R, J = B_R \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

定义 2.40 (非正规形状)**.** 非正规形状 α 与之前一样，定义为非正规带状图在顶点重新标记下的一个等价类。每个非正规形状都与一个代表元组 $(U_\alpha, V_\alpha, V(\alpha), E(\alpha), \mathsf{Yes}(\alpha))$相关联。等价地，如果带状图 R 可以通过单射 $\varphi : V(\alpha) \to [n]$对 $V(\alpha)$ 进行标记，则 R 的形状为 α。

定义 2.41 (孤立顶点)**.** 令 $\mathrm{Iso}(\alpha)$ 表示 $V(\alpha) \setminus (U_\alpha \cup V_\alpha)$ 中不与 $E(\alpha)$ 或$\mathsf{Yes}(\alpha)$中的任何边关联的顶点集合。

我们通过使用恒等式对非正规带状图进行线性化

$$\chi_e^k = c_0 + c_1 \cdot \chi_e$$
$$\mathbf{1}_{e\in E(G)} = c_0' + c_1' \cdot \chi_e$$

for 一些系数 c_0, c_1, c_0', c_1'。这些等式对来自 $\{0, 1\}$ 的输入成立。

定义 2.42 (线性化)**.** 给定一个非正规带状图 R，我们通过使用等式对 R 进行线性化

$$\mathbf{M}_R = \sum_{\text{proper ribbons } S} c_S \mathbf{M}_S$$

其中 c_S 是 M_R的傅里叶系数。非零系数c_S 对应的带状图 S 称为 R 的线性化。

当我们只将多重边 χ_e^k 线性化为 1 或 χ_e时，我们使用以下命题来界定新的系数。

命题 2.43. 给定一个非正规带状图 R，如果我们将多重边线性化，则所得带状图 S 上的系数满足

$$|c_S| \le \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)^{\sum_{e\in mul(R)} \mathrm{mult}(e) - 1 - \mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}}$$

其中 $mul(R)$ 是 R 中多重边的集合。

证明。 线性化系数为 $\chi_e^k = \mathbb{E}[\chi_e^k] + \mathbb{E}[\chi_e^{k+1}]\chi_e$。根据归纳法，$\left|\mathbb{E}[\chi_e^k]\right| \le \left(\sqrt{1-p}_p\right)^{k-2}$ 对所有 $k \ge 2$ 均成立，由此得证。 ∎

我们将一个非正规形状线性化，并取其所有线性化中范数最大的一个，以此估计该形状的范数。

2.9 伪校准

伪校准是一种启发式方法，用于构造平方和下界所需的候选伪期望算子 $\widetilde{\mathbb{E}}$，它最初是在植入团的平方和下界这一背景下提出的[BHK+16]。例如，参见 [BHK+16、RSS18、GJJ+20]，其中给出了形式化描述。

伪校准算子 $\widetilde{\mathbb{E}}[\mathsf{XX}^I]$ 是利用相应函数的傅里叶系数 $\mathsf{XX}^I(H)$ 在植入分布上取值来定义的。首先，我们需要计算这些傅里叶系数。为展示Sherali-Adams 层级的整数性间隙，[CM18]进行了类似的计算。

引理 2.44。令 $\mathsf{XX}^I(H)$ 为指示函数：当 I 属于植入解时取值为 *0/1*，即 $I \subseteq H$。则对于所有 $I \subseteq [n]$ 和 $\alpha \subseteq \binom{[n]}{2}$，

$$\mathbb{E}_{(G,H)\sim\mathcal{D}_{pl}}[\mathsf{X}^I(H)\cdot\chi_\alpha(\widetilde{G})] = \left(\frac{k}{n}\right)^{|V(\alpha)\cup I|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(\alpha)|}$$

证明。 首先注意，如果 $V(\alpha) \cup I$ 中的任何顶点不属于 H，那么期望值为 0。这是因为 I 要么不属于 H，此时 $\mathsf{XX}^I(H) = 0$；要么 α 的一条边不属于 H，此时该傅里叶特征的期望值为 0。现在，$V(\alpha) \cup I$ 中的每个顶点都以 $\frac{k}{n}$ 的概率独立地属于 H。在这一事件发生的条件下，每条边独立地取值为

$$\mathbb{E}_{e\sim\text{Bernoulli}(q)}\chi(e) = q\cdot\chi(1) + (1-q)\cdot\chi(0) = \frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

综合以上结果即可得出结论。 ∎

伪校准表明，可以从植入分布中转移低阶傅里叶系数，使伪期望算子模拟植入分布下的真实期望算子。只要傅里叶系数的大小大于 SoS 度数，那么 SoS 就不应察觉我们使用了截断。

我们将截断到大小为 D_V 的形状，其中参数 $D_V = O(D_{\text{SoS}})$ 在 界 C.1 中有形式化说明。

定义 2.45($\mathcal{S}$)。 令 $\mathcal{S}$ 为满足以下条件的（正规）带状图 R 的集合：

(i)（度上界） $|A_R|$， $|B_R| \le D_{\mathrm{SoS}}/2$

(ii) *(*大小界*)* $|V(R)| \le D_V$

我们有时会用 $\alpha \in \mathcal{S}$ 表示具有相同性质的形状集合，遵循用拉丁字母表示带状图、用希腊字母表示形状的惯例。

定义 2.46(M). 定义伪校准候选矩 x

$$\mathbf{M} = \sum_{R \in \mathcal{S}} \left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|} \left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|} \mathbf{M}_R$$

为方便技术处理，我们稍微调整参数 β 和 γ，使得

$$n^{-\beta} = \frac{p}{1-p}, \qquad n^{-\gamma} = \frac{q-p}{1-p}$$

这一改动不会正式影响ff定理陈述 定理 1.1。

为便于在后续章节分析$\mathbf{M}$的谱，我们更方便地对各项重新缩放，使得 $\widetilde{\mathbb{E}}[\mathsf{X}\mathsf{X}^I]$ 对所有 $I \subseteq [n]$ 的量级为 1。这将是矩阵 $\mathbf{\Lambda}$。

定义 2.47 (λ_α)。 给定一个形状或带状图 α，令

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha &= \left(\frac{k}{n}\right)^{|V(\alpha)| - \frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}} \left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(\alpha)|} \\ &= n^{(\alpha-1)\left(|V(\alpha)| - \frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}\right) + (\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(\alpha)|}.\end{aligned}$$

引理 2.48。 如果 R,S 是可适当复合的带，则 $\lambda_{R\circ S} = \lambda_R \lambda_S$。

定义 2.49 ($\mathbf{\Lambda}$)。 定义 $\mathbf{\Lambda} = \sum_{R \in \mathcal{S}} \lambda_R \mathbf{M}_R$。

引理 2.50。 $\mathbf{M} \succeq 0$ 当且仅当 $\mathbf{\Lambda} \succeq 0$。

证明。 我们有 $\mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D}$，其中 $\mathbf{D}$ 是一个正对角矩阵，且 $\mathbf{D}[I,I] = \left(kn\right)^{|I|}_{\frac{2}{}}$。因此，对于所有 $x \in \mathbb{R}^I$，$x^\top \mathbf{M} x \ge 0$ 当且仅当 $x^\top \mathbf{\Lambda} x \ge 0$ 对于所有 $x \in \mathbb{R}^I$ 成立。 ∎

引理 2.51。 $\mathbf{M}$ 是 *SoS* 对称的，并满足约束“$\mathsf{X}\mathsf{X}^2 i = \mathsf{X}\mathsf{X}_i$”。

命题 2.52。 以高概率，有 $\mathbb{E}[1] = 1 \pm o(1)$。

证明（正式版本见 附录 *F*）。

$$\left|\widetilde{\mathbb{E}}[1]-1\right| = \Big|\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{S}:\\ U_\alpha=V_\alpha=\emptyset,\\ E(\alpha)\neq\emptyset}} \lambda_\alpha \mathbf{M}_\alpha\Big| \le \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{S}:\\ U_\alpha=V_\alpha=\emptyset,\\ E(\alpha)\neq\emptyset}} \lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\|$$

在边衰减所带来的一个次多项式因子之外，范数界为（稍后在引理 4.8中计算），

$$\lambda_\alpha \|M_\alpha\| \lesssim n^{-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\alpha)-\frac{w(S)}{2}-(\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|}.$$

对于随机图 $G \sim G_{n,p}$，高概率地，所有小子图 H 都满足$w(H) \ge 0$ （误差项较小）。因此，通过条件化论证，可以消除任何满足 $w(\alpha) < 0$ 或 $w(S) < 0$ 这类条件的小形状。剩余形状同时满足 $w(\alpha) \ge 0$ 和 $w(S) \ge 0$。由于参数满足 $\frac{1}{2}-\alpha \ge 0$ 和 $\gamma-\alpha\beta > 0$，n 的指数为负，整个和为$o(1)$。 ∎

注记 2.53。 $\mathbb{E}[1] = 1 \pm o(1)$ 以逆多项式概率失效。这等价于观察到存在一个低阶区分器，其以逆多项式概率成功。具体而言，若考虑一个在$\mathcal{G}_{n,p}$ 中不太可能出现的常数规模子图（例如，当 p 足够小的时候，K_{10}），那么稠密子图$\mathcal{G}_{k,q}$ 包含该子图副本的概率会大一个$\mathrm{poly}(n)$ 因子。尽管如此，即使 $\mathbb{E}[1] \gg 1$，我们仍然可以证明 $\mathbf{\Lambda} \succeq 0$ 以高概率成立。详情请见附录。

命题 2.54。 以高概率，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathbb{E}}[\mathsf{X}_i] - k\right| = o(k),$$

and

$$\left|\sum_{\{i,j\}\in E(G)} \widetilde{\mathbb{E}}[\mathsf{X}_i\mathsf{X}_j] - \frac{k^2 q}{2}\right| = o(k^2 q)$$

证明（形式化版本见附录 F）。对每个 i，$\mathbb{E}[XX_i] = M[(i),\emptyset]$。对于大多数顶点 i，$M[(i),\emptyset]$ 中的主导项是 $knM_R[(i),\emptyset]$ 其中 R 是满足 $V(R) = \{i\}$, $A_R = (i)$, $B_R = \emptyset$且 $E(R) = \emptyset$的带状图。$M_R[(i),\emptyset] = 1$ 因此贡献为 kn。对所有 i 求和 $\in [n]$ 得到 k。在附录 F 中，我们验证其他项的贡献以高概率为 o(k)。

对于满足 $i < j$ 的每个 $i, j \in V(G)$，$\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}\,\mathbb{E}[XX_iXX_j] = \mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)} M[(i),(j)]$。对于大多数 i, j，$\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)} M[(i),(j)]$ 中的主导项是 $k^2(q-p)\,n^2\sqrt{p(1-p)}\,\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)} M_R[(i),(j)]$，其中 R 是满足 $V(R) = \{i,j\}$、$A_R = (i)$、$B_R = (j)$ 且 $E(R) = \{\{i,j\}\}$ 的带状图。

$\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$若 {i, j} ∈E(G)，$\overline{\text{则}}\mathrm{M}_R[(\mathrm{i}),(\mathrm{j})] = \sqrt{1-p}\mathrm{p}$；若 {i, j} ∉E(G)，则为 0。对所有 i < j 求和，得到总贡献 $\mathrm{k}^2(\mathrm{q}-\mathrm{p})\,\mathrm{n}^2\mathrm{p}\,|\mathrm{E}(\mathrm{G})| \approx \mathrm{k}^2\mathrm{q}\,2$。在附录 F 中，我们验证其他项的贡献以高概率为 $\mathrm{o}(\mathrm{k}^2\mathrm{q})$。 ∎

3 正的最小顶点分隔集分解

3.1 正的最小顶点分隔集的动机

经过伪校准后，为完成定理 1.1的证明，我们需要证明经过缩放的候选矩矩阵以高概率是半正定的，

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \lambda_\alpha \cdot \mathbf{M}_\alpha \succeq 0\,.$$

对于每个图矩阵 $\lambda_\alpha\mathbf{M}_\alpha\,\mathbf{M}_\alpha$ in $\mathbf{\Lambda}$, 我们希望找到一个近似半正定项，使其在谱意义上支配该矩阵。先前的工作提出了以下思路：对于每种形状 α，我们可以沿最左侧和最右侧的最小顶点分隔集将其拆分，使得 α 被分解为三部分，

$$\alpha = \sigma \circ \tau \circ \sigma'^{\intercal}\,.$$

那么，目标谱上界为

$$\lambda_\sigma^2\mathbf{M}_{\sigma\circ\sigma^\intercal} + \lambda_{\sigma'}^2\mathbf{M}_{\sigma'\circ\sigma'^\intercal}\,.$$

这是近似半正定的，因为 $\mathbf{M}_{\sigma\circ\sigma} \approx \mathbf{M}_\sigma\mathbf{M}_\sigma \succeq 0$。要使这一策略奏效，我们需要通过组合归因证明，中间形状$\mathbf{M}_\tau$ 在谱意义上受相应的单位矩阵支配。先前的工作基本上能够将所有中间形状归因于单位矩阵，但在稠密$\widetilde{\ }$$k$-子图的情形下，这种做法会失效。在简单情形中，我们对 $\sum_{(u,v)\in E(G)}\mathbb{E}[\mathrm{X}\mathrm{X}_u\mathrm{X}\mathrm{X}_v]$ in命题 2.54的计算清楚地表明了这一点：主导项不再是平凡形状，而是中间有一条边的形状i 和 j。

第二个相关问题是分隔集内部存在边。具体而言，设 $(U_\tau、E(U_\tau))$ 和 $(V_\tau、E(V_\tau))$ 分别是中间形状 τ 的最左/最右 SMVS，并且我们希望将 τ 计入与最左/最右 SMVS 对应的对角矩阵。具体而言，令 U_τ 也表示具有边 $E(U_\tau)$的对角形状，我们希望将其计入

$$\lambda_\tau(\mathbf{M}_\tau + \mathbf{M}_\tau^\intercal) \preceq \lambda_{U_\tau}\mathbf{M}_{U_\tau} + \lambda_{V_\tau}\mathbf{M}_{V_\tau}\,.$$

然而，要得出结果是半正定的，这种策略关键地要求 $\lambda_{U_\tau}\cdot\mathbf{M}_{U_\tau}$ 和 $\lambda_{V_\tau}\cdot\mathbf{M}_{V_\tau}$ 各自都是半正定的。由于 λ_α 非负，这归结为验证 SMVS 的对角形状 $(U_\tau,E(U_\tau))$ 是半正定的。后者

矩阵很容易验证，因为对于形状为U_τ的带状图 R，其非零对角元素为：

$$\chi_{E(R)}(G) = \prod_{e \in E(R)} \chi_e(G)$$

并且请记住，我们使用的是p偏置傅里叶基，

$$\chi_e(1) = \sqrt{\frac{1-p}{p}}, \quad \chi_e(0) = -\sqrt{\frac{p}{1-p}}$$

此时，我们注意到 SMVS 边$E(R)$ 的实例化起着至关重要的作用，因为它们决定了我们候选的“半正定”质量是否确实为正。如果$E(R)$ 中的所有边都存在于G中，那么对角元素为正，

$$\prod_{e \in E(R)} \chi_e(G) = \sqrt{\frac{1-p}{p}}^{|E(R)|} \geq 0\,.$$

另一方面，如果缺少一条边，则无法保证正性。暂且忽略这种不利情况，我们得到以下用于寻找半正定主导项的充分判据。如果T 是形状为 τ的带状图，且R 是U_τ上的受限带状图，那么如果$E(R) \subseteq E(G)$，我们必须将 $\lambda_\tau \mathbf{M}_T$ 计入$\mathbf{M}_R$。

如果 SMVS 内缺少一条边，我们就需要进一步分析。尽管候选半正定项并非真正为正，但现在还不必惊慌。在这种情况下，(1) 缺失的边会使矩阵缩小，这符合以下直觉：含有边的子图对应范数最高的项；因此，(2) 我们考察形状的其余部分，寻找新的 SMVS，以确定新的矩阵范数。这形成了一个递归过程；当候选 SMVS 内的所有边确实都存在于图中时，我们就终止这一过程，并将其称为正最小权顶点分隔集 ***(PMVS)***。

举个例子。图 2 顶端的图矩阵 出现在我们的矩矩阵的对角线上。在这个形状示例中，唯一的顶点分隔集就是整个形状，因此 SMVS 包含边 $G(a,b)$。我们检查这条边是否出现在图中。左侧的“是”这一结果对应一个半正定矩阵，其(a,b) 对角元素为 $\mathbf{1}_{(a,b)\in E(G)} \sqrt{1-p}\, p$。右侧的“否”这一结果中，$(a,b)$对角元素为 $-\mathbf{1}_{(a,b)\notin E(G)} \sqrt{p\,1-p}$，该值为负，因此矩阵不是半正定的。这个矩阵带有一个约为 $\sqrt{p}$ 的较小系数，因此可以将其归入相应的单位矩阵；该单位矩阵的(a,b) 对角元素为 1。在这个例子中，递归只需一步便终止；但对于更大的形状，我们需要为右侧的情况找到新的 SMVS。

如果能“一步到位”地定义 PMVS，而不是通过递归来定义，那会更简洁。如上所述，该递归输出的是

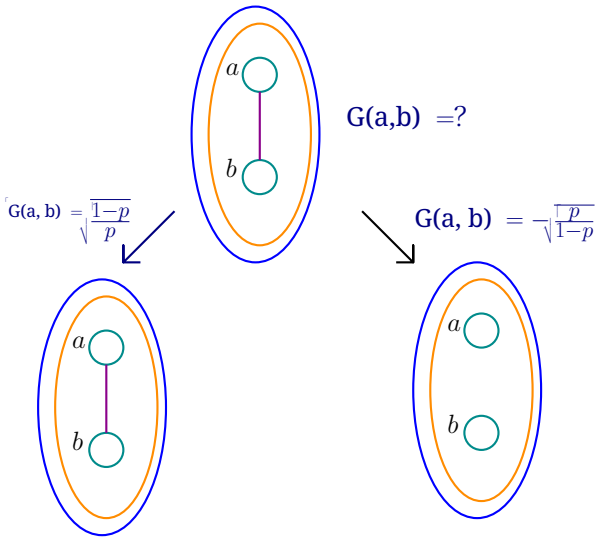

图 2：PMVS 搜索

在 附录 B 中定义的权重函数的备注 3.7成立。

3.2 PMVS 子程序

我们对带状图正最小顶点分隔集 *(PMVS)* R作如下扩展定义。

定义 3.1 (左指示与右指示)。 如果带状图 R 对每条边 $e \in E(A_R)$都有边指示量，我们就称带状图 R 具有左指示 。类似地，如果带状图 R 对每条边 $e \in E(B_R)$都有边指示量，我们就称带状图 R 具有右指示。

我们的目标是构造具有以下性质的可组合的带状图三元组 R_1, R_2, R_3：

定义 3.2 (已识别 PMVS 的带状图)。 如果可复合的带状图三元组 R_1, R_2, R_3 具有已标识 P *MVS*，则：

(i) R_1 是左带，R_3 是右带。*(ii)* $R_1, R_2,$ R_3 可适当复合。

(iii) R_1 具有右指示，R_2 同时具有左指示与右指示，R_3 具有左指示。

(iv) $B^{R_1} = A^{R_2}$ 和 $B^{R_2} = A^{R_3}$上的边及边指示量一致。

(v) R_1, R_2, R_3 没有其他边指示量。

当这些性质成立时，我们称左侧 *PMVS* 为 A^{R_2}，右侧 *PMVS* 为 B^{R_2}。

注记 3.3。 左侧和右侧 *PMVS* 的大小或权重可能不同。事实上，它们甚至可能不是 R_2 的 *SMVS*。我们将在以下部分界定 *PMVS* 与 *SMVS* 之间的差异
第*4*节。

首先，我们对每个带状图 R 进行分解，得到带状图 R_1, R_2, R_3，依据的是使用 命题 2.33得到的最左和最右 SMVS。由此可得一个可复合的三元带组 R_1, R_2, R_3，满足

(i) R_1 是左带，R_2 是中间带，且R_3 是右带。

(ii) R_1, R_2, R_3 可适当复合。

(iv) 边在$B^{R_1} = A^{R_2}$ 和$B^{R_2} = A^{R_3}$上一致。

(v) $R_1, R_2,$ 和R_3 没有边指示量。

备注 3.4. 由三元组 R_1, R_2, R_3编码的带状图是$(R_1 \setminus E(B^{R_1})) \circ R_2 \circ (R_3 \setminus E(A^{R_3}))$，而不是 $R_1 \circ R_2 \circ R_3$，因为 $B^{R_1} = A^{R_2}$ 内部的边不应重复。

为了满足R_1 具有右指示函数、R_2 同时具有左侧与右侧指示函数，以及R_3 具有左指示函数这一条件，我们根据需要重复执行以下操作序列。

1. **添加左右指标操作：** 为了给$B^{R_1} = A^{R_2}$ 和$B^{R_2} = A^{R_3}$添加指示函数，我们将尚未带有示性函数的每条边$e \in E(A^{R_2}) \cup E(B^{R_2})$ 替换为：使用[7] 方程 $\chi_e = \frac{1}{1-p}\mathbf{1}_{e \in E(G)}\chi_e - \sqrt{\frac{p}{1-p}}$。这会产生两个边结构不同的新带状图，其中一个仍保留e，另一个则移除了e。

2. **PMVS 操作：**将边指示量添加到$B^{R_1} = A^{R_2}$ 和$B^{R_2} = A^{R_3}$后，我们检查R_1 是否仍是左带，以及R_3 是否仍是右带。如果是，我们就停止并退出循环。否则，我们令A' 为分隔 A^{R_1} 与B^{R_1} 的最左 SMVS，并令B' 为分隔A^{R_3} 与B^{R_3}的最右稀疏最小顶点分隔集。然后，我们用带状图R_1'、R_2'和R_3' 替换$R_1, R_2,$ 和R_3，其中

   (a) R_1' 是 R_1 中位于 A^{R_1} 与 A'之间的部分。(b) R_2' 是 $R_1 \setminus E(B^{R_1})$ 中位于 A' 与 B^{R_1}之间的部分、R_2, 以及 $R_3 \setminus E(A^{R_3})$ 中位于 A^{R_3} 与 B'之间的部分的复合。(c) R_3' 是 R_3 中位于 B' 与 B^{R_3}之间的部分。

[7]PMVS 的高层概述提到了略有不同的公式 $\chi_e = \mathbf{1}_{e \in E(G)}\chi_e + \mathbf{1}_{e \notin E(G)}\chi_e$。从本质上说，两者等价，但这里的公式更容易分析。

3. **移除中间边指标操作：**如果 R_2 有一个或多个边指示量现在位于A^{R_2} 和 B^{R_2}之外，我们将它们重新转换为傅里叶
使用方程 $\frac{1}{1-p}\mathbf{1}_{e\in E(G)}\chi_e = \sqrt{\frac{p}{1-p}} + \chi_e$ 的字符。

我们将这一系列重复的操作称为**寻找 PMVS 子程序**。该子程序以一组三元组可复合带 R_1, R_2, R_3 为输入，这些带状图具备所有所需性质，但不含左侧与右侧指示（可能包含部分但非全部指示函数）；它会输出一组三元组可复合带，并使其具备所有所需性质。

注3.5。注意，每组三元组 R_1, R_2, R_3 会根据每个方程中选取的项，导出许多组三元组 R'_1，R'_2，R'_3。递归会对每一项继续进行，但所有 χ_e 都替换为 $\frac{1}{1-p}\mathbf{1}_{e\in E(G)}\chi_e$ 的那一项除外。

注3.6。乍看之下，检查 A^{R_2} 和 B^{R_2} 内部是否存在边，会导致对输入图 G 的依赖关系十分复杂。为了以不依赖于 G 的方式在数学上表达递归，我们形式化地使用边指示函数来表示这两种情况。

3.3 交集项分解操作

有了这些带状图三元组 R_1, R_2, R_3, 后，我们可以沿 PMVS 进行近似分解。这样会得到误差项，可用带状图三元组 R_1, R_2, 和R_3 描述。它们至少有一个非平凡交集（即不可适当复合），但满足 定义 3.2中的其他四个性质。我们按如下方式处理。

1. **交集项分解操作：**令 A' 为 A^{R_1} 与 $B_{R_1} \cup V_{intersected}(R_1)$ 之间最左侧的 SMVS，并令 B' 为$A_{R_3} \cup V_{intersected}(R_3)$ 与 B^{R_3}之间最右侧的稀疏最小顶点分隔集。现在，我们将 R_1, R_2, 和 R_3 替换为带状图R'_1、R'_2和R'_3，其中

   (a) R'_1 是 R_1 中 A^{R_1} 与 A'之间的部分。(b) 为了得到 R'_2，我们不恰当地将 $R_1 \setminus E(B^{R_1})$ 中 A' 与 B^{R_1}之间的部分、R_2, 以及 $R_3 \setminus E(A^{R_3})$中 A^{R_3} 与 B'之间的部分组合起来。然后我们将多重边线性化，用相应的系数 c_0, c_1替换 $\chi_e^k = c_0 + c_1\chi_e$。如果多重边还带有边指示变量（例如，因为 A^{R_2} 内部的一个 each 与 R_3中的一条边相交），则在这种情况下，我们改用方程 $\mathbf{1}_e\chi_e^k = \left(\sqrt{1-p}^{k}\right)\mathbf{1}_e\chi_e$。

   (c) R'_3 是R_3 中B' 与B^{R_3}之间的部分。

2. 我们对 **移除中间边指标操作** 应用于 R_2。

带状图 R_2' 被定义为“扩展”R_2，使其包含这些交集。完成这些步骤后，我们基本上回到了起始时的相同情形。更准确地说，我们有一个三元带组 R_1, R_2, R_3，满足

(i) R_1 是左带，R_3 是右带。

(ii) R_1, R_2, R_3 可适当复合。

(iv) $B^{R_1} = A^{R_2}$ 和 $B^{R_2} = A^{R_1}$ 上的边及边指示变量一致。

(v) R_1, R_2, R_3 在 $B^{R_1} = A^{R_2}$ 和 $B^{R_2} = A^{R_3}$ 之外没有边指示变量。

此时，我们可以重复这些操作，根据需要多次应用**寻找 PMVS 子程序**来识别新的 PMVS，进行近似因式分解，然后分解交集项。

3.4 操作与整体分解总结

现在我们总结一下我们的过程。

寻找 PMVS 子程序：重复以下步骤，直至收敛，

1. 应用**添加左右指标操作**，向 $B^{R_1} = A^{R_2}$ 和 $B^{R_2} = A^{R_3}$ 添加指示函数。2. 应用**PMVS 操作**，确保 R_1 是左带，且 R_3 是右带。如果 R_1 或 R_3，没有变化，那么我们就找到了 PMVS。3. 对 R_2 应用**移除中间边指标操作**，确保 R_2 没有中间指标。

整体分解过程：

1. 我们从可复合带 R_1, R_2, R_3 的三元组开始，它们具备所有所需性质，唯独缺少左指示与右指示。

2. 我们应用**寻找 PMVS 子程序**。

3. 递归因式分解：我们反复应用以下过程，直到不再有误差项。

1. 我们通过将求和范围扩大到包括所有左带 R_1, R_2, R_3 和右带 R_1 来近似对可复合三元组 R_3 的求和（它们不一定与 R_2 或彼此可适当复合）。由此得到一个矩阵 $\mathbf{L}\mathbf{Q}_i\mathbf{L}$，其中 $\mathbf{L}$ 对左带求和，$\mathbf{Q}_i$ 对第 R_2 个环中的带求和。

在循环的i次迭代中。随后，对于交集误差项（如果有），我们转而处理带状图三元组 R_1, R_2, R_3。[8] [9]

2. 我们应用**交集项分解操作**，以获得三元带组R_1, R_2, R_3，它们是可适当复合的。

3. 我们对R_2 应用**移除中间边指标操作**，以确保R_2 没有中间指标。4. 我们应用**寻找 PMVS 子程序**。

备注 3.7。与之前使用图矩阵的平方和下界一样，一个关键观察是，只要 $B^{R_1''} = B^{R_1'} = A^{R_2'}$ 和 $A^{R_3''} = A^{R_3'} = B^{R_2'}$成立，*PMVS* 操作和交集项分解操作不会因将 R_1' 替换为不同的左带 R_1''，或将 R_3' 替换为不同的右带 R_3'' 而受到影响。这确保了所有左带 R_1' 和右带 R_3' 都出现在矩阵$\mathbf{L}$ 和$\mathbf{L}$ 中。 $^{\intercal}$

执行这一 过程后，矩矩阵的整体分解为

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{L}\left(\sum_{i=0}^{D_V} \mathbf{Q}_i\right)\mathbf{L}^{\intercal} \pm \text{truncation error}\,.$$

因此， $\mathbf{\Lambda} \geq 0$ 主要要求是证明 $\sum^{D_V}{}_{i=0}\mathbf{Q}_i \geq 0$。我们将证明，范数主导项是对角形状（定义 2.16）。借助 PMVS 分解，这些形状是半正定的，这一点很容易验证。

引理 3.8. 如果 R_1, R_2, R_3 是已标识 *PMVS* 的带状图，且 R_2 是对角的，那么$\lambda_{R_2}\mathbf{M}_{R_2} \geq 0$。

证明. $\lambda_{R_2} \geq 0$ 且R_2 是只有一个非零项的对角矩阵，因此我们需要证明该项非负。由于R_2 具有边示性函数，该项为

$$\prod_{e\in E(G)} \mathbf{1}_{e\in E(R_2)}\chi_e(G)\,.$$

该项非零时，其值为 $\chi(1)^{|E(R_2)|} = \left(\sqrt{1-p}\,p\right)^{|E(R_2|}) \geq 0$。 —— —— ■

在下一节中，我们将证明 $\mathbf{Q}_i$ 中任意单个项的范数相对于这些半正定项很小，这是半正定性证明中剩余的关键部分。对所有项求和并界定截断误差的工作见 附录 E。

[8]对于截断误差，还有额外的误差项，因为交集项的左带最大尺寸会略小一些。这一点必须单独处理。[9] 我们扩大求和范围，只纳入满足R_1 使得$B^{R_1} = A^{R_2}$ 以及R_3 使得$A^{R_3} = B^{R_2}$的带状图R_1。因此，矩阵$\mathbf{L}$ 的范围略窄于纳入所有左带的范围。

到目前为止，我们已经描述了如何操作带状图。每条带还带有一个需要跟踪的系数。最初，每条带 R 的系数为 λ_R。由于这些系数满足 $\lambda_{R\circ S} = \lambda_R \lambda_S$ (引理 2.48)，我们可以在对带进行分解时将 λ_R 提取出来。这样，左侧与右侧的带 R_1 和 R_3 总是分别带有因子 λ_{R_1} 和 λ_{R_3}。

R_2 上的系数最初为 λ_{R_2}，但在该过程的某些步骤中会累积额外因子。

定义 3.9 (c_R)**.** 给定带状图 R_1, R_2, R_3，它们会生成带状图 R'_1, R'_2, R'_3；设 $c^{R'_2}$ 满足最终系数为 $c_{R'_2} \lambda_{R'_1} \lambda_{R'_2} \lambda_{R'_3}$。注意，$c^{R'_2}$ 不依赖于 R'_1 或 R'_3，但取决于分解过程中的具体情况。

例如，在**添加左右指标操作**过程中，$c^{R'_2}$ 会为每个边指示变量累积一个因子 $\frac{1}{1-p}$；如果移除一条边，则累积因子 $-\sqrt{p\,(1-p)}$。在**移除中间边指标操作**过程中，它也会以相同方式变化。在**交集项分解操作**过程中，它还会乘以多余的边因子和顶点因子，以及线性化系数 c_0 或 c_1。

4 组合范数计费论证

现在，我们已经找出了主导 PSD 项，接下来分析第 3.4 节分解过程中出现的非主导项的范数，并证明它们很小。

构成 $\mathbf{\Lambda}$ 的每个图矩阵的范数都是 $\mathrm{poly}(n)$ 乘以额外的对数因子。证明最重要的是在粗略的 $\mathrm{poly}(n)$ 层面进行，忽略对数因子和其他相对较小的[10] 组合因子，例如 $\mathrm{poly}(D_{\mathrm{SoS}})$。本节中，我们将通过消去所有次多项式因子，在粗略层面展开讨论，以聚焦于关键的组合论证。只有第一个小节会涉及 n，其余小节则只讨论形状的组合性质。低阶因子将在附录 E 中正式纳入。

4.1 设定

本节中，我们将使用参数化 α, β, γ，而不是 k、p、q .

注 4.1. 请注意，稠密子图的大小 $\alpha \in (0, 1/2)$ 与一般形状 α 之间存在记号冲突；植入子图的边密度 $\gamma \in (0,1)$ 与参与交集的左形状 γ 之间也存在记号冲突。根据上下文，应该可以清楚判断该符号指的是形状还是实数。

[10] 为了研究随机图的平均度为次多项式的情形，或将平方和度数提高到 n^δ 以上，我们需要分别仔细追踪对数因子和 D_{SoS}。

令 τ 为带状图R_2 在矩阵$\mathbf{Q}_i$ 中的第 3.4 节。该项对$\mathbf{Q}_i$ 的贡献为$c_\tau \lambda_\tau \mathbf{M}_\tau$。我们希望证明，当 τ 不是对角形状时，该表达式的范数很小。

回忆一下，伪校准系数为

$$\lambda_\tau = n^{(\alpha-1)\left(|V(\tau)|-\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right)+(\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(\tau)|}.$$

回忆权重函数$w(S) = |S| - \beta \cdot |E(S)|$。

定义4.2 (近似范数界**)**。 给定一个形状 α （可能是不正规的），令:

$$\left\|\mathbf{M}_\alpha^{\approx}\right\| = n^{\frac{|V(\alpha)|-w(S_{min})+|\mathrm{Iso}(\alpha)|}{2}}.$$

更规范的写法是$\|\mathbf{M}_\alpha\|^{\approx}$，不过为使记号更简洁，我们采用这个版本。

定义4.3 (近似系数变化，非正式**)**。 给定一个形状 τ，令 $c_\tau^{\approx} = |c_\tau|$（忽略次多项式因子时）。

对于形状 τ，我们也将U_τ 和V_τ 视为对角形状，其中只包含两个端点都位于U_τ 或V_τ内部的边。我们希望利用对角形状$\lambda_{U_\tau}\mathbf{M}_{U_\tau}$ 和 $\lambda_{V_\tau}\mathbf{M}_{V_\tau}$来界定$c_\tau\lambda_\tau\mathbf{M}_\tau$。为此，我们需要满足

$$c_\tau^{\approx}\lambda_\tau \left\|\mathbf{M}_\tau^{\approx}\right\| \le \sqrt{\lambda_{U_\tau}\lambda_{V_\tau}\left\|\mathbf{M}_{U_\tau}^{\approx}\right\|\left\|\mathbf{M}_{V_\tau}^{\approx}\right\|}.$$

事实证明，该不等式允许存在一个多项式因子级别的松弛量(n)，并且形状 τ 越大，松弛量也越大。我们将利用这部分额外松弛量来控制形式化分析中的次多项式因子。为跟踪这部分额外松弛量，我们定义如下松弛参数。

定义4.4 (松弛量**)**。 给定一个系数为 c_τ 的形状 τ ，我们定义 松弛量(τ) ，使得
$c_\tau^{\approx}\lambda_\tau \left\|\mathbf{M}_\tau^{\approx}\right\| = n^{-\mathrm{slack}(\tau)}\sqrt{\lambda_{U_\tau}\lambda_{V_\tau}\left\|\mathbf{M}_{U_\tau}^{\approx}\right\|\left\|\mathbf{M}_{V_\tau}^{\approx}\right\|}.$

根据定义，松弛量(τ) 是一个不依赖于n的组合量。证明松弛量$(\tau) \ge 0$为正至关重要；在接下来的小节中，我们将通过组合论证明递归的每一步操作都会增加松弛量，从而证明松弛量(τ)具有以下正下界。

定义4.5 ($V_{tot}(\tau)$ 和 $E_{tot}(\tau)$)。 在递归过程中，某些顶点和边会在交集中，或在添加或移除示性函数时丢失。给定递归过程中带状图的形状 τ ，令 $V_{tot}(\tau)$ 表示不进行交集时的顶点集。令 $E_{tot}(\tau)$ 表示对 $E(\tau)$ 进行扩充后得到的集合，其中包含所有被移除的边。

备注4.6。 将 $(U_\tau$、V_τ、$V_{tot}(\tau)$,$E_{tot}(\tau))$ 视为形状 $\gamma_j \circ \cdots \circ \gamma_1 \circ \tau_0 \circ \gamma_1' \circ \cdots \circ \gamma' j,\tau$ 其中 $\tau_0 \tau$ 是"初始"中间形状，j 是递归的层级，而 $\gamma_i, \gamma' i$ 将在后续章节中说明。 τ

定理 4.7。 (松弛下界)。 在第 *3.4* 节所述的分解过程中任意时刻，令 τ 为 R 的形状$_2$，

$$\text{slack}(\tau) \geq \varepsilon \left(|E_{tot}(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} + |V_{tot}(\tau)| - \frac{|U_\tau| + |V_\tau|}{2} \right)$$

其中 $\varepsilon = \text{最小值}\left\{1-\alpha, \ \frac{\gamma-\alpha\beta}{8}\right\}$。

我们将在接下来的几个引理中推导松弛量的组合公式。

引理 4.8。 对于任意形状 τ，若 S 是 τ 的 *SMVS*，则

$$\lambda_\tau \left\| \mathbf{M}_\tau^{\approx} \right\| = n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right) - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\tau) - \frac{w(S)}{2} + \frac{|\text{Iso}(\tau)|}{2} - (\gamma-\alpha\beta)|E(\tau)|}$$

证明。

$$\begin{aligned}
\lambda_\tau \left\| \mathbf{M}_\tau^{\approx} \right\| &= n^{(\alpha-1)\left(|V(\tau)| - \frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right) + (\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(\tau)|} n^{\frac{|V(\tau)|-w(S)+|\text{Iso}(\tau)|}{2}} \\
&= n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right) - (\frac{1}{2}-\alpha)|V(\tau)| + (\frac{1}{2}-\alpha)\beta|E(\tau)| - (\gamma-\alpha\beta)|E(\tau)| - \frac{w(S)}{2} + \frac{|\text{Iso}(\tau)|}{2}} \\
&= n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right) - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\tau) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\tau)| - \frac{w(S)}{2} + \frac{|\text{Iso}(\tau)|}{2}}
\end{aligned}$$

■

引理 4.9。 对于任意形状 τ，若 S 是 τ 的 *SMVS*，则

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_\tau \left\| \mathbf{M}_\tau^{\approx} \right\|}{\sqrt{\lambda_{U_\tau} \lambda_{V_\tau} \left\| \mathbf{M}_{U_\tau}^{\approx} \right\| \left\| \mathbf{M}_{V_\tau}^{\approx} \right\|}} \\
=& n^{-(\frac{1}{2}-\alpha)\left(w(\tau) - \frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}\right) - (\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2} - w(S)\right) + \frac{|\text{Iso}(\tau)|}{2}}.
\end{aligned}$$

证明。 对于对角形状$U\tau$ 和 V_τ，我们有

$$\begin{aligned}
\lambda_{U_\tau} \left\| \mathbf{M}_{U_\tau}^{\approx} \right\| &= n^{(\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(U_\tau)|} n^{\frac{\beta}{2}|E(U_\tau)|} = n^{(\beta-\gamma)|E(U_\tau)|} \\
\lambda_{V_\tau} \left\| \mathbf{M}_{V_\tau}^{\approx} \right\| &= n^{(\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(V_\tau)|} n^{\frac{\beta}{2}|E(V_\tau)|} = n^{(\beta-\gamma)|E(V_\tau)|}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\sqrt{\lambda_{U_\tau} \lambda_{V_\tau} \left\| \mathbf{M}_{U_\tau}^{\approx} \right\| \left\| \mathbf{M}_{V_\tau}^{\approx} \right\|} = n^{(\beta-\gamma)\left(\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)}.$$

乘以引理 4.8,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda_\tau \left\|\mathbf{M}_\tau^{\approx}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_\tau}\lambda_{V_\tau}\left\|\mathbf{M}_{U_\tau}^{\approx}\right\|\left\|\mathbf{M}_{V_\tau}^{\approx}\right\|}}\\
=&n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right)-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\tau)-\frac{w(S)}{2}+\frac{|\mathrm{Iso}(\tau)|}{2}-(\gamma-\alpha\beta)|E(\tau)|-(\beta-\gamma)\left(\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)}\\
=&n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right)-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\tau)-\frac{w(S)}{2}+\frac{|\mathrm{Iso}(\tau)|}{2}-(\gamma-\alpha\beta)|E(\tau)|-(\alpha\beta-\gamma)\left(\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)+(\alpha\beta-\beta)\left(\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)}\\
=&n^{(1-\alpha)\left(\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}\right)-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\tau)-\frac{w(S)}{2}+\frac{|\mathrm{Iso}(\tau)|}{2}-(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)}\\
=&n^{-(\frac{1}{2}-\alpha)\left(w(\tau)-\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}\right)-(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}-w(S)\right)+\frac{|\mathrm{Iso}(\tau)|}{2}}.
\end{aligned}
$$

■

由此可得松弛量的以下组合公式。

引理 4.10。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{slack}(\tau) = &\\
&(\frac{1}{2}-\alpha)\left(w(\tau)-\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}\right)+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}-w(S)\right)-\frac{|\mathrm{Iso}(\tau)|}{2}-\log_n(c_\tau^{\approx})
\end{aligned}
$$

4.2 中间形状的松弛量

我们首先计算中间形状的松弛量。这是该过程开始时的松弛量。

定理 4.11。 设 τ 为一个真中间形状。那么:

$$
\mathrm{slack}(\tau) \geq (\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)
$$

证明。 由于 τ 是真中间形状, $|\mathrm{Iso}(\tau)|=0$ 且 $c_\tau=1$。根据 引理 4.10 , 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{slack}(\tau) = &(\frac{1}{2}-\alpha)\left(w(\tau)-\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}\right)+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}-w(S)\right).
\end{aligned}
$$

此外，由于 $w(\tau) \geq w(S) = w(U_\tau) = w(V_\tau)$，最后一项为 0，而第一项非负。因此，

$$\text{slack}(\tau) \geq (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right).$$

■

4.3 PMVS 子程序的松弛量

在本小节中，假设一次迭代的 **寻找 PMVS 子程序** 将形状为 τ 的带状图 R_2 替换为形状为 τ' 的带状图 R_2'。

我们需要考虑"移除的边"$E(R_2) \setminus E(R_2')$，直观而言，它们是带状图中经过查询但不存在的边；形式上，它们是在**添加左右指标操作** 或**移除中间边指标操作**过程中消失的边。注意，所有移除的边都位于$U_\tau \cup V_\tau$中。

回顾一下，在**PMVS 操作**中，我们取一组三元带组R_1, R_2, R_3，此时已添加指示函数；然后沿着 A' 将 R_1 在最左 SMVS 两侧拆分，其中该 SMVS 位于 A^{R_1} 与 B^{R_1} 之间；同样，沿着位于 A^{R_3} 与 B^{R_3}之间的最右稀疏最小顶点分隔集B'，将R_3 拆分。

定义 4.12 (γ 和 γ')。令 γ 为 R_1 中位于 A' 与 B^{R_1}之间部分的形状。令 γ' 为 R_3 中位于 A^{R_3} 与 B'之间部分的形状。

注 4.13。注意，γ、τ以及 γ' 应包含所有移除的边，而 τ' 包含已移除的边。

注 4.14。虽然 γ 在技术上不同于 γ 第 *4.4* 节中交集项的，但它发挥着类似的作用。

引理 4.15。 γ、γ' 是左形状。

证明。假设S 是 γ的分隔集。我们声称S 也是R_1的分隔集。设P是从A^{R_1} 到B^{R_1}的任意路径。由于$A' = U_\gamma$ 是R_1, 的分隔集，P 必须经过A'。从A' 中该路径的最后一个顶点开始，可得到一条从$A' = U_\gamma$ 到$B^{R_1} = V_\gamma$的路径，该路径完全包含于 γ中。最后，由于S 是 γ的分隔集，它必须包含路径P上的一个顶点，因此S切断了路径P。

由于R_1 是左带，我们得出$w(S) \geq w(V_\gamma)$，而 γ 的唯一 SMVS 是V_γ。

■

定理 4.16. 设 $R_2 \to R_2'$ 是经过一次寻找 ***PMVS*** 子程序迭代的带状图。设 τ 和 τ' 分别是它们的形状。则

$$\text{slack}(\tau') - \text{slack}(\tau)$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \alpha\left(\frac{w(U_{\tau'})+w(V_{\tau'})-w(U_\tau)-w(V_\tau)}{2}\right)\\
&\quad+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau')|-\frac{|E(U_{\tau'})|+|E(V_{\tau'})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&\quad+(\gamma-\alpha\beta)x
\end{aligned}
$$

其中 x 是移除的边的总数。

证明。 根据引理 4.10,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{slack}(\tau')-\operatorname{slack}(\tau)\\
&=(\frac{1}{2}-\alpha)\left(w(\tau')-\frac{w(U_{\tau'})+w(V_{\tau'})}{2}-w(\tau)+\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}\right)\\
&\quad+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau')|-\frac{|E(U_{\tau'})|+|E(V_{\tau'})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{w(U_{\tau'})+w(V_{\tau'})}{2}-w(S')-\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)}{2}+w(S)\right)\\
&\quad-\frac{|\operatorname{Iso}(\tau')|-|\operatorname{Iso}(\tau)|}{2}-\log_n(c_{\tau'}^{\approx})+\log_n(c_\tau^{\approx})\\
&=(\frac{1}{2}-\alpha)\left(w(\tau')-w(\tau)\right)+\alpha\left(\frac{w(U_{\tau'})+w(V_{\tau'})-w(U_\tau)-w(V_\tau)}{2}\right)\\
&\quad+\frac{w(U_\tau)+w(V_\tau)-w(U_{\tau'})-w(V_{\tau'})+w(S')-w(S)+|\operatorname{Iso}(\tau)|-|\operatorname{Iso}(\tau')|}{2}\\
&\quad+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau')|-\frac{|E(U_{\tau'})|+|E(V_{\tau'})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)-\log_n\left(\frac{c_{\tau'}^{\approx}}{c_\tau^{\approx}}\right)
\end{aligned}
$$

乘以 12 的那个大项最为危险, -因为它没有乘上任何小系数。我们如下分析这些项。

断言 4.17。 $c_{\tau'}^{\approx}\underline{c_\tau^{\approx}}=n^{-\gamma x}$

断言 断言 *4.17*的证明。 正如定义 3.9之后所述，对于每条被移除的边，我们都会得到一个大小为 $n^{-\frac{\beta}{2}}$ 的因子。此外，我们还会得到一个 $n^{\frac{\beta}{2}-\gamma}$因子，从 λ_τ移至 $c_{\tau'}$。将这些因子相乘后，每条被移除的边对应一个大小为 $n^{-\gamma}$ 的因子。 ■

命题 4.18. $w(\tau')\geq w(\tau)+\beta x$

命题 命题 *4.18*的证明。 注意

$$
w(\tau')=w(\gamma)+w(\tau)+w(\gamma'^{\intercal})-w(U_\tau)-w(V_\tau)+\beta x\,.
$$

$U_\tau=V\gamma$ 是 γ 的 SMVS，因此 $w(\gamma)\geq w(U_\tau)$。同理，$w(\gamma')\geq w(V_\tau)$。将这些等式合并可得 $w(\tau')\geq w(\tau)+\beta x$，如所需。 ■

下一个引理是关于 PMVS 的权衡引理，将在下一小小节中证明。

引理 4.19（PMVS 权衡引理）。

$$w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(S') + |\operatorname{Iso}(\tau')| \le w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(S) + |\operatorname{Iso}(\tau)| + \beta x$$

将 命题 4.18 乘以 $\frac{1}{2} - \alpha$，并将引理 4.19 乘以 12，可得

1. $(\frac{1}{2} - \alpha)(w(\tau') - w(\tau)) \ge \frac{\beta}{2}x - \alpha\beta x$
2. $$\frac{w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(U_{\tau'}) - w(V_{\tau'}) + w(S') - w(S) + |\operatorname{Iso}(\tau)| - |\operatorname{Iso}(\tau')|}{2} \ge -\frac{\beta}{2}x$$

将这些等式代入上面的公式，可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{slack}(\tau') - \operatorname{slack}(\tau) \\
&\quad \ge \frac{\beta}{2}x - \alpha\beta x + \alpha\left(\frac{w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right) - \frac{\beta}{2}x \\
&\qquad + (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau')| - \frac{|E(U_{\tau'})| + |E(V_{\tau'})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right) \\
&\qquad + \gamma x \\
&\quad = (\gamma - \alpha\beta)x + \alpha\left(\frac{w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right) \\
&\qquad + (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau')| - \frac{|E(U_{\tau'})| + |E(V_{\tau'})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right)
\end{aligned}$$

如所需。 ■

推论 4.20。

$$\begin{aligned}
&\operatorname{slack}(\tau') - \operatorname{slack}(\tau) \\
&\quad \ge (\gamma - \alpha\beta) \cdot \left(|E_{tot}(\tau')| - \frac{|E(U_{\tau'})| + |E(V_{\tau'})|}{2} - |E_{tot}(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right)
\end{aligned}$$

证明。利用我们的 观察上述松弛计算，我们可以去掉顶点因子 a s

$$\alpha\left(\frac{w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right) \ge 0$$

因为 $U_{\tau'}$（包括移除的边）是比分隔集 U_τ 更大的分隔集，因为在这次迭代的此时，U_τ 是 R_1 的 SMVS（$V_{\tau'}$ 和 V_τ 也同样如此）。移除边只会增大 $w(U_{\tau'})$。 ■

4.3.1 PMVS权衡引理的证明

引理 4.19 （PMVS 权衡引理）。

$$w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(S') + |\mathrm{Iso}(\tau')| \le w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(S) + |\mathrm{Iso}(\tau)| + \beta x$$

证明。 为证明这一点，我们构造并分析以下顶点集合。

1. 我们令X_0 表示$V_\gamma \setminus S'$ 中能够在 γ 从U_γ到达，且不经过S'中顶点的顶点集合。然后令 $X = X_0 \cup (S' \cap V(\gamma))$。

2. 我们令 Y_l 表示 $V_\gamma \setminus S'$ 中无法在 γ 从 U_γ 到达，且不经过 S'的非孤立顶点集合。类似地，我们令 Y_r 表示 $U_{\gamma'} \setminus S'$ 中无法在 γ' 从 $V_{\gamma'}$ 到达，且不经过 S'中顶点的非孤立顶点集合。然后令 $Y = Y_l \cup Y_r \cup (S' \cap V(\tau)) \cup (V_\gamma \cap U_{\gamma'})$。3. 我们令 Z_0 表示 $U_{\gamma'} \setminus S'$ 中能够在 γ' 从 $V_{\gamma'}$到达，且不经过 S'中顶点的顶点集合。我们令 Z_{extra} 表示 $(U_\tau \cap V_\tau) \setminus S'$ 中无法在 γ' 从 $V_{\gamma'}$ 到达的非孤立顶点集合。然后令 $Z = Z_0 \cup Z_{extra} \cup (S' \cap V(\gamma'))$。

令 $x_\cap$ 表示从 $U_\tau \cap V_\tau$ 中删除的边数。现在我们注意到，只需证明以下陈述即可。

1. $w(X) \ge w(U_\gamma)$, $w(Y) \ge w(S) + \beta x_\cap$, and $w(Z) \ge w(V_{\gamma'\tau})$.
2. $$\begin{aligned} w(X) + w(Y) + w(Z) &\le w(S') + w(V_\gamma) + w(U_{\gamma'\tau}) - (|\mathrm{Iso}(\tau')| - |\mathrm{Iso}(\tau)|) \\ &= w(S') \\ &\quad + w(U_\tau) + \beta(\#\text{ of edges removed from } U_\tau) \\ &\quad + w(V_\tau) + \beta(\#\text{ of edges removed from } V_\tau) \\ &\quad - (|\mathrm{Iso}(\tau')| - |\mathrm{Iso}(\tau)|) \end{aligned}$$

利用第二个陈述左端的三个初始不等式，

$$\begin{aligned} w(U_\gamma) + w(S) + \beta x_\cap + w(V_{\gamma'\tau}) \le w(S') + w(U_\tau) + w(V_\tau) \\ + \beta x + \beta x_\cap - \left|\mathrm{Iso}(\tau')\right| + |\mathrm{Iso}(\tau)|. \end{aligned}$$

重新整理后，我们得到

$$w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(S') + |\mathrm{Iso}(\tau')| \le w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(S) + |\mathrm{Iso}(\tau)| + \beta x$$

根据需要。

转到具体陈述，为了证明$w(X) \geq w(U_\gamma)$以及$w(Z) \geq w(V_{\gamma'})$，我们注意到，由于X和Z的选取方式，X是γ的顶点分隔集，而Z是γ'的顶点分隔集。

为证明$w(Y) \geq w(S) + \beta x$，我们首先注意到Y是τ的顶点分隔集（无论是否包含缺失边）。为此，假设Y不是τ的顶点分隔集。若如此，则存在一条路径P_m，从一个顶点$u \in U_\tau$通往一个顶点$v \in V_\tau$，且不与Y相交，因此也不与S'相交。由于$u \notin Y$，存在一条路径P_l，从U_γ通往γ中的u，且不与S'相交。同理，由于$v \notin Y$，存在一条路径P_r，从v通往$V_{\gamma'}$，且位于γ'中，不与S'相交。将P_l、P_m和P_r首尾相接，得到一条从$U_{\tau'}$通往$V_{\tau'}$的路径；该路径不与S'相交。这与S'是τ'的SMVS矛盾。

现在我们注意到，移除缺失边后，τ的所有顶点分隔集的权重至少增加了βx。因此，删除缺失边后，τ的所有顶点分隔集的权重至少为$w(S) + \beta x$，所以$w(Y) \geq w(S) + \beta x$。

为了证明

$$w(X) + w(Y) + w(Z) \leq w(S') + w(V_\gamma) + w(U_{\gamma'\tau}) - (|\mathrm{Iso}(\tau')| - |\mathrm{Iso}(\tau)|)$$

我们证明以下两个陈述：

1. For each vertex v, $\mathbf{1}_{v\in X} + \mathbf{1}_{v\in Y} + \mathbf{1}_{v\in Z} \leq \mathbf{1}_{v\in S'} + \mathbf{1}_{v\in V_\gamma} + \mathbf{1}_{v\in U_{\gamma'\tau}} - \mathbf{1}_{v\in \mathrm{Iso}(\tau')\setminus \mathrm{Iso}(\tau)}$.
2. For each edge e, $\mathbf{1}_{e\in E(X)} + \mathbf{1}_{e\in E(Y)} + \mathbf{1}_{e\in E(Z)} \geq \mathbf{1}_{e\in E(S')} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(U_{\gamma'\tau})}$.

对于第一个陈述，我们作如下观察：

1. 如果$v \in S'$，那么v不是孤立的。如果$v \notin V_\gamma \cup U_{\gamma'}$，那么根据$v$属于$V(\gamma)$、$V(\tau)$还是$V(\gamma')$，$v$恰好属于$X$、$Y$、$Z$中的一个。如果$v \in V_\gamma \cup U_{\gamma'}$，那么$v \in Y$；当且仅当$v \in X$时，$v \in V_\gamma$；当且仅当$v \in Z$时，$v \in U_{\gamma'}$。

2. 如果$v \in \mathrm{Iso}(\tau') \setminus \mathrm{Iso}(\tau)$，那么$v \notin X$且$v \notin Z$。此外，$v$必须属于$V_\gamma$或$U_{\gamma'}$，并且当且仅当$v$同时属于$V_\gamma$和$U_{\gamma'}$时，$v \in Y$。3. 如果$v \in (V_\gamma \setminus S') \setminus U_{\gamma'}$且$v$不是孤立点，那么$\mathbf{1}_{v\in S'} + \mathbf{1}_{v\in V_\gamma} + \mathbf{1}_{v\notin U_{\gamma'}} - \mathbf{1}_v$是孤立的$= 1$，并且$\mathbf{1}_{v\in X} + \mathbf{1}_{v\in Y} + \mathbf{1}_{v\in Z} = 1$，因为$v \notin Z$，且$v \in X$或$v \in Y$，但不能两者兼有。4. 如果$v \in (U_{\gamma'} \setminus S') \setminus V_\gamma$且$v$不是孤立点，那么$\mathbf{1}_{v\in S'} + \mathbf{1}_{v\in V_\gamma} + \mathbf{1}_{v\in U_{\gamma'}} - \mathbf{1}_v$是孤立的$= 1$，并且$\mathbf{1}_{v\in X} + \mathbf{1}_{v\in Y} + \mathbf{1}_{v\in Z} = 1$，因为$v \notin X$，且$v \in Y$或$v \in Z$，但不能两者兼有。5. 如果$v \in (V_\gamma \cap U_{\gamma'}) \setminus S'$且$v$不是孤立点，那么$\mathbf{1}_{v\in S'} + \mathbf{1}_{v\in V_\gamma} + \mathbf{1}_{v\in U_{\gamma'}} - \mathbf{1}_v$是孤立的$= 2$，并且$\mathbf{1}_{v\in X} + \mathbf{1}_{v\in Y} + \mathbf{1}_{v\in Z} = 2$，因为$v \in Y$，且$v \in X$或$v \in Z$，但不能两者兼有。

对于第二个结论，我们有以下观察：

1. 若 e ∈ E(S′) 且 e ∉ E(V$_\gamma$) ∪E(U$_{\gamma'}$)，则根据 e 属于 E(γ)、E(τ) 或 E(γ')，e 恰好属于 E(X)、E(Y) 和 E(Z) 中的一个。若 e ∈ E(V$_\gamma$) ∪E(U$_{\gamma'}$)，则 e ∈ E(Y)，当且仅当 e ∈ E(V$_\gamma$) 时，e ∈ E(X)；当且仅当 e ∈ E(U$_{\gamma'}$) 时，e ∈ E(Z)。在所有这些情况下，$\mathbf{1}_{e\in E(X)} + \mathbf{1}_{e\in E(Y)} + \mathbf{1}_{e\in E(Z)} \geq \mathbf{1}_{e\in E(S')} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(U_{\gamma'})}$。

2. 若 e ∈ (E(V$_\gamma$) \ E(S′)) \E(U$_{\gamma'}$)，则 $\mathbf{1}_{e\in E(S')} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(U_{\gamma'})} = 1$ 且 $\mathbf{1}_{e\in E(X)} + \mathbf{1}_{e\in E(Y)} + \mathbf{1}_{e\in E(Z)} = 1$，因为 e ∉ E(Z)，并且 e ∈ E(X) 或 e ∈ E(Y) 二者必居其一。

3. 若 e ∈ (E(U$_{\gamma'}$) \E(S′)) \ E(V$_\gamma$)，则 $\mathbf{1}_{e\in E(S')} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(U_{\gamma'})} = 1$ 且 $\mathbf{1}_{e\in E(X)} + \mathbf{1}_{e\in E(Y)} + \mathbf{1}_{e\in E(Z)} = 1$，因为 e ∉ E(X)，并且 e ∈ E(Y) 或 e ∈ E(Z) 二者必居其一。

4. 若 e ∈ (E(V$_\gamma$) ∩ E(U$_{\gamma'}$)) \E(S′)，则 $\mathbf{1}_{e\in E(S')} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(U_{\gamma'})} = 2$ 且 $\mathbf{1}_{e\in E(X)} + \mathbf{1}_{e\in E(Y)} + \mathbf{1}_{e\in E(Z)} = 2$ 是 e ∈ E(Z)，并且 e ∈ E(X) 或 e ∈ E(Z) 二者有且仅有一个成立。

■

4.4 交集项的松弛量

现在我们分析**交集项分解操作**的松弛量。其分析与 PMVS 子程序类似，但还需考虑其他因素。

假设该操作将一条形状为 τ 的带 R$_2$ 替换为一条形状为τ_P的带 R$'_2$。回顾一下，在交集项分解操作中，我们取三条带 R$_1$, R$_2$,R$_3$，它们两两相交；然后沿着位于 A$_{R_1}$ 与 B$_{R_1}$ ∪ V$_{intersected}$(R$_1$)之间的最左 SMVS A′ 切分 R$_1$，同样地，沿着位于 A$_{R_3}$ ∪V$_{intersected}$(R$_3$) 与 B$_{R_3}$ 之间的最右稀疏最小顶点分隔集 B′ 切分 R$_3$。

定义 4.21 (γ 和 γ')。令 γ 为 R_1 中 A' 与 B^{R_1} 之间部分的形状。令 γ' 为 R_3 中 A^{R_3} 与 B' 之间部分的形状。

记号 τ_P 之所以这样使用，是因为 τ_P 是某个交集模式$P \in P_{\gamma,\tau,\gamma'}$（线性化后）的交形状（定义 2.37）。

在**交集项分解操作**过程中被线性化并归入常数项的边称为“消失边”。

定理 4.22。设 $R_2 \to R'_2$ 是经过交集项分解操作的带状图。设 τ 和 τ_P 分别是它们的形状。那么对于 γ，γ' 如定义 *4.21* 中所定义，

$$\begin{aligned}\text{slack}(\tau_P) - \text{slack}(\tau) \geq\\ &(1-\alpha)\left(\frac{w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right)\\ &+ (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau_P)| - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right)\\ &+ (\gamma - \alpha\beta)\cdot edgereduction\end{aligned}$$

其中边消去是消失边的总数。

证明。 根据引理 4.10,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{slack}(\tau_P) - \operatorname{slack}(\tau) \\
&= (\frac{1}{2} - \alpha)\left(w(\tau_P) - \frac{w(U_{\tau_P}) + w(V_{\tau_P})}{2} - w(\tau) + \frac{w(U_\tau) + w(V_\tau)}{2}\right) \\
&+ (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau_P)| - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right) \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{w(U_{\tau_P}) + w(V_{\tau_P})}{2} - w(S') - \frac{w(U_\tau) + w(V_\tau)}{2} + w(S)\right) \\
&- \frac{|\operatorname{Iso}(\tau_P)| - |\operatorname{Iso}(\tau)|}{2} - \log_n(c^{\approx}_{\tau_P}) + \log_n(c^{\approx}_{\tau}) \\
&= (\frac{1}{2} - \alpha)\left(w(\tau_P) - w(\tau)\right) - \frac{1-\alpha}{2}\left(w(U_{\tau_P}) + w(V_{\tau_P}) - w(U_\gamma) - w(V_{\gamma'\tau})\right) \\
&+ \alpha\left(\frac{w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'\tau}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right) \\
&+ \frac{w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(U_\gamma) - w(V_{\gamma'\tau}) + w(S') - w(S) + |\operatorname{Iso}(\tau)| - |\operatorname{Iso}(\tau_P)|}{2} \\
&+ (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau_P)| - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right) - \log_n\left(\frac{c^{\approx}_{\tau_P}}{c^{\approx}_{\tau}}\right)
\end{aligned}
$$

现在我们分析其中出现的不同项。

断言 4.23。

$$
\frac{c^{\approx}_{\tau_P}}{c^{\approx}_{\tau}} = n^{(\alpha-1)\cdot(\#\ of\ intersections)}\left(\prod_{e \in E_{tot}(\tau_P)} \left(n^{\frac{\beta}{2}-\gamma}\right)^{\operatorname{mult}(e)-1+\mathbf{1}_{e\ vanishes}} \left(n^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\operatorname{mult}(e)-1-\mathbf{1}_{e\ vanishes}}\right)
$$

请注意，我们将迭代$e \in E_{tot}(\tau_P)$ 视为每条多重边仅产生一次。

断言 4.23 的证明。注意，对于每个交集，我们少了一个 $\mathrm{n}^{(\alpha-1)}$ 中的顶点因子 λ_{τ_P}，因此需要将该因子加到 c_{τ_P} 中。对于 $\mathrm{E}_{tot}(\tau_P)$ 中的每条多重边，我们有 $\mathrm{mult(e)} - 1 + \mathbf{1}_e$ 少消去了 $\mathrm{n}^{\frac{\beta}{2}-\gamma}$ 中的因子 λ_{τ_P}，因此需要将这些因子加到 c_{τ_P} 中。最后，对于 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}_{tot}(\tau_P)$ 中的每条多重边，当我们将其表示为 1 和 $\chi_{\{e\}}$ 的线性组合时，会得到 $\mathrm{mult(e)} - 1 - \mathbf{1}_e$ 个未消去的 $\mathrm{n}^{\frac{\beta}{2}}$ 因子（命题 2.43），这些因子也需要加到 c_{τ_P} 中。当带有示性函数的多重边被线性化时，它永远不会消失，并且其系数与对不带示性函数的多重边进行线性化时的系数相同。∎

为方便记号，我们定义以下表达式：

$$\text{linearization} = \sum_{e \in E_{tot}(\tau_P)} \text{mult}(e) - 1 - \mathbf{1}_{e \text{ vanishes}} \,.$$

$$\text{edgereduction} = \sum_{e \in E_{tot}(\tau_P)} \text{mult}(e) - 1 + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}$$

借助这些表达式，我们可以如下表示 $\log_n\left(\frac{c^{\approx}_{\tau_P}}{c^{\approx}_{\tau}}\right)$。

推论 4.24。

$$\log_n\left(\frac{c^{\approx}_{\tau_P}}{c^{\approx}_{\tau}}\right) = (\alpha - 1) \cdot (\#\, of\, intersections) + (\frac{\beta}{2} - \gamma)(edgereduction) + \frac{\beta}{2}(linearization)$$

命题 4.25。

$$\begin{aligned} w(\tau_P) \geq w(U_\gamma) + w(V_{\gamma' \intercal}) - w(U_\tau) - w(V_\tau) + w(\tau) \\ - (\#\, of\, intersections) + \beta(edgereduction) \end{aligned}$$

命题 *4.25* 的证明。我们首先注意到

$$\begin{aligned} w(\tau_P) = w(\gamma) + w(\tau) + w(\gamma'^{\intercal}) - w(U_\tau) - w(V_\tau) \\ - (\#\text{ of intersections}) + \beta(\text{edgereduction}) \,. \end{aligned}$$

为此，注意到如果不存在交集，那么我们就有$w(\tau_P) = w(\gamma) + w(\tau) + w(\gamma') - w(U_\tau) - w(V_\tau)$。每个交集都会使顶点数减少，从而使$\tau_P$ 的权重减少 $\mathbf{1}$。边数的变化会使 τ_P 的权重增加 β(边消去)。

现在我们注意到$w(\gamma) \geq w(U_\gamma)$，否则 γ 就会是在 γ 中分隔集U_γ 和$V_\gamma \cup$之间的$V_{intersected(\gamma)^{\intercal}}$，且其权重小于$U_\gamma$。按照类似的逻辑，$w(\gamma') \geq w(V_{\gamma'})$。因此，我们有

$$\begin{aligned} w(\tau_P) \geq w(U_\gamma) + w(V_{\gamma' \intercal}) - w(U_\tau) - w(V_\tau) + w(\tau) \\ - (\#\text{ of intersections}) + \beta(\text{edgereduction}) \end{aligned}$$

按需。 ∎

下一个引　理是将在下一小节中证明的交集权衡引理　.

引理 4.26 (交集权衡引理**)**。 给定一个形状 τ、左形状 γ， γ'，以及一个交集模式 $P \in \mathcal{P}_{\gamma^-,\ \tau,\ (\gamma')^-}$，满足以下结构性质：

U_γ 是 U_γ 和 $V_\gamma \cup V_{intersected}(\gamma)$ 的最左 *SMVS*，而 $V_{\gamma'}$ 是 $U_{\gamma'\tau} \cup V_{intersected}(\gamma')$ 和 $V_{\gamma'}$ 的最右稀疏最小顶点分隔集。

设 S 是 τ 的 *SMVS*，τ_P 是 P 经线性化后得到的形状，且 S' 是 τ_P 的 *SMVS*。那么，

$$\begin{aligned} w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'\tau}) - w(S') + |\operatorname{Iso}(\tau_P)| \le w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(S) + |\operatorname{Iso}(\tau)| \\ + (\#\textit{ of intersections}) - \beta\,(\textit{linearization}) \\ - \beta(\#\textit{ of vanishing edges in } U_\gamma) \\ - \beta(\#\textit{ of vanishing edges in } V_{\gamma'\tau}) \end{aligned}$$

将 命题 4.25 乘以 $\frac{1}{2} - \alpha$，并将引理 4.26 乘以 12，可得 -

1.
$$\begin{aligned} &(\frac{1}{2} - \alpha)\,(w(\tau_P) - w(\tau)) \ge \\ &(\frac{1}{2} - \alpha)\left(w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'\tau}) - w(U_\tau) - w(V_\tau) - (\#\text{ of intersections})\right) \\ &+ (\frac{1}{2} - \alpha)\beta(\text{edgereduction}) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &\frac{w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(U_{\tau_P}) - w(V_{\tau_P}) + w(S') - w(S) + |\operatorname{Iso}(\tau)| - |\operatorname{Iso}(\tau_P)|}{2} \\ &\ge \frac{-1}{2}(\#\text{ of intersections}) + \frac{\beta}{2}\,(\text{linearization}) \\ &+ \frac{\beta}{2}((\#\text{ of vanishing edges in } U_\gamma) + (\#\text{ of vanishing edges in } V_{\gamma'\tau})) \end{aligned}$$

将这些方程代入上述公式，可得

$$\begin{aligned} &\operatorname{slack}(\tau_P) - \operatorname{slack}(\tau) \\ &\quad \ge (\frac{1}{2} - \alpha)\left(w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'\tau}) - w(U_\tau) - w(V_\tau) - (\#\text{ of intersections})\right) \\ &\quad + (\frac{1}{2} - \alpha)\beta\,(\text{edgereduction}) - \frac{1-\alpha}{2}\left(w(U_{\tau_P}) + w(V_{\tau_P}) - w(U_\gamma) - w(V_{\gamma'\tau})\right) \\ &\quad + \alpha\left(\frac{w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'\tau}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\beta}{2}\,(\text{linearization}) - \frac{1}{2}(\#\text{ of intersections}) \\ &\quad + \frac{\beta}{2}((\#\text{ of vanishing edges in } U_\gamma) + (\#\text{ of vanishing edges in } V_{\gamma'\tau})) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau_P)|-\frac{|E(U_{\tau_P})|+|E(V_{\tau_P})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&-(\alpha-1)(\#\text{ of intersections})-\frac{\beta}{2}\,(\text{linearization})\\
&-(\frac{\beta}{2}-\gamma)(\text{edgereduction})\\
=&\frac{1-\alpha}{2}\left(w(U_\gamma)+w(V_{\gamma'\tau})-w(U_\tau)-w(V_\tau)\right)\\
&-\frac{1-\alpha}{2}\left(w(U_{\tau_P})+w(V_{\tau_P})-w(U_\gamma)-w(V_{\gamma'\tau})\right)+(\gamma-\alpha\beta)\,(\text{edgereduction})\\
&+\frac{\beta}{2}((\#\text{ of vanishing edges in }U_\gamma)+(\#\text{ of vanishing edges in }V_{\gamma'\tau}))\\
&+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau_P)|-\frac{|E(U_{\tau_P})|+|E(V_{\tau_P})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)
\end{aligned}
$$

现在我们利用

$$
\begin{aligned}
&w(U_{\tau_P})+w(V_{\tau_P})-w(U_\gamma)-w(V_{\gamma'\tau})\\
=&\,\beta(\#\text{ of vanishing edges in }U_\gamma)+\beta(\#\text{ of vanishing edges in }V_{\gamma'\tau})\\
&-\beta(\#\text{ of edges added to }U_\gamma)-\beta(\#\text{ of edges added to }V_{\gamma'\tau})\\
\le&\,\beta(\#\text{ of vanishing edges in }U_\gamma)+\beta(\#\text{ of vanishing edges in }V_{\gamma'\tau})
\end{aligned}
$$

代入后，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{slack}(\tau_P)-\text{slack}(\tau)\\
\ge&\frac{1-\alpha}{2}\left(w(U_\gamma)+w(V_{\gamma'\tau})-w(U_\tau)-w(V_\tau)\right)\\
&+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau_P)|-\frac{|E(U_{\tau_P})|+|E(V_{\tau_P})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&-\frac{\beta-\alpha\beta}{2}\left((\#\text{ of vanishing edges in }U_\gamma)+(\#\text{ of vanishing edges in }V_{\gamma'\tau})\right)\\
&+(\gamma-\alpha\beta)\,(\text{edgereduction})\\
&+\frac{\beta}{2}\left((\#\text{ of vanishing edges in }U_\gamma)+(\#\text{ of vanishing edges in }V_{\gamma'\tau})\right)\\
=&\frac{1-\alpha}{2}\left(w(U_\gamma)+w(V_{\gamma'\tau})-w(U_\tau)-w(V_\tau)\right)\\
&+(\gamma-\alpha\beta)\left(|E(\tau_P)|-\frac{|E(U_{\tau_P})|+|E(V_{\tau_P})|}{2}-|E(\tau)|+\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\
&+(\gamma-\alpha\beta)\cdot\text{edgereduction}\\
&+\frac{\alpha\beta}{2}\left((\#\text{ of vanishing edges in }U_\gamma)+(\#\text{ of vanishing edges in }V_{\gamma'\tau})\right)
\end{aligned}
$$

根据需要。 ■

推论 4.27。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{slack}(\tau_P) - \mathrm{slack}(\tau) \\
&\quad \geq \ (\gamma - \alpha\beta) \cdot \left(|E_{tot}(\tau_P)| - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} - |E_{tot}(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} \right) \\
&\quad + \frac{1-\alpha}{2} \left(\#\ \textit{of vertices in}\ (U_{\tau_P} \cup V_{\tau_P}) \setminus (U_{\tau_P} \cap V_{\tau_P})\ \textit{not incident to}\ E_{tot}(\tau_P) \right) .
\end{aligned}$$

证明。 根据上述松弛计算，我们注意到

$$(1-\alpha)\left(\frac{w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'^\intercal}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2} \right) \geq 0$$

因为U_γ 是比$U_\tau = V_\gamma$更大的分隔集，因为 γ 是一个左形状（$V_{\gamma'}$和$V_\tau = U_{\gamma'}$ 也同理）。此外，即使从U_γ 或$V_{\gamma'}$ 中移除度为 0 的顶点，这一结论仍然成立，因为U_γ 在移除这些顶点后仍是一个分隔集。因此，我们可以将右侧替换为

$$\frac{1-\alpha}{2} \left(\#\ \text{of degree-0 vertices in}\ (U_\gamma \cup V_{\gamma'^\intercal}) \setminus (U_\gamma \cap V_{\gamma'^\intercal}) \right) .$$

边因子可直接由松弛量公式得出。因此，该结论成立。 ■

4.4.1 交集权衡引理的证明

引理 4.26 (交集权衡 引理)。 给定一个形状 τ、左形状 γ, γ'、一个交集模式 $P \in \mathcal{P}_{\gamma^-,\tau,(\gamma')^-}$，使得以下结构性质成立：

> *U_γ is the leftmost SMVS of U_γ and $V_\gamma \cup V_{intersected}(\gamma)$, and $V_{\gamma'^\intercal}$ is the rightmost SMVS of $U_{\gamma'^\intercal} \cup V_{intersected}(\gamma'^\intercal)$ and $V_{\gamma'^\intercal}$.*

令 S 为 τ 的一个 *SMVS*，令 τ_P 为由 P 经线性化后得到的形状，并令 S' 为 τ_P的一个 *SMVS*。于是，

$$\begin{aligned}
w(U_\gamma) + w(V_{\gamma'^\intercal}) - w(S') + |\mathrm{Iso}(\tau_P)| \leq\ & w(U_\tau) + w(V_\tau) - w(S) + |\mathrm{Iso}(\tau)| \\
& + (\#\ \textit{of intersections}) - \beta\ (\textit{linearization}) \\
& - \beta(\#\ \textit{of vanishing edges in}\ U_\gamma) \\
& - \beta(\#\ \textit{of vanishing edges in}\ V_{\gamma'^\intercal})
\end{aligned}$$

证明。 令S'_{pre} 为交集之前S' 的原像，它是$V(\gamma \circ \tau \circ \gamma'^\intercal)$的子集。我们按如下方式构造集合$X \subseteq V(\gamma)$、$Y \subseteq V(\tau)$和$Z \subseteq V(\gamma'^\intercal)$。

1. 我们将X_0 定义为$V(\gamma) \setminus S'_{pre}$ 中满足以下条件的顶点集合：可通过 $\gamma \setminus S'_{pre}$中的非消失边路径从$U_\gamma$ 到达；与某个集合相交，或属于V_γ；且在 τ_P中不是孤立的。然后我们取$X = X_0 \cup (S'_{pre} \cap V(\gamma))$。

2. 我们将Y_l 定义为$V(\tau)$中的非孤立顶点集合，其中的顶点也属于$V(\gamma)$（要么因为它们属于$V_\gamma = U_\tau$，要么因为存在交集），且无法通过 $\gamma \setminus S'_{pre}$中的非消失边路径从$U_\gamma$ 到达。类似地，我们将Y_r 定义为$V(\tau)$中的非孤立顶点集合，其中的顶点也属于$V(\gamma')$（要么因为它们属于$V_\tau = U_{\gamma'}$，要么因为存在交集），且无法通过 $\gamma' \setminus S'_{pre}$中的非消失边路径从$V_{\gamma'}$ 到达。然后我们取$Y = Y_l \cup Y_r \cup V_{common} \cup (S'_{pre} \cap V_\tau)$，其中$V_{common}$ 是出现在 γ、 τ 和 γ' 中的顶点集合。

3. 我们将 Z_0 定义为 $V(\gamma') \setminus S'_{pre}$ 中的顶点集合，这些顶点可以通过 $\gamma' \setminus S'_{pre}$ 中由非消失边构成的路径从 $V_{\gamma'}$ 到达，或者与 $U_{\gamma'}$ 相交，并且在 τ_P 中不是孤立的。我们将 Z_{extra} 定义为 $V(\gamma') \setminus S'_{pre}$ 中同时属于 $V(\gamma)$、且无法通过 $\gamma \setminus S'_{pre}$ 中由非消失边构成的路径从 U_γ 到达的顶点集合。然后我们取 $Z = Z_0 \cup Z_{extra} \cup (S'_{pre} \cap V(\gamma'))$。

断言 4.28.

1. X 将 U_γ 与 $V_\gamma \cup${相交顶点}分离。2. Y 将 U_τ 与 V_τ分离。3. Z 将 $U_{\gamma'} \cup${相交顶点} 与 $V_{\gamma'}$分离

断言 4.28 的证明。根据 X 和 Z 的定义，命题 1 和 3 成立。对于命题 2，假设存在一条从 U_τ 到 V_τ 的路径 P，它不与 Y 相交。设 u 是 P 中最后一个属于 γ 的顶点（因为 u 属于 $V_\gamma = U_\tau$，或者因为发生了交集），设 v 是 P 中下一个属于 γ' 的顶点（因为 v 属于 $V_\tau = U_{\gamma'}$，或者因为发生了交集）。由于 $u \notin Y$，因此从 U_γ 到 u 存在一条由非消失边组成、位于 $\gamma \setminus S'_{pre}$ 中的路径。由于 $v \notin Y$，因此从 v 到 $V_{\gamma'}$ 存在一条由非消失边组成、位于 $\gamma' \setminus S'_{pre}$ 中的路径。

现在考虑P 中u 与v之间的部分。在这部分中，只有u 属于$V(\gamma)$，只有v 属于$V(\gamma')$，因此这部分中没有边消失。由于P 上没有顶点属于Y，这些顶点都不属于S'_{pre}。因此，我们可以拼接这些路径段，得到一条从U_γ 到V_γ 且不与S'相交的非消失边路径。这与S' 是 τ_P的 SMVS 这一事实矛盾。 ∎

我们得出 $w(X) \geq w(U_\gamma)$，$w(Y) \geq w(S)$，以及 $w(Z) \geq w(V_{\gamma'})$。为了完成交集权衡引理的证明，我们现在需要证明

$$\begin{aligned} w(X) + w(Y) + w(Z) \leq\ & (\#\text{ of intersections}) - (|\operatorname{Iso}(\tau_P)| - |\operatorname{Iso}(\tau)|) \\ & - \beta\left(\sum_{e \in E_{tot}(\tau_P)} (\operatorname{mult}(e) - 1 - \mathbf{1}_{e \text{ vanishes}})\right) + w(U_\tau) + w(V_\tau) + w(S') \\ & - \beta((\#\text{ of vanishing edges in } U_\gamma) + (\#\text{ of vanishing edges in } V_{\gamma'})) \end{aligned}$$

为证明这一点，我们考虑顶点$V(\tau_P)$ 和边 $E_{tot}(\tau_P)$在等式两边出现的次数。

1. 顶点 u 在 S' 中会在左侧出现 $\mathbf{1}_{u\in V(\gamma)} + \mathbf{1}_{u\in V(\tau)} + \mathbf{1}_{u\in V(\gamma')}$ 次，而在右侧出现 $1 + \mathbf{1}_{u\in U_\tau} + \mathbf{1}_{v\in V_\tau} +$ (与 u的交集数<style id id='14'>) 次。不难验证，这两个表达式相等。

2. 不在 u S' 中且不孤立的顶点，在右侧出现 (与 u的交集数) $+\mathbf{1}_{u\in U_\tau} + \mathbf{1}_{v\in V_\tau}$ 次，在左侧至多出现 (与 u的交集数) $+\mathbf{1}_{u\in U_\tau} + \mathbf{1}_{v\in V_\tau} = \mathbf{1}_{u\in V(\gamma)} + \mathbf{1}_{u\in V(\tau)} + \mathbf{1}_{u\in V(\gamma')} - 1$ 次。为此，注意到 u 不可能同时属于 X 和 Y_l，也不可能同时属于 Y_r 和 Z_0，，也不可能同时属于X 和 Z。

3. 位于 $\mathrm{Iso}(\tau_P) \setminus \mathrm{Iso}(\tau)$ 中的顶点u （因此不在S'中）不能出现在X 或Z中；当且仅当它们出现在 γ、 τ和 γ' 中时，才会出现在Y 中。因此，u 在左侧出现 $\mathbf{1}_{u\in V(\gamma)} + \mathbf{1}_{u\in V(\tau)} + \mathbf{1}_{u\in V(\gamma')} - 2$ 次，在右侧出现(u的交集数) $+ \mathbf{1}_{u\in U_\tau} + \mathbf{1}_{v\in V_\tau} - 1 = \mathbf{1}_{u\in V(\gamma)} + \mathbf{1}_{u\in V(\tau)} + \mathbf{1}_{u\in V(\gamma')} - 2$次。

4. 两个顶点均在S' 中的边e 在左侧出现$\mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma')}$ 次，并且

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{e \text{ does not vanish}} + \mathbf{1}_{e\in E(U_\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\tau)} + \left(\mathrm{mult}(e) - 1 - \mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}\right) \\
&+ \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } U_\gamma} + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } V_{\gamma'\tau}} \\
&= \mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma'^\tau)} - 2\cdot\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}} + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } U_\gamma} + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } V_{\gamma'\tau}} \\
&\le \mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma'^\tau)}
\end{aligned}$$

右侧的次数。

5. 不在 S′ 中两个顶点之间的非消失边 e 出现 $\mathbf{1}_{e\in E(U_\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\tau)} + \mathrm{mult(e)} - 1$ 次于右侧，并且至少出现 $\mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma')} - 1 = \mathbf{1}_{e\in E(U_\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\tau)} + \mathrm{mult(e)} - 1$ 次于左侧。为说明这一点，注意如果 e 同时出现在 E(γ) 和 E(τ) 中，那么 e 要么属于 E(X)，要么属于 E(Y)（取决于 e 的端点是否从 Uγ 可达）。类似地，如果 e 同时出现在 E(τ) 和 E(γ') 中，那么 e 要么属于 E(Y)，要么属于 E(Z)。最后，如果 e 同时出现在 E(γ) 和 E(γ') 中，那么 e 要么属于 E(X)，要么属于 E(Z)

6. 消失边 e 不位于S' 中的两个顶点之间

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{e\in E(U_\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(V_\tau)} + \mathrm{mult}(e) - 2 + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } U_\gamma} + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } V_{\gamma'\tau}} \\
&= \mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma'^\tau)} - 2 + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } U_\gamma} + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } V_{\gamma'\tau}}
\end{aligned}$$

右侧的倍数，且至少

$$\mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma'^\tau)} - 2 + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } U_\gamma} + \mathbf{1}_{e \text{ vanishes from } V_{\gamma'\tau}}$$

左侧的倍数。为此，我们作出如下观察：

(a) $\mathbf{1}_{e\in E(Y)} \geq \mathbf{1}_{e\in E(\gamma)} + \mathbf{1}_{e\in E(\tau)} + \mathbf{1}_{e\in E(\gamma')} - 2$ 如同 e 出现在 E(γ)、E(τ) 和 E(γ') 中，τ 则 e $\in$ E(Y)。(b) $\mathbf{1}_{e\in E(X)} \geq \mathbf{1}_e$ 从 Uγ 消失，因为如果 e 从 Uγ 消失，则 e $\in$ E(X)。(c) $\mathbf{1}_{e\in E(Z)} \geq \mathbf{1}_e$ vanishes 从 Vγ' 消失，因为如果 e 从 Vγ' 消失，则 e $\in$ E(Z)。

τ τ

■

4.5 移除中间边指示符的松弛量

我们分析交集项分解操作之后移除中间边指示符操作的松弛量。为此，我们可以设想，在修改集合 U_τ 和 V_τ 之前，边已在移除中间边指示符操作期间立即被移除；无论在交集项分解操作之前还是之后移除该边，应用交集项分解操作都会得到相同的形状。[11] [12]

定理 4.29。 设 $R_2 \to R_2'$ 是一个执行了添加左右指标操作的带状图。设 τ 和 τ' 分别是它们的形状。那么

$$\text{slack}(\tau') - \text{slack}(\tau) \geq \frac{\gamma}{2}(x + x_\cap)$$

其中 x 是移除的边总数，而 $x_\cap$ 是从 $U_\tau \cap V_\tau$ 中移除的边数。

证明。 根据引理 4.10,

$$\begin{aligned}
&\text{slack}(\tau') - \text{slack}(\tau) \\
&= (\frac{1}{2} - \alpha)(w(\tau') - w(\tau)) - (1-\alpha)\left(\frac{w(U_{\tau'}) + w(V_{\tau'}) - w(U_\tau) - w(V_\tau)}{2}\right) \\
&+ (\gamma - \alpha\beta)\left(|E(\tau')| - \frac{|E(U_{\tau'})| + |E(V_{\tau'})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2}\right) \\
&+ \frac{w(S') - w(S)}{2} - \frac{|\text{Iso}(\tau')| - |\text{Iso}(\tau)|}{2} - \log_n\left(\frac{c^{\approx}_{\tau'}}{c^{\approx}_{\tau}}\right).
\end{aligned}$$

现在我们作出以下观察：

[11] 严格来说，需要进行如下检查。当一个边指示变量从 $U_\tau \cup V_\tau$ 移出并进入中间时，这意味着 SMVS 不再包含该边。因此，该边是否存在不会影响 SMVS 的计算，也就不会影响递归。[12] 由**移除中间边指示符操作**在**寻找 PMVS 子程序**中移除的边，可以通过定理 4.29 或第 4.3 节中的分析来分析。

1. 对于所有满足$X \subseteq V(\tau)$ 等于$X' \subseteq V(\tau')$的顶点集，我们有

$$w(X') - w(X) = \beta\,(\#\text{ of edges removed from } X)\,.$$

特别地，$w(\tau') - w(\tau) = \beta x$，$w(U_{\tau'}) - w(U_\tau) = \beta$（从 U_τ 中移除的边数），以及 $w(V_{\tau'}) - w(V_\tau) = \beta$（从 V_τ 中移除的边数）。

2. $\log n(c^{\approx}_{\tau'}) = \log n(c^{\approx}_{\tau}) - \gamma x$。类似于断言 4.17，当边指示变量被替换为常数项时，我们从更新方程中得到一个大小为$n^{-\frac{\beta}{2}}$ 的因子。此外，我们得到一个从$-\lambda_\tau$移位到$c_{\tau'}$的$n^{\frac{\beta}{2}-\gamma}$因子。将这些因子相乘后，对于每条被移除的边，得到一个大小为$n^{-\gamma}$ 的因子。

3.

$$\begin{aligned}
&|E(\tau')| - \frac{|E(U_{\tau'})| + |E(V_{\tau'})|}{2} - |E(\tau)| + \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} \\
&= -\frac{1}{2}((\#\text{ of edges removed from } U_\tau \setminus V_\tau) + (\#\text{ of edges removed from } V_\tau \setminus U_\tau)) \\
&= -\frac{1}{2}(x - x_\cap)
\end{aligned}$$

4. $w(S') \geq w(S) + \beta x_\cap$。为说明这一点，令 S'_{pre} 表示移除边之前的 S'。由于 S'_{pre} 也是 τ 的一个分隔集，因此 $w(S'_{pre}) \geq w(S)$。由于 τ 的所有分隔集都包含 $U_\tau \cap V_\tau$，移除边会使 τ 的所有分隔集的权重至少增加 $\beta x_\cap$，这意味着 $w(S') \geq w(S'_{pre}) + \beta x_\cap$。综合这些结果，$w(S') \geq w(S) + \beta x_\cap$，正如所需。

5. $\mathrm{Iso}(\tau') = \mathrm{Iso}(\tau)$.

将这些部分合并起来，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{slack}(\tau') - \mathrm{slack}(\tau) &\geq (\frac{1}{2} - \alpha)\beta x - \frac{(1-\alpha)\beta}{2}(x + x_\cap) - \frac{\gamma - \alpha\beta}{2}(x - x_\cap) + \frac{\beta}{2}x_\cap + \gamma x \\
&= \frac{\gamma}{2}(x + x_\cap)\,.
\end{aligned}$$

如所需。 ■

4.6 最终松弛量下界

定理 4.7. (松弛下界)。 在第 3.4 节中所述的分解过程中，τ 为 R 的形状$_2$，

$$\mathrm{slack}(\tau) \geq \varepsilon\left(|E_{tot}(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} + |V_{tot}(\tau)| - \frac{|U_\tau| + |V_\tau|}{2}\right)$$

其中 $\varepsilon = \text{最小值}\left\{1-\alpha,\ \frac{\gamma-\alpha\beta}{8}\right\}$。

证明。 考察 推论 4.20、 推论 4.27、定理 4.29，

$$\begin{aligned}\operatorname{slack}(\tau) \geq{}& \frac{\gamma-\alpha\beta}{2}\left(|E_{tot}(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\ &+\frac{1-\alpha}{2}\left(\#\text{ of vertices in } (U_\tau\cup V_\tau)\setminus(U_\tau\cap V_\tau) \text{ not incident to } E_{tot}(\tau)\right).\end{aligned}$$

注意，后一项最初为零；执行**寻找 PMVS 子程序**后，该项也为零，否则可以移除$(U_{\tau'}\cup V_{\tau'})\setminus(U_{\tau'}\cap V_{\tau'})$ 中的一个度为 0 的顶点，从而减小分隔集的大小。

$V_{tot}(\tau)\setminus(U_\tau\cup V_\tau)$ 中的每个顶点都不是孤立顶点，因此都关联于$E_{tot}(\tau)\setminus(E(U_\tau)\cup E(V_\tau))$ 中的一条边。另一方面，$U_\tau\cup V_\tau$ 中未与$E_{tot}(\tau)$ 中的边关联的顶点，由第二项计入。总之，

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma-\alpha\beta}{2}\left(|E_{tot}(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\ &+\frac{1-\alpha}{2}\left(\#\text{ of vertices in } (U_\tau\cup V_\tau)\setminus(U_\tau\cap V_\tau) \text{ not incident to } E_{tot}(\tau)\right)\\ \geq{}&\frac{\gamma-\alpha\beta}{4}\left(|E_{tot}(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}\right)\\ &+\min\left\{1-\alpha,\frac{\gamma-\alpha\beta}{8}\right\}\left(|V_{tot}(\tau)|-\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2}\right)\end{aligned}$$

按需进行。 ■

5 结论

在这项工作中，我们证明了稠密k-子图问题的平方和下界。我们的结果进一步支持了这一猜想：在预测的“困难”参数范围内，稠密k-子图确实是一个困难问题。我们的结果与稠密k-子图的对数密度框架一致，并补充了十多年前 [BCC+10]的杰出工作。

我们的工作为一类具体的稠密 k-子图算法给出了形式化下界。对于希望解决稠密k-子图问题的乐观算法设计者而言，什么样的算法能够绕过我们的下界？首先，可以尝试修改半定规划的约束或目标函数。例如，对于相关的植入团问题，“不匹配”隐藏子图的大小或许会有所帮助。 [AFdF21]。我们的证明并未从形式上排除非标准的基于半定规划的算法，不过我们认为，很可能可以将证明修改为针对其他半定规划的下界。其次，基于有限域、高斯消元或基于格的方法的代数方法，并未被平方和推理所涵盖

[ZSWB22]。不过，这些技术通常要求问题具有严格的“无噪声”结构，而稠密 k-子图问题并不具备这种结构，因此这类算法并不太可能出现。

我们的工作存在一些技术限制，这些限制也存在于几乎所有现有的平方和下界中。诸如将 SoS 度数从 n^{ε} 提高到 $\tilde{\Omega}(k)$，或收紧松弛量 $\gamma - \alpha\beta$ 等技术改进，似乎超出了我们当前技术的能力范围。我们也可以考虑一个密切相关的植入模型，其中植入子图的大小不是近似为 k，而是恰好为 k。由于技术原因，我们的分析无法直接适用于这种情形，这一点在大多数现有的平方和下界中也是如此。通过进一步的工作，这个问题或许可以克服，正如 Pang [Pan21]在植入团问题中所做的那样。尽管如此，我们相信 SoS 的行为在定性上是相同的。

参考文献

[AAM+11] Noga Alon、Sanjeev Arora、Rajsekar Manokaran、Dana Moshkovitz 和 Omri Weinstein。基于平均情形困难性的最稠密 k-子图不可近似性，2011。手稿，6，2011。1，7[ABB+10] Sanjeev Arora、Boaz Barak、Markus Brunnermeier、Rong Ge 等。金融产品中的计算复杂性与信息不对称。载于 ICS，第 49–65 页，2010。1[ABW10] Benny Applebaum、Boaz Barak 和 Avi Wigderson。基于不同假设的公钥密码学。载于第四十二届 ACM 计算理论研讨会论文集，第 171–180 页，2010。1[AC09] Reid Andersen 和 Kumar Chellapilla。带规模限制的稠密子图查找。载于国际网络图算法与模型研讨会，第 25–37 页。施普林格，2009。1[AFdF21] Maria Chiara Angelini、Paolo Fachin 和 Simone de Feo。将错配作为提升植入团模型蒙特卡罗方法算法性能的工具。《统计力学杂志：理论与实验》，2021(11):113406，2021。47[AHI02] Yuichi Asahiro、Refael Hassin 和 Kazuo Iwama。稠密子图查找的复杂性。Discrete Applied Mathematics，121(1-3):15–26，2002。1，7[AJT19] Vedat Levi Alev、Fernando Granha Jeronimo 和 Madhur Tulsiani。高维扩张器上约束满足问题的近似。手稿，2019。2[Ame15] Brendan PW Ames。通过凸松弛保证恢复植入团和稠密子图。《优化理论与应用杂志》，167(2):653–675，2015。1，7[AMP20] Kwangjun Ahn、Dhruv Medarametla 和 Aaron Potechin。图矩阵：范数界与应用。arXiv 预印本 arXiv:1604.03423，2020。5[ARV04] Sanjeev Arora、Satish Rao 和 Umesh Vazirani。扩张流与稀疏割的 $\sqrt{\log n}$- 近似。载于第 36 届 ACM 计算理论研讨会论文集，2004。1[ARV09] Sanjeev Arora、Satish Rao 和 Umesh Vazirani。扩张流、几何嵌入与图划分。《ACM 杂志》(JACM)，56(2):1–37，2009。8[BA20] Polina Bombina 和 Brendan Ames。用于最稠密子图和最稠密子矩阵问题的凸优化。载于 SN 运筹学论坛，第 1 卷，第 1–24 页。施普林格，2020。1，7

[BABB21] Enric Boix-Adserà、Matthew Brennan 和 Guy Bresler。计数 Erd˝os–Rényi 超图中团的平均情形复杂度。SIAM Journal on Computing，第 FOCS19–39 页，2021。7[Bar15] Siddharth Barman。通过 Carathéodory 定理的近似版本近似纳什均衡和稠密二部子图。载于第四十七届 ACM 计算理论研讨会年会论文集，第 361–369 页，2015。1，7[BB19] Matthew Brennan 和 Guy Bresler。稀疏主成分分析的最优平均情形归约：从弱假设到强困难性。arXiv 预印本 arXiv:1902.07380，2019。9[BB20] Matthew Brennan 和 Guy Bresler。来自秘密泄露的可归约性与统计-计算差距。载于学习理论会议，第 648–847 页。PMLR，2020。2，7[BBH18] Matthew Brennan、Guy Bresler 和 Wasim Huleihel。具有植入稀疏结构的问题的可归约性与计算下界。载于学习理论会议，第 48–166 页。PMLR，2018。7，9[BBH19] Matthew Brennan、Guy Bresler 和 Wasim Huleihel。子矩阵检测计算下界的普适性。载于学习理论会议，第 417–468 页。PMLR，2019。9[BBH+20] Matthew Brennan、Guy Bresler、Samuel B Hopkins、Jerry Li 和 Tselil Schramm。统计查询算法与低次测试几乎等价。arXiv 预印本 arXiv:2009.06107，2020。2[BBK+21] Mitali Bafna、Boaz Barak、Pravesh K Kothari、Tselil Schramm 和 David Steurer。在经认证的小集合扩张器上玩唯一博弈。载于第 53 届 ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing 年会论文集，第 1629–1642 页，2021。2[BCC+10] Aditya Bhaskara、Moses Charikar、Eden Chlamtac、Uriel Feige 和 Aravindan Vijayaraghavan。检测高对数密度——最稠密 k-子图的 $O(n^{1/4})$ 近似。载于第 42 届 ACM 计算理论研讨会论文集，2010。1，2，3，4，7，47[BCG+12] Aditya Bhaskara、Moses Charikar、Venkatesan Guruswami、Aravindan Vijayaraghavan 和 Yuan Zhou。最稠密 k-子图强半定规划松弛的多项式整数性间隙。载于第二十三届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，第 388–405 页。SIAM，2012。1，2，8[BDJ+20] Ainesh Bakshi、Ilias Diakonikolas、He Jia、Daniel M Kane、Pravesh K Kothari 和 Santosh S Vempala。稳健学习 k 个任意高斯分布的混合。arXiv 预印本 arXiv:2012.02119，2020。2[BHK+16] B. Barak、S. B. Hopkins、J. Kelner、P. Kothari、A. Moitra 和 A. Potechin。植入团问题的近乎紧确平方和下界。载于第 57 届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集，第 428–437 页，2016。5，7，8，18[BHKL22] Mitali Bafna、Max Hopkins、Tali Kaufman 和 Shachar Lovett。高维扩张器：特征值剥离、伪随机性与唯一博弈。载于 2022 年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第 1069–1128 页。SIAM，2022。2[BK20] Ainesh Bakshi 和 Pravesh K Kothari。列表可解码子空间恢复：多项式时间内与维度无关的误差。arXiv 预印本 arXiv:2002.05139，2020。2[BKRW17] Mark Braverman、Young Kun Ko、Aviad Rubinstein 和 Omri Weinstein。具有完美完备性的最稠密 k-子图的 ETH 困难性。载于第二十八届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，第 1326–1341 页。SIAM，2017。1，7

[BP21] Ainesh Bakshi 和 Adarsh Prasad。鲁棒线性回归：多项式时间内的最优速率。载于第 53 届 ACM SIGACT 计算理论研讨会年会论文集，第 102–115 页，2021 年。2[CDK12] Eden Chlamtáˇc、Michael Dinitz 和 Robert Krauthgamer。通过稠密子图构造处处稀疏的扩展器。载于 2012 年 IEEE 第 53 届计算机科学基础年会研讨会论文集，第 758–767 页。IEEE，2012 年。1, 4[CDK+18] Eden Chlamtác、Michael Dinitz、Christian Konrad、Guy Kortsarz 和 George Rabanca。最稠密 k-子超图问题。SIAM 离散数学杂志，32(2):1458–1477，2018 年。1[CDM17] Eden Chlamtáˇc、Michael Dinitz 和 Yury Makarychev。最小化并集：小集合二部顶点扩展的紧确近似。载于第二十八届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，第 881–899 页。SIAM，2017 年。1, 4[CHK11] Moses Charikar、MohammadTaghi Hajiaghayi 和 Howard Karloff。改进的标签覆盖问题近似算法。Algorithmica，61(1):190–206，2011 年。1[CL15] Chandra Chekuri 和 Shi Li。关于 k 路超图割问题近似难度的说明。手稿，http://chekuri. cs. illinois. edu/papers/hypergraph-kcut. pdf，2015 年。1[CLLR15] Wei Chen、Fu Li、Tian Lin 和 Aviad Rubinstein。结合传统营销与病毒式营销的两栖影响力最大化。载于第十六届 ACM 经济学与计算会议论文集，第 779–796 页，2015 年。1[CLRS16] Siu On Chan、James R Lee、Prasad Raghavendra 和 David Steurer。近似约束满足需要大型线性规划松弛。ACM 杂志（JACM），63(4):1–22，2016 年。8[CM18] Eden Chlamtáˇc 和 Pasin Manurangsi。与对数密度阈值匹配的 Sherali–Adams 整数间隙。arXiv 预印本 arXiv:1804.07842，2018 年。2, 4, 8, 18[CMM09] Moses Charikar、Konstantin Makarychev 和 Yury Makarychev。Sherali–Adams 松弛的整数间隙。载于第四十一届 ACM 计算理论年会论文集，第 283–292 页，2009 年。8[CMMV17] Eden Chlamtáˇc、Pasin Manurangsi、Dana Moshkovitz 和 Aravindan Vijayaraghavan。标签覆盖和对数密度阈值的近似算法。载于第二十八届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集，第 900–919 页。SIAM，2017 年。1, 4, 8[CMVZ15] Julia Chuzhoy、Yury Makarychev、Aravindan Vijayaraghavan 和 Yuan Zhou。k 路径割问题的近似算法与难度。ACM 算法汇刊（TALG），12(1):1–40，2015 年。1[CX14] Yudong Chen 和 Jiaming Xu。植入问题中的统计—计算权衡，以及具有不断增加的簇数和子矩阵数的子矩阵定位。arXiv 预印本 arXiv:1402.1267，2014 年。9[CZ17] Stephen R Chestnut 和 Rico Zenklusen。网络流阻断的难度与近似。Networks，69(4):378–387，2017 年。1[DKSV06] Nikhil R Devanur、Subhash A Khot、Rishi Saket 和 Nisheeth K Vishnoi。最稀疏割和最小线性排列问题的整数性间隙。载于第三十八届 ACM 计算理论年会论文集，第 537–546 页，2006 年。8[Fei02] Uriel Feige。平均情形复杂度与近似复杂度之间的关系。载于第三十四届 ACM 计算理论年会论文集，第 534–543 页，2002 年。1, 7

[FKP+19] Noah Fleming、Pravesh Kothari、Toniann Pitassi 等。半代数证明与高效算法设计。《理论计算机科学基础与趋势》，14(1-2):1–221，2019 年。9[FL01] Uriel Feige 和 Michael Langberg。图划分中最大化问题的近似算法。《算法杂志》，41(2):174–211，2001 年。1, 7[FPK01] Uriel Feige、David Peleg 和 Guy Kortsarz。稠密 k-子图问题。Algorithmica，29(3):410–421，2001 年。1, 7[FS+97] Uriel Feige、Michael Seltser 等。关于最稠密 k-子图问题。Citeseer，1997 年。1, 7[GJJ+20] Mrinalkanti Ghosh、Fernando Granha Jeronimo、Chris Jones、Aaron Potechin 和 Goutham Rajendran。通过隐藏仿射平面证明 Sherrington-Kirkpatrick 模型的平方和下界。载于 2020 年 IEEE 第 61 届计算机科学基础年会研讨会——FOCS 2020 论文集，第 954–965 页。IEEE 计算机学会，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州， [2020]©2020。5, 7, 8, 18[GL09] Doron Goldstein 和 Michael Langberg。稠密 k 子图问题。arXiv 预印本 arXiv:0912.5327，2009 年。1, 7[Gri01] Dima Grigoriev。背包问题正定理证明的复杂度。计算复杂性，10(2):139–154，2001 年。1[GW95] M.X. Goemans 和 D.P. Williamson。利用半定规划改进最大割和可满足性问题的近似算法。《ACM 杂志》，42(6):1115–1145，1995 年。初步版本发表于 STOC'94。1, 8[HIM11] Koki Hamada、Kazuo Iwama 和 Shuichi Miyazaki。带配额下界的医院与住院医生问题。载于欧洲算法研讨会论文集，第 180–191 页。施普林格，2011 年。1[HJ06] Mohammad Taghi Hajiaghayi 和 Kamal Jain。通过一种新的原始-对偶框架求解奖赏收集广义斯坦纳树问题。载于 SODA，第 6 卷，第 631–640 页，2006 年。1[HJL+06] Mohammad Taghi Hajiaghayi、Kamal Jain、Lap Chi Lau、II Mˇandoiu、Alexander Russell 和 Vijay V Vazirani。多重 PCR 引物集选择与群体单倍型分析中的最小多色子图问题。载于国际计算科学会议论文集，第 758–766 页。施普林格，2006 年。1[HKP15] Samuel B Hopkins、Pravesh K Kothari 和 Aaron Potechin。平方和与植入团：对所有度数下 MPW 矩的紧确分析，以及四次度数下的最优下界。arXiv 预印本 arXiv:1507.05230，2015 年。8[HKP+17] Samuel B Hopkins、Pravesh K Kothari、Aaron Potechin、Prasad Raghavendra、Tselil Schramm 和 David Steurer。平方和在检测隐藏结构方面的威力。载于第 58 届 IEEE 计算机科学基础研讨会论文集，第 720–731 页。IEEE，2017 年。2, 7, 8[HL18] Samuel B Hopkins 和 Jerry Li。混合模型、鲁棒性与平方和证明。载于第 50 届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集，第 1021–1034 页，2018 年。2[Hop18] Samuel Brink Klevit Hopkins。统计推断与平方和方法。博士论文，康奈尔大学，2018 年。2, 7, 8, 9[Hop20] Samuel B Hopkins。多项式时间内达到次高斯速率的均值估计。《统计年鉴》，48(2):1193–1213，2020 年。2

[HS21] Shuichi Hirahara 和 Nobutaka Shimizu。《基于 SETH 的二部团计数问题的近乎最优平均情形复杂度》。载于《2021年ACM-SIAM离散算法研讨会论文集》（SODA），第 2346–2365 页。SIAM，2021。7[HWX15] Bruce Hajek、Yihong Wu 和 Jiaming Xu。《随机图上社区检测的计算下界》。载于《学习理论会议》，第 899–928 页。PMLR，2015。1, 9[HWX16] Bruce Hajek、Yihong Wu 和 Jiaming Xu。《通过半定规划实现精确簇恢复阈值》。IEEE信息论汇刊，62(5):2788–2797，2016。1[Jon22] Chris Jones。《组合优化问题凸松弛的对称化傅里叶分析》。博士论文，芝加哥大学，2022。8, 9[JPR+22] Chris Jones、Aaron Potechin、Goutham Rajendran、Madhur Tulsiani 和 Jeff Xu。《稀疏独立集的平方和下界》。载于《2021年IEEE第62届计算机科学基础年会论文集》（FOCS），第 406–416 页。IEEE，2022。5, 6, 7, 8, 13, 58, 64[Kar72] Richard M Karp。《组合问题之间的可归约性》。载于《计算机计算的复杂性》，第 85–103 页。施普林格，1972。1[Kho06] Subhash Khot。《排除图最小二分割、稠密k-子图和二部团问题的多项式时间近似方案》。SIAM Journal on Computing，36(4):1025–1071，2006。1, 7[KKM18] Adam Klivans、Pravesh K Kothari 和 Raghu Meka。《抗离群点回归的高效算法》。载于《学习理论会议》，第 1420–1430 页。PMLR，2018。2[KL20] Yash Khanna 和 Anand Louis。《最稠密 k-子图问题的植入模型》。arXiv 预印本 arXiv:2004.13978，2020。1, 3, 4, 7[KMNT08] Guy Kortsarz、Vahab S Mirrokni、Zeev Nutov 和 Elena Tsanko。《最小幂度与连通性问题的近似》。载于《拉丁美洲理论信息学研讨会》，第 423–435 页。施普林格，2008。1[KMOW17] Pravesh Kothari、Ryuhei Mori、Ryan O'Donnell 和 David Witmer。《用于反驳任意约束满足问题的平方和下界》。载于《第49届ACM计算理论研讨会论文集》，2017。8[KMR17] Pravesh K Kothari、Raghu Meka 和 Prasad Raghavendra。《用合取函数近似矩形，以及针对约束满足问题线性规划松弛的弱指数下界》。载于《第49届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集》，第 590–603 页，2017。8[KP93] Guy Kortsarz 和 David Peleg。《关于如何选择稠密子图》。IEEE，1993。7[KS07] Stavros G Kolliopoulos 和 George Steiner。《偏序背包及其在调度中的应用》。Discrete Applied Mathematics，155(8):889–897，2007。1[KS17] Pravesh K Kothari 和 David Steurer。《通过平方和进行抗离群点矩估计》。arXiv 预印本 arXiv:1711.11581，2017。2[Kun20] Dmitriy Kunisky。《超立方体上平方和伪矩的保持正性扩展》。arXiv 预印本 arXiv:2009.07269，2020。8[Kun21] Dmitriy Kunisky。《认证问题中的谱障碍》。博士论文，纽约大学，2021。2[KV15] Subhash A Khot 和 Nisheeth K Vishnoi。《唯一博弈猜想、割问题的整数性间隙以及负型度量的嵌入性到 ℓ_1》。ACM 杂志（JACM），62(1):1–39，2015。8

[KWB22] Dmitriy Kunisky、Alexander S Wein 和 Afonso S Bandeira。《关于假设检验计算困难性的札记：基于低次似然比的预测》。载于《ISAAC Congress》（International Society for Analysis, its Applications and Computation），第 1–50 页。施普林格，2022。7, 8[Las01] Jean B Lasserre。《多项式全局优化与矩问题》。SIAM Journal on optimization，11(3):796–817，2001。1[Lee17] Euiwoong Lee。《将图划分为小块及其在路径横截集中的应用》。载于《第二十八届ACM-SIAM离散算法年会论文集》，第 1546–1558 页。SIAM，2017。1[LM21] Allen Liu 和 Ankur Moitra。《解决高斯混合的鲁棒可学习性问题》。载于《第53届ACM SIGACT计算理论年会论文集》，第 518–531 页，2021。2[LNV14] Zhentao Li、Manikandan Narayanan 和 Adrian Vetta。《同时聚类问题的复杂性》。J. Graph Algorithms Appl.，18(1):1–34，2014。1[LRS15] James R Lee、Prasad Raghavendra 和 David Steurer。《半定规划松弛规模的下界》。载于《第四十七届ACM计算理论研讨会论文集》，第 567–576 页，2015。2[Man17] Pasin Manurangsi。《近似最稠密 k-子图的近多项式比率 ETH-困难性》。载于《第49届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集》，第 954–961 页，2017。1, 7[MM15] Pasin Manurangsi 和 Dana Moshkovitz。《稠密最大 2-CSP 的近似》。arXiv 预印本 arXiv:1507.08348，2015。7, 8[MPW15] Raghu Meka、Aaron Potechin 和 Avi Wigderson。《植入团的平方和下界》。载于《第四十七届ACM计算理论研讨会论文集》，第 87–96 页，2015。8[MRS20] Pasin Manurangsi、Aviad Rubinstein 和 Tselil Schramm。《强植入团假设及其推论》。arXiv 预印本 arXiv:2011.05555，2020。9[MRX20] Sidhanth Mohanty、Prasad Raghavendra 和 Jeff Xu。《提升平方和下界：从 2 阶到 4 阶》。载于《第52届ACM计算理论研讨会论文集》，第 840–853 页，2020。8[MWZ23] Cheng Mao、Alexander S. Wein 和 Shenduo Zhang。《植入稠密环的检测-恢复间隙》，2023。1[Nes00] Yurii Nesterov。《平方泛函系统与优化问题》。载于《高性能优化》，第 405–440 页。施普林格，2000。1[O'D17] Ryan O'Donnell。《平方和并非显然可自动化，即使是近似意义下也如此》。载于《第8届理论计算机科学创新会议》（ITCS 2017）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2017。3[Pan21] Shuo Pang。《精确植入团的平方和下界》。载于《第36届计算复杂性会议》，LIPIcs 第 200 卷。Leibniz Int. Proc. Inform.，第 Art. 26，63 页。Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform.，Wadern，2021。48[Par00] Pablo A Parrilo。《鲁棒性与优化中的结构化半定规划和半代数几何方法》。博士论文，California Institute of Technology，2000。1[Pis07] David Pisinger。《二次背包问题综述》。Discrete Applied Mathematics，155(5):623–648，2007。1

[PR20] Aaron Potechin 和 Goutham Rajendran。用于证明认证问题平方和下界的工具。arXiv 预印本 arXiv:2011.04253，2020。5，8，9，68[PR22] Aaron Potechin 和 Goutham Rajendran。主成分分析的亚指数时间平方和下界。《神经信息处理系统进展》，2022。7，8，9[Rag08] Prasad Raghavendra。每个约束满足问题都存在最优算法和不可近似性结果吗？载于第40届 ACM 计算理论研讨会论文集，第245–254页，2008。1[Raj18] Goutham Rajendran。通过平方和层级进行组合优化。arXiv 预印本 arXiv:2208.04374，2018。2，8[Raj22] Goutham Rajendran。《非线性随机矩阵及其在平方和层级中的应用》。博士论文，芝加哥大学，2022。8[RS10] Prasad Raghavendra 和 David Steurer。图扩展与唯一博弈猜想。载于第42届 ACM 计算理论研讨会论文集，第755–764页，2010。1，7[RSS18] Prasad Raghavendra、Tselil Schramm 和 David Steurer。通过平方和证明进行高维估计。载于《国际数学家大会论文集：里约热内卢 2018》，第3389–3423页。World Scientific，2018。2，9，18[RT23] Goutham Rajendran 和 Madhur Tulsiani。通过 Efron-Stein不等式研究多项式随机矩阵的集中性。载于《2023年 ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集》，第3614–3653页。SIAM，2023。6，8，13[RW17] Prasad Raghavendra 和 Benjamin Weitz。关于平方和证明的位复杂度。载于第44届自动机、语言与程序设计国际学术会议论文集。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2017。3[Sch17] Tselil Schramm。《随机矩阵与平方和层级》。博士论文，加州大学伯克利分校，2017。9[SFL16] Piotr Skowron、Piotr Faliszewski 和 Jérôme Lang。寻找集体项目集合：从比例多重代表制到群体推荐。《人工智能》，241：191–216，2016。1[Sho87] Naum Zuselevich Shor。求解多项式数学规划问题全局极值的一种方法。《控制论》，23(5)：695–700，1987。1[ST08] Akiko Suzuki 和 Takeshi Tokuyama。具有输出密度条件的稠密子图问题。《ACM 算法汇刊》（TALG），4(4)：1–18，2008。7[SW98] Anand Srivastav 和 Katja Wolf。利用半定规划寻找稠密子图。载于《组合优化近似算法国际研讨会》论文集，第181–191页。施普林格，1998。1，7[SW22] Tselil Schramm 和 Alexander S Wein。低次多项式估计的计算障碍。《统计年鉴》，50(3)：1833–1858，2022。9[Tul09] Madhur Tulsiani。平方和层级中的约束满足问题间隙与归约。载于第41届 ACM 计算理论研讨会论文集，2009。8[TV17] Sumedh Tirodkar 和 Sundar Vishwanathan。最小彩虹子图问题及其他相关问题的可近似性。《Algorithmica》，79(3)：909–924，2017。1[ZSWB22] Ilias Zadik、Min Jae Song、Alexander S Wein 和 Joan Bruna。基于格的方法在聚类中优于平方和方法。载于《学习理论会议》论文集，第1247–1248页。PMLR，2022。48

A 关于图矩阵的补充内容

A.1 证明命题 2.23

命题2.23。 每个形状都有一个 *SMVS*，它位于每个 *SMVS* 的左侧。此外，在顶点大小最小的 *SMVS* 中，存在唯一一个位于每个 *SMVS* 左侧的 *SMVS*。

为证明这一点，我们将证明对形状 α的最左 SMVS 有一个更强的结构刻画。于是， α 中顶点大小最小的最左 SMVS 就是命题 *A.1*陈述中的 S。这一结构刻画的直观含义是，集合 S_i 是“权重为 0 的子图”，可以自由地添加到“必要核心”SMVSS中或从中移除。

命题 A.1。 对于 α，位于每个 *SMVS* 左侧的 *SMVS* 集合具有如下结构：存在两两不相交的顶点集 S、S_1,.....，S_k，使得该集合恰好为 S 与 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 的并，其中 I 遍历所有子集 $I \subseteq [k]$。

证明。 首先，我们证明最左 SMVS 的存在性。设S_1,S_2 是两个最小顶点分隔集。接下来，我们可以如下构造一个位于它们二者左侧的最小顶点分隔集（示意见图 3）。由于这一过程不可能无限进行，它必定会终止于一个位于所有其他顶点分隔集左侧的顶点分隔集。

设$L_1 \subseteq S_1$ 是S_1 中的顶点，它们无需经过S_2, 即可从U_α 到达，另一侧$L_2 \subseteq S_2$同理。于是我们取$S_L := L_1 \cup L_2 \cup (S_1 \cap S_2)$。

为证明S_L 是一个顶点分隔集，取一条从U_α出发的路径P。不失一般性，P 先经过S_1，再经过S_2（或同时经过）。于是L_1（或$S_1 \cap S_2$）会阻断P。

为证明 S_L 是最小的，注意到若进行类似的构造得到 S_R，则 $w(S_L) + w(S_R) \le w(S_1) + W(S_2)$。为说明这一点，注意 $|S_L| + |S_R| = |S_1| + |S_2|$，且每条边 e 在 S_L 和 S_R 中出现的次数至少与其在 S_1 和 S_2中的次数相同。特别地，若 $e \in E(S_1)$ 且 $e \in E(S_2)$，则 e 也同时属于 $E(S_L)$ 和 $E(S_R)$。若 $e \in E(S_1) \setminus E(S_2)$，则 e 必定属于 $E(S_L)$ 或 $E(S_R)$（注意，e 不可能连接 L_1 和 R_1，否则 S_2就不是一个分隔集，见图 2）。同理，若 $e \in E(S_2) \setminus E(S_1)$，则 e 必定属于 $E(S_L)$ 或 $E(S_R)$。

由于 S_1 和 S_2 是最小权重顶点分隔集，且 $w(S_L) + w(S_R) \le w(S_1) + w(S_2)$，因此必有 $w(S_L) = w(S_R) = w(S_1) = w(S_2)$，所以 S_L 和 S_R 也都必须是最小权重顶点分隔集。这就证明了最左 SMVS 的存在性。

接下来，我们证明这一结构刻画。假设 S_1, 和 S_2 都是位于所有 SMVS 左侧的 SMVS。由于 S_1 位于 S_2, 左侧，因此有 $L_2 = \emptyset$；同理，$L_2 = \emptyset$。前述构造现在表明，$S_L = S_1 \cap S_2$ 也是一个 SMVS。

此外，我们声称$S_1 \cap S_2$ 位于每个 SMVS 的左侧。假设T 是另一个 SMVS，且P 是从U_α 到T的一条路径。由于S_1 位于T的左侧，P 会经过$(S_1 \cap S_2) \cup R_1$,，并且

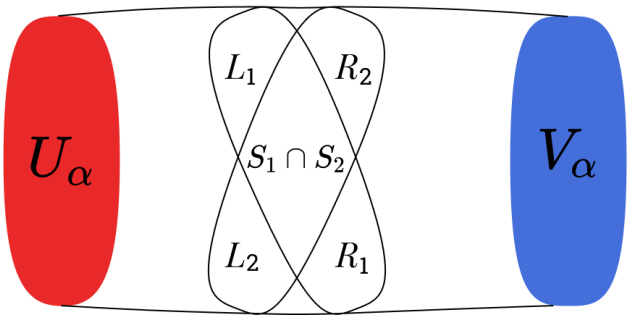

图 3：最左和最右 SMVS

同理，对于$(S_1 \cap S_2) \cup R_2$也是如此。由于S_1位于S_2的左侧，反之亦然，路径P必须同时经过这两个集合，因此它会经过$S_1 \cap S_2$。

因此，所有位于每个 SMVS 左侧的 SMVS 所构成的集合在交集运算下封闭。现在，我们可以将该族的交集作为 S 。集合 S_i 是该族在交集运算下的细化。对于所有i，必有 $w(S \cup S_i) = w(S)$ ，因为它们都是 SMVS。因此，S_i 与S_j之间不能有任何边，否则$S \cup S_i \cup S_j$ 的权重会小于S。因此，将S 与任意数量的S_i 取并集，始终会得到权重相同的 SMVS。

■

A.2 补充定义

定义 A.2 (自同构群**)**。 对于形状 α，定义 $\mathrm{Aut}(\alpha)$ 为图 $(V(\alpha), E(\alpha))$的图同构群。等价地，$\mathrm{Aut}(\alpha)$ 是任意形状为 α的带状图 R 中 S_n 的稳定子群。

Proposition A.3. $$\left|\mathrm{Aut}(\alpha)\right| \sum_{\text{ribbons } R \text{ of shape } \alpha} \mathbf{M}_R = \sum_{\text{injective } \varphi: V(\alpha) \to [n]} \mathbf{M}_{\varphi(\alpha)}$$

我们希望确保给定形状的所有 SMVS 都是同构图。为此，可以在$w(S)$ 上加一个无穷小量，该量会根据S的同构类打破相等关系。等价地，我们重新定义 SMVS，使其按照字典序最小化 $(w(S), S)$，其中对所有图S采用任意且固定的全序。无论采用哪种方式，我们都会用到以下命题。

命题 A.4。 如果 τ 是中间形状，我们可以假设 U_τ 和 V_τ 作为图彼此同构。

B 最稠密子图权重函数

正如第 3 节所指出的，形状的分隔集中是否存在边会影响范数界。我们可以使用以下权重函数来求得范数界，其中S 是一个包含 $[n]$，

$$w_{densest}(S) = |S| - \log_n(1/p)\left|E(S)\cap E(G)\right| + \log_n(1/p)\left|E(S)\cap \overline{E(G)}\right| .$$

设S_{min} 是$w_{densest}$ 在形状 α中A_R 和B_R 的各个分隔集上的极小化元，那么我们希望满足：

$$\|\mathbf{M}_\alpha\| \le \widetilde{O}\left(n^{\frac{|V(\alpha)|-w_{densest}(S_{min})}{2}}\right) = \widetilde{O}\left(n^{\frac{|V(\alpha)|-|S_{min}|}{2}} p^{\frac{\left|E(S_{min})\cap\overline{E(G)}\right|-|E(S_{min})\cap E(G)|}{2}}\right).$$

上述“公式”存在一个问题。注意，$w_{densest}(S)$的定义取决于将 G 限制在 S 上的实例化。因此，形状相同的两个带状图可能并不具有相同的 MVS，而且无法在形状层面而非带状图层面定义相对于 $w_{densest}$的 MVS。对于 第 3 节中所述的 PMVS，情况同样如此，不过在那里我们通过使用边指示变量和缺失边指示函数（注3.6）来处理这一问题。我们或许可以用类似的方式使用边指示变量来定义$w_{densest}$。然而，在我们的分析中，至关重要的是将边指示变量限制在中间部分，因为在那里可以对其加以控制，并且不允许它们出现在左侧与右侧。

权重函数 $w_{densest}$ 具有如下性质：如果它通过缺失边求值识别出一个 MVS，那么移除这些傅里叶特征标后仍具有相同的 MVS（因此，这是一个有可能用于范数支配原带状图的正带）。具体表述如下。

引理B.1. 若 A_R 是带状图 R 中 $w_{densest}$ 的一个极小化元，且 A_R 包含一条缺失边 χ_e，则 A_R 是 $R' = (A_R, B_R, E(R)\setminus\{e\})$ 中 $w_{densest}$ 的一个极小化元。B_R 同理。

证明。 A_R、B_R 与 $A_{R'}$、$B_{R'}$ 的连通性完全相同，因此左右分隔集族也相同。移除这条边后，$w_{densest}(A_R)$ 减小，因此它仍然是一个极小化元。 ∎

C 组合调整项的要求

为了使半正定性证明成立，我们需要对于某个 $\varepsilon > 0$，以下界成立：

界 C.1.

1. $\varepsilon \le \alpha \le \frac{1}{2}$2. $\gamma - \alpha\beta \ge \varepsilon$3. $\beta - \gamma \ge \varepsilon$4. 对数$n(D_V) \le \frac{\varepsilon}{20}$

—

5. $D_V \geq \frac{100}{\varepsilon} D_{\mathrm{SoS}}$

6. 对于所有真中间形状 τ，松弛量$(\tau) \geq \varepsilon \left(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2} + |V(\tau)| - \frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2} \right)$。更一般地，对于由交互模式序列 τ_P 产生的任意中间形状，

$$\mathrm{slack}(\tau_P) \geq \varepsilon \left(|E_{tot}(\tau_P)| - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} + |V_{tot}(\tau_P)| - \frac{|U_{\tau_P}| + |V_{\tau_P}|}{2} \right)$$

7. $B^{adjust}(\alpha)$ 和 $c(\alpha)$ 至多为 $n^{\frac{\varepsilon}{100}(|E(\alpha)| - \frac{|E(U_\alpha)|+|E(V_\alpha)|}{2} + |V(\alpha)| - \frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})}$

8. 对于 γ 上的一个交互模式 P，τ，$\gamma'\tau$，$c(P)$ 和 $N(P)$ 至多为

$$n^{\frac{\varepsilon}{100}\left(|E(\gamma)| - \frac{|E(U_\gamma)|+|E(V_\gamma)|}{2} + |V(\gamma)| - \frac{|U_\gamma|+|V_\gamma|}{2} + |E(\gamma'\tau)| - \frac{|E(U_{\gamma'\tau})|+|E(V_{\gamma'\tau})|}{2} + |V(\gamma'\tau)| - \frac{|U_{\gamma'\tau}|+|V_{\gamma'\tau}|}{2}\right)}$$

前五个界由主要定理 1.1中的参数选择满足。松弛量的下界已在定理 4.7中证明。我们将在c-函数的附录 E.5中验证这些界。

注记 C.2. 虽然我们通常认为 $\varepsilon > 0$ 是一个与 n 无关的固定常数，但在这里 ε 依赖于 n 也没有问题。

从概率的角度，我们将假设随机图$G \sim \mathrm{G}_{n,p}$中发生以下事件。

1. 范数界成立（推论 D.4）
2. 小子图密度界成立（命题 D.9）

这两者发生的概率至少为 $1 - n^{-\eta}$，其中参数 η 可以调整。对于定理 1.1，我们可以取 $\eta = 1$。

D 范数界

我们的分析的核心部分是图矩阵的范数界。幸运的是，我们此前的工作中已经证明了这些范数界 [JPR+22]。为保持完整性并便于阐述，我们在此以一种更简单的形式重新证明这些范数界，使其更适用于我们的设定。具体而言，我们简化了低阶项的依赖，但代价是指数底数中出现额外的 $\log(n)$因子。

定理 D。 **1.** 对于所有 $\eta > 0$，以下陈述以至少 $1 - n^{-\eta}$ 的概率成立。

对于所有满足 $|V(\alpha)| \leq 3D_V$、$|U_\alpha| \leq D_{\mathrm{SoS}}$ 和 $|V_\alpha| \leq D_{\mathrm{SoS}}$ 的形状 α，令 S 为 α 的一个 *SMVS*，并取 $q = \max\left\{10D^2 V, \lceil D_{\mathrm{SoS}} \ln(n) \rceil, \lceil \eta \ln(n) \rceil\right\}$，

$$\|\mathbf{M}_\alpha\| \leq 5(6D_V q)^{|V(\alpha)| - \frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}} n^{\frac{|V(\alpha)| - w(S) + \mathrm{Iso}(\alpha)}{2}}$$

证明。 </style>很容易将 $Iso(\alpha) \neq \emptyset$ 的情形归约到 $\mathrm{Iso}(\alpha) = \emptyset$ 的情形，因此只需证明当 $\mathrm{Iso}(\alpha) = \emptyset$ 时的定理。为证明该情形下的定理，我们使用以下引理。

引理 D.2. 对于所有形状 α 以及所有 $q \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha^\intercal)^q\right)\right] \leq (2q|V(\alpha)|)^{2q(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})} n^{q|V(\alpha)|}\left(\max_{\text{separator } S} n^{-\frac{|S|}{2}}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)^{|E(S)|}\right)^{2q-2}$$

为使用这个引理，我们注意到，对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $q \in \mathbb{N}$，根据马尔可夫不等式，

$$\Pr\left(\|\mathbf{M}_\alpha\| > \sqrt[2q]{\frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha^\intercal)^q\right)\right]}{\varepsilon}}\right) \leq \Pr\left(\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha^\intercal)^q\right) > \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha^\intercal)^q\right)\right]}{\varepsilon}\right) < \varepsilon$$

我们希望确保以概率 $1 - n^{-\eta}$，所有界都成立。为此，我们选择 ε，使其至多为$n^{-\eta}$ 乘以我们所考虑的形状数量。

命题 D.3. 对于所有 $D_V \in \mathbb{N}$，至多存在 $2^{10D_V{}^2}$ 个形状 α，使得 $|V(\alpha)| \leq 3D_V$

证明. 我们可以按如下方式，用至多 $3D_V$ 个顶点来描述每个形状 α。

1. 对于每个 $j \in [3D_V]$，我们说明顶点 j 是否属于 $U_\alpha \setminus V_\alpha$、$V_\alpha \setminus U_\alpha$、$U_\alpha \cap V_\alpha$、$V(\alpha) \setminus (U_\alpha \cup V_\alpha)$，还是根本不存在。此处有 5^{3D_V} 种选择。
2. 对于每个$i,j \in [3D_V]$，只要$i < j$，我们就指定顶点i 与顶点j 之间是否存在一条边（假设它们都存在）。对此最多有 $2^{\binom{3D_V}{2}}$ 种选择。

这总共给出 $5^{3D_V}2^{\binom{3D_V}{2}}$种选择。对于$D_V = 1$, $5^{3D_V}2^{\binom{3D_V}{2}} = 1000 \leq 1024 = 2^{10D_V{}^2}$，比率 $\frac{2^{10D_V{}^2}}{5^{3D_V}2^{\binom{3D_V}{2}}}$ 会随着D_V增大而增大。 ■

取$\varepsilon = \frac{1}{2^{10D_V{}^2} n^\eta}$，并取$q = \max\{10D^2{}_V, \lceil D_{\mathrm{SoS}} \ln(n) \rceil, \lceil \eta \ln(n) \rceil\}$，我们得到以下观察：

1. $\sqrt[2q]{\frac{1}{\varepsilon}} < e$
2. 令S_{min} 为一个SMVS，α,

$$n^{q|V(\alpha)|}\left(\max_{\text{separator } S} n^{-\frac{|S|}{2}}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)^{|E(S)|}\right)^{2q-2} \leq n^{w(S_{min})}\left(n^{\frac{|V(\alpha)|-w(S_{min})}{2}}\right)^{2q}$$

并且由于 $w(S_{min}) \leq D_{\mathrm{SoS}}$ 且 $q \geq D_{\mathrm{SoS}} \ln(n)$, $\sqrt[2q]{n^{w(S_{min})}} \leq \sqrt{e}$

综合这些结果，对于所有满足 $|V(\alpha)| \le 3D_V$ 的形状 α，其概率至少为 $1-\varepsilon$，

$$\|\mathbf{M}_\alpha\| \le 5(6D_V q)^{|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}} n^{\frac{|V(\alpha)|-w(S_{min})}{2}}$$

定理 D.1 现在可通过对所有此类形状应用并合界得出 α。 ■

在我们的设定中，取 D_V，使得 $D_V \ge D_{\mathrm{SoS}}\ln(n)$，且 $\eta\ln(n) \le 10D^2\,V$，从而我们可以适当地界定截断误差。因此，在我们的设定中可以取$q = 10D^2\,V$。

推论 D.4. 对于所有满足 $D_V, D_{\mathrm{SoS}} \in \mathbb{N}$ 以及 $\eta > 0$ 且使得 $D_V \ge D_{\mathrm{SoS}}\ln(n)$ 且 $\eta\ln(n) \le 10D^2\,V$ 的情形，以下陈述以至少 $1-n^{-\eta}$ 的概率成立。

对于所有形状 α（允许包含孤立顶点，但不允许多重边或边指示变量），满足$|V(\alpha)| \le 3D_V$、$|U_\alpha| \le D_{\mathrm{SoS}}$ 且 $|V_\alpha| \le D_{\mathrm{SoS}}$，令 S_{min} 为 α 的一个 *SMVS*，

$$\|\mathbf{M}_\alpha\| \le 5(60D_V^3)^{|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}} n^{\frac{|V(\alpha)|-w(S_{min})+|\mathrm{Iso}(\alpha)|}{2}}$$

基于这一推论，我们作出如下定义。

定义 D.5 (B^{adjust})。**给定一个形状 α，我们定义**

$$B_{adjust}(\alpha) = 5(60D_V^3)^{|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}}.$$

因此，对于 $\eta \le D_V$，以至少 $1-n^{-\eta}$ 的概率，对于我们考虑的所有形状 α，回忆一下记号 $\left\|\mathbf{M}_\alpha^{\approx}\right\|$ 来自 第4节，

$$\|\mathbf{M}_\alpha\| \le B_{adjust}(\alpha)\left\|\mathbf{M}_\alpha^{\approx}\right\|$$

现在我们证明 引理 D.2，其内容是

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha\mathbf{M}_\alpha^{\intercal})^q\right)\right] \le (2q|V(\alpha)|)^{2q(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})} n^{q|V(\alpha)|}\left(\max_{\text{separator } S} n^{-\frac{|S|}{2}}\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)^{|E(S)|}\right)^{2q-2}$$

引理 *D.2*的证明。

定义 D.6。 将 $H(\alpha,2q)$ 定义为按如下方式构造的图。

1. 取形状 α_1、……、α_{2q}，其中对于所有 $j \in [q]$，α_{2j-1} 是 α 的一个副本，而 α_{2j} 是 α 的一个副本。

2. 对所有 $i \in [2q-1]$，通过令 $V^{\alpha_i} = U^{\alpha_{i+1}}$ 将 α_i 和 α_{i+1} 拼接在一起。然后，通过令 $V^{\alpha_{2q}} = U^{\alpha_1}$ 将 α_{2q} 和 α_1拼接在一起。

展开 $\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha)^q\right)$，我们得到 ᵀ

$$\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha^\intercal)^q\right) = \sum_{\substack{\pi: V(H(\alpha,2q)) \to [n]: \\ \pi \text{ is injective on each } \alpha_i}} \prod_{i=1}^{2q} \prod_{e \in E(\alpha_i)} \chi_{\{\pi(e)\}}$$

其中，若 $e = \{u,v\}$，则 $\pi(e) = \{\pi(u), \pi(v)\}$。

我们根据以下数据将映射 π 划分为等价类 .

对于每个顶点 $\mathrm{v} \in \mathrm{V}(^{\alpha_j}) \setminus \mathrm{U}^{\alpha_j}$，我们指定是否存在一个 $\mathrm{i} < \mathrm{j}$ 以及一个顶点 $\mathrm{u} \in \mathrm{V}(\alpha_i)$，使得 $\pi(\mathrm{v}) = \pi(\mathrm{u})$。如果存在，我们指定这样的一对 (i, u)。对此至多有 $2\mathrm{q}|\mathrm{V}(\alpha)|$ 种选择。我们有 $\sum^{2q} \mathrm{j}=1 \mathrm{V}(^{\alpha_j}) \setminus \mathrm{U}_{\alpha_j} = 2\mathrm{q}(|\mathrm{V}(\alpha)| - {}^{|}\mathrm{U}_{\alpha|+|}\mathrm{V}_2{}^{\alpha|})$，因此等价类的总~~数至多~~为 $(2\mathrm{q}|\mathrm{V}(\alpha)|)$ $^{2q(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})}$。

现在我们分析每个等价类对 $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha)^q\right)\right]$ 的贡献。

定义 D.7。对于每个 $j \in [2, 2q-1]$，令 S^j 为由满足以下条件的顶点 $v \in \alpha_j$ 组成的集合：存在 $i < j$ 和 $u \in V(\alpha_i)$，使得 $\pi(u) = \pi(v)$；并且存在 $k > j$ 和顶点 $w \in V(\alpha_k)$，使得 $\pi(v) = \pi(w)$。注意，如果 $v \in U^{\alpha_j} = V^{\alpha_{j-1}}$，我们可以取 $u = v$；如果 $v \in V^{\alpha_j} = U^{\alpha_{j+1}}$，则可以取 $w = v$。

现在我们注意到，对于期望值非零的项，每个 S^j 都必须是$^{\alpha_j}$的顶点分隔集。

命题 D.8。若 S^j 不是 $^{\alpha_j}$ 的顶点分隔集（对某个 $j \in [2, 2q-1]$ 而言），则 $\mathbb{E}\left[\prod^{2q}{}_{i=1} \prod_{e \in E(\alpha_i)} \chi_{\{\pi(e)\}}\right] = 0$

证明。假设 S^j 不是 $^{\alpha_j}$ 的顶点分隔集，对某个 $j \in [2, 2q-1]$ 成立。令 P 为一条从 U^{α_j} 到 V^{α_j} 且不与S^j相交的路径。

令 v 为 P 中最后一个满足以下条件的顶点：存在 $i < j$ 和 $u \in V(\alpha_i)$，使得$\pi(u) = \pi(v)$。这个顶点必定存在，因为 P 中的第一个顶点属于 $U^{\alpha_j} = V^{\alpha_{j-1}}$，因此满足该性质。

注意，不可能存在 $k > j$ 以及顶点 $w \in V(\alpha_k)$，使得 $\pi(v) = \pi(w)$；否则就会有 $v \in S^j$。这意味着$v \notin V^{\alpha_j}$，因此v 不可能是P中的最后一个顶点。

令 v' 为 P 中 v 之后的顶点，并考虑边 $\mathrm{e} = \{\mathrm{v}, \mathrm{v}'\}$。根据 v 的选取，不存在 $\mathrm{i}' < \mathrm{j}$ 和 $\mathrm{u}' \in \mathrm{V}(\alpha_i)$，使得 $\pi(\mathrm{u}') = \pi(\mathrm{v}')$。如上所述，不存在 $\mathrm{k} > \mathrm{j}$ 和 $\mathrm{w} \in \mathrm{V}(\alpha_k)$，使得 $\pi(\mathrm{v}) = \pi(\mathrm{w})$。这意味着 $\chi_{\{\pi(e)\}}$ 在乘积 $\prod^{2q} \mathrm{i}=1 \prod \mathrm{e} \in \mathbb{E}(\alpha_i)$ $\chi_{\{\pi(e)\}}$ 中只出现一次，因此 $\mathbb{E}\left[\prod^{2q} \mathrm{i}=1 \prod \mathrm{e} \in \mathrm{E}(\alpha_i)\right.$ $\left.\chi_{\{\pi(e)\}}\right] = 0$，正如所需。 ■

现在，我们如下界定一个等价类对 $\mathbb{E}\left[\mathrm{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha)^q\right)\right]$ 的贡献。令$S_1 = S_{2q} = \emptyset$。对于每个j,

1. 对于每个顶点$v \in V(^{\alpha}_{j}) \setminus S^{j}$，我们为$v$赋予一个因子 $\sqrt{n}^{-}$。

   注意，对于 $\pi(V(H(\alpha, 2q)))$ 中的每个不同顶点，这会在该顶点首次和最后一次出现时各赋予一个因子 $\sqrt{n}$ ，因此总因子为n。

2. 对于每条边 $e \in E(S^{j})$，我们为 e 赋予一个因子 $\sqrt{\frac{1-p}{p}}$。

   注意，对于多重集 $\pi(E(H(\alpha, 2q)))$ 中的每条不同边 $\{x, y\}$，令 $m^{\{x,y\}}$ 表示边 $\{x, y\}$ 在 $\pi(E(H(\alpha, 2q)))$ 中出现的次数，

$$m_{\{x,y\}} \leq 2 + |\{j \in [2q] : \{x, y\} \in \pi(S_j)\}|$$

   因此，这至少赋予一个因子

$$\left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)^{m_{\{x,y\}}-2} \geq \mathbb{E}\left[\chi_{\{x,y\}}^{m_{\{x,y\}}}\right]$$

   给边 $\{x,y\}$。

这给出了一个上界

$$n^{q|V(\alpha)|} \prod_{j=2}^{2q-1} \left(n^{-\frac{|S_j|}{2}} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right)^{|E(S_j)|} \right) \leq n^{q|V(\alpha)|} \left(\max_{\text{separator } S} n^{-\frac{|S|}{2}} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right)^{|E(S)|} \right)^{2q-2}$$

由于至多有 $(2q|V(\alpha)|)^{2q(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})}$ 个~~等价类~~，

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left((\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_\alpha^\intercal)^q\right)\right] \leq (2q|V(\alpha)|)^{2q(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})} n^{q|V(\alpha)|} \left(\max_{\text{separator } S} n^{-\frac{|S|}{2}} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} \right)^{|E(S)|} \right)^{2q-2}$$

按需进行。 ∎

D.1 条件化

过于稠密的G 子图极不可能出现，因此需要将其“条件化排除”。分析这部分内容仅用于控制$\widetilde{\ }$截断误差并计算 $\mathbb{E}[1]$ ，而近似半正定分解的分析并不需要它。

对于一个位于 $[S$ 上的小图，其 $], n], w(S)$ 大致等于 S 在 $G \sim \mathbf{G}_{n,p}$ 中的预期副本数的对数。因此，我们预期所有子图都满足 $w(S) \geq 0$。我们将在下面的命题中证明这一点近似成立。

命题 D.9。 对于所有满足 $4\log_n(D) < \beta_{|+\eta}$ 的 $\eta > 0$ 和 $D \in \mathbb{N}$，存在 $\mathcal{G}_{n,n^{-\beta}}$ 的子图 H，满足 $|V(H)| \le D$ 且 $|E(H)| > {}^{|}V(H)_{\beta-2}{}_{n}\log(D)$ 的概率至多为 $n^{-\eta}$。等价地，以至少 $1-n^{-\eta}$ 的概率，所有满足 $|V(H)| \le D$ 的 G 的子图 H 都满足

$$w(H) \ge -\eta - 2\left|E(H)\right|\log_n(D)$$

证明。 我们使用一阶矩方法。对于所有满足$a \le D$的a 和b，恰有a 个顶点且至少有b 条边的子图数量的期望至多为

$$\binom{n}{a}\binom{\frac{a(a-1)}{2}}{b}p^b \le \frac{n^a\left(\frac{a^2}{2}\right)^b}{a!b!}n^{-b\beta} \le \frac{n^{-\eta}}{a!}n^{a+\eta+(2\log_n(D)-\beta)b}$$

若 $b \ge a_{\beta-2}{}^{+\eta}{}_{n}\log(D)$，则 $n^{a+\eta+(2\log_n(D)-\beta)b} \le 1$，因此恰有 a 个顶点且至少有 b 条边的图的数量期望至多为 $n^{-\eta}a!$。根据马尔可夫不等式，这意味着存在一个恰有 a 个顶点且边数多于 $a_{\beta-2}{}^{+\eta}{}_{n}\log(D)$ 的子图的概率至多为 $n^{-\eta}a!$。对所有 $a \in [2,D]$ 应用并合界（$a \le 1$的情形是平凡的），则存在一个至多有 D 个顶点且至少有 ${}^{|}{}_{\beta-2}{}^{|+\eta}{}_{n}V(H)\log(D)$ 条边的子图 H 的概率至多为 $n^{-\eta}$。

■

定理 D.10。 在给定 G 不含满足 $|V(H)| \le D$ 且 $|E(H)| > {}^{|}{}_{\beta-2}{}^{|+\eta}{}_{n}V(H)\log(D)$ 的子图 H，且范数界成立的条件下，

1. 对所有形状 α 使得 $|V(\alpha)| \le D$，

$$\lambda_\alpha\|\mathbf{M}_\alpha\| \le 2B_{adjust}(\alpha)n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}+\eta-(\gamma-\alpha\beta-3\log_n(D))|E(\alpha)|}$$

2. 对所有左形状 σ 使得 $|V(\sigma)| \le D$ 且 $|U_\sigma| \le D_{\mathrm{SoS}}$，

$$\lambda_\sigma\|\mathbf{M}_\sigma\| \le 2B_{adjust}(\sigma)n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}}+\eta+(\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)|-(\gamma-\alpha\beta-3\log_n(D))|E(\sigma)|}$$

注意，当 $|V_\sigma| > D_{\mathrm{SoS}}$时，这可能比第一个界更强。

证明。 我们先来看第一个结论。给定一个形状 α，令 $S_\alpha^\emptyset$ 为一个顶点集合 α（不一定是分隔集），使 $w(S_\alpha^\emptyset) = |S_\alpha^\emptyset| - \beta E(S_\alpha^\emptyset)$ 最小。换言之，$S_\alpha^\emptyset$决定了标量$\mathbf{1}^\intercal\mathbf{M}_\alpha\mathbf{1}$的范数界，这等价于从 α 得到的形状，其中将矩阵指标U_α 和 V_α 设为 $\emptyset$。

若$w(S_\alpha^\emptyset) \ge 0$，令$S$ 为 α的 SMVS，则有$w(\alpha) \ge w(S) \ge 0$，因此得到以下界

1.

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha &= n^{(\alpha-1)(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})+(\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(\alpha)|}\\ &= n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}-\frac{|V(\alpha)|}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\alpha)-(\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|}\\ &\le n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}-\frac{|V(\alpha)|}{2}-(\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|}\end{aligned}$$

2. $\|\mathbf{M}_\alpha\| \le B^{adjust}(\alpha) n^{\frac{|V(\alpha)|-w(S)}{2}} \le B^{adjust}(\alpha) n^{|V(\alpha)|-}$

综合这些界，

$$\lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\| \le B_{adjust}(\alpha) n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}-(\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|}$$

现在我们分析 $w(S_\alpha^\emptyset) < 0$. 若 $|E(S_\alpha^\emptyset)| > {}^{|}_{S\beta-2}{}^{\emptyset}_{\alpha}{}^{|+\eta}_{n}\log(D)$，我们就应用 [JPR+22] 中的条件化论证（引理 6.30），它可以让我们在应用范数界之前，将 $\mathbf{M}_\alpha$ 化为边数更少的形状的线性组合。

引理 D.11. 给定边集 E，若已知 E 的边并非全部属于 $E(G)$，则

$$\chi_E = -\sum_{E'\subseteq E: E'\neq E}\left(-\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^{|E|-|E'|}\chi_{E'}$$

若 $|E(S_\alpha^\emptyset)| > {}^{|}_{S\beta-2}{}^{\emptyset}_{\alpha}{}^{|+\eta}_{n}\log(D)$，我们就将 引理 D.11 应用于 $S_\alpha^\emptyset$。具体而言，我们反复执行以下步骤：

1. 指定一条从$E(S_\alpha^\emptyset)$ 中移除的边，并指出本次应用引理 D.11 是否还会再移除至少一条边，还是本次应用引理 D.11已结束。注意，这里最多有 $2\binom{D}{2} \le D^2$种可能性。

如果仍存在一个子集 $S \subseteq S_\alpha^\emptyset$ 使得 $|E(S)| > {}^{|}_{S\beta-2}{}^{|+\eta}_{n}\log(D)$，则我们对 引理 D.11 应用于 S 并重复此过程。否则，我们停止。

对于每个 $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$，这给出至多 D^{2j} 个项，其中移除了 j 条边。每个这样的项都带有一个因子 $\left(\sqrt{p\,1-p}\right)$，对应于被移除的边。

我们有以下界：

1. $\lambda_\alpha = n^{(\alpha-1)(|V(\alpha)|-\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2})+(\frac{\beta}{2}-\gamma)|E(\alpha)|} = n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}-\frac{|V(\alpha)|}{2}-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\alpha)-(\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|}$

2. 对于每个得到的项，令j表示被移除的边数，并令I表示移除边后孤立顶点的集合，

$$|I| \le (\beta - 2\log_n(D))j + w(S_\alpha^\emptyset) + 2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)| + \eta$$

为此，注意到$I \subseteq S_\alpha^\emptyset$中只有边$S_\alpha^\emptyset$可以被移除。现在考虑从$S_\alpha^\emptyset$中删除已移除的边以及$I$中的所有顶点后得到的集合$S$。我们有

$$|E(S_\alpha^\emptyset)| - j = |E(S)| \le \frac{|S| + \eta}{\beta - 2\log_n(D)} = \frac{|S_\alpha^\emptyset| + \eta - |I|}{\beta - 2\log_n(D)}$$

这意味着

$$\begin{aligned} |I| &\le |S_\alpha^\emptyset| + \eta - (\beta - 2\log_n(D))(|E(S_\alpha^\emptyset)| - j) \\ &= w(S_\alpha^\emptyset) + 2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)| + \eta + (\beta - 2\log_n(D))j \end{aligned}$$

3. 对于每个得到的项 β，令 S′ 为移除边之后的 SMVS，则 w(S′) $\ge -2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)| - \eta$。证明如下。令 S″ = S′ ∩ $S_\alpha^\emptyset$，并注意到 w(S″) ≤ w(S′)。为此，注意到由于 E(S′) \ E(S″) 中的边均未被移除，移除边不会影响 w(S′) − w(S″)。现在注意，在移除边之前，w(S′) −w(S″) ≥ w($S_\alpha^\emptyset$ ∪ (S′ \ S″)) −w($S_\alpha^\emptyset$) ≥0。

由于 S″ ⊆ $S_\alpha^\emptyset$，我们有：移除边后，$|E(S'')| \le |S_{\beta-2}^{''}|+\eta_n \log(D)$，这意味着 w(S″) ≥ $-2\log_n(D)|E(S'')| - \eta \ge -2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)| - \eta$。

综合这些界，利用 $|E(S_\alpha^\emptyset)| \le |E(\alpha)|$ 和 $w(S_\alpha^\emptyset) \le \min\{0, w(\alpha)\}$，并注意到从形状 α 中移除顶点和/或边只会使$B^{adjust}(\alpha)$减小，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\|}{B_{adjust}(\alpha)} &\le \lambda_\alpha \sum_{j=0}^{|E(\alpha)|} \left(D^2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^j n^{\frac{|V(\alpha)|+|I|-w(S')}{2}} \\ &\le n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2} - \frac{|V(\alpha)|}{2} - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\alpha) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|} n^{\frac{|V(\alpha)|+2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)|+\eta}{2}} \\ &\quad \sum_{j=0}^{|E(\alpha)|} \left(D^2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^j n^{\frac{(\beta-2\log_n(D))j + w(S_\alpha^\emptyset) + 2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)|+\eta}{2}} \\ &\le n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2} - (\gamma-\alpha\beta)|E(\alpha)|} \sum_{j=0}^{|E(\alpha)|} \left(D^2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^j n^{\frac{(\beta-2\log_n(D))j}{2} + 2\log_n(D)|E(\alpha)|+\eta} \\ &\le 2n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2} + \eta - (\gamma-\alpha\beta-3\log_n(D))|E(\alpha)|} \end{aligned}$$

为证明第二个结论，我们根据 w(Vσ) 是否非负分情况讨论。对于 w(Vσ) < 0的情形，我们沿用之前的步骤。令 $S_{\sigma}^{\emptyset}$ 为 σ 的一个顶点子集，使 w($S_{\sigma}^{\emptyset}$) 最小。只要存在一个子集 S ⊆ $S_{\sigma}^{\emptyset}$，使得|E(S)| > $|S_{\beta-2}|_{+\eta}^{n}\log(D)$，我们就将引理 D.11 应用于 S。对于每个 j ∈ ℕ ∪ {0}，这至多产生 $\overline{D^{2j}}$ 个项，其中移除了 j 条边；每个这样的项都带有因子$\left(\sqrt{p_{1-p}}\right)^{j}$，对应被移除的边。对于每个这样的项，令 I 为孤立顶点的集合，并令 S′ 为新的 SMVS，我们得到与之前相同的界：

1. $|I| \le (\beta - 2\log_n(D))j + w(S_\sigma^\emptyset) + 2\log_n(D)|E(S_\sigma^\emptyset)| + \eta$
2. $w(S') \ge -2\log_n(D)|E(S_\alpha^\emptyset)| - \eta$

为界定 λ_σ，我们注意到

$$\begin{aligned}\lambda_\sigma &= n^{(1-\alpha)\frac{|U_\sigma|+|V_\sigma|}{2} - \frac{|V(\sigma)|}{2} - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\sigma) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|} \\ &= n^{(1-\alpha)\frac{|U_\sigma|}{2} - \frac{|V(\sigma)|}{2} + \frac{1-\alpha}{2}w(V_\sigma) + (\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\sigma) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|}\end{aligned}$$

Us通过界定$w(V_\sigma) \le |U_\sigma| + w(S_\sigma^\emptyset) \le D_{\text{SoS}} + w(S_\sigma^\emptyset)$，我们有

$$\lambda_\sigma \le n^{(1-\alpha)D_{\text{SoS}} - \frac{|V(\sigma)|}{2} + \frac{1-\alpha}{2}w(S_\sigma^\emptyset) + (\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\sigma) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|}$$

综合这些界，利用 $|E(S_\sigma^\emptyset)| \le |E(\sigma)|$ 以及$w(S_\sigma^\emptyset$<style id='27'>) ≤min {0,$w(\sigma)$}，并注意到从形状中移除顶点和/或边 σ 只会使$B^{adjust}(\sigma)$减小，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\|}{B_{adjust}(\sigma)} &\le \lambda_\sigma \sum_{j=0}^{|E(\sigma)|} \left(D^2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^j n^{\frac{|V(\sigma)|+|I|-w(S')}{2}} \\ &\le n^{(1-\alpha)D_{\text{SoS}} - \frac{|V(\sigma)|}{2} + \frac{1-\alpha}{2}w(S_\sigma^\emptyset) + (\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\sigma) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|} n^{\frac{|V(\sigma)|+2\log_n(D)|E(S_\sigma^\emptyset)|+\eta}{2}} \\ &\sum_{j=0}^{|E(\sigma)|} \left(D^2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^j n^{\frac{(\beta-2\log_n(D))j + w(S_\sigma^\emptyset) + 2\log_n(D)|E(S_\sigma^\emptyset)|+\eta}{2}} \\ &\le n^{(1-\alpha)D_{\text{SoS}} + (\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|} \sum_{j=0}^{|E(\sigma)|} \left(D^2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^j n^{\frac{(\beta-2\log_n(D))j}{2} + 2\log_n(D)|E(\sigma)|+\eta} \\ &\le 2n^{(1-\alpha)D_{\text{SoS}} + \eta + (\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\gamma-\alpha\beta-3\log_n(D))|E(\sigma)|}\end{aligned}$$

对于$w(V_\sigma) \ge 0$的情况，我们再次观察到

$$\lambda_\sigma = n^{(1-\alpha)\frac{|U_\sigma|}{2} - \frac{|V(\sigma)|}{2} + \frac{1-\alpha}{2}w(V_\sigma) + (\frac{\beta}{2}-\alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\frac{1}{2}-\alpha)w(\sigma) - (\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|}$$

由于$w(\sigma) \geq w(V_\sigma) \geq 0$ 且 $w(V_\sigma) \leq |U_\sigma| \leq D_{\mathrm{SoS}}$，

$$\lambda_\sigma \leq n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}} - \frac{|V(\sigma)|}{2} + (\frac{\beta}{2} - \alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\gamma - \alpha\beta)|E(\sigma)|}$$

由于 $\|\mathbf{M}_\sigma\| \leq B^{adjust}(\sigma) n^{|V(\sigma)| - w(S)/2} \leq B^{adjust}(\sigma) n^{\frac{|V(\sigma)|}{2}}$，我们有

$$\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\| \leq B_{adjust}(\sigma) n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}} + \eta + (\frac{\beta}{2} - \alpha\beta)|E(V_\sigma)| - (\gamma - \alpha\beta)|E(\sigma)|}.$$

■

使用 附录 E.1中即将引入的记号，我们得到以下关于左形状的范数界。

推论 D.12。 在进行条件化后，对于所有 $U \in \mathcal{I}_{mid}$ 以及所有 $\sigma \in \mathcal{L}_{U, \leq D_V}$，

$$\lambda_{\sigma^-} \|\mathbf{M}_{\sigma^-}\| \leq 2B_{adjust}(\sigma) n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}} + \eta - (\frac{\beta}{2} - 3\log_n(D_V))|E(U)| - (\gamma - \alpha\beta - 3\log_n(D_V))|E(\sigma)\setminus E(U)|}.$$

证明。 根据定理 D.10，

$$\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\| \leq 2B_{adjust}(\sigma) n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}} + \eta + (\frac{\beta}{2} - \alpha\beta)|E(U)| - (\gamma - \alpha\beta - 3\log_n(D))|E(\sigma)|}$$

现在我们注意到

$$\lambda_{\sigma^-} \|\mathbf{M}_{\sigma^-}\| \leq \left(\sqrt{\frac{p}{1-p}}\right)^{|E(U)|} n^{(\gamma - \frac{\beta}{2})|E(U)|} \lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\| = n^{(\gamma-\beta)|E(U)|} \lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\|$$

其中，为了界定 $\|\mathbf{M}_\sigma\|$，我们从 V_σ 中移除了示性函数。合并这些界即可得到结论。

■

推论 D.13。 经过条件化后，对于所有 $U \in \mathcal{I}_{mid}$ 以及所有 $\sigma \in \mathcal{L}_{U, \leq D_V}$，

$$\lambda_{\sigma^-} \|\mathbf{M}_{\sigma^-}\| \sqrt{\lambda_U \|\mathbf{M}_U\|} \leq 2B_{adjust}(\sigma) n^{D_{\mathrm{SoS}} + \eta - \frac{\varepsilon}{2} D_{\mathrm{SoS}} - \frac{\varepsilon}{8}|E(\sigma)| - \frac{\varepsilon}{8}|V(\sigma)|}$$

证明。 根据推论 D.12，

$$\lambda_{\sigma^-} \|\mathbf{M}_{\sigma^-}\| \leq 2B_{adjust}(\sigma) n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}} + \eta - (\frac{\beta}{2} - 3\log_n(D_V))|E(U)| - (\gamma - \alpha\beta - 3\log_n(D_V))|E(\sigma)\setminus E(U)|}$$

由于 $\sqrt{\lambda_U \|\mathbf{M}_U\|} = n^{(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})|E(U)|}$，利用 $|E(\sigma)| \geq |V(\sigma) \setminus U_\sigma|$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\lambda_{\sigma^-} \|\mathbf{M}_{\sigma^-}\| \sqrt{\lambda_U \|\mathbf{M}_U\|} &\leq 2B_{adjust}(\sigma) n^{(1-\alpha)D_{\mathrm{SoS}} + \eta - (\frac{\gamma}{2} - 3\log_n(D_V))|E(U)| - (\gamma - \alpha\beta - 3\log_n(D_V))|E(\sigma)\setminus E(U)|} \\ &\leq 2B_{adjust}(\sigma) n^{D_{\mathrm{SoS}} + \eta - \frac{\varepsilon}{2} D_{\mathrm{SoS}} - \frac{\varepsilon}{8}|E(\sigma)| - \frac{\varepsilon}{8}|V(\sigma)|}\end{aligned}$$

按需。 ■

E 形式近似半正定分解

E.1 近似半正定分解的起点

在本节中，我们将证明，以高概率，伪校准矩阵$\mathbf{\Lambda}$ (在第 2.9 节中形式化定义)是半正定的。为此，我们将给出 $\mathbf{\Lambda}$的近似半正定分解。随后，我们将证明，误差在半正定序下被该近似半正定分解中的项所支配。构造这一近似半正定分解时，我们大量借鉴了 [PR20] 的技术框架（不过，我们无法正式应用其中的工具，因为它们不适用于稀疏随机图，也没有纳入 PMVS 思路）。

定义 E.1 ($\mathcal{I}_{mid}$)**.** 令$\mathcal{I}_{mid}$ 为$\mathcal{S}$中分隔集的形状集合。换言之，$\mathcal{I}_{mid}$ 是满足 $V(\alpha) = U_\alpha = V_\alpha$ 且 $|V(\alpha)| \le D_V$的对角形状集合 α 。

定义 E.2 ($\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_U$ 和 $\mathcal{L}_{U,\le D}$)**.** 令$\mathcal{L}$ 为$\mathcal{S}$中的左形状集合。给定 $U \in \mathcal{I}_{mid}$ 和 $D \in \mathbb{N}$，我们将$\mathcal{L}_U$ 定义为满足 $V_\sigma = U$ 的$\mathcal{S}$ 中所有左形状的集合 $\sigma \in$ 。集合$\mathcal{L}_{U,\le D}$ 还要求 $|V(\sigma)| \le D$。

定义 *E.3 (*M 和 $M_{U,V}$ 以及 $M_{U,V,\le D}$*)*。令 M 为 S 中间形状的集合。给定 $D \in \mathbb{N}$ 和 U、$V \in I_{mid}$（二者可能相交），我们将 $M_{U,V}$ 定义为满足 $U_\tau = U$ 且 $V_\tau = V$ 的$\tau \in S$ 中间形状集合。集合 $M_{U,V,\le D}$ 还要求 $|V(\tau)| \le D$。

注记 E.4. 由于$\mathcal{S}$中形状大小的约束，我们只考虑顶点数至多为 D_V的形状。在当前章节需要时，我们有时会写$\mathcal{L}_{U,\ \le D_V}$ 而不写等价的$\mathcal{L}_U$ 。由于我们将考虑的所有形状都具有权重至多为 D_{SoS}的 *SMVS*，因此我们只考虑满足 $w(U) \le D_{\mathrm{SoS}}$的 $U \in \mathcal{I}_{mid}$ 。

定义 E.5 ($\mathcal{T}_\tau$ 和 $\mathcal{T}_{\tau,\le D_1,\le D_2}$)**.** 给定一个形状 τ （它可能是 *proper*，也可能不是），我们将$\mathcal{T}_\tau$ 定义为满足以下条件的三元组带状图集合(R_1,R_2,R_3)

(i) R_2 的形状为 τ。

(ii) R_1 是左带，R_3 是右带。

(iii) R_1、R_2、和 R_3 可适当复合。

(iv) 边与边指示变量在 $B^{R_1} = A^{R_2}$ 和 $B^{R_2} = A^{R_3}$上相符。

(v) R_1,R_3 在 $B^{R_1} = A^{R_2}$ 和 $B^{R_2} = A^{R_3}$ 之外没有边指示量。

$\mathcal{T}_{\tau,\ \le D_1,\ \le D_2}$ 还要求 $|V(R_1)| \le D_1$，$|V(R_3)| \le D_2$。

定义 E.6 ($\mathcal{R}(\alpha)$)**.** 给定一个形状 α，我们将$\mathcal{R}(\alpha)$ 定义为具有形状 α 的带状图 R 的集合。

定义 E.7 (减号缩写). 给定一个左带 L，令 $L^- = L \setminus E(B_L)$。给定一个右带 R，令 $R^- = R \setminus E(A_R)$。形状的记号定义类似。

定义 E.8 ($U \sim V$)。给定 $U, V \in \mathcal{I}_{mid}$，若满足 $|U| = |V|$，$|E(U)| = |E(V)|$，且 U 和 V 在顶点集 $U \cap V$ 上有相同的边，并且 U 和 V 在 $U \cap V$ 上有相同的顺序，则记作 $U \sim V$。

从 Λ 的伪校准公式出发，并结合这一记号，我们得到以下引理。

引理 E.9。

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{\substack{U,V \in \mathcal{I}_{mid}: \\ U \sim V}} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{M}_{U,V}} \sum_{R_1,R_2,R_3 \in \mathcal{T}_{\tau, \le D_V, \le D_V}} \lambda_{R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-} \mathbf{M}_{R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-} - \text{truncation}_1$$

其中截断$_1$ 在定义 *E.10*中定义。

证明。从 $\mathbf{\Lambda} = \sum_{R \in S} \lambda_R M_R$ 出发，我们应用命题 2.33 将 R 分解为左带、中带和右带。我们对所有满足 $U \cap V$ 上的排列为恒等置换的最左 SMVS U 和最右 SMVS V 的次序选择进行对称化。这样的次序选择恰好有 $|U|!|V|!$ $|U \cap V|!$ 种。根据命题 A.4，$U \sim V$ 和 $|U|!|V|!$ $|U \cap V|!$ $= (|U \cap V|^2 |U|!) |V|!$。因此，

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{\substack{U,V \in \mathcal{I}_{mid}: \\ U \sim V}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{L}_U \\ \tau \in \mathcal{M}_{U,V} \\ \sigma' \in \mathcal{L}_V: \\ |V(\sigma^- \circ \tau \circ (\sigma')^-)| \le D_V}} \sum_{\substack{R_1 \in \mathcal{R}(\sigma) \\ R_2 \in \mathcal{R}(\tau) \\ R_3 \in \mathcal{R}(\sigma'^{\intercal}): \\ R_1,R_2,R_3 \text{ 可适当复合的}}} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \lambda_{R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-} \mathbf{M}_{R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-}$$

条件 $|V(\sigma^- \circ \tau \circ (\sigma')^-)| \le D_V$ 出现的原因是，整个带状图 $R = R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-$ 的大小有上界 D_V。我们希望各个部分 R_1, R_2, R_3 的大小分别有上界 D_V。这两者的差异仅在于非常大的带，我们将其作为截断误差来界定。

定义 E.10(截断$_1$)。

$$\text{truncation}_1 = \sum_{\substack{U,V \in \mathcal{I}_{mid}: \\ U \sim V}} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{L}_{U, \le D_V} \\ \tau \in \mathcal{M}_{U,V, \le D_V} \\ \sigma' \in \mathcal{L}_{V, \le D_V}: \\ |V(\sigma^- \circ \tau \circ (\sigma'^{\intercal})^-)| > D_V}} \frac{\lambda_{\sigma^- \circ \tau \circ (\sigma'^{\intercal})^-} \mathbf{M}_{\sigma^- \circ \tau \circ (\sigma'^{\intercal})^-}}{|\operatorname{Aut}(\sigma^- \circ \tau \circ (\sigma'^{\intercal})^-)|}$$

我们已将截断$_1$ 归为不同形状。用带状图来表示，根据命题 A.3，

$$\begin{aligned}\mathsf{truncation}_1 &= \sum_{\substack{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:\\ U\sim V}} \frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{L}_U\\ \tau\in\mathcal{M}_{U,V}\\ \sigma'\in\mathcal{L}_V:\\ |V(\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^\intercal)^-)|>D_V}} \sum_{R\in\mathcal{R}(\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^\intercal)^-)} \lambda_R \mathbf{M}_R \\ &= \sum_{\substack{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:\\ U\sim V}} \frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{L}_U\\ \tau\in\mathcal{M}_{U,V}\\ \sigma'\in\mathcal{L}_V:\\ |V(\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^\intercal)^-)|>D_V}} \sum_{\substack{R_1\in\mathcal{R}(\sigma)\\ R_2\in\mathcal{R}(\tau)\\ R_3\in\mathcal{R}(\sigma'^\intercal):\\ R_1,R_2,R_3 \text{ properly composable}}} \lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\end{aligned}$$

继续计算，

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}+\mathsf{truncation}_1 &= \sum_{\substack{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:\\ U\sim V}} \frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{L}_U\\ \tau\in\mathcal{M}_{U,V}\\ \sigma'\in\mathcal{L}_V}} \sum_{\substack{R_1\in\mathcal{R}(\sigma)\\ R_2\in\mathcal{R}(\tau)\\ R_3\in\mathcal{R}(\sigma'^\intercal):\\ R_1,R_2,R_3 \text{ properly composable}}} \lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-} \\ &= \sum_{\substack{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:\\ U\sim V}} \frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}} \sum_{R_1,R_2,R_3\in\mathcal{T}_{\tau,\le D_V,\le D_V}} \lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\end{aligned}$$

如所需。 ∎

E.2 交互模式

为了分析 $\mathbf{\Lambda}$，我们采用第 3 节 中所述的交互模式。这些模式将交集模式（定义 2.36）加以推广，以涵盖形状在递归过程中可能发生交互的其他方式。

定义 *E.11*（*PMVS* 交互，隐式定义）。给定可复合形状 γ,τ,γ'，满足 $E(V\gamma) = E(U\tau)$ 且 $E(V\tau) = E(U\gamma')$，令 $P^{PMVS}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$ 为在形状 γ,τ,γ' 的带状图 R_1,R_2,R_3 上运行寻找 *PMVS* 子程序（第 *3.2* 节，注意其中包括移除中间边指示符操作）一次迭代时所有可能选择的集合。

定义 *E.12*（交集项交互，隐式定义）。给定可复合形状 γ,τ,γ'，满足 $E(V\gamma) = E(U\tau)$ 且 $E(V\tau) = E(U\gamma')$，令 $P^{intersect}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$ 为在形状 γ,τ,γ' 的带状图 R_1,R_2,R_3 上运行交集项分解操作后接移除中间边指示符操作时所有可能选择的集合（第 *3.3* 节）。

定义 E.13（交互模式）。令 $P^{interact}_{\gamma\,\tau\,\gamma'} = P^{PMVS}_{\gamma\,\tau\,\gamma'} \cup P^{intersect}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$。

定义 E.14（PMVS 交互，显式定义）。给定可复合形状 γ, τ, γ'，满足 $E(V_\gamma) = E(U_\tau)$ 且 $E(V_\tau) = E(U_{\gamma'})$，*PMVS* 相互作用模式 $P \in \mathcal{P}^{PMVS}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$ 由以下部分组成：

(i) 对于 $E(U_\tau) \cup E(V_\tau)$ 中尚无边指示变量的每条边，我们指定该边是添加指示变量还是被移除，

(ii) 对于 $E(U_\tau) \cup E(V_\tau)$ 中此时位于 $\gamma^- \circ \tau \circ (\gamma')^-$ 中间的每条边，我们指定移除该指示变量时保留还是移除这条边。

此外，P 还具有关于 γ，τ，γ' 的结构性质：在第一步从 $V_\gamma = U_\tau$ 和 $V_\tau = U_{\gamma'}$ 中移除边之后，U_γ 是 γ 的最左 *SMVS*，而 $V_{\gamma'}$ 是 γ' 的最右稀疏最小顶点分隔集。

定义 E.15（交集项交互，显式定义）。给定可复合形状γ，τ，γ'，满足 $E(V_\gamma) = E(U_\tau)$ 以及 $E(V_\tau) = E(U_{\gamma'})$，交集项交互模式 $P \in \mathcal{P}^{intersect}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$，由以下部分组成：

(i) γ^-、τ 和 $(\gamma')^-$之间的交集模式

(ii) 经过这些交集后，某些边的重数大于1。对于每条这样的边，我们将其线性化，并指定取的是含边项还是常数项。

(iii) 对于 $E(U_\tau) \cup E(V_\tau)$ 中的每个边指示变量，它们现在位于 $\gamma^- \circ \tau \circ (\gamma')^-$ 的中间。我们指定在移除该示性函数时，是保留还是移除这条边。

此外，P 还具有如下结构性质：对于 γ、τ 和 γ'，U_γ 是 γ 中 U_γ 与 $V_\gamma \cup V_{intersected}(\gamma)$ 的最左 *SMVS*，而 $V_{\gamma'}$ 是 γ' 中 $U_{\gamma'} \cup V_{intersected}(\gamma')$ 与 $V_{\gamma'}$ 的最右稀疏最小顶点分隔集。

定义 E.16(τ_P)。给定一个交互模式 $P \in \mathcal{P}^{interact}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$，令 τ_P 为所得形状。

定义 E.17 ($N(P)$，隐式定义)。给定 γ, τ, γ' 以及一个交互模式 $P \in \mathcal{P}^{interact}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$，我们定义 $N(P)$，使得对于每个形状为 τ_P 的带状图 R，$N(P)$ 等于形状为 γ, τ, γ' 的带状图三元组 R_1, R_2, R_3 的数量；这些三元组通过交互模式 P 得到带状图 R。

$N(P) > 1$ 在相互作用项的对称性增加时成立。

定义 E.18 (c_P，隐式定义)。给定一个交互模式$P \in \mathcal{P}^{interact}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$，我们定义 c_P，使得 $N(P)c_P\lambda_{\tau_P}$ 是形状为 τ_P的所得带状图 R 对应的系数。

按照分析 断言 4.17、断言 4.23，我们得到以下关于c_P。

定义 E.19(c_P，显式定义)。**给定一个交互模式 P** $\mathcal{P}^{interact}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$，„ ᵀ

1. 若 P 是 *PMVS* 交互，

$$c_P = (n^{-\gamma})^{(\text{total \# of removed edges})} (-1)^{\text{\# of edges removed from } U_\tau \cup V_\tau \text{ for not being in } E(G)} \left(\frac{1}{1-p}\right)^{(\text{\# of new edge indicators})} (1-p)^{\text{\# of edges and edge indicators removed from the middle}}$$

2. 若 P 是交集项交互，

$$c_P = \left(\frac{k}{n}\right)^{(\text{\# of intersections})} \left(\prod_{e\in E_{tot}(\tau_P)} \left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{\text{mult}(e)-1+\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}} \left(\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{(\text{mult}(e)-2)\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}} \left(\frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{1_{\text{mult}(e)=2, e \text{ does not vanish or have an indicator}}} \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}}\right)^{1_{\text{mult}(e)=2, e \text{ has an indicator}}} \left(\frac{1-3p+3p^2}{p(1-p)}\right)^{1_{\text{mult}(e)=3, e \text{ does not vanish}}}\right) \cdot (1-p)^{(\text{\# of edges and edge indicators removed from the middle})} (q-p)^{(\text{\# of edges removed from the middle})}$$

引理 E.20。

$$|c_P| \le \left(n^{\alpha-1}\right)^{(\text{\# of intersections})} \left(\prod_{e\in E_{tot}(\tau_P)} \left(n^{\frac{\beta}{2}-\gamma}\right)^{\text{mult}(e)-1+\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}} \left(n^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\text{mult}(e)-1-\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}}\right) \cdot (1-p)^{\text{\# of edges and edge indicators removed from the middle}} (n^{-\gamma})^{(\text{\# of edges removed from the middle})}$$

证明。 这可以直接根据上面的精确公式证明，也可以通过 断言 4.23中已给出的分析证明。根据上文，注意到 p p $= n^{-\frac{\beta}{2}}$。注意到 $\frac{1-3p+3p^2p(1-p)}{\le} \frac{1-pp}{} = n^{-\frac{\beta}{2}}$，当 $p \le \frac{1}{2}$ 时。 -

——— — - – ■

定义 E.21 ($c^{\approx} P$)。 将 $c^{\approx} P$ 定义为 c_P 中的多项式因子，即

$$c_P^{\approx} = \left(n^{\alpha-1}\right)^{(\text{\# of intersections})} \left(\prod_{e\in E_{tot}(\tau_P)} \left(n^{\frac{\beta}{2}-\gamma}\right)^{\text{mult}(e)-1+\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}} \left(n^{\frac{\beta}{2}}\right)^{\text{mult}(e)-1-\mathbf{1}_{e \text{ vanishes}}}\right) \cdot (n^{-\gamma})^{(\text{\# of edges removed from the middle})}$$

E.3 近似半正定分解

按照 第 3 节 所述进行递归，并采用上一节中的定义，我们得到如下近似半正定分解。证明基本上由定义直接推出，详见附录 E.3.1。

定义 E.22 (加号缩写)。 给定一个形状 τ，令 τ^+ 表示通过在 U_τ 和 V_τ 中添加左侧与右侧边指示量而得到的非正规形状。

定义 E.23 (终端交互)。 $P \in \mathcal{P}^{PMVS}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$ „是一个终端 PMVS 交互，如果所有边都带有指示量（没有边被移除）。$P \in \mathcal{P}^{intersection}_{\gamma\,\tau\,\gamma'}$ „是一个终端交集交互，如果不存在交集。

引理 E.24 (一次迭代，PMVS 操作)。 对于所有形状 τ 和 $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{(R_1,R_2,R_3)\in\mathcal{T}_{\tau,\le D_1,\le D_2}} \lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-} \\
&= \sum_{(R_1,R_2,R_3)\in\mathcal{T}_{\tau,\le D_1,\le D_2}} \left(\frac{1}{1-p}\right)^{(\#\ of\ new\ edge\ indicators)} \lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2^+\circ R_3^-} \\
&\quad + \sum_{\gamma\in\mathcal{L}_{U_\tau,\le D_1},\gamma'\in\mathcal{L}_{V_\tau,\le D_2}} \sum_{\substack{non\text{-}terminal\\ P\in\mathcal{P}^{PMVS}_{\gamma,\tau,\gamma'^\intercal}}} \frac{N(P)c_P}{|U_\gamma|!|V_{\gamma'^\intercal}|!} \left(\sum_{(R_1',R_2',R_3')\in\mathcal{T}_{\tau_P,\le D_1',\le D_2'}} \lambda_{R_1'^-\circ R_2'\circ R_3'^-}\mathbf{M}_{R_1'^-\circ R_2'\circ R_3'^-} \right)
\end{aligned}$$

其中 $D_1' = D_1 - |V(\gamma)\setminus U_\gamma|$，且 $D_2' = D_2 - |V(\gamma')\setminus V_{\gamma'}|$

定义 E.25 ($\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{L}_U$ 与 $\mathbf{L}_{U,\le D}$)。 令 $\mathbf{L} = \sum_{L\in\mathcal{L}} \lambda_{L^-}\mathbf{M}_{L^-}$ 与 $\mathbf{L}_U = \sum_{L\in\mathcal{L}_U} \lambda_{L^-}\mathbf{M}_{L^-}$ 和 $\mathbf{L}_{U,\le D} = \sum_{L\in\mathcal{L}_{U,\le D}} \lambda_{L^-}\mathbf{M}_{L^-}$。

引理 E.26 （一次迭代，交集项运算）。 对于所有形状 τ 和 $D_1, D_2 \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{(R_1,R_2,R_3)\in\mathcal{T}_{\tau,\le D_1,\le D_2}} \lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2^+\circ R_3^-} = \mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}\left(\frac{\lambda_\tau \mathbf{M}_{\tau^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau)|}\right)\mathbf{L}^\intercal_{V_\tau,\le D_2} \\
&- \sum_{\gamma\in\mathcal{L}_{U_\tau,\le D_1},\gamma'\in\mathcal{L}_{V_\tau,\le D_2}} \sum_{\substack{non\text{-}terminal\\ P\in\mathcal{P}^{intersect}_{\gamma,\tau^+,\gamma'^\intercal}}} \frac{N(P)c_P}{|U_\gamma|!|V_{\gamma'^\intercal}|!} \left(\sum_{(R_1',R_2',R_3')\in\mathcal{T}_{\tau_P,\le D_1',\le D_2'}} \lambda_{R_1'^-\circ R_2'\circ R_3'^-}\mathbf{M}_{R_1'^-\circ R_2'\circ R_3'^-} \right)
\end{aligned}$$

其中 $D_1' = D_1 - |V(\gamma)\setminus U_\gamma|$ 以及 $D_2' = D_2 - |V(\gamma')\setminus V_{\gamma'}|$

我们反复应用 引理 E.24，直到只剩下已标识 PMVS（即同时具有左侧与右侧示性函数）的项，然后应用 引理 E.26，接着重复

引理 E.24，依此类推。下一个引理给出了对 Λ 进行迭代后最终结果的正式表述。

我们定义迭代交互模式，它们是描述完整递归各分支的组合对象。

定义 E.27 (迭代交互模式，$\mathcal{P}^j(\tau)$)。给定一个形状 τ 和 $j \in \mathbb{N}$，定义 $\mathcal{P}^j(\tau)$ 为满足下述条件的元组集合 $(\Gamma,\ \Gamma',\ P)$：

1. Γ 是由 j 个可复合左形状组成的元组 $(\gamma_j,\ \ldots\ldots,\ \gamma_1)$。令 $\gamma = \gamma_j \circ \cdots \circ \gamma_2 \circ \gamma_1$。

2. Γ' 是由 j 个可复合右形状组成的元组 $(\gamma'_1,\ \ldots,\ \gamma'_j)$。令 $\gamma' = \gamma'_1 \circ (\gamma'_2) \circ \cdots \circ (\gamma'_j)$

3. P 是由 j 个交互模式组成的元组 $(P_1, \ldots\ldots,\ P_j)$，满足对于每个 $i \in [j], P_i \in \mathcal{P}^{interact}_{\gamma_i}$，$\tau_{P_{i-1}},\ \gamma'_i$。对于 $i = 1$，我们取 $\tau_{P_0} = \tau$。4. P 由若干序列构成（至少有一个序列），每个序列由非终端 *PMVS* 交互组成，并以终端 *PMVS* 交互结束；相邻序列之间有一个非终端交集交互，最后以终端交集交互结束。

5. P 至少有一个非终端交互（我们将明确区分中间形状，即包含一个终端 *PMVS* 交互后接一个终端交集交互的项，因为它们是分析其他项的良好热身练习）。

我们用 $\tau_P = \tau_{P_j}$ 表示最终所得形状。

定义 E.28 ($D_L(P)$ 和 $D_R(P)$)。定义 $D_L(P) = D_V - |V(\gamma) \setminus U_\gamma|$ 和 $D_R(P) = D_V - |V(\gamma') \setminus V_{\gamma'}|$。

引理 E.29（完整迭代的结果）。

$$
\begin{aligned}
\Lambda = & \sum_{U,V \in \mathcal{I}_{mid}: U \sim V} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \mathbf{L}_{U, \le D_V} \left(\sum_{\tau \in \mathcal{M}_{U,V}} \left(\frac{1}{1-p} \right)^{|E(U_\tau) \cup E(V_\tau)|} \frac{\lambda_\tau \mathbf{M}_{\tau^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau)|} \right) \mathbf{L}^{\intercal}_{V, \le D_V} \\
& + \sum_{U,V \in \mathcal{I}_{mid}: U \sim V} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{M}_{U,V}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(\Gamma, \Gamma', P) \in \mathcal{P}_j(\tau)} \frac{(-1)^{\#\ of\ intersection\ indices\ in\ [j]}}{\prod_{i=1}^{j} |U_{\gamma_i}|! |V_{\gamma'_i}|!} \\
& \mathbf{L}_{U_{\tau_P}, \le D_L(P)} \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j} c_{P_i} N(P_i) \right) \lambda_{\tau_P} \mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|} \right) \mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P}, \le D_R(P)} \\
& - \text{truncation}_1
\end{aligned}
$$

备注 E.30。 分解中的主导项为

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\mathbf{L}_{U,\le D_V}\left(\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}:\\ \tau\ diagonal}}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{|E(U_\tau)\cup E(V_\tau)|}\frac{\lambda_\tau\mathbf{M}_{\tau^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau)|}\right)\mathbf{L}_{V,\le D_V}^{\intercal}$$

$$=\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{|E(U)|}\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_{U,\le D_V}\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_{U,\le D_V}^{\intercal}$$

$$\ge\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_{U,\le D_V}\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_{U,\le D_V}^{\intercal}\,.$$

我们将证明，其余所有项都被这些项半正定地支配。

E.3.1 引理 E.24和引理 E.26 的证明

引理 *E.24* 的证明引理 *E.24*。 对于左端的带状图 $R_1^-\circ R_2\circ R_3^-$，令 $E^{missing}(R_2)$ 为 $E(A^{R_2})\cup E(B^{R_2})$ 中尚未带有示性函数的边集。利用恒等式更新 $\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}$ 的唯一非零元素

$$\prod_{e\in E_{missing}(R_2)}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\chi_e\right)=\prod_{e\in E_{missing}(R_2)}\left(\frac{1}{1-p}\mathbf{1}_{e\in E(G)}\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\chi_e-\frac{q-p}{1-p}\right).$$

注意，$n^{-\gamma}=\frac{q-p}{1-p}$。展开此恒等式，

$$\sum_{(R_1,R_2,R_3)\in\mathcal{T}_{\tau,\le D_1,\le D_2}}\lambda_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2\circ R_3^-}$$

$$=\sum_{(R_1,R_2,R_3)\in\mathcal{T}_{\tau,\le D_1,\le D_2}}\sum_{E_1\subseteq E_{missing}(R_2)}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{|E_{missing}(R_2)|-|E_1|}(-n^{-\gamma})^{|E_1|}\lambda_{R_1^-\circ(R_2\setminus E_1)^+\circ R_3^-}\mathbf{M}_{R_1^-\circ(R_2\setminus E_1)^+\circ R_3^-}$$

对所有 e 都取 $\frac{1}{1-p}\mathbf{1}_{e\in E(G)}\chi_e$（即 $E_1=\emptyset$）的项就是终端交互，并得到 $\mathbf{M}_{R_1^-\circ R_2^+\circ R_3^-}$。

对于其他E_1 项，我们使用新的 SMVS 重新分解，

$$R_1^-\circ(R_2\setminus S)^+\circ R_3^-=R_1'^-\circ R_2'\circ R_3'^-$$

定义 G_1 和 G_3 为 $R_1=R_1'^-\circ G_1$ 和 $R_3=G_3\circ R_3'^{\intercal}$。回想一下，我们需要指定 A^{G_1} 和 B^{G_3} 的次序。我们对所有 $\binom{|A_{G_1}|!|B_{G_3}|!}{}$ 种可能的选择进行对称化。

此时，我们可能会在 $G_1^- \circ (R_2 \setminus E_1)^+ \circ (G_3)^-$ 的中间出现边指示量。令 E_{extra} 表示位于 $G_1^- \circ (R_2 \setminus E_1)^+ \circ (G_3)^-$ 中间的边集，

$$\prod_{e \in E_{extra}} \left(1_{e \in E(G)} \frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}} \chi_e \right) = \prod_{e \in E_{extra}} \left((1-p) \frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}} \chi_e + (q-p) \right)$$

注意 $(q-p) = (1-p)n^{-\gamma}$。展开这个乘积后，我们令 E_2 表示所选取$(1-p)n^{-\gamma}$ 项所对应的边集。完成这一步后，我们设

$$R_2' = G_1^- \circ (R_2 \setminus (E_1 \cup E_2))^+ \circ (G_3^\intercal)^-$$

我们将对 $(R_1, R_2, R_3) \in T_{\tau, \le D_1, \le D_2}$ 的求和替换为对 $(R_1', G_1, R_2, G_3', R_3')$ 的求和。关键在于，R_2' 不依赖于 R_1' 或 R_3'，见备注 3.7。因此，我们先对 (G_1, R_2, G_3)、$E_1 \subseteq E^{missing}(R_2)$ 以及 $E_2 \subseteq E_{extra}(G_1^- \circ (R_2 \setminus E_1)^+ \circ (G_3)^\intercal)$ 求和，然后再对 R_1' 和 R_3' 求和。R_2 是一个形状为 $\tau^\intercal$ 的带状图，G_1 和 G_3 是任意的左侧与右侧带状图，它们分别与 R_2，的左侧和右侧相匹配，并且三者还具有以下附加结构性质：

$$\begin{aligned} &A_{G_1} \text{ is the leftmost SMVS of } G_1, \\ &B_{G_3^\intercal} \text{ is the rightmost SMVS of } G_3^\intercal, \end{aligned} \qquad (*)$$

总而言之，

$$\sum_{(R_1,R_2,R_3) \in \mathcal{T}_{\tau, \le D_1, \le D_2}} \sum_{E_1 \subseteq E_{missing}(R_2)} \left(\frac{1}{1-p} \right)^{|E_{missing}| - |E_1|} (-n^{-\gamma})^{|E_1|} \lambda_{R_1^- \circ (R_2 \setminus E_1)^+ \circ R_3^-} \mathbf{M}_{R_1^- \circ (R_2 \setminus E_1)^+ \circ R_3^-}$$

$$= \sum_{R_2 \in \mathcal{R}_\tau} \sum_{S \subseteq E_{missing}(R_2)} \sum_{\substack{G_1 \in \mathcal{L}_{A_{R_2}, \le D_1}, \\ G_3 \in \mathcal{L}_{B_{R_2}, \le D_2}: \\ \text{(*) holds}}} \sum_{E_2 \subseteq E_{extra}(G_1^- \circ (R_2 \setminus E_1)^+ \circ (G_3^\intercal)^-)} \frac{1}{|A_{G_1}|! |B_{G_3^\intercal}|!} \left(\frac{1}{1-p} \right)^{|E_{missing}| - |E_1|}$$

$$(1-p)^{|E_{extra}|} (-1)^{|E_1|} \left(n^{-\gamma}\right)^{|E_1| + |E_2|} \sum_{\substack{R_1' \in \mathcal{L}_{A_{G_1}, \le D_1 - |V(G_1) \setminus A_{G_1}|}, \\ R_3' \in \mathcal{L}_{B_{G_3^\intercal}, \le D_2 - |V(G_3^\intercal) \setminus B_{G_3^\intercal}|}}} \lambda_{R_1'^- \circ R_2' \circ R_3'^-} \mathbf{M}_{R_1'^- \circ R_2' \circ R_3'^-}$$

最后，我们准备从带状图转向形状。固定形状 γ of G_1 and γ' ofG_3'，对 $S \subseteq E^{missing}(R_2^\intercal)$ 求和以及条件 (*) 等价于对$P \in \mathrm{P}^{PMVS}_{\gamma\, \tau\, \gamma'}$,,. 求和。在最终形状 τ_P 由 P 指定的情况下，对R_2' 求和时，对R_1'、R_2'、R_3'的求和等价于对 T_{τ_P}、D_1'、D_2'求和。系数汇集到$N(P)c_P$ 中。总之，上式等于

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{L}_{U_\tau, \le D_1}, \\ \gamma' \in \mathcal{L}_{V_\tau, \le D_2}}} \sum_{P \in \mathcal{P}^{PMVS}_{\gamma, \tau, \gamma'^\intercal}} \frac{N(P) c_P}{|U_\gamma|! |V_{\gamma'^\intercal}|!} \left(\sum_{(R_1', R_2', R_3') \in \mathcal{T}_{\tau_P, \le D_1 - |V(\gamma) \setminus U_\gamma|, \le D_2 - |V(\gamma'^\intercal) \setminus V_{\gamma'^\intercal}|}} \lambda_{R_1'^- \circ R_2' \circ R_3'^-} \mathbf{M}_{R_1'^- \circ R_2' \circ R_3'^-} \right)$$

如所需。 ■

引理 *E.26* 的证明略：引理 *E.26*。这与前一个引理的证明方法相同。

$L_{U_\tau,\le D_1}\left(\lambda_\tau M_{|\tau\,\mathrm{Aut}(\tau)|}\right)L_{V_\tau,\le D_2}$ 分别是对左带、中间带和右带求和，其中对中间带的求和只遍历互不相同的带，这是由于按 $|\mathrm{Aut}(\tau)|$ 归一化所致，见命题 A.3。我们将说明，等式两边每个 $R = R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-$ 的系数都相同。

假设 $R = R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-$ 其中 R_1,R_2,R_3 可适当复合。该项在左端出现时，其系数为 $\lambda_{R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-}$。该系数可分解为$\lambda_{R_1^-}\lambda_{R_2}\lambda_{R_3^-}$，根据引理 2.48，因此这些项相互对应。

现在考虑 $R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-$，它是不适当复合。左侧不会出现这些项，因此我们希望证明它们在右侧相互抵消。R_1, R_2, R_3 会产生一个交集模式 $P \in \mathcal{P}^{intersect}_{\gamma\tau\gamma'}$，其中 γ, γ' 定义见 定义 4.21。

为了指定 R_1,R_2,R_3 及交互模式 P，后一种求和改为指定 $T_{\tau_P,\le D_1',\le D_2}$ 中的 R_1'、R_2'、R_3'，以及 U_γ、$V_{\gamma'}$ 的排序。U_γ 的排序有 $|U_\gamma|!$ 种选择，$V_{\gamma'}$ 的排序有 $|V_{\gamma'}|!$ 种选择，我们对所有选择进行对称化。即使交集模式相同，也可能有多个带 R_1,R_2,R_3 导致相同的带 $R_1^- \circ R_2 \circ R_3^-$，这一点由 N(P) 计入。

系数的变化可以如下分析：

1. 对于每个交集，都有一个来自 λ 系数的$n^{(\alpha-1)}$ 因子，需要将其移至c_P。2. 对于每条边 $e \in E_{tot}(\tau_P)$，都有一个来自 λ 系数的 $\left(q - \sqrt{p(1-p)}\right)^{\mathrm{mult}(e)-1+1_{e\,p\text{消失}}}$因子，需要将其移至$c_P$。3. $\chi_e^2 = 1 + \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}\chi_e$。4. $\chi_e^3 = \left(1 + \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}}\chi_e\right)\chi_e = \frac{1-2p}{\sqrt{p(1-p)}} + \frac{1-3p+3p^2}{p(1-p)}\chi_e$。请注意，由于组合的只有三条带状图，多重边的最大重数为 3。5. 从中间移除的边指示量和边，可以像之前一样进行分析。

这一变化由c_P解释。这就完成了证明。 ■

E.4 分析 Λ

首先，我们从 Λ中提取截断误差。

引理 E.31。

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda} = &\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\mathbf{L}_U\left(\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{|E(U_\tau)\cup E(V_\tau)|}\frac{\lambda_\tau\mathbf{M}_{\tau^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau)|}\right)\mathbf{L}_V^\intercal\\ &+\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in }[j]}}{\prod_{i=1}^j|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}\\ &\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^\intercal\\ &-\text{truncation}_1+\text{truncation}_2\end{aligned}$$

其中截断$_2$ 定义见定义 *E.32*。

证明。从 引自引理 E.29，对于每个相互作用项 τ，j，(Γ,Γ',P)，我们使用

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_R(P)}^\intercal\\ =&\,\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_V}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_V}^\intercal\\ &+\left(\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}-\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_V}\right)\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_V}^\intercal\\ &+\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\left(\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_R(P)}^\intercal-\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_V}^\intercal\right)\end{aligned}$$

第一项按需具有 $\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_V}=\mathbf{L}^{U_{\tau_P}}$ 以及 $\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_V}=\mathbf{L}^{V_{\tau_P}}$。第二项和第三项归入截断$_2$。下面的定义完成了该引理的证明。

定义 E.32(截断$_2$)。

$$\begin{aligned}\text{truncation}_2=&\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in }[j]}}{\prod_{i=1}^j|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}\\ &\left(\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}-\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_V}\right)\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P},\le D_V}^\intercal\end{aligned}$$

$$+\ \mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j} c_{P_i} N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\mathrm{Aut}(\tau_P)|}\right)\left(\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\le D_R(P)} - \mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\le D_V}\right)\Bigg)$$

■

现在我们希望分析非截断项。正如我们在 第4节 中证明的，每个单独形状的范数 $\|\mathbf{M}_\tau\|$ 和 $\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|$ 都在可控范围内。为了对所有形状求和，我们使用组合函数将求和转化为最大值。

思路如下。若有形如 $\sum_\alpha B(\alpha)$ 的和，其中 $B(\alpha)$ 非负，那么我们可以不直接对这个和进行界定，而是选择一个相对简单的函数 $c(\alpha)$，使得 $\sum_\alpha \frac{1}{c(\alpha)} \le 1$，并注意到

$$\sum_\alpha B(\alpha) = \sum_\alpha \frac{1}{c(\alpha)} c(\alpha)B(\alpha) \le \sum_\alpha \frac{1}{c(\alpha)} \max_\alpha \{c(\alpha)B(\alpha)\} \le \max_\alpha \{c(\alpha)B(\alpha)\}$$

这使我们能够使用对各个项的界。

定义 E.33 ($c(\alpha)$ 和$c(P)$， 定义 E.42)**的非正式版本**。

1. 对于形状 α，$c(\alpha)$ 用于控制我们求和所涵盖的形状数量。具体而言，对于所有 $U \in \mathcal{I}_{mid}$，$\sum_{\text{形状 }\alpha: U_\alpha = U, \alpha \text{ is non-trivial}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\alpha)|} c(\alpha) \le 1$。~~类似地，~~对于所有 $V \in \mathcal{I}_{mid}$，$\sum_{\text{形状 }\alpha: V_\alpha = V, \alpha \text{ 非平凡}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\alpha)|} c(\alpha) \le 1$。~~

2. 对于交集模式 P，$c(P)$ 用于控制我们求和所涉及的交互模式数量。特别地，对于所有 γ, τ，以及 γ'，$\sum_{P \in \mathcal{P}^{interact}_{\gamma\tau,\gamma'}} c(P) \le 1$。

正式定义见附录 E.5，我们将在其中验证它们满足所述的求和性质，并且也满足界 C.1。

有了组合函数，我们便可将非平方项用平方项 $\left\{\mathbf{L}_U \mathbf{M}_{U^+} \mathbf{L}_U : U \in \mathcal{I}_{mid}\right\}$ 如下界定。推论 E.34 适用于中间形状，而推论 E.35 适用于交集项。证明将推迟到下一小节。

推论 E.34。 当 n 足够大时，

$$\sum_{U,V \in \mathcal{I}_{mid}: U \sim V} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \mathbf{L}_U \left(\sum_{\tau \in \mathcal{M}_{U,V}: \tau \text{ is non-diagonal}} \left(\frac{1}{1-p}\right)^{|E(U_\tau) \cup E(V_\tau)|} \frac{\lambda_\tau \mathbf{M}_{\tau^+}}{|\mathrm{Aut}(\tau)|} \right) \mathbf{L}_V^{\intercal}$$
$$\succeq -\frac{1}{4} \sum_{U \in \mathcal{I}_{mid}} \frac{\lambda_U}{|U|!} \mathbf{L}_U \mathbf{M}_{U^+} \mathbf{L}_U^{\intercal}$$

推论 E.35。 当 n 足够大时，

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^{\intercal},P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in }[j]}}{\prod_{i=1}^{j}|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^{\intercal}}|!}$$
$$\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^{\intercal}$$
$$\geq -\frac{1}{4}\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^{\intercal}$$

将它们结合起来推论 E.34和推论 E.35 以及 引理 E.31，我们有 e

引理 E.36. 当 n 充分大时，

$$\Lambda\geq\frac{1}{2}\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{1}{|U|!}\lambda_U\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^{\intercal}-\mathsf{truncation}_1+\mathsf{truncation}_2\,.$$

剩下需要证明的任务 $\Lambda\geq 0$ 是验证 界 C.1，并分析截断误差；我们将在以下各节中完成这些工作。

E.4.1 推论 E.34 的证明 推论 E.34 和推论 E.35

使我们能够正式地为这些形状计费的构建块是以下引理，它通过“平方项”给出了每个单独项负面影响的下界。

引理 E.37。 对于所有形状 τ、所有 $D_1,D_2\in\mathbb{N}$ 以及所有 $b\in\{-1,1\}$，

$$b(\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}\lambda_\tau\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}^{\intercal}+\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}\lambda_\tau\mathbf{M}_{\tau^+}^{\intercal}\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}^{\intercal})$$
$$\geq\frac{-\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\sqrt{\lambda_{U_\tau}\left\|\mathbf{M}_{U_\tau}\right\|\lambda_{V_\tau}\left\|\mathbf{M}_{V_\tau}\right\|}}(\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}\lambda_{U_\tau}\mathbf{M}_{U_\tau^+}\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}^{\intercal}+\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}\lambda_{V_\tau}\mathbf{M}_{V_\tau^+}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}^{\intercal})$$

证明。 我们断言，对于所有$s>0$，

$$b(\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}^{\intercal}+\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}\mathbf{M}_{\tau^+}^{\intercal}\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}^{\intercal})$$
$$\geq -s\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}(\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{M}_{\tau^+}^{\intercal})^{1/2}\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}^{\intercal}-\frac{1}{s}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}(\mathbf{M}_{\tau^+}^{\intercal}\mathbf{M}_{\tau^+})^{1/2}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}^{\intercal}$$

记 对于$\mathbf{M}_{\tau^+}=\mathbf{X}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Y}$ 的奇异值分解，注意到$\mathbf{M}_{\tau^+}$，这意味着 t

$$0\leq\left(\sqrt{s}\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}\mathbf{X}\mathbf{\Sigma}^{1/2}+\frac{b}{\sqrt{s}}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}\mathbf{Y}\mathbf{\Sigma}^{1/2}\right)\left(\sqrt{s}\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{X}^{\intercal}\mathbf{L}_{U_\tau,\leq D_1}^{\intercal}+\frac{b}{\sqrt{s}}\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{Y}^{\intercal}\mathbf{L}_{V_\tau,\leq D_2}^{\intercal}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= s\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}\mathbf{X}\mathbf{\Sigma}\mathbf{X}^\intercal\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}^\intercal + \frac{1}{s}\mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}\mathbf{Y}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Y}^\intercal\mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}^\intercal \\
&\quad + b(\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}\mathbf{X}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Y}^\intercal\mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}^\intercal + \mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}\mathbf{Y}\mathbf{\Sigma}\mathbf{X}^\intercal\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}^\intercal) \\
&= s\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}(\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{M}_{\tau^+}^\intercal)^{1/2}\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}^\intercal + \frac{1}{s}\mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}(\mathbf{M}_{\tau^+}^\intercal\mathbf{M}_{\tau^+})^{1/2}\mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}^\intercal \\
&\quad + b(\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}^\intercal + \mathbf{L}_{V_\tau,\le D_2}\mathbf{M}_{\tau^+}^\intercal\mathbf{L}_{U_\tau,\le D_1}^\intercal)
\end{aligned}
$$

这就证明了该结论。

我们声称 $(\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{M}_{\tau^+}^\intercal)^{1/2} \le \|\mathbf{M}_\tau\|\mathbf{M}_{\frac{U_\tau^+}{\|\mathbf{M}_{U_\tau}\|}}$。为此，注意到 $\mathbf{M}^{U_\tau^+}$是一个具有非负元素的对角矩阵，因此 $\mathbf{M}_{\frac{U_\tau^+}{\|\mathbf{M}_{U_\tau}\|}}$ 的对角元素为 0 或 1。支撑行与 $\mathbf{M}_{\tau^+}\mathbf{M}_{\tau^+}^\intercal$ 相同，因此得证。

类似地，$(\mathbf{M}_{\tau^+}^\intercal\mathbf{M}_{\tau^+})^{1/2} \le \|\mathbf{M}_\tau\|\mathbf{M}_{\frac{V_\tau^+}{\|\mathbf{M}_{V_\tau}\|}}^\intercal$。结合这些结论与 $s = \sqrt{\frac{\lambda_{U_\tau}\|\mathbf{M}_{U_\tau}\|}{\lambda_{V_\tau}\|\mathbf{M}_{V_\tau}\|}}$ 即可完成证明。 ■

引理 E.38。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\mathbf{L}_U\left(\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}:\tau\text{ is nontrivial}}\frac{\lambda_\tau\mathbf{M}_{\tau^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau)|}\right)\mathbf{L}_V^\intercal \\
&\ge -\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\left(\max_{V,\tau:U\sim V,\tau\in\mathcal{M}_{U,V},\tau\text{ is nontrivial}}\left\{c(\tau)\frac{\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\right\}\right)\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal
\end{aligned}
$$

证明。 应用 引理 E.37 并使用平凡界 $|\operatorname{Aut}(\tau)| \ge 1$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\mathbf{L}_U\left(\sum_{\text{nontrivial }\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\frac{\lambda_\tau\mathbf{M}_\tau}{|\operatorname{Aut}(\tau)|}\right)\mathbf{L}_V^\intercal \\
&\ge -\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\left(\sum_{\text{nontrivial }\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\frac{\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\left(\frac{1}{2}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal + \frac{1}{2}\mathbf{L}_V\mathbf{M}_{V^+}\mathbf{L}_V^\intercal\right)\right) \\
&= -\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{1}{2|U|!}\left(\sum_{V,\tau:U\sim V,\tau\in\mathcal{M}_{U,V},\tau\text{ is nontrivial}}\frac{|U\cap V|!}{c(\tau)|U|!}c(\tau)\frac{\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\right)\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal \\
&\quad -\sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{1}{2|V|!}\left(\sum_{U,\tau:U\sim V,\tau\in\mathcal{M}_{U,V},\tau\text{ is nontrivial}}\frac{|U\cap V|!}{c(\tau)|U|!}c(\tau)\frac{\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\right)\mathbf{L}_V\mathbf{M}_{V^+}\mathbf{L}_V^\intercal \\
&\ge -\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\left(\max_{V,\tau:U\sim V,\tau\in\mathcal{M}_{U,V},\tau\text{ is nontrivial}}\left\{c(\tau)\frac{\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\right\}\right)\frac{1}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal
\end{aligned}
$$

其中最后一行使用了以下事实:

1. 对于所有 $U \in \mathcal{I}_{mid}$, $\sum_{V,\tau:U\sim V,\tau\in\mathbb{M}_{U,V},\tau\text{是非平凡的}} \frac{|U\cap V|!\ \ c(\tau)|}{U|!} \le 1$

2. 对所有 $V \in \mathcal{I}_{mid}$, $\sum_{U,\tau:U\sim V,\tau\in\mathbb{M}_{U,V},\tau\text{非平凡}} \frac{|U\cap V|!\ \ c(\tau)|U|!}{} \le 1$。

■

推论 E.34。 当 n 充分大时，

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V} \frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\mathbf{L}_U\left(\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}:\tau \text{ is non-diagonal}}\left(\frac{1}{1-p}\right)^{|E(U_\tau)\cup E(V_\tau)|}\frac{\lambda_\tau\mathbf{M}_{\tau^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau)|}\right)\mathbf{L}_V^\intercal$$
$$\ge -\frac{1}{4}\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal$$

证明。 我们注意到

$$\max_{V,\tau:U\sim V,\tau\in\mathcal{M}_{U,V},\tau \text{ is nontrivial}}\left\{c(\tau)\frac{\lambda_\tau\|\mathbf{M}_\tau\|}{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\right\}$$
$$\le \max_{V,\tau:U\sim V,\tau\in\mathcal{M}_{U,V},\tau \text{ is nontrivial}}\left\{c(\tau)B_{adjust}(\tau)n^{-\operatorname{slack}(\tau)}\right\} \le \frac{1}{4}$$

其中，最后一个不等式由以下事实得出：对于所有 τ,

1. $\operatorname{slack}(\tau) \ge \frac{\varepsilon}{4}(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2} + |V(\tau)| - \frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2})$
2. $c(\tau) \le n^{\frac{\varepsilon}{16}(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}+|V(\tau)|-\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2})}$
3. $B_{adjust}(\tau) \le n^{\frac{\varepsilon}{16}(|E(\tau)|-\frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2}+|V(\tau)|-\frac{|U_\tau|+|V_\tau|}{2})}$

■

引理 E.39。

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in }[j]}}{\prod_{i=1}^j|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}$$
$$\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^j c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^\intercal$$
$$\ge -\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\left(\max_{\substack{\tau\in\mathcal{M}\\ j\in\mathbb{N}^+\\ (\Gamma,\Gamma',P)\in\mathcal{P}_j(\tau):\\ U_{\tau_P}=U}}\left\{100^j c(\tau)\left(\prod_{i=1}^j c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\right\}\right)$$

$$\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal$$

证明。 应用 引理 E.37 并使用平凡界 $|\mathrm{Aut}(\tau_P)| \geq 1$,

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in }[j]}}{\prod_{i=1}^{j}|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}$$
$$\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\mathrm{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^\intercal$$
$$\geq -\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}}{\prod_{i=1}^{j}|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}$$
$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\lambda_{U_{\tau_P}}\mathbf{M}_{U_{\tau_P}^+}\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}^\intercal+\frac{1}{2}\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}\lambda_{V_{\tau_P}}\mathbf{M}_{V_{\tau_P}^+}\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^\intercal\right)$$

现在说明如何界定 $\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\lambda_{U_{\tau_P}}\mathbf{M}^{U_{\tau_P}^+}\mathbf{L}^{U_{\tau_P}}$ 项。对于 $\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^\intercal\lambda_{V_{\tau_P}}\mathbf{M}^{V_{\tau_P}^+}\mathbf{L}^{V_{\tau_P}}$ 项，可以采用对称论证进行界定。

将所有其中$U_{\tau_P}=U$ 的项归在一起，我们得到

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{1}{\prod_{i=1}^{j}|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}$$
$$\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}^+}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\mathbf{L}_{U_{\tau_P^+}}\lambda_{U_{\tau_P}}\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}^\intercal$$
$$=\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{1}{|U|!}\sum_{\tau\in\mathcal{M}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau):\\U_{\tau_P}=U}}\frac{|U_\tau\cap V_\tau|!}{|V_\tau|!}\frac{1}{\prod_{i=1}^{j}|V_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^\intercal}|!}$$
$$\left(2^jc(\tau)\left(\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\right)\frac{\mathbf{L}_U\lambda_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal}{2^jc(\tau)\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)}$$
$$\preceq\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\left(\max_{\substack{\tau\in\mathcal{M}\\j\in\mathbb{N}^+\\(\Gamma,\Gamma',P)\in\mathcal{P}_j(\tau):\\U_{\tau_P}=U}}\left\{100^jc(\tau)\left(\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\right\}\right)$$

$$\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal$$

其中，最后一个不等式利用以下事实将求和转换为最大化：

1. 对所有 i $\in$ [j], $\sum_{\gamma_i\in L:U_{\gamma_i}=V_{\gamma_{i+1}}}\frac{1}{|\gamma_i|}V!c(\gamma_i)\le 2$ 其中我们令 $V_{\gamma_{j+1}}=U$。在所有 i 上，这会使总量乘以 2^j。 2. $\sum_{\tau\in M:U_\tau=V_{\gamma_1}}\frac{1}{|U_\tau\cap V_\tau|!\,|V_\tau|!}c(\tau)\le 2$ 3. 对所有 i $\in$ [j], $\sum_{\gamma'_i\in L^{V_{\gamma'_i}}}\frac{1}{|\gamma'_i|}V_i!c(\gamma'_i)\le 2$。在所有 i 上，这会使总量乘以 2^j。 4. 对所有 i $\in$ [j], $\sum_{P_i\in P^{interact}_{\gamma_\tau}}\frac{1}{|P_{i-1,\gamma'_i}|}c(P_i)\le 1$。 5. $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\le 1$。

τ τ τ

τ

$-$

■

推论 E.35. 当 n 足够大时，

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^\intercal,P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in }[j]}}{\prod_{i=1}^{j}|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma'^\intercal_i}|!}$$
$$\mathbf{L}_{U_{\tau_P}}\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\mathbf{M}_{\tau_P}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\mathbf{L}_{V_{\tau_P}}^\intercal$$
$$\ge -\frac{1}{4}\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{\lambda_U}{|U|!}\mathbf{L}_U\mathbf{M}_{U^+}\mathbf{L}_U^\intercal$$

证明。 我们需要证明

$$\max_{\substack{\tau\in\mathcal{M}\\ j\in\mathbb{N}^+\\ (\Gamma,\Gamma',P)\in\mathcal{P}_j(\tau):\\ U_{\tau_P}=U}}\left\{100^j c(\tau)\left(\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma'_i)c(P_i)c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\right\}\le\frac{1}{4}$$

这可由以下观察得出：

1. $\frac{\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}^{\approx}\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}=n^{-\operatorname{slack}(\tau_P)}$

2. 根据界 C.1中的松弛下界,

$$\begin{aligned}\mathrm{slack}(\tau_P) &\geq \varepsilon\left(E_{tot}(\tau_P) - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} + |V_{tot}(\tau_P)| - \frac{|U_{\tau_P}| + |V_{\tau_P}|}{2}\right)\\ &= \varepsilon\left(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} + |V(\tau)| - \frac{|U_\tau| + |V_\tau|}{2}\right) +\\ &\varepsilon\sum_{i\in[j]}\Bigg(|E(\gamma_i)| - \frac{|E(U_{\gamma_i})| + |E(V_{\gamma_i})|}{2} + (\#\text{ of edges removed from } \gamma_i)\\ &+ |V(\gamma_i)| - \frac{|U_{\gamma_i}| + |V_{\gamma_i}|}{2} + |E(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})| + |E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})|}{2}\\ &+ (\#\text{ of edges removed from } \gamma'^{\intercal}_i) + |V(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|U_{\gamma'^{\intercal}_i}| + |V_{\gamma'^{\intercal}_i}|}{2}\Bigg)\end{aligned}$$

3. $c(\tau) \leq n^{\frac{\varepsilon}{32}(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)|+|E(V_\tau)|}{2} + |V(\tau)| - |U_\tau|+|V_\tau|)}$

4. $B^{adjust}(\tau_P) \leq n^{\frac{\varepsilon}{32}(|E(\tau_P)| - |E(U^\tau P)|+|E(V_{\tau_P})|+|V(\tau_P)| - |U^\tau P|+|V_{\tau_P})|}$

5. 对于 所有 $i \in [j], c(\gamma_i)c(\gamma'_i)$、$c(P_i)$以及$N(P_i)$都至多为$n$的幂

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{32}\Bigg(|E(\gamma_i)| - \frac{|E(U_{\gamma_i})| + |E(V_{\gamma_i})|}{2} + (\#\text{ of edges removed from } \gamma_i)\\ &+ |V(\gamma_i)| - \frac{|U_{\gamma_i}| + |V_{\gamma_i}|}{2} + |E(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})| + |E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})|}{2}\\ &+ (\#\text{ of edges removed from } \gamma'^{\intercal}_i) + |V(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|U_{\gamma'^{\intercal}_i}| + |V_{\gamma'^{\intercal}_i}|}{2}\Bigg)\end{aligned}$$

6. $\left|\frac{c_P}{c^{\approx}_P}\right| \leq 2$

■

E.5 c-函数上界

本节对各种组合函数给出界。

定义 E.40 （$N^{shape}(U, e)$）。 给定一个对角形状 U 和 $V \in \mathbb{N}$，令 $N^{shape}(U, e)$ 表示具有 $U_\alpha = U$ 且在 U_α之外有 e 条边的形状 α 数量。

注 E.41. 由于 V_α 的排列可以任意选择，$N^{shape}(U, e)$ 是 $|V_\alpha|!$ 的倍数。

定义 E.42($c(\alpha)$，形式化。

$$c(\alpha) = 2^{|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha \cap V_\alpha)|} \cdot \frac{1}{|U_\alpha \cap V_\alpha|!} \max\left\{N^{shape}(U_\alpha, |E(\alpha)\setminus E(U_\alpha)|), N^{shape}(V_\alpha, |E(\alpha)\setminus E(V_\alpha)|)\right\}$$

引理 E.43. 对于所有对角形状 U,

$$\sum_{shapes\ \alpha: U_\alpha = U, \alpha\ non\text{-}trivial} \frac{1}{|U \cap V_\alpha|! c(\alpha)} \le 1$$

$$\sum_{shapes\ \alpha: U_\alpha = U} \frac{1}{|U \cap V_\alpha|! c(\alpha)} \le 2$$

根据对称性，对 $\alpha : V_\alpha = V$ 的求和也同样成立。

证明。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{shapes } \alpha: U_\alpha = U} \frac{1}{|U \cap V_\alpha|! c(\alpha)} \\
&= \sum_{e=0}^{\infty} \sum_{\text{shapes } W} \sum_{\substack{\text{shapes } \alpha: U_\alpha = U, \\ |E(\alpha)\setminus E(U_\alpha)| = e}} \frac{1}{2^e N^{shape}(U, e)} \\
&= \sum_{e=0}^{\infty} \frac{1}{2^e} \\
&= 2 .
\end{aligned}$$

为推导第一　　个结论，注意到平凡形状对总和的贡献恰好为 1。 ■

引理 E.44 （c（α））。 对于所有顶点数不超过 D_V 的形状 α ,

$$c(\alpha) \le 2(4D_V)^{2|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha \cap V_\alpha)|} (2D_V)^{2|(U_\alpha \cup V_\alpha)\setminus(U_\alpha \cap V_\alpha)|}$$

证明。 由以下过程可以生成被$N^{shape}(U,e)$ 计数的形状。

1. 从$V(\alpha) = U_\alpha = U$开始。

2. 运行以下过程，从U_α 中选出一个子集，使其属于$U_\alpha \cap V_\alpha$。使用 [2]中的一个标签来判断$U_\alpha \cap V_\alpha$中是否至少有一个顶点。若有，则使用 $|U_\alpha|$ 中的一个标签来选择该顶点，然后使用 [2] 中的一个标签来判断$U_\alpha \cap V_\alpha$中是否还有另一个顶点，依此类推。

3. 对于每条不在$E(U_\alpha)$中的边，使用 $[D_V]$中的一个标签标识每个端点，并额外使用一个 [2] 标签来标识每个端点是否属于V_α。

4. 指定V_α 在 $|V_\alpha|$种排列中的排列!

总计，这至多为 $2(2D_V)^{2|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha)|}(2|U_\alpha|)^{|(U_\alpha\cup V_\alpha)\setminus(U_\alpha\cap V_\alpha)|}|V_\alpha|!$ 对 $N^{shape}(V,e)$也适用一个对称上界。因此，

$$\begin{aligned}
c(\alpha) &\le 2^{|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha\cap V_\alpha)|}\cdot\frac{\max\{|U_\alpha|!,|V_\alpha|!\}}{|U_\alpha\cap V_\alpha|!}\cdot 2(2D_V)^{2|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha\cap V_\alpha)|}(2D_V)^{|(U_\alpha\cup V_\alpha)\setminus(U_\alpha\cap V_\alpha)|}\\
&\le 2^{|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha\cap V_\alpha)|}\cdot D_V^{|(U_\alpha\cup V_\alpha)\setminus(U_\alpha\cap V_\alpha)|}\cdot 2(2D_V)^{2|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha\cap V_\alpha)|}(2D_V)^{|(U_\alpha\cup V_\alpha)\setminus(U_\alpha\cap V_\alpha)|}\\
&= 2(4D_V)^{2|E(\alpha)\setminus E(U_\alpha\cap V_\alpha)|}(2D_V)^{2|(U_\alpha\cup V_\alpha)\setminus(U_\alpha\cap V_\alpha)|}
\end{aligned}$$

按需。 ■

定义 E.45 ($N^{PMVS}(\gamma,\tau,\gamma',e)$)。 给定形状 γ,τ,γ' 和 $e\in\mathbb{N}$，令$N^{PMVS}(\gamma,\tau,\gamma',e)$表示这样的 τ *PMVS* 交互模式的数量：其中 e 条边从 τ_P 中被移除，原因可能是添加指示器步骤，也可能是移除中间边指示器步骤。

类似地，令 $N^{intersect}(\gamma,\tau,\gamma',e)$ 表示这样的交集交互模式的数量：在移除中间边指示器步骤中，e 条边从 τ_P 中被移除。

定义 E.46($c(P)$，正式)。 对于交互模式 $P\in\mathcal{P}^{interact}_{\gamma,\tau,\gamma'}$，若 P 是 *PMVS* 交互模式，则令 $c(P)=2^{e+1}N^{PMVS}(\gamma,\tau,\gamma',e)$；若 P 是交集交互模式，则令 $c(P)=2^{e+2}N^{intersect}(\gamma,\tau,\gamma',e)$，其中 e 是从 τ_P中移除的边数。

引理 E.47. 对于所有 γ，τ，γ'，$\sum_{P\in\mathcal{P}^{interact}_{\gamma,\tau,\gamma'}}\frac{1}{c(P)}\le 1$。

证明。

$$\begin{aligned}
\sum_{P\in\mathcal{P}^{interact}_{\gamma,\tau,\gamma'}}\frac{1}{c(P)} &= \sum_{e=1}^{\infty}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{PMVS}_{\gamma,\tau,\gamma'}:\\ e\text{ edges are removed from }\tau_P}}\frac{1}{2^{e+1}N^{PMVS}(\gamma,\tau,\gamma',e)}\\
&\quad+\sum_{e=0}^{\infty}\sum_{\substack{P\in\mathcal{P}^{intersect}_{\gamma,\tau,\gamma'}:\\ e\text{ edges are removed from }\tau_P}}\frac{1}{2^{e+2}N^{intersect}(\gamma,\tau,\gamma',e)}\\
&\le 1
\end{aligned}$$

■

引理 E.48 (关于 $c(P)$ 的界. 对于所有形状 γ，τ，γ'使得 $|V(\gamma)|\le D_V$, $|V(\tau)|\le 3D_V$，且 $|V(\gamma')|\le D_V$,

1. 对所有 *PMVS* 交互模式，使得从 τ_P、$c(P)\le 2(4D^2_V)$ 中移除 e 条边

2. 对于所有交集交互模式，使得从 τ_P 中移除 e 条边，

$$c(P) \le 4(3D_V)^{|V(\gamma)\setminus V_\gamma|+|V(\gamma'^{\intercal})\setminus U_{\gamma'^{\intercal}}|} 2^{e+|E(\gamma)\setminus E(U_\gamma\cap V_\gamma)|+|E(\gamma'^{\intercal})\setminus E(U_{\gamma'^{\intercal}}\cap V_{\gamma'^{\intercal}})|}$$

证明。 对于 PMVS 相互作用模式，我们按以下步骤进行。

1. 我们知道，在为非终端P添加边指示变量步骤中，至少必须移除一条边。对于每条这样的边，我们指定其端点，成本至多为D^2 $_V$。

2. 在移除中间边指示器步骤中，我们可以通过指定每条被移除边的两个端点来标明该边，每条边的成本为D_v^2。

对于交集交互模式，我们按以下步骤进行。

1. 遍历 $V(\gamma)\setminus V^\gamma$ 中的每个顶点，以及 $V(\gamma')\setminus U^{\gamma'}$ 中的每个顶点，并标明它们与哪个顶点相交（如果有）。成本为 $(3D_V)^{|V(\gamma)\setminus V_\gamma|+|V(\gamma')\setminus U_{\gamma'}|}$。

2. 对于每条相交的边，使用 [2] 中的一个标签表示其线性化后的重数。成本至多为 $2^{|E(\gamma)\setminus E(V_\gamma)|+|E(\gamma')\setminus E(U^{\gamma'})|}$。

3. 对于$V_\gamma \cup U^{\gamma'}$ 中不属于$U_\gamma \cup V^{\gamma'}$ 的每条边，使用 [2] 中的一个标签来决定是否在**移除中间边指示量操作**中将其移除。此操作的成本至多为 $2^{|E(V_\gamma)\setminus E(U^\gamma)|+|E(U^{\gamma'})\setminus E(V^{\gamma'})|}$。

■

引理 E.49(c_P 的界)。 c_P 中未计入松弛量的超额部分为

$$\left|\frac{c_P}{\tilde{c}_P}\right| \le 2\,.$$

证明。 根据引理 E.20，

$$\left|\frac{c_P}{\tilde{c}_P}\right| \le \left(\frac{1}{1-p}\right)^{\#\text{ of indicators}} \le (1+O(p))^{D_V^2} \le 2$$

前提是n 足够大。 ■

引理 E.50 ($N(P)$ 的界)。 对于 γ，τ，γ'，其大小至多为 D_V 且 $P \in \mathcal{P}^{interact}_{\gamma,\tau,\gamma'}$，

$$N(P) \le (3D_V)^{|V(\gamma)\setminus U_\gamma|+|V(\gamma'^{\intercal})\setminus V_{\gamma'^{\intercal}}|}$$

证明。 给定 γ、τ、γ'、交互模式 P 以及由此得到的带状图 R_2'，我们需要指定带状图 G、R_2,G'，它们的形状分别为 γ、τ、γ'，具有交互模式P，并得到带状图R_2'。

设P 是一次 PMVS 交互。为此，只需指定如何将 γ 和 γ' 中的顶点映射到R_2' 中。这就确定了带状图 $G^{\intercal}$ 和 G' 。若$A^{R_2} = B_G$ 与$B^{R_2} = A_{G'}$ ，连同R_2' 中其余未映射的顶点，具有形状 τ，那么这就是一个可能的带状图R_2，；否则，这就只是重复计数。

我们自动得到$A_G = A^{R_2'}$ 以及$B_{G'} = B^{R_2'}$ ，因此无需指定顶点U^{γ} 和$V^{\gamma'}$ 映射到何处。对于其余每个顶点，选择数至多为 $3D_V$ ，因此选择总数为$(3D_V)^{|V(\gamma)\setminus U_\gamma|+|V(\gamma')\setminus V^{\gamma'}|}$，正如所需。

对于交集项交互，同样的分析仍然成立，但还需满足以下约束：交集模式与 γ 和 γ' 的映射共同确定R_2的其他标签。 ■

E.6 截断误差

定义 E.51($\mathbf{Id}^{sym}$)。

$$\mathbf{Id}_{sym}[I,J] = \begin{cases} 1 & I = J \text{ as unordered sets} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

引理 E.52. 截断$_1 \le n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{16}(D_V-2D_{\mathrm{SoS}})}\mathbf{Id}^{sym}$

证明。 应用 定理 D.10 ，其中$D = 3D_V$。对于所有满足以下条件的形状 α： $D_V \le |V(\alpha)| \le 3D_V$， $|U_\alpha| \le D_{\mathrm{SoS}}$， $|V_\alpha| \le D_{\mathrm{SoS}}$，且 α 在$U_\alpha \cup V_\alpha$之外没有孤立顶点，

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\| &\le 2B_{adjust}(\alpha) n^{(1-\alpha)\frac{|U_\alpha|+|V_\alpha|}{2}+\eta-(\gamma-\alpha\beta-3\log_n(3D_V))|E(\alpha)|} \\ &\le 2B_{adjust}(\alpha) n^{(1-\varepsilon)D_{\mathrm{SoS}}-\frac{\varepsilon}{8}(D_V-2D_{\mathrm{SoS}})-\frac{\varepsilon}{4}(|E(U_\alpha)|+|E(V_\alpha)|)} \end{aligned}$$

当 $|E(\alpha)| \ge |E(U_\alpha)| + |E(V_\alpha)| + \frac{|V(\alpha)|-|U_\alpha|-|V_\alpha|}{2} \ge \frac{|E(U_\alpha)|+|E(V_\alpha)|+D_V-2D_{\mathrm{SoS}}}{2}$且 $\gamma - \alpha\beta - 3\log_n(3D_V) \ge \frac{\varepsilon}{4}$。

现在我们观察到

$$\mathsf{truncation}_1 = \sum_{\substack{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:\\ U\sim V}} \frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{L}_{U,\le D_V}\\ \tau\in\mathcal{M}_{U,V,\le D_V}\\ \sigma'\in\mathcal{L}_{V,\le D_V}:\\ |V(\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^{\intercal})^-)|>D_V}} \frac{\lambda_{\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^{\intercal})^-}\mathbf{M}_{\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^{\intercal})^-}}{|\operatorname{Aut}(\sigma^-\circ\tau\circ(\sigma'^{\intercal})^-)|}$$

$$\le \left(\sum_{\substack{\text{shape } \alpha:\\ D_V<|V(\alpha)|\le 3D_V,\\ |U_\alpha|\le D_{\mathrm{SoS}},|V_\alpha|\le D_{\mathrm{SoS}}}} \lambda_\alpha\|\mathbf{M}_\alpha\| \right) \mathbf{Id}_{Sym}$$

$$
\begin{aligned}
&\preceq \left(\sum_{\substack{\text{shape } \alpha: \\ D_V < |V(\alpha)| \le 3D_V, \\ |U_\alpha| \le D_{\mathrm{SoS}}}} \lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\| \right) \mathbf{Id}_{Sym} \\
&\preceq \sum_{U \in \mathcal{I}_{mid} : |U| \le D_{\mathrm{SoS}}} \left(\sum_{\substack{\text{shape } \alpha: \\ D_V < |V(\alpha)| \le 3D_V, \\ U_\alpha = U}} \frac{D_{\mathrm{SoS}}!}{|U_\alpha|! c(\alpha)} c(\alpha) \lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\| \right) \mathbf{Id}_{Sym} \\
&\preceq \sum_{U \in \mathcal{I}_{mid} : |U| \le D_{\mathrm{SoS}}} \left(\max_{\substack{\text{shape } \alpha: \\ D_V < |V(\alpha)| \le 3D_V, \\ U_\alpha = U}} \left\{ c(\alpha) B_{adjust}(\alpha) \right\} \right) \\
&\quad D_{\mathrm{SoS}}! n^{D_{\mathrm{SoS}} + \eta - \frac{\varepsilon}{8}(D_V - 2D_{\mathrm{SoS}}) - \frac{\varepsilon}{4}|E(U)|} \mathbf{Id}_{Sym} \\
&\preceq n^{D_{\mathrm{SoS}} + \eta - \frac{\varepsilon}{16}(D_V - 2D_{\mathrm{SoS}})} \mathbf{Id}_{sym}
\end{aligned}
$$

■

现在我们分析截断误差的第二部分。

引理 E.53. 截断$_2 \succeq -n^{2D_{\mathrm{SoS}} + 2\eta - \frac{\varepsilon}{32} D^V} \mathbf{Id}^{Sym}$

证明。回顾一下，

$$
\begin{aligned}
\mathsf{truncation}_2 = &\sum_{U,V \in \mathcal{I}_{mid} : U \sim V} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{M}_{U,V}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(\Gamma, \Gamma'^{\intercal}, P) \in \mathcal{P}_j(\tau)} \frac{(-1)^{\#\text{ of intersection indices in } [j]}}{\prod_{i=1}^{j} |U_{\gamma_i}|! |V_{\gamma_i'^{\intercal}}|!} \\
&\left(\left(\mathbf{L}_{U_{\tau_P}, \le D_L(P)} - \mathbf{L}_{U_{\tau_P}, \le D_V} \right) \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j} c_{P_i} N(P_i) \right) \lambda_{\tau_P} \mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|} \right) \mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P}, \le D_V} \right. \\
&+ \left. \mathbf{L}_{U_{\tau_P}, \le D_L(P)} \left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j} c_{P_i} N(P_i) \right) \lambda_{\tau_P} \mathbf{M}_{\tau_P^+}}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|} \right) \left(\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P}, \le D_R(P)} - \mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P}, \le D_V} \right) \right)
\end{aligned}
$$

so

$$
\mathsf{truncation}_2 \succeq - \sum_{U,V \in \mathcal{I}_{mid} : U \sim V} \frac{|U \cap V|!}{(|U|!)^2} \sum_{\tau \in \mathcal{M}_{U,V}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(\Gamma, \Gamma'^{\intercal}, P) \in \mathcal{P}_j(\tau)} \frac{1}{\prod_{i=1}^{j} |U_{\gamma_i}|! |V_{\gamma_i'^{\intercal}}|!}
$$

$$\left(\left\|\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}-\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_V}\right\|\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\left\|\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\le D_V}\right\|\right.$$
$$\left.+\left\|\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\le D_L(P)}\right\|\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\left\|\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\le D_R(P)}-\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\le D_V}\right\|\right)\mathbf{Id}_{Sym}$$

我们可以利用以下断言进行分析。

命题 E.54。对所有 $U\in\mathcal{I}_{mid}$，

$$\max_{D:D\le D_V}\left\{\left\|\mathbf{L}_{U,\le D}\right\|\right\}\sqrt{\lambda_U\|M_U\|}\le n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{16}|E(U)|}$$

证明。 根据 推论 D.13，对于所有 $\sigma\in\mathbf{L}_{U,\ \le D_V}$

$$\lambda_{\sigma^-}\|\mathbf{M}_{\sigma^-}\|\sqrt{\lambda_U\|M_U\|}\le 2B_{adjust}(\sigma)n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{2}D_{\mathrm{SoS}}-\frac{\varepsilon}{8}|E(\sigma)|-\frac{\varepsilon}{8}|V(\sigma)|}$$

现在我们观察到

$$\max_{D:D\le D_V}\left\{\left\|\mathbf{L}_{U,\le D}\right\|\right\}\sqrt{\lambda_U\|M_U\|}\le\sum_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}}\lambda_{\sigma^-}\|\mathbf{M}_{\sigma^-}\|\sqrt{\lambda_U\|M_U\|}$$
$$\le D_{\mathrm{SoS}}!\left(\sum_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}}\frac{1}{c(\sigma)|U_\sigma|!}\right)\max_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}}\left\{c(\sigma)\lambda_{\sigma^-}\|\mathbf{M}_{\sigma^-}\|\sqrt{\lambda_U\|M_U\|}\right\}$$
$$\le 4D_{\mathrm{SoS}}!\max_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}}\left\{c(\sigma)B_{adjust}(\sigma)n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{2}D_{\mathrm{SoS}}-\frac{\varepsilon}{8}|E(\sigma)|-\frac{\varepsilon}{8}|V(\sigma)|}\right\}$$
$$\le n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{16}|E(U)|}$$

■

命题 E.55。 对于所有 $U\in\mathcal{I}_{mid}$ 以及所有 $D\le D_V$，

$$\left\|\mathbf{L}_{U,\le D}-\mathbf{L}_{D,\le D_V}\right\|\sqrt{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\le n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{16}D-\frac{\varepsilon}{16}|E(U)|}$$

证明。 根据 推论 D.13，对于所有 $\sigma\in\mathbf{L}_{U,\ \le D_V}$

$$\lambda_{\sigma^-}\|\mathbf{M}_{\sigma^-}\|\sqrt{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\le 2B_{adjust}(\sigma)n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{2}D_{\mathrm{SoS}}-\frac{\varepsilon}{8}|E(\sigma)|-\frac{\varepsilon}{8}|V(\sigma)|}$$

现在我们注意到

$$\left\|\mathbf{L}_{U,\le D}-\mathbf{L}_{U,\le D_V}\right\|\sqrt{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\le\sum_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}:|V(\sigma)|>D}\lambda_{\sigma^-}\|\mathbf{M}_{\sigma^-}\|\sqrt{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}$$
$$\le D_{\mathrm{SoS}}!\left(\sum_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}}\frac{1}{c(\sigma)|U_\sigma|!}\right)\max_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\le D_V}:|V(\sigma)|>D}\left\{c(\sigma)\lambda_{\sigma^-}\|\mathbf{M}_{\sigma^-}\|\sqrt{\lambda_U\|\mathbf{M}_U\|}\right\}$$

$$\leq 4D_{\mathrm{SoS}}! \max_{\sigma\in\mathbf{L}_{U,\leq D_V}:|V(\sigma)|>D} \left\{c(\sigma)B_{adjust}(\sigma)n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{2}D_{\mathrm{SoS}}-\frac{\varepsilon}{8}|E(\sigma)|-\frac{\varepsilon}{8}|V(\sigma)|}\right\}$$
$$\leq n^{D_{\mathrm{SoS}}+\eta-\frac{\varepsilon}{16}D-\frac{\varepsilon}{16}|E(U)|}$$

■

利用这些结论，并像$U_{\tau_P}=U$在引理 E.39的证明中那样，将所有项分组在一起，我们得到

$$\sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}:U\sim V}\frac{|U\cap V|!}{(|U|!)^2}\sum_{\tau\in\mathcal{M}_{U,V}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(\Gamma,\Gamma'^{\intercal},P)\in\mathcal{P}_j(\tau)}\frac{1}{\prod_{i=1}^{j}|U_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^{\intercal}}|!}$$
$$\left(\left\|\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\leq D_L(P)}-\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\leq D_V}\right\|\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\left\|\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\leq D_V}\right\|\right.$$
$$\left.+\left\|\mathbf{L}_{U_{\tau_P},\leq D_L(P)}\right\|\left(\frac{\left(\prod_{i=1}^{j}c_{P_i}N(P_i)\right)\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{|\operatorname{Aut}(\tau_P)|}\right)\left\|\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\leq D_R(P)}-\mathbf{L}^{\intercal}_{V_{\tau_P},\leq D_V}\right\|\right)\mathbf{Id}_{Sym}$$
$$\preceq 2\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\frac{1}{|U|!}\sum_{\tau\in\mathcal{M}}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\substack{(\Gamma,\Gamma'^{\intercal},P)\in\mathcal{P}_j(\tau):\\ U_{\tau_P}=U}}\frac{|U_\tau\cap V_\tau|!}{|V_\tau|!}\frac{1}{\prod_{i=1}^{j}|V_{\gamma_i}|!|V_{\gamma_i'^{\intercal}}|!}$$
$$\left(2^j c(\tau)\left(\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|n^{-\frac{\varepsilon}{16}\min\{D_L(P),D_R(P)\}}}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\right)\frac{n^{2D_{\mathrm{SoS}}+2\eta-\frac{\varepsilon}{16}|E(U)|}\mathbf{Id}_{Sym}}{2^j c(\tau)\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)}$$
$$\preceq\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}}\left(\max_{\substack{\tau\in\mathcal{M}\\ j\in\mathbb{N}^+\\ (\Gamma,\Gamma',P)\in\mathcal{P}_j(\tau):\\ U_{\tau_P}=U}}\left\{100^j c(\tau)\left(\prod_{i=1}^{j}c(\gamma_i)c(\gamma_i')c(P_i)c_{P_i}N(P_i)\right)\frac{\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|n^{-\frac{\varepsilon}{16}\min\{D_L(P),D_R(P)\}}}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}\right\}\right)$$
$$n^{2D_{\mathrm{SoS}}+2\eta-\frac{\varepsilon}{16}|E(U)|}\mathbf{Id}_{Sym}$$

现在，我们给出与之前相同的观察，并补充一条关于$D_L(P)$和$D_R(P)$的观察：

1. $\dfrac{\prod_{i=1}^{j}\tilde{c}_{P_i}\lambda_{\tau_P}\left\|\mathbf{M}_{\tau_P}\right\|}{\sqrt{\lambda_{U_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{U_{\tau_P}}\right\|\lambda_{V_{\tau_P}}\left\|\mathbf{M}_{V_{\tau_P}}\right\|}}=n^{-\operatorname{slack}(\tau_P)}$

2. 根据界 C.1中的松弛下界，

$$\operatorname{slack}(\tau_P)\geq\varepsilon\left(E_{tot}(\tau_P)-\frac{|E(U_{\tau_P})|+|E(V_{\tau_P})|}{2}+|V_{tot}(\tau_P)|-\frac{|U_{\tau_P}|+|V_{\tau_P}|}{2}\right)$$

$$= \varepsilon \left(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} + |V(\tau)| - \frac{|U_\tau| + |V_\tau|}{2} \right) +$$
$$\varepsilon \sum_{i \in [j]} \left(|E(\gamma_i)| - \frac{|E(U_{\gamma_i})| + |E(V_{\gamma_i})|}{2} + (\text{\# of edges removed from } \gamma_i) \right.$$
$$+ |V(\gamma_i)| - \frac{|U_{\gamma_i}| + |V_{\gamma_i}|}{2} + |E(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})| + |E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})|}{2}$$
$$\left. + (\text{\# of edges removed from } \gamma'^{\intercal}_i) + |V(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|U_{\gamma'^{\intercal}_i}| + |V_{\gamma'^{\intercal}_i}|}{2} \right)$$

3. $D_L(P) \geq D_V - |V(\gamma) \setminus V_\gamma|$ 和 $D_R(P) \geq D_V - |V(\gamma') \setminus U_{V(\gamma')}|$ 因此

$$\min\{D_L(P), D_R(P)\} \geq D_V - 2 \sum_{i=1}^{j} \left(|V(\gamma_i)| - \frac{|U_{\gamma_i}| + |V_{\gamma_i}|}{2} + |V(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|U_{\gamma'^{\intercal}_i}| + |V_{\gamma'^{\intercal}_i}|}{2} \right)$$

4. $c(\tau) \leq n^{\frac{\varepsilon}{32}(|E(\tau)| - \frac{|E(U_\tau)| + |E(V_\tau)|}{2} + |V(\tau)| - \frac{|U_\tau| + |V_\tau|}{2})}$

5. $B^{adjust}(\tau_P) \leq n^{\frac{\varepsilon}{32}(|E(\tau_P)| - \frac{|E(U_{\tau_P})| + |E(V_{\tau_P})|}{2} + |V(\tau_P)| - \frac{|U_{\tau_P}| + |V_{\tau_P}|}{2})}$

6. 对于 所有 $i \in [j], c(\gamma_i) c(\gamma'_i)$、$c(P_i)$ 和 $N(P_i)$ 均至多为 n 的幂

$$\frac{\varepsilon}{32} \sum_{i \in [j]} \left(|E(\gamma_i)| - \frac{|E(U_{\gamma_i})| + |E(V_{\gamma_i})|}{2} + (\text{\# of edges removed from } \gamma_i) \right.$$
$$+ |V(\gamma_i)| - \frac{|U_{\gamma_i}| + |V_{\gamma_i}|}{2} + |E(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})| + |E(U_{\gamma'^{\intercal}_i})|}{2}$$
$$\left. + (\text{\# of edges removed from } \gamma'^{\intercal}_i) + |V(\gamma'^{\intercal}_i)| - \frac{|U_{\gamma'^{\intercal}_i}| + |V_{\gamma'^{\intercal}_i}|}{2} \right)$$

7. $\left| \frac{c_P}{c_P^{\approx}} \right| \leq 2$

■

E.7 L 的良态性

本节的目标是证明 $\mathbf{L}^{\intercal}\mathbf{L}$ 最小非零特征值的下界。具体而言，我们将证明以下引理：

引理 E.56 （**L** 的良态性）。

$$\sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{\lambda_V}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{M}_{V^+}\mathbf{L}_V^\intercal \succeq \Omega(n^{-D_{\mathrm{SoS}}})\mathbf{Id}_{sym}$$

我们对 引理 E.56 所采用的方法如下。如果我们能找到非负权重$\{w_V : V \in \mathcal{I}_{mid}\}$ 使得

$$\sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{w_V\lambda_V}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{M}_{V^+}\mathbf{L}_V^\intercal \succeq \mathbf{Id}_{sym}$$

那么，由于每一项本身都是半正定的，左端被以下表达式半正定支配：

$$\left(\max_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V\right)\cdot \sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{\lambda_V}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{M}_{V^+}\mathbf{L}_V^\intercal .$$

这意味着下界

$$\sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{\lambda_V}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{M}_{V^+}\mathbf{L}_V^\intercal \succeq \frac{1}{\max_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V}\mathbf{Id}_{sym} .$$

因此，我们将寻找适当的w_V，使其增长不会过快。

我们将选择$w_U = 0$，除非$E(U) = \emptyset$。下面的引理给出了一个充分的增长条件。由于对于所有非对角左形状 σ，$|U_\sigma| > |V_\sigma|$，我们可以利用该引理按照大小 $|U|$递增的顺序定义w_U。

引理 E.57。 如果我们有非负权重$\{w_V : V \in \mathcal{I}_{mid}, E(V) = \emptyset\}$，使得对于所有 U、$V \in \mathcal{I}_{mid}$，满足 $E(V) = \emptyset$,

$$w_V \max_{\substack{nontrivial\\ \sigma\in\mathcal{L}_V: U_\sigma = U}} \{2c(\sigma)\lambda_\sigma\|\mathbf{M}_\sigma\|\} \le \frac{w_U}{2}$$

then

$$\sum_{\substack{V\in\mathcal{I}_{mid}:\\ E(V)=\emptyset}} \frac{w_V}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{L}_V^\intercal \succeq \frac{1}{2}\mathbf{Id}_{sym} .$$

证明。 $\mathbf{L}_V$ 由含有$V(\sigma) = V$的平凡形状以及较大的非对角形状组成。我们使用以下定义和命题来界定非对角形状。

定义 E.58 (**Id**$_{Sym,V}$)**.** 对于 $V \in \mathcal{I}_{mid}$，令**Id**$_{Sym,V}$ 为**Id**^{sym} 在度$|V|$-乘-$|V|$ 块上的限制。

命题 E.59。 对于所有 $V \in \mathcal{I}_{mid}$ 且满足 $E(V) = \emptyset$,

$$\frac{1}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{L}_V^\intercal \succeq \mathbf{Id}_{Sym,V} - \sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{1}{|U|!} \sum_{\substack{nontrivial \\ \sigma\in\mathcal{L}_V: U_\sigma = U}} 2\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\| \mathbf{Id}_{Sym,U}$$

该断言的证明。我们有

$$\frac{1}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{L}_V^\intercal = \mathbf{Id}_{Sym,V} + \sum_{\text{non-trivial } \sigma\in\mathcal{L}_V} \lambda_\sigma(\mathbf{M}_\sigma + \mathbf{M}_\sigma^\intercal) + \frac{1}{|V|!} \sum_{\text{non-trivial } \sigma,\sigma'\in\mathcal{L}_V} \lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}\mathbf{M}_\sigma\mathbf{M}_{\sigma'}^\intercal,$$

最后一项是半正定的。因此，只需对中间项进行界定。

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{non-trivial } \sigma\in\mathcal{L}_V} \lambda_\sigma(\mathbf{M}_\sigma + \mathbf{M}_\sigma^\intercal) &= \sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}: U\neq V} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{L}_V: \\ U_\sigma = U}} \lambda_\sigma(\mathbf{M}_\sigma + \mathbf{M}_\sigma^\intercal) \\
&= \sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{1}{|U|!} \sum_{\substack{\text{non-trivial } \sigma\in\mathcal{L}_V: \\ U_\sigma = U}} \lambda_\sigma \mathbf{Id}_{Sym,U}^{1/2}(\mathbf{M}_\sigma + \mathbf{M}_\sigma^\intercal)\mathbf{Id}_{Sym,U}^{1/2} \\
&\succeq -\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{1}{|U|!} \sum_{\substack{\text{non-trivial } \sigma\in\mathcal{L}_V: \\ U_\sigma = U}} \lambda_\sigma \mathbf{Id}_{Sym,U}^{1/2}(\|\mathbf{M}_\sigma\| + \left\|\mathbf{M}_\sigma^\intercal\right\|)\mathbf{Id}_{Sym,U}^{1/2} \\
&= -\sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{1}{|U|!} \sum_{\substack{\text{non-trivial } \sigma\in\mathcal{L}_V: \\ U_\sigma = U}} 2\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\| \mathbf{Id}_{Sym,U}
\end{aligned}$$

这就完成了该断言的证明。 ■

利用该断言，

$$\begin{aligned}
\sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{w_V}{|V|!}\mathbf{L}_V\mathbf{L}_V^\intercal &\succeq \sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V\mathbf{Id}_{Sym,V} - \sum_{U,V\in\mathcal{I}_{mid}} \frac{w_V}{|U|!} \sum_{\substack{\text{nontrivial} \\ \sigma\in\mathcal{L}_V: U_\sigma = U}} 2\lambda_\sigma\|\mathbf{M}_\sigma\|\mathbf{Id}_{Sym,U} \\
&= \sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V\mathbf{Id}_{Sym,V} - \sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} \left(\sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} \sum_{\substack{\text{nontrivial} \\ \sigma\in\mathcal{L}_V: U_\sigma = U}} \frac{w_V}{c(\sigma)|U|!} 2c(\sigma)\lambda_\sigma\|\mathbf{M}_\sigma\| \right) \mathbf{Id}_{Sym,U} \\
&\succeq \sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V\mathbf{Id}_{Sym,V} - \sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} \left(\max_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V \max_{\substack{\text{nontrivial} \\ \sigma\in\mathcal{L}_V: U_\sigma = U}} \{2c(\sigma)\lambda_\sigma\|\mathbf{M}_\sigma\|\} \right) \mathbf{Id}_{Sym,U} \\
&\succeq \sum_{V\in\mathcal{I}_{mid}} w_V\mathbf{Id}_{Sym,V} - \frac{1}{2} \sum_{U\in\mathcal{I}_{mid}} w_U\mathbf{Id}_{Sym,U} \qquad \text{(by assumption)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{V \in \mathcal{I}_{mid}} w_V \mathbf{Id}_{Sym,V}$$

■

现在我们计算权重的界，以推导出 引理 E.56。

引理 E.60. 对于所有满足 $E(V_\sigma) = \emptyset$ 的左形状 σ，

$$\lambda_\sigma \left\| \mathbf{M}_\sigma^{\approx} \right\| \leq n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|-|V_\sigma|}{2}\right)-(\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|}$$

证明. 根据 引理 4.8，我们有

$$\lambda_\sigma \left\| \mathbf{M}_\sigma^{\approx} \right\| = n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|+|V_\sigma|}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)w(\sigma)-\frac{w(V_\sigma)}{2}-(\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|}$$

代入$w(\sigma) \geq w(V_\sigma)$，因为 σ 是左形状，并且 $w(V_\sigma) = |V_\sigma|$,

$$\begin{aligned}\lambda_\sigma \left\| \mathbf{M}_\sigma^{\approx} \right\| &\leq n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|+|V_\sigma|}{2}\right)-(1-\alpha)|V_\sigma|-(\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|} \\ &= n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|-|V_\sigma|}{2}\right)-(\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|}\end{aligned}$$

■

推论 E.61. 对于所有满足 $E(V) = \emptyset$ 的 $U,V \in \mathcal{I}_{mid}$，

$$\max_{\substack{nontrivial \\ \sigma \in \mathcal{L}_V : U_\sigma = U}} \{2c(\sigma)\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\|\} \leq n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|-|V_\sigma|}{2}\right)}$$

证明.

$$\begin{aligned}2c(\sigma)\lambda_\sigma \|\mathbf{M}_\sigma\| &\leq 2c(\sigma)B_{adjust}(\sigma)n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|-|V_\sigma|}{2}\right)-(\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|} \\ &\leq (16D_V)^{|E(\sigma)|}n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|-|V_\sigma|}{2}\right)-(\gamma-\alpha\beta)|E(\sigma)|} \\ &\leq n^{(1-\alpha)\left(\frac{|U_\sigma|-|V_\sigma|}{2}\right)}.\end{aligned}$$

■

推论 E.62. 选择 $w_U = O\left(n^{(1-\alpha)\frac{|U|}{2}}\right)$ 满足 引理 *E.57.* 的假设。

回想一下，由于 SMVS 的大小至多为 D_{SoS}，因此 $|U| \leq D_{\text{SoS}}$。 w_U 的最大值为 $w_{D_{\text{SoS}}} \leq O(n^{D_{\text{SoS}}})$，因此我们得出 引理 E.56。

~F 计算 $\mathbb{E}[1]$

~**命题 2.52.** 以高概率，我们有 $\mathbb{E}[1] = 1 \pm o(1)$。

证明。

$$\left|\widetilde{\mathbb{E}}[1] - 1\right| = \Big| \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{S}: \\ U_\alpha = V_\alpha = \emptyset, \\ E(\alpha) \neq \emptyset}} \lambda_\alpha \mathbf{M}_\alpha \Big| \leq \max_{\alpha \neq \emptyset : U_\alpha = V_\alpha = \emptyset} \{c(\alpha)\lambda(\alpha) \cdot \|\mathbf{M}_\alpha\|\}$$

令 S 为 α对应的 SMVS，注意到

1. $\lambda_\alpha \|\mathbf{M}_\alpha\| \leq n^{-(\frac{1}{2}-\alpha)w(\alpha) - \frac{w(S)}{2} - (\gamma - \alpha\beta)|E(\alpha)|} \cdot B_{adjust}(\alpha)$
2. $w(S) \geq -\eta - 2\left|E(S)\right| \log_n D_V$
3. $w(\alpha) \geq -\eta - 2|E(\alpha)| \log_n D_V$
4. $c(\alpha) \cdot B_{adjust}(\alpha) \cdot n^{2\eta + 4|E(\alpha)| \log_n D_V} \leq n^{2\eta}(16D_V)^{8|E(\alpha)|}$ which is less than $n^{\frac{\gamma - \alpha\beta}{2}|E(\alpha)|}$ when $\eta \leq \frac{\gamma - \alpha\beta}{4} - 4\log_n(16D_V)$.

因此，我们可以界定

$$\max_{\alpha \neq \emptyset : U_\alpha = V_\alpha = \emptyset} \{c(\alpha)\lambda(\alpha) \cdot \|\mathbf{M}_\alpha\|\} \leq n^{\frac{\alpha\beta - \gamma}{2}} \leq o(1)$$

当 $|E(\alpha)| > 0$ 时，得到 $\left|\widetilde{\mathbb{E}}[1] - 1\right| = o(1)$ 的概率至少为 $1 - 2n^4 \log_n(16D_V) - \frac{\gamma - \alpha\beta}{4}$。 ——■

命题 2.54。 以高概率，

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mathbb{E}}[\mathsf{X}_i] - k \right| = o(k),$$

and

$$\left| \sum_{\{i,j\} \in E(G)} \widetilde{\mathbb{E}}[\mathsf{X}_i \mathsf{X}_j] - \frac{k^2 q}{2} \right| = o(k^2 q)$$

~~证明。 这可以通过将 $\sum^n{}_{i=1} \mathbb{E}[\mathsf{X}\mathsf{X}_i]$ 和 $\sum_{\{i,j\} \in E(G)} \mathbb{E}[\mathsf{X}\mathsf{X}_i\mathsf{X}\mathsf{X}_j]$ 按带状图分解来表示。

~对于每个带状图R，其边集为$E(R)$ 以及$A_R = B_R = \emptyset$，该带状图以两种方式出现在 $\sum^n{}_{i=1} \mathbb{E}[\mathsf{X}\mathsf{X}_i]$中。

1. 对于每个 i ∈ V(R)，带状图 R′ 的 E(R′) = E(R)、V(R′) = V(R)、$A_{R'}$ = (i) 和 $B_{R'} = \emptyset$ 出现在 $\widetilde{\mathbb{E}}[XX_i]$ 中，其系数为 $\left(kn\right)^{|V(R)|}\left(q - \sqrt{p(1-p)}\right)^{|E(R)|}p$。这对|V(R)|个不同的 i 都成立。

2. 对于每个不属于 V(R) 的 i，带状图 R′ with E(R′) = E(R)、V(R′) = V(R) ∪{i}、$A_{R'}$ = (i) 和 $B_{R'} = \emptyset$以系数 $\left(kn\right)^{|V(R)|+1}\left(q - \sqrt{p(1-p)}\right)^{|E(R)|}p$ 出现在 $\widetilde{\mathbb{E}}[XX_i]$ 中。这样的 i 有 n − |V(R)| 个。

因此，对于每个形状 α 满足 $U_\alpha = V_\alpha = \emptyset$ 其中 $|V(\alpha)| \le D_V$、$\mathbf{M}_\alpha$ 出现在 $\sum^n{}_{i=1}\mathbb{E}[XX_i]$系数

$$\frac{1}{|\operatorname{Aut}(\alpha)|}\left(\frac{k(n-|V(\alpha)|)}{n}\mathbf{1}_{|V(\alpha)|<D_V} + |V(\alpha)|\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(\alpha)|}$$

主导项是平凡形状 α，它没有顶点或边，因此恰好贡献 k。采用与用于界定 $\left|\widetilde{\mathbb{E}}[1]-1\right|$ 的分析类似的方法，不难证明其余项的大小为$o(k)$，且这一结论以高概率成立。

为了分析 $\sum_{\{i,j\}\in E(G)}\widetilde{\mathbb{E}}[XX_iXX_j]$，我们使用以下恒等式 $\mathbf{1}_{e\in E(G)}\chi_e = \sqrt{p(1-p)} + (1-p)\chi_e$和 $\mathbf{1}_{e\in E(G)} = p + \sqrt{p(1-p)}\chi_e$。

对于每个带状图 R，其边集为 $E(R)$ 且 $A_R = B_R = \emptyset$，该带状图以$\sum_{i<j}\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}\mathbb{E}[XX_iXX_j]$ 多种方式出现。

1. 对于每个满足 < j ∈ V(R) 且 {i, j} ∈ E(R) 的 i，带状图 R'_1，其 $E(R'_1)$ = E(R)，$V(R'_1)$ = V(R)，$A_{R'}$ = (i) 和 $B_{R'}$ = (j)，以 $\mathbb{E}[XX_iXX_j]$ 的形式出现，系数为$\left(kn\right)^{|V(R)|}\left(q - \sqrt{p(1-p)}\right)^{|E(R)|}p$。由于边指示变量 $\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，随后将其乘以 (1 − p)。类似地，带状图 R'_2，其 $E(R'_2) = E(R)\setminus\{i,j\}$，V(R′) = V(R)，$A_{R'}$ = (i) 和 $B_{R'}$ = (j)，以 $\widetilde{\mathbb{E}}[XX_iXX_j]$ 的形式出现，系数为 $\left(kn\right)^{|V(R)|}\left(q - \sqrt{p(1-p)}\right)^{|E(R)|-1}p$。由于边指示变量 $\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，随后将其乘以 $\sqrt{p(1-p)}$。

这带来了总计为 $\left(1 + p(1-p)\,q-p\right)\left(kn\right)^{|V(R)|}\left(q - \sqrt{p(1-p)}\right)^{|E(R)|}p$ 的贡献。这种情况会在 $|E(R)|$ 个不同的$i < j$ 上发生。

2. 对于每个满足 {i, j} ∉ E(R) 的 i < j ∈ V(R)，带状图 R'_1 with $E(R'_1)$ = E(R)，V(R′) = V(R), $A_{R'}$ = (i), and $B_{R'}$ = (j) appears in $\mathbb{E}[XX_iXX_j]$，其系数为

$\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}p$。由于边指示变量$\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，随后将其乘以 p。类似地，带状图 R'_2 with $E(R'_2) = E(R) \cup \{i, j\}$, $V(R') = V(R)$, $A_{R'} = (i)$, and $B_{R'} = (j)$ appears in $\widetilde{\mathbb{E}}[XX_iXX_j]$，其系数为 $\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|+1}p$。由于边指示变量 $\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，随后将其乘以 $\sqrt{p(1-p)}$。这给出的总贡献为~~$q\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}p$~~。对于不同的 $i < j$，这种情况会发生 $\binom{V(R)}{2} - |E(R)|$ 次。

3. 对于每个满足 $i < j \in V(R)$、$i \in V(R)$ 但 $j \notin V(R)$ 的情况，带状图 R'_1（其中 $E(R'_1) = E(R)$，$V(R') = V(R) \cup \{j\}$，$A_{R'} = (i)$，以及 $B_{R'} = (j)$）以系数$\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|+1}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}p$~~出现在~~ $\mathbb{E}[XX_iXX_j]$ 中。由于边指示变量$\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，随后将其乘以 p。类似地，带状图 R'_2（其中 $E(R'_2) = E(R) \cup \{i, j\}$，$V(R') = V(R) \cup \{j\}$，$A_{R'} = (i)$，以及 $B_{R'} = (j)$）以系数 $\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|+1}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|+1}p$ 出现在 $\widetilde{\mathbb{E}}[XX_iXX_j]$ 中。由于边指示变量 $\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，随后将其乘以 $\sqrt{p(1-p)}$。因此，总贡献为 $kq\,n\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}p$。对于 $i \notin V(R)$ 且 $j \in V(R)$ 的情况，同样的分析也成立。这两种情况对应 $|V(R)|(n - |V(R)|)$ 个不同的 $i < j$。

4. 对于每个满足 $i < j \in V(R)$ 且 $i, j \notin V(R)$ 的情况，带状图 R'_1（其中 $E(R'_1) = E(R)$，$V(R') = V(R) \cup \{i, j\}$，$A_{R'} = (i)$ 和 $B_{R'} = (j)$）以系数$\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|+2}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}p$~~出现在~~ $\mathbb{E}[XX_iXX_j]$ 中。随后，由于边指示变量$\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，再将其乘以 p。类似地，带状图 R'_2（其中 $E(R'_2) = E(R) \cup \{i, j\}$，$V(R') = V(R) \cup \{i, j\}$，$A_{R'} = (i)$ 和 $B_{R'} = (j)$）以系数 $\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|+2}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|+1}p$ 出现在 $\widetilde{\mathbb{E}}[XX_iXX_j]$ 中。随后，由于边指示变量 $\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E(G)}$，再将其乘以 $\sqrt{p(1-p)}$。这使总贡献为 $k^2q\,n^2\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}p$。这发生在 $\binom{(n-|V(R)|)}{2}$

不同$i < j$。

综上，每个带状图R 连同 $A_R = B_R = \emptyset$ 以及 $|V(R)| \le D_V$出现时，其系数为

$$\left(\left(1+\frac{p(1-p)}{q-p}\right)|E(R)| + q\left(\binom{V(R)}{2} - |E(R)|\right) + \frac{kq}{n}|V(R)|(n-|V(R)|)\mathbf{1}_{|V(R)|<D_V} + \frac{k^2q}{n^2}\binom{(n-|V(R)|)}{2}\mathbf{1}_{|V(R)|<D_V-1}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(R)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(R)|}$$

$\widetilde{\ }$在 $\sum_{\{i,j\}\in E(G)} \mathbb{E}[\mathsf{X}\mathsf{X}_i\mathsf{X}\mathsf{X}_j]$。因此，对于每个形状 α 连同 $U_\alpha = V_\alpha = \emptyset$ 以及 $|V(\alpha)| \le D_V$，图矩阵M_α 出现时，其系数为

$$\frac{1}{|\operatorname{Aut}(\alpha)|}\left(\left(1+\frac{p(1-p)}{q-p}\right)|E(\alpha)| + q\left(\binom{V(\alpha)}{2} - |E(\alpha)|\right) + \frac{kq}{n}|V(\alpha)|(n-|V(\alpha)|)\mathbf{1}_{|V(\alpha)|<D_V} + \frac{k^2q}{n^2}\binom{(n-|V(R)|)}{2}\mathbf{1}_{|V(R)|<D_V-1}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{|V(\alpha)|}\left(\frac{q-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^{|E(\alpha)|}$$

$\widetilde{\ }$在 $\sum_{\{i,j\}\in E(G)} \mathbb{E}[\mathsf{X}\mathsf{X}_i\mathsf{X}\mathsf{X}_j]$.

$\widetilde{\sum}_{\{i,j\}\in E(G)} \mathbb{E}[\mathsf{X}\mathsf{X}_i\mathsf{X}\mathsf{X}_j]$ 中的主导项来自空形状 α，它不含顶点或边。这给出 $k^2q\ n^2\ \binom{n}{2} \approx k^2q\ 2$。采用与用于给出 $\left|\widetilde{\mathbb{E}}[1] - 1\right|$ 界的类似分析，不难证明，其余项的大小以高概率为 $o(k^2q)$。

■