arXiv:2303.17535v1 [math.PR] 30 Mar 2023

临界窗口内的随机团复形过程。

AGNIVA ROY 和 D. YOGESHWARAN

ABSTRACT. 我们研究随机团复形过程，即由具有独立同分布均匀边权重的完全图所诱导的团复形过程。我们考察临界窗口内团复形过程中贝蒂数的演化，特别证明贝蒂数过程级收敛到一个泊松过程。我们的证明技巧还能轻易得到一个命中时刻结果：以高概率，当不再存在孤立的 k维上同调在 k-面消失时变为平凡。我们的结果表明，团复形过程中上同调消失的阈值与 Kahle 确定的“瞬时”同调消失阈值一致 [16]。我们还给出了团复形过程具有 Kazhdan 性质（T）的概率下界。这些结果表明，与 Bobrowski 在几何背景下研究的切赫复形过程相比，团复形过程呈现出不同的行为[2]。

1. INTRODUCTION

Erd¨os-R´enyi 随机图模型的成功 [10]以及拓扑数据分析中对随机图的高维类似物的需求，推动了对各种加权随机（单纯）复形模型的研究 [3, 17]。其中一个关键问题是确定随机复形中同调连通性的阈值。本文研究随机团复形过程在上同调消失阈值附近的上同调行为。据我们所知，由于同调缺乏单调性，难以从现有结果直接推导出该模型在过程层面的收敛性。

本文结构。在引言的其余部分，我们将介绍模型，陈述主要结果，并将这些结果置于现有文献的背景下加以讨论。在第 2 节中，我们简要回顾组合拓扑中的一些基本概念，并陈述若干供后文使用的简单引理。我们在第 3 节中给出主要定理的证明。为使行文简洁，我们不详细介绍背景和相关文献，而仅提供相应的参考指引；感兴趣的读者可参阅 Bobrowski [2] 中的引言。

设置。我们首先定义随机图过程。设 $U(i,j)$、$1 \le i < j \le n$ 为相互独立且同分布的均匀$([0,1])$随机变量。对于 $i > j$，我们令 $U(i,j) = U(j,i)$。令 $t \in [0,1]$。设 $E(n,t) := \{(i,j) : i \ne j, U(i,j) \le t\}$，我们定义图 $G(n,t) :=$

日期：2023-03-31。2020 年数学主题分类。60B99 55U10。关键词和短语：随机拓扑、命中时刻、团复形、泊松收敛、贝蒂数。

$([n], E(n,t))$，其中 $[n] := \{1,\dots,n\}$。图 $G(n,t)$ 与参数为 n、t 的著名 Erd¨os-R´enyi 随机图具有相同的分布。为方便起见，我们将 $G(n,t)$ 称为 Erd¨os-R´enyi 随机图。

对于一个图 G，可以通过将 团复形(也称为 *Vietoris-Rips* 复形）构造为一个（单纯）复形，其中将 k-团作为该（单纯）复形的 $k-1$-面。关于本文所用各种概念的详细定义，请参见第 2 节。 *(Erd¨os-R´enyi)* 随机团复形过程 $X(n,\ t)\ t \geq 0$ 是与随机图过程 $G(n,t)$关联的团复形过程。

这一随机团复形由 [15] 引入，而其同调连通性的阈值在 [15, 16, 9] 中进行了研究。用 $H^k(\cdot)$ 表示复形的上同调群，$H^k(X(n,t))$ 的平凡性称为同调连通性。$H^0(X(n,t))$ 的平凡性对应于 $G(n,t)$ 的图连通性，这一问题已得到详细研究；例如参见 [10]。$k=0$ 与 $k \geq 1$ 之间的关键区别在于单调性。若 $H^0(X(n,t))$ 是平凡的（即 $G(n,t)$ 是连通的），那么对于所有 $s \geq t$，$H^0(X(n,s))$ 也都是平凡的。然而，对于 $k \geq 1$ 而言，情况并非如此，这自然引出了本文的主要问题。从现在起，我们假设 $k \geq 1$。

主要结果。上述讨论引导我们考虑随机团复形过程$X(n,t)\ t \in [0,1]$，尤其是贝蒂数过程 $\beta_k(X(n,t))\ t \in [0,1]$，其中$\beta_k$ 是具有有理系数的上同调群 H^k 的秩。H^k 的平凡性等价于 $\beta_k = 0$。在简要介绍了这些背景后，我们的主要问题是研究消失阈值 $T_{n,k}$ 的尺度和渐近分布，即当 $H^k(X(n,t))$ 变得平凡时的情形。更正式地，令

$$T_{n,k} := \inf\{t : \beta_k(X(n,s)) = 0\ \forall s \geq t\}. \tag{1.1}$$

为将$T_{n,k}$ 与 H^k的平凡性联系起来，注意到

$$\{T_{n,k} \geq t\} = \{\beta_k(X(n,s)) \neq 0 \text{ for some } s \geq t\}.$$

进一步地，我们将研究过程 $\beta_k(t) := \beta_k(X(n,t))\ t \in [0,1]$ 在临界窗口中的渐近性质（即接近其消失阈值时的情形）。现在我们将陈述定理，确定该过程的尺度和渐近分布。

定理 1.1。设 $k \geq 1$。对于 $c \in \mathbb{R}$，我们定义 $t_c := t_c(k,n) = \left(\frac{(\frac{k}{2}+1)\text{对数}\ n + \frac{k}{2}\text{对数对数}\ n + c}{n}\right)^{\frac{1}{k+1}}$。于是有

$$\{\beta_k(t_c)\}_{c\in\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \{\mathcal{P}(c)\}_{c\in\mathbb{R}},$$

其中 $\{\mathcal{P}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、强度测度为 $\mu(k,x)\,\mathrm{d}x$，$\mu(k,x) := \frac{(k/2+1)^{k/2}}{(k+1)!}\, e^{-x}$ 的泊松过程，而 $\xrightarrow{d}$ 表示在函数空间 $D[0,\infty)$ 上的弱收敛性；该空间由右连续且存在左极限的函数构成。

泊松过程 $\mathcal{P}(c)$ 是一个非递增的纯跳过程，由以下两条性质定义：(i) $\mathcal{P}(b) - \mathcal{P}(a)$ 具有 Poisson$(\mu(k,a) - \mu(k,b))$ 分布；(ii) 若 $-\infty < a_1 < a_2 \ldots < a_{2m} < \infty$，则 $\mathcal{P}(a_{2j}) - \mathcal{P}(a_{2j-1})$ $j = 1,\dots,m$ 相互独立。

对于固定的 c， $\beta_k(X(n,t_c))$的渐近分布 [9, 见定理 1。3]。我们认为其中的论证存在一个漏洞，而我们对上述定理的证明确实弥补了这一漏洞；见备注3.7。即便如此，也无法从 $\beta_k(X(n,t_c))$的渐近分布推出$T_{n,k}$ 的渐近分布。不过，我们可以根据定理1.1 以及泊松过程的非递增性质轻松得出：

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T_{n,k}\le t_c)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\ge t_c}(\beta_k(t)=0)\Big)=\mathbb{P}\big(\mathcal{P}(c)=0\big)=e^{-\int_c^\infty \mu(k,x)\mathrm{d}x}=e^{-\mu(k,c)},$$

即 nT_n^{k+1}, k $-(\frac{k}{2}+1)\log n-\frac{k}{2}\log\log n$ 依分布收敛于参数为 $\mu(k,c)$ 的 Gumbel 分布。这也立即意味着，对于 $H^k(X(n,t))$ 的平凡性（即 $k\ge 1$），不存在“例外时刻”；对于满足 $w(n)\to\infty$ 的序列 $w(n)$，有

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\ge t_n}H^k(X(n,t))=0\Big)\to 1,\ \text{for } t_n:=\left(\frac{(\frac{k}{2}+1)\log n+\frac{k}{2}\log\log n+w(n)}{n}\right)^{\frac{1}{k+1}}. \tag{1.2}$$

作为一个直接推论，我们得到 [16, 定理 1。1] - 对于 k， w（n） t_n 如上所述，有

$$\mathbb{P}(H^k(X(n,t))=0)\to 1,\ \text{if } t\ge t_n.$$

因此，“瞬时上同调”消失的阈值与上同调消失的阈值相同。随机几何 Čech 复形则并非如此（见 [2, 定理 3.1 和推论 7。14]）。此外，我们的证明还包括证明孤立面也呈现出类似的阈值行为（命题3.1），而且几何团复形中的 1-面也已证明存在这种现象[14, 命题 1.4 和 1。5]，但随机 Čech 复形中的 1- 面并非如此 [14, 命题 1.4 和 1。5]。

另一方面，与 Erd¨os-R´enyi 随机图情形中的连通性类似，对于随机 k-复形，由于单调性，“瞬时上同调”消失的阈值与上同调消失的阈值显然重合（见 [19, 20]）。该模型在临界窗口内的过程级收敛已在 [25, 定理 7] 中得到证明，其基础是 [18, 定理 1.10]中证明的边缘分布收敛。

我们的证明技术带来的另一个直接推论是，除了过程级收敛之外，我们还得到了一个命中时刻结果。即使对于随机 k-复形，这样的结果也仅在 $k=1$、2 的情形下已知，而这两个结果分别在 [4, 定理 4] 和[18,定理 1.11]中得到证明。随机 ˇCech 复形的命中时刻结果已在 [2] 中给出（见其中公式（3.4）下方的讨论），而随机 ˇCech 复形的零阶同调结果（或随机几何图中的连通性）已在 [23]中得到证明。现在，我们为随机团复形中的所有 k 陈述这样的结果。

令 $N_k(t):=N_k(X(n,t))$ 表示 $X(n,t)$ 中孤立的 k-面数，它等于 $G(n,t)$ 中极大的 $(k+1)$-团数。对于许多 t 的取值， $\beta_k(t)$ 都能被它很好地近似；这一点一直是包括我们在内的随机团复形 [16, 9] 研究成果的推动力。另请注意， $N_k(t)$ 并非单调函数。类似于

消失阈值 $T_{k,\ n}$ 对于 β_k，我们可以将 $T'_{n,\ k}$ 定义为 $N_k(t)$ 的消失阈值，即

$$T'_{n,k} := \inf\{t : N_k(X(n,s)) = 0 \,\forall s \geq t\}. \tag{1.3}$$

通俗地说，命中时刻结果表明，当最后一个孤立的 k-面消失时，随机团复形过程的 k 阶上同调群也随之消失。现在我们正式陈述这一结果，并在证明之后提及其一个加强版本。

定理 1.2. 设 $T_{n,\ k}, T'_{n,\ k}$ 分别为 k 阶贝蒂数和孤立的k-面的消失阈值。那么，当 $n \to \infty$ 时，我们有：

$$\mathbb{P}(T_{n,k} = T'_{n,k}) \to 1.$$

我们的第三个也是最后一个结果不那么精确，但仍给出了随机团复形过程具有 Kazhdan 性质 (T) 的概率下界。

定理 1.3. 设 $k, c, t_c(k,n)$ $\mu(k,c)$ 如上一定理所述。那么，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{t \geq t_c(1,n)} \{\Pi_1(X(n,t)) \ does\ not\ have\ property\ (T)\}\Big) \leq 1 - e^{-\mu(1,c)},$$

其中， $\Pi_1(X(n,t))$ 是 $X(n,t)$ 的基本群。

与定理 1.1类似，我们还可以推出（1.2）的一个类似结果，以及 Kazhdan 性质 (T) 的消失阈值，如 [16, 定理 1.2] 由定理 1.3可得。

证明概要：[16, 定理 1.1]的证明采用 Garland 方法（定理 2.3），将 β_k 的消失归结为验证孤立的 k-面消失，以及（$k-1$）-面链接上的谱隙较大。在 [16], 中，前者通过计数论证和马尔可夫不等式得到验证，后者则借助 [13, 定理 1.1]中的强大谱隙结果。类似的方法用于 [9, 定理 1.3]，以证明临界窗口中的泊松收敛性。我们的证明包括：证明孤立的 k-面满足定理 1.1 的类似结论（定理 3.2），然后证明孤立的 k-面过程与贝蒂数从临界窗口中的任意位置开始相一致（定理 3.3）。后一个结果是本文的主要技术贡献，它使我们能够在过程层面上将关于孤立的 k-面的结果转换为关于第 k个贝蒂数的结果。为证明这一结果，我们利用 $\beta_k(X(n,t))$ 是一个跳过程这一事实，并结合博雷尔-坎泰利论证，将证明归结为获得概率 $\mathbb{P}(\beta_k(X(n,t)) \neq N_k(X(n,t)))$ 的良好估计。这些估计需要在 t 中满足适当的可积性，并在 n中满足可求和性。为此，我们对 [16, 9] 中的概率估计进行了更加细致的量化，从而能够通过 Garland 方法和 [13]的谱隙界推导出所需的界。最后，采用 Zuk 判据（定理 2.4）替代 Garland 方法，可以使用相同的方法得到定理 1.3。我们将在注 3.5 之后进行更加精确的比较。如果人们只对上述关于 $t >> t_c$的结果感兴趣，我们的证明将大大简化；参见注 3.7。按照 [9, 5, 6, 7]中的方法，应当可以将我们的方法推广到多参数随机团复形模型。

2. Preliminaries

本节将回顾关于（单纯）复形的一些基本定义，并汇总后文将用到的一些拓扑学结果。读者可以参阅 Edelsbrunner 和 Harer [8] 以及 Munkres [21]，以进一步了解复形及其细节。我们假定读者熟悉基本的代数拓扑概念。

定义 2.1. 单纯复形是有限集的一个族 $\mathcal{S}$，满足：如果 $A \in \mathcal{S}$ 且 $B \subseteq A$，那么 $B \in \mathcal{S}$。

- 的顶点集是其所有组成集合的并集。$V(\mathcal{S}) = \cup_{A\in\mathcal{S}} A$。
- 每个集合 $A \in \mathcal{S}$ 都称为 $\mathcal{S}$ 的 k-面，其中 $|A| = k + 1$。
- $A \in \mathcal{S}$ 如果 $\nexists B \in \mathcal{S}$ 使得 $A \subset B$，则称其为孤立的或极大的。

$\mathcal{S}$ 的 k-骨架定义为由 $\mathcal{S}$ 中所有大小至多为（$k + 1$）的面组成的子单纯复形。1-骨架也称为底图。

每个单纯复形都有定义良好的拓扑不变量与之对应，即其同调群和上同调群。读者可参阅 [8] 了解它们的定义背景。空间 X 在域 F 上系数的第 k 个上同调群记为 $H^k(X, F)$。$H^k(X, \mathbb{Q})$ 的秩称为贝蒂数，记为$\beta_k(X)$。

现在我们回顾一些非常有用的判据，这些判据可根据某些图的谱隙来验证复形的同调连通性。

定义 2.2. 图的谱隙记为 λ_2，定义为该图 $L = I - D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$ 的对称归一化拉普拉斯矩阵的第二大特征值，其中D 是度矩阵，A 是邻接矩阵。

定理 2.3.（Garland *[11]*, Ballmann 和 Świątkowski *[1,* 定理 2.5*]*）设 X 为一个纯$k + 1$维有限单纯复形。若对每个 $(k - 1)$-面 σ，链接 $lk_X(\sigma)$ 都是连通的，且具有谱隙 $\lambda_2[lk_X(\sigma)] > 1 - \frac{1}{k+1}$，则 $H^k(X, \mathbb{Q}) = 0$。

定理 2.4。（Zuk *[28,* 定理 *1]*）若 X 是一个纯二维局部有限单纯复形，并且对每个顶点 v，顶点链环 $lk(v)$ 都是连通的，且归一化拉普拉斯矩阵 $L = L[lk(v)]$ 满足 $\lambda_2(L) > 1/2$，那么 $\pi_1(X)$具有性质（T）。

现在我们将陈述并证明一些引理，以帮助理解移除孤立面如何影响贝蒂数。尽管这些引理已在 [9, 定理 1.2], 中被隐含地使用，为方便起见，也为了将证明中的确定性部分与概率性部分区分开来，我们在此明确陈述并证明它们。

给定一个单纯复形 X，定义 $V_k \subset V$ 为这样的顶点集合：其中的顶点是某个 $(k - 1)$-面在 X 中的链接里的孤立顶点。定义 Σ 为极大的 k-面集合。假设 $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$。定义 $X' = X \setminus \Sigma$ 为从 X 中删除所有极大的 k-面后得到的单纯复形。

引理 2.5。顶点 $v \in V_k$ 当且仅当 v 是 Σ 中某个 k-面的顶点。由此可得

(1) 当且仅当 V_k 为空时， Σ 为空。（2）设 τ 是 X' 的一个（$k-1$）面。那么，当且仅当 lk_X（τ）是一个含有一个非平凡连通分支（即包含至少两个顶点的连通分支），其余为孤立顶点的图时， $lk_{X'}$（τ）是连通的。

证明。我们先证明（1）。假设 $v \in V_k$。那么，存在一个 k 面 σ，其顶点为 a_1、.....、a_{k+1}，位于 X 中，使得 $v \in lk_X$（σ），即 a_1、.....、a_{k+1}、v 是 X 的一个（$k+1$）面。此外，v 在 lk_X（σ）中是孤立的，这意味着不存在顶点 y，使得 a_1、.....、a_{k+1}、v、y 是 X 的一个（$k+2$）面的顶点。这意味着 σ 是一个极大的（$k+1$）面，即 $\sigma \in \Sigma$。

反之，设 v 是 $\sigma \in \Sigma$的顶点。设 σ 的顶点为 $a_1, \ldots, a_{k+1}, v$。将顶点为 $a_1, \ldots, a_{k+1}$ 的 k-面记为 τ。则 $v \in lk_X(\tau)$。此外，由于不存在一个 $(k+2)$-面使得 σ是其子面，故 v是 $lk_X(\tau)$ 中的一个孤立顶点，这意味着$v \in V_k$。

（2）可由如下观察显然得出：$lk_{X'}(\tau)$ 是从 $lk_X(\tau)$ 中删除对应于包含 τ的极大 k-面的顶点而得到的。□

引理 2.6。设 X 为如上所述的单纯复形，恰有 m 个极大面。设X' 由从 X 中删除 X的所有极大 k-面得到。则， $\beta_k(X) > m$ 蕴含$\beta_k(X') \geq 1$。

证明。设 $\beta_k(X) > m$。因此， $H^k(X)$ 是一个至少具有 $(m+1)$ 个无限阶生成元的阿贝尔群。考虑 $H^k(X)$ 的一个生成集，其中包含 $[\phi_1], \ldots, [\phi_m]$，它们是对应于 m 个极大 k-面$\sigma_1, \ldots, \sigma_m$的示性函数的上同调类。由于这些 σ_i 是极大的，显然有 $\delta^k(\phi_i) = 0$，因此它们是良定义的上同调类。由于这些 $[\phi_i]$ 可能线性无关，也可能不是线性无关，$H^k(X)$ 的生成集至少还会有一个其他的无限阶生成元。群 $H^k(X')$ 由 $H^k(X)$ 在保持相同生成集的基础上添加关系 $[\phi_1] = 1, \ldots, [\phi_m] = 1$得到。然而，由于至少还有一个生成元不涉及任何 $[\phi_i]$， $H^k(X')$ 至少有一个无限阶生成元。因此 $\beta_k(X') \geq 1$。□

引理 2.7. 设 X 是上述恰有 m 个极大面的单纯复形。假设 X' 是从 X 中移除 X 的所有极大 k-面后得到的。那么， $\beta_k(X) < m$ 蕴含 $\beta_{k-1}(X') \geq 1$。

证明。将这些极大面的示性函数记为 m、 ϕ_1、...、ϕ_m。由于它们对应极大面，因此是 k-上余循环。于是，如果 $\beta_k(X) < m$，那么 ϕ_i 在 $H^k(X)$ 中必定线性相关，即必定存在一个 $(k-1)$ 上链 λ，使得 $\delta^{k-1}(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi_i$。因此可知， λ不是一个 $(k-1)$-上余边界。现在考虑 $X' = X - \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$。此时， $\delta^{k-1}(\lambda) = 0$ 属于 X'，而 λ 在 X 或 X'中都不是上余边界，这意味着 λ 将在 $H^{k-1}(X')$ 中给出一个非平凡元素。□

3. Proofs

本节给出主要定理的证明。定理 1.1 关于孤立面的对应结论将在第 3.1 节证明。我们将在第 3.2 节阐述孤立面过程与贝蒂数过程之间的关系，并将若干技术引理的证明推迟至第 3.4 节。在第 3.3 节，我们将完成主要定理的证明。

3.1. 孤立面的泊松过程收敛——定理 **3.2**。 回顾 $N_k(t)$ 是 $k+1$ 中极大（ $G(n,\ t)$ 团的数量，或 k 中孤立$X(n,\ t)$-面的数量。我们可以将其形式化定义为

$$N_k(t) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}}^{\neq} \mathbf{1}[i_1,\dots,i_{k+1} \text{ form a maximal clique in } G(n,t).\ ],$$

其中 $\sum^{\neq}$ 表示求和遍历互不相同的指标。由于我们关注的是持久同调，因此需要理解对任意 $s > t$ 都存在的极大团。我们将其定义为

$$N_k^*(t) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}}^{\neq} \mathbf{1}[i_1,\dots,i_{k+1} \text{ form a maximal clique in } G(n,s) \text{ for some } s \geq t.\ ].$$

注意，尽管 $N_k(t)$ 关于 t 是非单调的，但 $N_k^*(t)$ 是单调的。显然，我们有 $N_k(t) \leq N_k^*(t)$，但我们将证明，从 t_c 开始，二者在渐近意义下相等。

命题 3.1. 设 $k \geq 1$ 和 $t_c(k,n) = \left(\left(\frac{k}{2}+1\right) \log \underline{n+\frac{k}{2}\log\log n \qquad n+c} \right)^{\frac{1}{k+1}}$，其中 $n \geq 3$。则当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$\mathbb{E}[N_k^*(t_c(k,n)) - N_k(t_c(k,n))] \to 0. \tag{3.1}$$

因此，$N_k^*(t_c(k,\ n))$ 依分布收敛于均值为$\mu(k,\ c)$ 的泊松随机变量，如定理*1.1*所述。

证明。我们只证明（3.1），因为由（3.1）、$N_k(t_c(k,\ n))$ [16, 定理 2。3]（另见 [9, 引理 7。1]）以及斯勒茨基定理可得泊松收敛性。

从现在起，我们将 $t_c(k,n)$简记为 t_c，并为方便起见省略下标 k。令 $\hat{}t \geq t_c$。进一步设 $N(t)\colon = N^*(t) - N(t)$。因此，要证明（3.1），只需证明

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\hat{N}(t_c)] = 0. \tag{3.2}$$

$\hat{}$我们可以将 $N(t)$ 表示为

$$\hat{N}(t) := \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}}^{\neq} \mathbf{1}[i_1,\dots,i_{k+1} \text{ do not form a clique in } G(n,t)] \times \mathbf{1}[i_1,\dots,i_{k+1} \text{ form a maximal clique in } G(n,s) \text{ for some } s > t].$$

根据通过权重 $U(i,j)$ 构造 $G(n,t)$ 的方式，我们重新表述上述事件。为方便记号，假设 $i_1 = 1, \ldots, i_{k+1} = k+1$。

$$\begin{aligned}\{1,\ldots,k+1 \text{ do not form a clique in } G(n,t)\} &= \{\max_{l,m=1,\ldots,k+1} U(l,m) > t\},\\ \{1,\ldots,k+1 \text{ form a maximal clique in } G(n,s)\} &= \{\max_{l,m=1,\ldots,k+1} U(l,m) \le s\}\\ &\quad \cap \bigcap_{j>k+1} \{\max_{1\le l\le k+1} U(j,l) > s\}.\end{aligned}$$

根据上述恒等式，注意到如果 $1,\ldots,k+1$ 在某个 $G(n,s)$中构成一个极大团，那么它们必然在 $G(n,s)$中也构成一个极大团，对 $s' = \max_{l,\ m=1,\ \ldots\ldots k+1} U(l,m)$均成立。利用这一观察并结合上述事件，我们得到

$$\begin{aligned}&\{1,\ldots,k+1 \text{不形成} \quad \text{m 个团于 } G(n,t)\text{中，但对某个 } s>t\},\ \text{在 } G(n,s)\text{中构成一个极大团}\\ &= \bigcup_{1\le i\ne j\le k+1} \left(\{U(i,j) > t, \max_{l,m=1,\ldots,k+1} U(l,m) \le U(i,j)\} \bigcap \bigcap_{p>k+1} \{\max_{l=1,\ldots,k+1} U(p,l) > U(i,j)\} \right)\\ &=: \bigcup_{1\le i\ne j\le k+1} A(i,j).\end{aligned}$$

ˆ 根据 $N(t)$的定义、上述恒等式、并集界和可交换性，我们有

$$\mathbb{E}[\hat{N}(t)] \le \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{2}\mathbb{P}(A(1,2)). \tag{3.3}$$

通过对 $U(1,2)$进行条件化，然后利用 $U(\cdot,\cdot)$的独立性，我们得到

$$\mathbb{P}(A(1,2)) = \int_t^1 s^{\binom{k+1}{2}-1}(1-s^{k+1})^{(n-k-1)}ds.$$

现在将上述概率代入（3.3），并使用一些初等界，可得存在一个常数 C 取决于 k,

$$\mathbb{E}[\hat{N}(t)] \le Cn^{k+1}\int_t^1 s^{\binom{k+1}{2}-1}e^{-ns^{k+1}}\mathrm{d}s.$$

现在，利用 $s^{\binom{k+1}{2}} = s^{k(k+1)/2}$ 关于 s 递增、$s^{-1}e^{-ns^{k+1}}$ 关于 s递减这一性质，我们可以推导出以下界。令 $c_n \to \infty$ 使得 $c_n = o(\log\log n)$，并设 $t_n' :=$8

$(\frac{(k+2)\log n}{n})^{1/(k+1)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{N}(t_c)] &\le C\int_{t_c}^{t_{cn}} n^{\frac{k}{2}+1}(ns^{k+1})^{k/2}s^{-1}e^{-ns^{k+1}}\mathrm{d}s + C\int_{t_{cn}}^{t'_n} n^{\frac{k}{2}+1}(ns^{k+1})^{k/2}s^{-1}e^{-ns^{k+1}}\mathrm{d}s \\
&\quad + C\int_{t'_n}^{1} n^{k+1}e^{-ns^{k+1}}\mathrm{d}s \\
&\le Cn^{\frac{k}{2}+1}(nt_{c_n}^{k+1})^{k/2}e^{-nt_c^{k+1}}\int_{t_c}^{t_{cn}} s^{-1}\mathrm{d}s + Cn^{\frac{k}{2}+1}((k+2)\log n)^{\frac{k}{2}}e^{-nt_{cn}^{k+1}}\int_{t_{cn}}^{t'_n} s^{-1}\mathrm{d}s + Cn^{-1} \\
&\le Ce^{-c}\left(\frac{k}{2}+1+\frac{k}{2}\frac{\log\log n}{\log n}+\frac{c_n}{\log n}\right)^{k/2}\log(\frac{t_{cn}}{t_c}) + Ce^{-c_n}(k+2)^{k/2}\log(\frac{t'_n}{t_{cn}}) + Cn^{-1} \\
&\le C_{k,c}\left(\log(\frac{t_{cn}}{t_c}) + e^{-c_n}\log(\frac{t'_n}{t_{cn}})\right) + Cn^{-1}.
\end{aligned}$$

现在，由于 $n\to\infty$, $t_{c_n}/t_c\to 1$, $c_n\to\infty$, $\frac{t'_n}{t_{cn}}\to 2^{1/(k+1)}$，因此 $\mathbb{E}[\hat{N}(t_c)]\to 0$. □

定理 3.2. 设 $k\ge 1$。对于 $c\in\mathbb{R}$，我们设 $t_c := t_c(k,n) = \left(\frac{(\frac{k}{2}+1)\text{对数}\ n+\frac{k}{2}\text{对数对数}}{n}\right)^{\frac{1}{k+1}}$。则有

$$\{N_k(t_c)\}_{c\in\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \{\mathcal{P}(c)\}_{c\in\mathbb{R}},$$

其中 $\{\mathcal{P}(c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的泊松过程，其强度测度为 $\mu(k,\ x)\,\mathrm{d}x$，并且收敛性$\xrightarrow{d}$ 如定理 *1.1*所述。

证明。 首先，我们说明，只需证明随机计数测度对应的点过程的收敛性，然后将其归约为适当随机变量的泊松收敛。最后，我们将通过阶乘矩论证建立泊松收敛。我们将概述主要步骤，但省略部分推导，并将读者引向有关类似计算的适当参考文献。上述第一步是纯跳过程弱收敛中的标准步骤，第二步将基于点过程收敛判据以及命题 3.1 中的近似方法。最后一步涉及计算阶乘矩，类似于 [25, 命题 33] 和 [9,引理 7。1]这里我们只提及计算中的关键点。

令 $M_p(\mathbb{R})$ 表示配备模糊收敛拓扑的 $\mathbb{R}$ 上局部有限（Radon）计数测度空间；详见 [24, 第 3] 章。由于 $N_k(t_c)$ 是一个纯跳过程，我们可以通过考虑跳跃时刻，即对于一个博雷尔可测集 $A\subset\mathbb{R}$，将 $N_k(\cdot)$ $c\in\mathbb{R}$ 表示为 $M_p(\mathbb{R})$ 的一个元素：

$$N_k(A) = \sum_{c\in A}\mathbf{1}[N_k(t_c)\ne N_k(t_c-)],$$

类似地， $\mathcal{P}(\cdot)$ 也可以表示为随机 Radon 计数测度。由于连续映射定理（见 [22] 中定理 2.2 第一部分的证明），只需证明 N_k 在 $M_p(\mathbb{R})$ 中的弱收敛性，即

$$N_k \Rightarrow \mathcal{P} \text{ in } M_p(\mathbb{R}).$$

根据上述表示，$N_k((c,\infty))$ 统计了 t_c 处孤立面的数量，而在 t_c 之后形成的孤立面会被计算两次——一次是在它们形成时，另一次是在它们变为非孤立面时。因此，我们有

$$N_k((c,\infty)) = N_k(t_c) + 2\hat{N}_k(t_c).$$

由于[9, 引理 7。1]给出 $\mathbb{E}[N_k(t_c)] \to \mathbb{E}[\mathcal{P}(c)]$ 对所有 $c \in \mathbb{R}$，我们可以立即由命题3.1 得到 $\mathbb{E}[N_k(I)] \to \mathbb{E}[\mathcal{P}(I)]$ 对所有 I 这些集合都是互不相交区间的有限并。由于 $\mathcal{P}$ 的强度测度是非原子的，要完成 M_p(ℝ中的弱收敛性证明，只需证明

$$\mathbb{P}(N_k(I)=0) \to \mathbb{P}(\mathcal{P}(I)=0) = e^{-\mu(k,I)} \text{ as } n\to\infty, \tag{3.4}$$

对所有 I这些集合都是互不相交区间的有限并，且 $\mu(k,I) := \int_I \mu(k,x)\,\mathrm{d}x$；见 [24,命题 3。22]。

令 $I = \cup_{j=1}^{l}(a_{2j-1}, a_{2j}]$，其中 $-\infty < a_1 < \ldots < a_{2l} < \infty$。固定 $c \in (-\infty, a_1)$。定义 $\bar{u} = nu^{k+1} - (\frac{k}{2}+1)\log n - \frac{k}{2}\log\log n$，其中 $u \in [0,1]$，且 $n \geq 3$。为方便起见，我们在论证中省略 $\bar{u}$ 中的 n。定义

$$N'(I) := \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}}^{\neq} \mathbf{1}[i_1,\ldots,i_{k+1} \text{ form a maximal clique in } G(n,t_c)]$$
$$\times\, \mathbf{1}[\min_{j\neq i_1,\ldots,i_k+1} \max\{\bar{U}(j,i_1),\ldots,\bar{U}(j,i_{k+1})\} \in I],$$

这不过是 $G(n,t_c)$ 中在 I 消失的极大团数量。令 $\bar{U}(j,\sigma) = \max\{U(j,i): i\in\sigma\}$，我们将 $N'(I)$ 重写为

$$N'(I) = \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-1}(n)} \mathbf{1}[\sigma \text{ is a clique in } G(n,t_c)]\mathbf{1}[\min_{j\notin\sigma}\bar{U}(j,\sigma)\in I],$$

这里我们利用了：若 $\min_{j\notin\sigma} U(j,\sigma) \in I$则 σ必须是 $G(n,t_c)$ 中的极大团。根据命题 $N(t_c$，3.1渐近为 0，因此不会产生新的极大团；于是渐近而言，过程中唯一的变化 N_k 是 $G(n,t_c)$ 中极大团的消失所致。因此，只要证明（3.4）成立即可

$$N'(I) \xrightarrow{d} \mathcal{P}(I) \text{ as } n\to\infty,$$

其中 $\xrightarrow{d}$ 表示随机变量的标准依分布收敛。通过阶乘矩计算也可以得到相同结论 [26, 定理 2.4 和 2.5]。对于 $I=(c,\infty)$，这由 [9, 引理 7.1] 和命题 3.1得出。这里我们仅略述一般情形的细节。

为方便记号，我们用 σ 表示 $(k+1)$ 元组或 k 维面，并为方便起见，在 $[n]$ 上固定标准全序。此外，对于 $k>r$，将 $k^{(r)} = k(k-1)\ldots(k-r+1)$ 记作 k 的 r 次阶乘幂。在这种记号下，$N'(I)$ 的 r 阶阶乘可以写成

$$N'(I)^{(r)} = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_r}^{\neq}\prod_{i=1}^{r}\mathbf{1}[\sigma_i \text{ is a clique in } G(n,t_c)]\mathbf{1}[\min_{j\notin\sigma_i}\bar{U}(j,\sigma_i)\in I],$$

因此，其 r 阶阶乘矩为

$$\mathbb{E}[N'(I)^{(r)}] = \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}^{\neq} \mathbb{P}\Big(\{\sigma_i\text{'s are cliques in } G(n,t_c)\} \cap \{\min_{j\notin\sigma_i} \bar{U}(j,\sigma_i) \in I\}\Big),$$

我们需要证明，当 $n \to \infty$, $\mathbb{E}[N'(I)^{(r)}] \to \mathbb{E}[\mathcal{P}(I)^{(r)}] = \mu(k,I)^r$ 时，结论成立。这与 [25, 命题 33] 和 [9, 引理 7.1] 的证明类似。假设我们将 $\mathbf{1}[\sigma_i$ 是 $G(n,t_c)]\mathbf{1}[\min_{j\notin\sigma_i} U(j,\sigma_i) \in I]$ 中的一个团 $\mathbf{1}[\sigma$ 简记为; $I]$ 对于任意集合 I，注意到

$$\prod_{j=1}^{r} \mathbf{1}[\sigma_j; I] = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\{1,\dots,2l\}^r} \prod_{j=1}^{r} (-1)^{\alpha_j+1} \mathbf{1}[\sigma_j; (a_{\alpha_j}, \infty)].$$

我们用 $\sum^*_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}$ 表示这些 σ_i 两两不相交，即没有公共顶点。在这种情况下，利用求和中的指示变量相互独立这一性质，可以推出

$$\sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}^{*} \mathbb{E}[\prod_{j=1}^{r} \mathbf{1}[\sigma_j; (a_{\alpha_j}, \infty)]] = \prod_{j=1}^{r} \binom{n-(j-1)(k+1)}{k+1} t_c^{\binom{k+1}{2}} (1-\mathbb{P}(\bar{U} \le a_{\alpha_j})^{k+1})^{n-k-1}\big(1+o(1)\big),$$

其中 U 是一个均匀随机变量，而 $o(1)$ 项源于 σ_i 的顶点之间的边权重也满足所需条件。由此可以推出

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}^{*} \mathbb{E}[\prod_{j=1}^{r} \mathbf{1}[\sigma_j; (a_{\alpha_j}, \infty)]] = \prod_{j=1}^{r} \mu(k, (\alpha_j, \infty)),$$

现在对 $\alpha_i's$ 求和，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}^{*} \mathbb{E}[\prod_{j=1}^{r} \mathbf{1}[\sigma_j; I]] = \mu(k,I)^r.$$

为了完成证明，需要证明对彼此不相交的 σ_i 求和在渐近意义下没有贡献。由于这与 [9, 引理 7.1] 的证明类似，我们略去这一部分。

□

3.2. 从孤立面到贝蒂数——定理 **3.3.** 我们的主要工作是将孤立节点的过程与贝蒂数联系起来，而这正是帮助我们实现这一目标的主要定理。

定理 3.3. 设 $k \ge 1$ 和 $t_c := t_c(k,n) = \Big((\frac{k}{2}+1)\log n + \frac{k}{2}\log\log n + c\Big)^{\frac{1}{k+1}}$ 对 $n \ge 3, c \in \mathbb{R}$ 成立。那么当 $n \to \infty$ 时，我们有，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t\le 1} \{\beta_k(X(n,t)) \ne N_k(X(n,t))\}\Big) \to 0. \tag{3.5}$$

根据命题 3.1，我们知道，对于所有 $X(n,\ t)$ 为纯 $k+1$)-维复形的概率，$t \ge t_c$ 即 $X(n,\ t)$ 具有有限个（尽管是随机的）孤立 k- 面。因此，借助引理 2.6 和 2.7，为了证明定理 1.1 ，我们需要证明

通过移除这些有限个孤立面所得到的随机复形具有平凡性。在移除这些孤立面后，该随机复形是一个纯 $k+1$)-维复形，我们将通过 Garland 方法（定理 2.3）来证明这些随机复形具有平凡性。这需要验证某个谱隙条件。验证该条件的一个重要组成部分，是以下关于 Erd¨os-R´enyi 随机图的谱隙结果。

定理 3.4。 *([13,*定理 1.*1])* 固定 $\delta > 0$并令 $p > (\frac{1}{2}+\delta)\log_n \quad ^n$。令 $d = p(n-1)$ 表示一个顶点的期望度。对于每个 $\epsilon > 0$，存在一个常数 $C = C(\delta, \epsilon)$，使得$\mathbb{P}(|\lambda_2(\tilde{G}(n,p)) - 1| > \frac{C}{\sqrt{d}}) \leq Cn$ $\exp(-(2-\epsilon)d) + C\exp(-d^{\frac{1}{4}}\log n)$，其中 $\tilde{G}$ 表示图 G 的巨型连通分支，即最大连通分支。

对于如上所述的 p，最大连通分支对 $G(n,p)$ 定义良好；例如，参见 [13,引理 5.8]。

注 3.5。上述界可以解释为：如果 $p > (\alpha+1)\log_n \quad ^n$，那么对于某个 $C = C(\alpha)$，我们有

$$\mathbb{P}(|\lambda_2(\tilde{G}(n,p)) - 1| > \frac{C}{\sqrt{d}}) \leq Cn^{-2\alpha-1/2}.$$

这是因为 $n\exp(-(2-\epsilon)d)$ 支配 $\exp(-d^{\frac{1}{4}}\log n)$，并且 $n\exp(-(2-\epsilon)d) < n\exp(-(2-\epsilon)(\alpha+1)\log n) = n^{1-(2-\epsilon)(1+\alpha)} = n^{-2\alpha-1+\epsilon(1+\alpha)}$。取 $\epsilon = 1/2(1+\alpha)$ 即可得到上述不等式。

在 [16] 或 [9], 另一个版本的定理 3.4 中，对$G(n,p)$ 连通且具有较大谱隙的概率估计至多为 $Cn^{-\alpha}$。这样的界对我们来说并不充分，因此我们采用上述界，并分别估计由一个“巨型连通分支”和孤立顶点组成的 Erd¨os-Renyi 随机图的概率。在接近连通区域时，该概率衰减得足够快；见证明中的步骤 2、3 和 4。我们再次说明关于 $t >> t_c$ 证明简化的内容，以及备注3.7中剩余步骤的必要性。

我们首先陈述一个证明定理 3.3 所需的技术引理，但将其证明留到最后。对于 $m \geq 1$，令

$$q(\alpha, m) = \frac{(\alpha+1)\log m}{m}.$$

引理 3.6. 设 $\alpha = {}^{k}{}_{(k+3)\,2} \underline{\quad -} \rho$ 对 $\rho > \rho_0$，取一个 ρ_0 小的量。令 $\mu(t) := (n-k)t^k$ 且$\underline{\mu}(t) := \mu(t) - (\mu(t))^{3/5}$。那么，对于满足 $\forall n \geq n_0$、 $m \geq 1$ 和 $t \geq t_c$ 的 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$，若 $t < q(\alpha, m)$，则有 $m < \underline{\mu}(t)$。

证明。（定理 3.3 的证明）为方便记述，回顾一下我们设定的 $\beta_k(t) = \beta_k(X(n, t))$。为了便于理解，我们将证明分为六个步骤。第一步，我们将证明归结为在固定时刻 t 推导某些概率的定量界。到 STEP 1 处，我们会说明其余各步骤的内容。我们将使用一些

拓扑 第2 节中的若干引理，以及第3 节中的概率估计。 4.

Step 1: Reduction to estimates at a fixed time t.注意到

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)\neq N_k(t)\}\Big)\le \mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)\neq N_k(t)\}\cap\{N_k(t_c)\le m\}\Big)+\mathbb{P}\Big(N_k(t_c)\ge m\Big).$$

由于 $N_k(t_c)$依分布收敛（见命题3.1），我们可以取足够大的 m，使第二项足够小，因此只需证明对所有 $m\ge 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)\neq N_k(t)\}\cap\{N_k(t_c)=m\}\Big)=0. \tag{3.6}$$

ˆ 由命题3.1的证明可知， $\mathbb{E}[N_k(t_c)]\to 0$。因此，只要证明对所有（3.6）即成立 $m\ge 1$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)\neq N_k(t), N_k(t_c)=m, \hat{N}_k(t_c)=0\}\Big)=0. \tag{3.7}$$

现在我们定义$R^*_{k-1,\ m}(t)R_{k-1,\ m}(t)$，其定义受到 [9, 定理 1 的证明的启发。3]。

$$R^*_{k-1,m}(t)\coloneqq\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}^{\neq}\mathbf{1}[i_1,\dots,i_k \text{ form a } (k-1)\text{-face which} \tag{3.8}$$

是 m 的子面，或者在某个 $s\ge t$ 下， $X(s)$ 中至多有 k 个 k-面。]

$$R_{k-1,m}(t)\coloneqq\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\dots,i_k}^{\neq}\mathbf{1}[i_1,\dots,i_k \text{ form a } (k-1)\text{-face which} \tag{3.9}$$

is a subface of m or fewer k-faces in $X(t)$]

我们可以将相关概率分解为以下几项:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)\neq N_k(t), N_k(t_c)=m, \hat{N}_k(t_c)=0\}\Big)&\le \mathbb{P}(R^*_{k-1,m}(t_c)>0)\\&+\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)> N_k(t), N_k(t_c)=m, \hat{N}_k(t_c)=0, R^*_{k-1,m}(t_c)=0\}\Big)\\&+\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c\le t}\{\beta_k(t)< N_k(t), N_k(t_c)=m, \hat{N}_k(t_c)=0, R^*_{k-1,m}(t_c)=0\}\Big)\end{aligned} \tag{3.10}$$

由下面的引理 3.8可知，不等式（3.10）中的第一项在 $n\to\infty$ 时收敛于 0。为完成证明，我们需要证明不等式（3.10）中的第二项和第三项渐近地趋于 0。为证明这一点，我们将证明

$$\sum_{n\ge 1}\mathbb{E}[Z_n]<\infty \tag{3.11}$$

其中

$$Z_n := \int_{t_c}^1 \mathbf{1}[\beta_k(t) > N_k(t), N_k(t_c) = m, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t_c) = 0]\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_c}^1 \mathbf{1}[\beta_k(t) < N_k(t), N_k(t_c) = m, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t_c) = 0]\mathrm{d}t.$$

由于 $\beta_k(t)$ $N_k(t)$ 是纯跳过程，对于每个固定的 n， t 中 $Z_n \neq 0$ 当且仅当事件 $A_n :=$ $\bigcup_{t_c \le t}\{\beta_k(t) \neq N_k(t)$ $N_k(t_c) = m$， $N_k(t_c) = 0$， ，$_m(t_c) = 0\}$ 发生。因此，我们有

$$\mathbf{1}[Z_n > 0] = \mathbf{1}[A_n].$$

因此，利用（3.11）和马尔可夫不等式，我们得到对于所有 $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n\ge 1} \mathbb{P}(Z_n > \epsilon) < \infty,$$

然后由博雷尔-坎泰利引理可得 $Z_n \to 0$ 几乎处处成立，当 $n \to \infty$时。这说明$\mathbf{1}[A_n] \to 0$ 几乎处处成立，当 $n \to \infty$ 时，并且由有界收敛定理，我们得到 $\mathbb{P}$（A_n） $\to 0$当 $n \to \infty$时。因此，我们已经证明了（3.11）意味着不等式（3.10）中的第二项和第三项渐近地趋于零，并且如上文关于（3.11）所述，这就证明了（3.7）。

设定

$$P(t) := \mathbb{P}(\beta_k(X(n,t)) > N_k(t), N_k(t_c) = m, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t_c) = 0),$$
$$Q(t) := \mathbb{P}(\beta_k(X(n,t)) < N_k(t), N_k(t_c) = m, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t_c) = 0),$$

我们将通过证明（3.11），来说明

$$\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^1 P(t) < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^1 Q(t) < \infty \tag{3.12}$$

现在我们概述证明的其余部分。在 STEP 2中，我们将把 $P(t)$拆分为两项 $P_1(t)$ $P_2(t)$，然后分别在 STEP 3 和 STEP 4 中对它们进行界定。在STEP 5中，我们将 $Q(t)$拆分为三项，对其中两项进行界定，剩下的一项则在 STEP 6中界定。

STEP 2: BREAKING P（t） INTO P_1（t） AND P_2（t）。定义 X'（t） $= X$（t） $\setminus \Sigma_k$（t）其中，（t）是孤立面集合。根据引理 2.6,

$$\{\beta_k(X(n,t)) > N_k(t), \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t) = 0\} \subset \{\beta_k(X'(n,t)) \ge 1, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t) = 0\}.$$

对于上述的 $X'(n,t)$和 $\sigma \in \mathcal{K}_{k-1}(n)$，定义

$$B_1(\sigma,t) := \{\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)) \text{ has comp. of size in } [2, N_\sigma(t)/2]\},$$
$$B_2(\sigma,t) := \{\lambda_2(\tilde{\mathrm{lk}}_\sigma(X(n,t))) \le \frac{k}{k+1}\},$$

˜其中，$N_\sigma(t)$ 表示 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 中的顶点数，而 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 是 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 中的巨型连通分支。对于较大的 n，巨型连通分支（即最大连通分支）是定义良好的

（见 [13, 引理 5。8] 例如）。注意，lk_σ（X（n， t））也是 Erd¨os-R´enyi 随机图 G（N_σ（t） t）。由引理 2.5，可得

$$\{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t)) \neq \tilde{\mathrm{lk}}_\sigma(X(n,t))\} = \{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t)) \text{ is not connected}\} \subset B_1(\sigma,t). \tag{3.13}$$

因此，利用上述观察，我们推得

$$\begin{aligned}
P(t) &\leq \mathbb{P}\Big(\beta_k(X'(n,t)) \geq 1, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t) = 0\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\sigma\in X_k(n,t)} \{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t)) \text{ is not connected}\}\Big) \\
&\quad + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\sigma\in X_k(n,t)} \{\lambda_2(\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))) \leq \frac{k}{k+1}\} \cap \{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t)) \text{ is connected}\}\Big) \\
&\qquad \text{(using Garland's theorem - Theorem 2.3)} \\
&\leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\sigma\in X_k(n,t)} B_1(\sigma,t)\Big) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\sigma\in X_k(n,t)} B_2(\sigma,t)\Big), \quad \text{(using (3.13))} \\
&\leq \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-1}(n)} \mathbb{P}\Big(\{\sigma \in X_k(n,t)\} \cap B_1(\sigma,t)\Big) + \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-1}(n)} \mathbb{P}\Big(\{\sigma \in X_k(n,t)\} \cap B_2(\sigma,t)\Big) \\
&= n^k t^{\binom{k}{2}} [P_1(t) + P_2(t)], \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

（ $\{\sigma \in X_k(n,t)\}$ 和 $B_i(\sigma,t)$ 相互独立，且后者同分布 ）

其中，对于某个 $\sigma \in \mathcal{K}_{k-1}(n)$，有 $P_1(t) = \mathbb{P}(B_1(\sigma,t))$ $P_2(t) = \mathbb{P}(B_2(\sigma,t))$。因此，要证明$\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^1 P(t) < \infty$，只需证明 $\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} P_i(t) < \infty$ 对 $i = 1, 2$ 成立。

Step 3: Bounding $P_1(t)$。回想一下，$\mu(t) = (n-k)t^k, \underline{\mu}(t) = \mu(t) - \mu(t)^{3/5}$，并令 $\overline{\mu}(t) := \mu(t) + \mu(t)^{3/5}$。至于 $P_1(t)$，注意到

$$\begin{aligned}
P_1(t) &\leq \mathbb{P}\Big(\{\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)) \text{ 的连通分量大小位于 } (2, \overline{\mu}(t)/2)\} \cap \{N_\sigma(t) \in (\underline{\mu}(t)\ \overline{\mu}(t))\}\Big) \\
&\quad + \mathbb{P}\Big(|N_\sigma(t) - \mu(t)| \geq \mu(t)^{3/5}\Big) \\
&=: T_1(t) + T_2(t) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

现在我们尝试对 $T_1(t)$ 进行界定。它是一个关于 Erd¨os-R´enyi 随机图的计算，与 $G(nt^k, t)$ 类似。由于 $G(nt^k, t)$ 已接近连通性区域，因此以极高的概率，$G(nt^k, t)$ 是连通的，只有有限个孤立节点除外。因此，我们预期 $P_1(t)$ 会足够快地衰减。

令 $C_j(\sigma,t)$ 表示 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 中具有 j 个顶点的连通分量数。设 $u_j(t) = \mathbb{E}\big[C_j(\sigma,t)\mathbf{1}[N_\sigma(t) \in (\underline{\mu}(t)\ \overline{\mu}(t))]\big]$。显然，我们有

$$T_1(t) \leq \sum_{j=2}^{\lfloor\overline{\mu}(t)/2\rfloor} u_j(t).$$

由于 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)) \overset{d}{=} G(N_\sigma(t)\ t)$，利用标准生成树计数估计（例如参见 [10, 第 4 节。1]），并对 N_σ 进行条件化，我们有

$$u_j(t) \le \frac{\overline{\mu}(t)^j}{j!} j^{j-2} t^{j-1} (1-t)^{j(\underline{\mu}(t)-j)} \le \frac{1}{tj^2} (e\overline{\mu}(t)t)^j e^{-tj(\underline{\mu}(t)-j)}$$

对于足够大的 n 和 $j \le \overline{\mu}(t)/2$，有 $\overline{\mu}(t) \le 5nt^k/4, \underline{\mu}(t) - \overline{\mu}(t)/2 \ge 2nt^k/5$，因此我们推出

$$n^k t^{\binom{k}{2}} u_j(t) \le \frac{(n^2 t^{k+1})^{k/2}}{tj^2} (\frac{5}{4} ent^{k+1} e^{-2nt^{k+1}/5})^j.$$

我们可以选择足够大的 κ，使其依赖于 k，从而对于 $t \ge \kappa t_c$，有 $2nt^{k+1}/5 \ge (\frac{k}{2}+5) \log n$，因此我们得到

$$n^k t^{\binom{k}{2}} u_j(t) \le j^{-2} (\frac{5}{4} en^{-3/2})^j.$$

这说明，对于 $t \ge \kappa t_c$ 和某个常数 C，$\sum_{j=2}^{\lfloor \overline{\mu}(t)/2 \rfloor} n^k t^{\binom{k}{2}} u_j(t) \le Cn^{-5/4}$。因此

$$\sum_{n\ge 1} \int_{\kappa t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} T_1(t) \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.16}$$

现在考虑 $t \in [t_c, \kappa t_c)$。然后，再次利用上述关于 $u_j(t)$ 的界以及对 $\overline{\mu}(t)$ $\underline{\mu}(t)$ 的选择，我们得到：当 n 足够大时，

$$\begin{aligned} n^k t^{\binom{k}{2}} u_j(t) &\le \frac{1}{t_c j^2} (2k\kappa n \log n)^{k/2} (\frac{5}{4} e\kappa^{k+1} (nt_c)^{k+1} n^{-2(k/2+1)/5})^j \\ &\le \frac{1}{t_c j^2} n^{\frac{k}{2}(1-2j/5) - \frac{19}{20}} (2k\kappa \log n)^{k/2} (\frac{5}{4} e\kappa^{k+1} (nt_c)^{k+1} n^{-1/20})^j. \end{aligned}$$

由于对于 $k \ge 1, j \ge 3$，$\frac{k}{2}(1-2j/5) - \frac{19}{20} < -1$，这足以推出 t

$$\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^{\kappa t_c} \sum_{j=3}^{\lfloor \overline{\mu}(t)/2 \rfloor} n^k t^{\binom{k}{2}} u_j(t) < \infty.$$

对于 $j=2$，可以得到一个更精确的界：

$$n^k t^{\binom{k}{2}} u_2(t) \le \frac{1}{t_c j^2} (2k\kappa n \log n)^{k/2} (\frac{5}{4} e\kappa^{k+1} (nt_c)^{k+1} e^{-t(\underline{\mu}(t)-2)})^2.$$

将其代入上述界中，可得

$$\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^{\kappa t_c} \sum_{j=2}^{\lfloor \overline{\mu}(t)/2 \rfloor} n^k t^{\binom{k}{2}} u_j(t) < \infty$$

因此结合（3.16），我们得出

$$\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} T_1(t) \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.17}$$

现在我们对 $T_2(t)$ 进行界定。由于 $N_\sigma(t)$ 服从参数为 $n-k$、t^k 的二项分布，利用伯恩斯坦不等式 [27, 定理 2.8.4] 对二项随机变量的结论，我们可以推导出

$$
\begin{aligned}
T_2(t) = \mathbb{P}(|N_\sigma(t) - \mu(t)| \le \mu(t)^{3/5}) &\le 2\exp\left(- \frac{(n-k)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{6k}{5}}}{2(t^k(1-t^k) + (1/3)(\frac{t^{3k}}{(n-k)^2})^{\frac{1}{5}})} \right) \\
&\le 2\exp\left(- \frac{(n-k)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{6k}{5}}}{2(t^k + (1/3)(\frac{t^{3k}}{(n-k)^2})^{\frac{1}{5}})} \right) \\
&\le 2\exp\left(- \frac{n^{\frac{1}{5}} t_c^{\frac{6k}{5}}}{2(t_c^k + (\frac{t_c^{3k}}{n^2})^{\frac{1}{5}})} \right) \\
&\qquad \text{（因为指数项内的表达式关于 } t \text{ 单调递增。）}
\end{aligned}
$$

现在代入上述界，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} T_2(t)\mathrm{d}t &\le 2\int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} \exp\left(- \frac{n^{\frac{1}{5}} t_c^{\frac{6k}{5}}}{2(t_c^k + (\frac{t_c^{3k}}{n^2})^{\frac{1}{5}})} \right)\mathrm{d}t \\
&\le 2\int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} \exp(-n^{\frac{3}{5(k+1)}} (\log n)^{\frac{3k}{5(k+1)}})\mathrm{d}t \quad \text{(using the value of } t_c\text{)} \\
&\le 2n^k \exp(-n^{\frac{3}{5(k+1)}} (\log n)^{\frac{3k}{5(k+1)}}).
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} T_2(t)\mathrm{d}t < \infty. \tag{3.18}
$$

因此，将（3.18）与（3.17）和（3.15）结合起来，我们得到

$$
\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} P_1(t) < \infty. \tag{3.19}
$$

Step 4: Bounding $P_2(t)$。我们将使用定理 3.4对 $P_2(t)$ 进行估计。

令 $\alpha = \frac{k}{(k+3)2} - \rho$ 取为稍后选定的值，并回顾 $\mu(t) = (n-k)t^k$，$\underline{\mu}(t) := \mu(t) - (\mu(t))^{3/5}$ 如引理 3.6 中所述。注意，对于 $t \ge t_c$，$t(\underline{\mu}(t) - 1)$ 关于 n 和 t 均递增。此外，由于当 $n \to \infty$ 时，$t(\underline{\mu}(t) - 1) \to \infty$，我们可以选取足够大的 n_0，使引理 3.6 适用。此外，假设对于所有 $n \ge n_0$，以及如注 3.5 中的 $C = C(\alpha)$，都有

$$
\frac{C}{\sqrt{(\underline{\mu}(t)-1)t}} \le \frac{C}{\sqrt{(\underline{\mu}(t_c)-1)t_c}} \le \frac{1}{k+1}, \quad t \ge t_c. \tag{3.20}
$$

回顾 $q(\alpha,\ m)$ 的记号，与引理 3.6 之前相同；并且注意 $N_\sigma(t)$ 是 $\mathbf{lk}_\sigma(X(n,\ t))$ 中顶点的数量。

$$
\begin{aligned}
P_2(t) &\le \mathbb{P}(B_2(\sigma,t)\cap\{N_\sigma(t)\ge \underline{\mu}(t)\}) + \mathbb{P}(N_\sigma(t)<\underline{\mu}(t)) \\
&\le \mathbb{P}\big(B_2(\sigma,t)\cap\{t\ge q(\alpha,N_\sigma(t)), N_\sigma(t)\ge\underline{\mu}(t)\}\big) + \mathbb{P}(N_\sigma(t)<\underline{\mu}(t)) \\
&\qquad \text{(using } n\ge n_0 \text{ and Lemma 3.6)} \\
&\le \mathbb{P}\big(B_2(\sigma,t)\cap\{t\ge q(\alpha,N_\sigma(t)), N_\sigma(t)\ge\underline{\mu}(t)\}\big) + \mathbb{P}(|N_\sigma(t)-\mu(t)|\ge \mu(t)^{3/5}) \\
&=: T_3(t)+T_2(t), \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

其中回顾一下，$T_2(t)$ 在 (3.15) 中定义。现在，我们将通过对 $T_3(t$ 条件化来计算 $N_\sigma(t)$。注意，给定 $N_\sigma(t)$ 后，$\mathbf{lk}_\sigma(X(n,t))$ 与$G(N_\sigma,t)$ 具有相同的分布。因此，给定 $N_\sigma(t)$,

$$
B_2(\sigma,t)\subset\{|1-\lambda_2(\tilde{G}(N_\sigma(t),t))|>\frac{1}{k+1}\}.
$$

因此，我们推导出

$$
\begin{aligned}
T_3(t) &= \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}[t\ge q(\alpha,N_\sigma(t)), N_\sigma(t)\ge\underline{\mu}(t)]\mathbb{P}\big(B_2(\sigma,t)\mid N_\sigma(t)\big)\Big] \\
&\le \mathbb{E}\Big[[\mathbf{1}[t\ge q(\alpha,N_\sigma(t)), N_\sigma(t)\ge\underline{\mu}(t)]\mathbb{P}\big(|1-\lambda_2(\tilde{G}(N_\sigma(t),t))|>\frac{1}{k+1}\mid N_\sigma(t)\big)\Big] \\
&\le \mathbb{E}\Big[[\mathbf{1}[t\ge q(\alpha,N_\sigma(t)), N_\sigma(t)\ge\underline{\mu}(t)]C_\alpha N_\sigma(t)^{-2\alpha-1/2}\Big] \\
&\quad \text{(from Remark 3.5 with } d=(N_\sigma(t)-1)t \text{ and (3.20), for } n\ge n_0) \\
&\le C_\alpha\underline{\mu}(t)^{-2\alpha-1/2} \\
&\quad \text{(since } N_\sigma(t)\ge\underline{\mu}(t)).
\end{aligned}
$$

不失一般性，我们假设对于 $n\ge n_0$，$(1-\mu(t_c)^{-2/5})^{-2\alpha-1/2}\le 1/2$。由于$\mu(t)\ge\mu(t_c)$，对于 $n\ge n_0$，我们有 $(1-\mu(t)^{-2/5})^{-2\alpha-1/2}\le 1/2$ 对所有 $t\ge t_c$均成立。因此，我们可以推导出

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}} T_3(t)\mathrm{d}t \le \int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}}\underline{\mu}(t)^{-2\alpha-1/2}\mathrm{d}t \le \int_{t_c}^1 n^k t^{\binom{k}{2}}(nt^k)^{-2\alpha-1/2}(1-\mu(t)^{-2/5})^{-2\alpha-1/2}\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2}n^{k-2\alpha-1/2}\int_{t_c}^1 t^{k(\frac{k+1}{2}-(2\alpha+1/2))}\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2}n^{k-2\alpha-1/2}t_c^{k(\frac{k+1}{2}-(2\alpha+1/2))} \quad (t \text{ has a negative exponent as } 2\alpha=k(k+3)-2\rho \text{ with } \rho \text{ small, }) \\
&= \frac{1}{2}\Big((\frac{k}{2}+1)\log n+\frac{k}{2}\log\log n+c\Big)^{\frac{k}{k+1}(\frac{k+1}{2}-(2\alpha+1/2))} n^{\frac{k}{2}-\frac{2\alpha+1/2}{k+1}} \quad \text{(substituting the value of } t_c) \\
&= \frac{1}{2}\Big((\frac{k}{2}+1)\log n+\frac{k}{2}\log\log n+c\Big)^{\frac{k}{k+1}(\frac{k+1}{2}-(2\alpha+1/2))} n^{-\frac{k^2+5k+1-2\rho}{2(k+1)}},
\end{aligned}
$$

其中，在最后一行我们用到了 $2\alpha = k(k+3) - 2\rho$，并且必要时可以选择一个更小的 ρ。由于 n的系数小于 -1，由上述界可得

$$\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^{1} n^k t^{\binom{k}{2}} T_3(t)\mathrm{d}t < \infty. \tag{3.22}$$

这与 (3.18) 和 (3.21) 一起给出

$$\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^{1} n^k t^{\binom{k}{2}} P_2(t) < \infty. \tag{3.23}$$

STEP 5: BOUNDING $Q(t)$。回顾一下，$\Sigma_k(t)$ 是 $X(n,t)$ 中的孤立面，且$X'(n,t) = X(n,t) - \Sigma_k(t)$。由引理 2.7 可知，$Q(t)$ 可按如下方式界定。

$$Q(t) \leq \mathbb{P}\Big(\beta_{k-1}(X'(t)) \neq 0, N_k(t_c) = m, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t_c) = 0\Big).$$

因此，我们可以再次利用定理 2.3 进一步对这些量作如下界定。

$$Q(t) \leq Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t), \tag{3.24}$$

其中

$$Q_1(t) := \mathbb{P}\Big(\cup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)}\{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t)) \text{ is not connected}\} \cap \{N_k(t_c) = m, \hat{N}_k(t_c) = 0, R^*_{k-1,m}(t_c) = 0\}\Big),$$

$$Q_2(t) := \mathbb{P}\Big(\cup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)}\{|\lambda_2(\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))) - \lambda_2(\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)))| \geq \frac{1}{2(k+1)}\}\Big),$$

$$Q_3(t) := \mathbb{P}\Big(\cup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)}\{|1 - \lambda_2(\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)))| \geq \frac{1}{2(k+1)}\}\Big).$$

如同在 STEP 4 中界定 $P_2(t)$ 时一样，利用谱隙定理（定理 3.4），可以证明

$$\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^{1} Q_3(t) < \infty. \tag{3.25}$$

可以利用 Wielandt–Hoffman 定理 [12] 对 $Q_2(t)$ 作如下界定。它使我们能够用 $\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))$ 的谱隙来控制 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 的谱隙。该定理如下所述：设 A 和 B 是正规矩阵。设它们的特征值 a_i 和b_i 按使 $\sum_i |a_i - b_i|^2$ 最小化的方式排序。那么，

$$\sum_i |a_i - b_i|^2 \leq ||A - B|| \tag{3.26}$$

其中 $||\cdot||$ 表示 Frobenius 矩阵范数。因此，我们有

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= \mathbb{P}\Big(\cup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)}\{|\lambda_2(\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))) - \lambda_2(\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)))| \geq \frac{1}{2(k+1)}\}\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\cup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)}\{||\mathcal{L}_{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))} - \mathcal{L}_{\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))}|| \geq \frac{1}{2(k+1)}\}\Big) \quad \text{(by (3.26))} \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{L}_{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))}$ 与 $\mathcal{L}_{\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))}$ 的各项相差了那些与 σ共同构成极大的 k-面之顶点在 lk_σ 中的度，因此我们会过度计数，并对某个 σ 之外的顶点与 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 中顶点之间连通性较低的概率进行上界估计。注意，对于任意顶点 $v \notin \sigma$，从 v 到 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 中某个顶点的边数服从参数为 $(n-k)$ t^k 的二项分布。将该数量记为 $deg'(v)$。由上文可得，

$$
\begin{aligned}
Q_2(t) &\le \mathbb{P}\Big(\cup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)} \{||\mathcal{L}_{\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))} - \mathcal{L}_{\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))}|| \ge \frac{1}{2(k+1)}\}\Big) \\
&\le \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)} \bigcup_{v\notin\sigma} \{deg'(v) \le 3(k+1)\binom{m}{2}\}\Big) \\
&\le \binom{n}{k-1}(n-k+1)\exp\Big(- \frac{(3(k+1)\binom{m}{2} - (n-k)t^k)^2}{2(n-k)t^k(1-t^k) + (1/3)(3(k+1)\binom{m}{2} - (n-k)t^k)}\Big) \\
&\quad \text{(by Bernstein's inequality [27, Theorem 2.8.4])} \\
&\le n^k \exp\Big(- \frac{(3(k+1)\binom{m}{2} - (n-k)t^k)^2}{2(n-k)t^k(1-t^k) + (1/3)(3(k+1)\binom{m}{2} - (n-k)t^k)}\Big) \\
&\le n^k \exp\Big(- \frac{(3(k+1)\binom{m}{2} - nt^k)^2}{2nt^k + (1/3)(3(k+1)\binom{m}{2} - nt^k)}\Big) \\
&\le n^k \exp\Big(- \frac{(3(k+1)\binom{m}{2} - nt_c^k)^2}{2nt_c^k + (1/3)(3(k+1)\binom{m}{2} - nt_c^k)}\Big) \\
&\sim n^k \exp(-n^{1/(k+1)})
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$
\sum_{n\ge 1} \int_{t_c}^1 Q_2(t) < \infty. \tag{3.27}
$$

证明的下一步也是最后一步，将着重于给 $Q_1(t)$ 找到上界。

Step 6: Bounding $Q_1(t)$。

在 $Q_1(t)$ 中所考虑的事件发生时， $\Sigma_k(t)$ 的基数为 m，并且由于在 $\Sigma_k(t)$ 中删除面会使 $\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))$ 不连通，这意味着 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 不是 m-连通的；也就是说，删除 m 条边会使 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 不连通，删除 m 个顶点也会如此。这是因为删除每个 k-面至多会删除 $\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))$ 中的一条边。由于 $\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 再次服从 $G(N_\sigma(t)\ t)$ 分布，其中 $N_\sigma(t)$ 服从二项分布 $\mathrm{Binomial}(n, t^{k-1})$，根据马尔可夫不等式，我们有

$$
Q_1(t) \le \sum_{\sigma\in\mathcal{K}_{k-2}(n)} \mathbb{P}\Big(\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)) \text{ is not } m\text{-connected}\Big) \tag{3.28}
$$

为了给出这个量的上界，我们采用与 [10, 定理 4.3] 中相同的论证。因此，类比于步骤 3，这一计算涉及一个类似于 $G(nt^{k-1}, t)$ 的 Erd¨os-R´enyi 随机图。由于我们远高于 $G(nt^{k-1}, t)$ 的连通性区域，因此以极高概率， $G(nt^k, t)$ 是

m-连通的，对任意 m 都成立。因此，我们预期 $Q_1(t)$ 会以足够快的速度衰减。现在我们将其形式化。

固定 $\sigma \in \mathcal{K}_{k-2}(n)$，$n(t) = nt^{k-1}$ 和 $N = N_\sigma(t)$。再次像式 (3.18的证明中那样使用伯恩斯坦不等式，我们可以证明

$$\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^{1} n^{k-1}t^{\binom{k-1}{2}}\mathbb{P}\big(|N-n(t)|\geq n(t)^{3/5}\big)\,\mathrm{d}t<\infty.$$

令 $\underline{n}(t) := n(t) - n(t)^{3/5}, \overline{n}(t) := n(t) + n(t)^{3/5}$。因此，要证明 $Q_1(t)$ 的可求和性，只需证明

$$\sum_{n\geq 1}\int_{t_c}^{1} n^{k-1}t^{\binom{k-1}{2}}\mathbb{P}\Big(\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)) \text{ is not } m\text{-connected}\cap\{N\in[\underline{n}(t),\overline{n}(t)]\}\Big)\,\mathrm{d}t<\infty. \tag{3.29}$$

对于一个含有 N 个顶点的图 G（例如 $N > 2m$），若它不是 m-连通的，则以下两个事件之一必定发生：(i) 图中存在一个度至多为 m 的顶点；或 (ii) 存在顶点的不相交子集 S, T，使得 $|S| < m+1, m-|S|+2 \leq |T| \leq \frac{N-|S|}{2}$，且 T 是 $G-S$ 的一个连通分支。在 (ii) 中，关于 T 基数的假设源于这样一个事实：若 (i) 不发生且 G 不是 m-连通的，则 $G-S$ 有两个连通分量，因此其中一个的大小至多为 $\frac{N-|S|}{2}$。此外，由于 T 是 $G-S$ 的一个连通分支，T 中的顶点与 S 相连，或彼此之间有边。由于 $|S| < m$，T 中的一个顶点必须在 T 中至少有 $m+1-|S|$ 个邻点，这就给出了 $|T|$ 的下界。

因此，简写记号后，我们得到

$$\{\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t)) \text{ is not } m\text{-connected}\} \leq \{\exists \deg \leq m\} + \{\exists S, T\}. \tag{3.30}$$

我们首先对第二项进行界定。根据马尔可夫不等式，并使用与界定 $T_1(t)$ 时相同的生成树论证（另见 [10, 定理 4。3]），再对 $N = N_\sigma(t)$ 进行条件化，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\exists S,T\Big|N\Big) &\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=\max\{2,m-j+2\}}^{\frac{N-j}{2}}\binom{N}{j}\binom{N}{l}l^{l-2}t^{l-1}\binom{jl}{j}t^j(1-t)^{l(N-j-l)}\\
&\leq t^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=\max\{2,m-j+2\}}^{\frac{N-j}{2}}\Big(\frac{Ne}{j}(le)t\Big)^j l^{-2}\Big(Nete^{-(N-l-j)t}\Big)^l \ (\text{using } j!\geq(j/e)^j, 1-t\leq e^{-t})\\
&\leq t^{-1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=\max\{2,m-j+2\}}^{\frac{N-j}{2}}\Big(\frac{Ne}{j}(le)t\Big)^j l^{-2}\Big(Nete^{-(N-j)t/2}\Big)^l \ (\text{since } j+l\leq(N+j)/2)
\end{aligned}$$

因此，我们可以推导出，当 n 较大时，存在一个常数 C（依赖于 m），使得

$$\mathbb{P}\Big(\exists S,T\Big|N\in[\underline{n}(t),\overline{n}(t)]\Big)\leq Ct^{-1}\big(\overline{n}(t)^2t\big)^m\sum_{l=2}^{\frac{\overline{n}(t)-1}{2}}l^{-2}\big(e\,\overline{n}(t)t\,e^{-(\underline{n}(t)-m)t/2}\big)^l$$

由于 $t \geq t_c$，我们有 $(\underline{n}(t) - m + 1)t \geq \frac{n^{1/k+1}}{2}$，当 n 较大时成立，因此利用 m，$k \geq 1$，我们得到：

$$\mathbb{P}\Big(\exists S, T \Big| N \in [\underline{n}(t), \overline{n}(t)]\Big) \leq Ce^{-\frac{n^{1/k+1}}{4}} n^{2(m-1)} \sum_{l=2}^{\frac{\overline{n}(t)-1}{2}} l^{-2} \big(e\, n\, e^{-\frac{n^{1/k+1}}{8}}\big)^l$$

由于该项以指数速度衰减，可以证明

$$\sum_{n\geq 1} \int_{t_c}^{1} n^{k-1} t^{\binom{k-1}{2}} \mathbb{P}\Big(\{\exists S, T\} \cap \{N \in [\underline{n}(t), \overline{n}(t)]\}\Big)\, \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.31}$$

现在我们来界定第一项的概率。给定 N，$\mathrm{lk}_\sigma(X(n,t))$ 中一个顶点的度服从参数为 N 和 t 的二项分布，因此，

$$\mathbb{P}\Big(\exists \deg < m \mid N\Big) \leq \sum_{j=0}^{m-1} N t^j (1-t)^{N-j}.$$

现在利用上述关于 N 的界，我们推出：对于一个常数 C（取决于 m），

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\exists \deg < m | \{N \in [\underline{n}(t), \overline{n}(t)]\}\Big) &\leq \sum_{j=0}^{m-1} \overline{n}(t) t^j e^{-(\underline{n}(t)-j)t} \\ &\leq Cne^{-\frac{n^{1/k+1}}{2}}.\end{aligned}$$

因此，我们可以立即得到

$$\sum_{n\geq 1} \int_{t_c}^{1} n^{k-1} t^{\binom{k-1}{2}} \mathbb{P}\Big(\{\exists \deg < m\} \cap \{N \in [\underline{n}(t), \overline{n}(t)]\}\Big)\, \mathrm{d}t < \infty. \tag{3.32}$$

现在由（3.29）、（3.30）、（3.31）和（3.32），可得

$$\sum_{n\geq 1} \int_{t_c}^{1} Q_1(t) < \infty, \tag{3.33}$$

因此，结合（3.24）、（3.33）、（3.27），我们得到

$$\sum_{n\geq 1} \int_{t_c}^{1} Q(t) < \infty. \tag{3.34}$$

因此，定理3.3 的证明结合（3.11）、（3.12）、（3.14）、（3.19）、（3.23）和（3.34）即可完成。□

注 3.7. 如果我们只想证明 $t >> t_c$ 的情形下的定理 3.3，那么 $N_k^*(t)$ 以高概率 $= 0$，这将简化上述证明中的步骤 2、3 和 4，并使步骤 5 和 6 变得多余。此外，尽管证明中声称对于 $Q_1(t)$ 有一个较弱的界，但在 *[9, 定理 1.3]*，的证明中，似乎假设 $\mathrm{lk}_\sigma(X'(n,t))$ 的分布与 Erd ¨os-R ´enyi 随机图相同（该文第 114 页第一段），而这未必成立。正如我们在步骤 6 中所示，可以通过 Erd ¨os-R ´enyi 随机图的 m-连通性结果来实现这一点，但确实需要额外工作。

3.3. 主要定理的证明 - 定理 **1.1**、**1.2** 和 **1.3**。

证明。 (定理 1.1 的证明) 该证明由定理 3.2、3.3 和斯卢茨基引理推出。

□

证明。 （定理 1.2的证明）注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{n,k} \neq T'_{n,k}) &\leq \mathbb{P}(T_{n,k} \leq t_c) + \mathbb{P}(T'_{n,k} \leq t_c) + \mathbb{P}(T_{n,k} \neq T'_{n,k}, T_{n,k}, T'_{n,k} \geq t_c) \\ &= \mathbb{P}(T_{n,k} \leq t_c) + \mathbb{P}(T'_{n,k} \leq t_c) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{t_c \leq t \leq 1} \{\beta_k(X(n,t)) \neq N_k(X(n,t))\}\Big),\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为如果 $T_{n、\ k} \neq T'_{n、\ k}$ 均大于 t_c，那么存在一个 $t \geq t_c$，使得 $\beta_k(X(n,t)) > 0 = N_k(X(n,t))$ 或 $\beta_k(X(n,t)) = 0 < N_k(X(n,t))$。现在令 $n \to \infty$ 并利用定理 3.3、1.1 和 3.2，可得

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_{n,k} \neq T'_{n,k}) \leq 2e^{-\mu(k,c)}.$$

令 $c \to -\infty$ 并注意到 $\mu(k,c) \to \infty$，即可完成证明。 □

可以将上述论证加以扩展，从而证明以下结论：对于 $m \geq 0$，令$T_{n,\ k}(m) = \inf\{t : \beta_k(X(n,s)) \leq m, \quad \forall s \geq t\}$，并类似地定义相对于$N_k(X(n,t))$的 $T'_{n,\ k}(m)$。则有

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_{n,k}(m) \neq T'_{n,k}(m)) = 0.$$

证明。（定理 1.3 的证明）再次，设 $t_c = t_c(1,n)$。利用定理2.4，我们可推出 t

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{t \geq t_c} \{\Pi_1(X(n,t))\text{不具有性质（}T\text{）}\}\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{t \geq t_c} \{X(n,t)\text{含有一个孤立的 2-面}\} \bigcup \cup_{i=1}^{n} \{\mathrm{lk}_i(X(t)) \text{ is not connected}\} \bigcup \cup_{i=1}^{n} \{\lambda_2(\mathrm{lk}_i(X(t))) < \frac{1}{2}\}\Big)$$

根据并集界，上述概率可拆分为三项之和，其中第一项可由 $1 - e^{-\mu(1,c)}$上界控制，这可由定理3.2得出。在定理3.3证明的步骤 2 和 3 中，我们分别证明：对于某个 $t \geq t_c(k, \ n)$，$k-1$-面在 $X(n, \ t)$中的链接不连通，或其谱隙 λ_2 小于$\frac{k}{k+1}$的概率渐近趋于零。将这些界应用于 $k = 1$，可知上述第二项和第三项均趋于零。□

3.4. 一个概率引理及引理 **3.6**的证明。 回顾式（ $R_{k-1}(t)$）和（ $R^*_{k-1}(t)$）分别定义的量（3.9）和（3.8）。这里，我们证明 $\mathbb{E}[R^*_{k-1}(t)]$ 趋于 0。

引理 3.8. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[R^*_{k-1}(t_c)] = 0$。

ˆ证明。 定义 $R_{k-1}(t) := R^*_{k-1}(t) - R_{k-1}(t)$。在 [9, 第 7 节2] 中已经证明，ˆ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[R_{k-1}(t_c)] = 0$，因此，为了完成证明，我们将证明 $\mathbb{E}[R_{k-1}(t_c)]$ 的收敛性

通过与命题 3.1 中类似的计算。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{R}_{k-1}(t_c)] \le & \sum_{l=0}^{m} \mathbb{E}\Big[\frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k}^{\neq} \mathbf{1}[i_1,\dots,i_k \text{ do not form a } k\text{-clique in } G(n,t_c)] \\
& \times \mathbf{1}[i_1,\dots,i_k \text{ form a } k\text{-clique in } G(n,s) \text{ which is a subclique} \\
& \text{of exactly } l \ (k+1)\text{-cliques in } G(n,s) \text{ for some } s > t_c]\Big] \\
= & \sum_{l=0}^{m} \int_{t_c}^{1} \binom{n}{k} x^{\binom{n}{k}-1} \binom{n-k}{l} x^{kl} (1-x^k)^{n-k-l} dx \\
\le & \sum_{l=0}^{m} \int_{t_c}^{1} n^{k+l} x^{\binom{n}{k}-1} x^{kl} (1-x^k)^{n-k-l} dx \\
\le & \sum_{l=0}^{m} \int_{t_c}^{1} n^{k+l} x^{\binom{n}{k}-1} x^{kl} e^{-x^k(n-k-l)} dx \\
\le & \sum_{l=0}^{m} \int_{t_c}^{1} n^{k+l} x^{\binom{n}{k}-1} x^{kl} e^{-(t_c)^k(n-k-l)} dx \\
\le & C \sum_{l=0}^{m} \int_{t_c}^{1} n^{k+l} x^{n^k-1} x^{kl} e^{-((\frac{k}{2}+1)\log n)\frac{k}{k+1} n^{\frac{1}{k+1}}} dx \\
\le & (m+1) n^{k+m} e^{-((\frac{k}{2}+1)\log n)\frac{k}{k+1} n^{\frac{1}{k+1}}}
\end{aligned}
$$

由于指数项将占主导地位，当 $n \to \infty$ 时，上式将趋于 0。 □

上述计算比命题 3.1 中的计算更简单，因为这里考虑的是 $(k-1)$-面。

证明。（引理 3.6 的证明）由于 $q(\alpha, m) = \frac{(\alpha+1)\log m}{m}$ 关于 m 单调递减（当 $m > 1$ 时），且 $\underline{\mu}(t)$ 随 t 增大，因此只需证明 $t_c > q(\alpha, \underline{\mu}(t_c))$。现在，

$$
\begin{aligned}
& t_c - q(\alpha, \underline{\mu}(t_c)) = t_c - \frac{(\alpha+1)\log(nt_c^k - (nt_c^k)^{\frac{3}{5}})}{nt_c^k - (nt_c^k)^{\frac{3}{5}}} \ge t_c - \frac{(\alpha+1)\log(nt_c^k)}{nt_c^k - (nt_c^k)^{\frac{3}{5}}} \\
= & \Big(\frac{1}{nt_c^k - (nt_c^k)^{3/5}}\Big)(nt_c^{k+1} - n^{3/5} t_c^{\frac{3k}{5}+1} - (\alpha+1)\log(nt_c^k))
\end{aligned}
$$

注意，上式中的分母为正。代入 t_c 的值后，分子为

$$
\begin{aligned}
& \Big((\frac{k}{2}+1)\log n + \frac{k}{2}\log\log n + c\Big) - n^{\frac{2}{5(k+1)}} \Big(\frac{k}{2}+1)\log n + \frac{k}{2}\log\log n + c\Big)^{\frac{3k+5}{5(k+1)}} - \\
& \frac{\alpha+1}{k+1}\log n - \frac{k(\alpha+1)}{k+1}\log\Big((\frac{k}{2}+1)\log n + \frac{k}{2}\log\log n + c\Big) \\
= & (\frac{k}{2}+1-\frac{\alpha+1}{k+1})\log n + O(\log\log n)
\end{aligned}
$$

代入 $\alpha = {}^{k}\!/_{(k+3)\,2} - \rho$，并令 ρ 足够小，我们得到上式中 $\log n$ 的系数为正。这意味着当 n 足够大时，所需的不等式成立。□

Acknowledgements

DY 的研究得到了印度统计学院的 CPDA、DST-INSPIRE 教师奖和 SERB-MATRICS 资助。AR 得到了 NSF 资助项目 DMS- 1906414 的部分支持。本项目最初于 2017 年在班加罗尔印度统计学院作为 AR 的数学硕士项目的一部分启动。AR 还感谢印度统计学院班加罗尔分院提供访问并研究这一问题的机会。

References

[1] Werner Ballmann 和 J ´Swiatkowski。《多面体胞复形自同构群的 L2 上同调与性质（T）》。《几何与泛函分析》，7：615–645，1997。5[2]Omer Bobrowski。《随机 ˇcech 复形中的同调连通性》。《概率论及相关领域》，183(3-4)：715–788，2022。1, 3[3]Omer Bobrowski 和 Dmitri Krioukov。《随机单纯复形：模型与现象》。载于《高阶系统》，第59–96页。Springer，2022。1[4]B´ela Bollob´as 和 Andrew Thomason。《小阶随机图》。载于 Micha lKaro´nski 和 Andrzej Ruci´nski 编，《随机图 ’83》，《北荷兰数学研究》第118卷，第47–97页。North-Holland，1985。3[5] Armindo E. Costa 和 Michael Farber。《大型随机单纯复形，I》。《拓扑学与分析学杂志》，8(03)：399–429，2016。4[6]Armindo E. Costa 和 Michael Farber。《大型随机单纯复形，II；基本群》。《拓扑学与分析学杂志》，9(03)：441–483，2017。4[7] Armindo E. Costa 和 Michael Farber。《大型随机单纯复形，III：临界维数》。《纽结理论及其分支》，26(02)：1740010，2017。4[8]Herbert Edelsbrunner 和 John L Harer。《计算拓扑学：导论》。美国数学学会，2022。5[9] Christopher F Fowler。《多参数随机单纯复形的同调》。《离散与计算几何》，62(1)：87–127，2019。2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 22, 23[10] Alan Frieze 和 Micha l Karo´nski。《随机图导论》。剑桥大学出版社，2016。1, 2, 16, 20, 21[11] Howard Garland。《p 进曲率与 p 进群离散子群的上同调》。《数学年刊》，97(3)：375–423，1973。5[12] Alan J Hoffman 和 Helmut W Wielandt。《正规矩阵的谱的变化》。载于《Alan J Hoffman文选：评论》，第118–120页。World Scientific，2003。19

[13] Christopher Hoffman、Matthew Kahle 和 Elliot Paquette。《随机图的谱隙及其应用》。《国际数学研究通知》，2021(11)：8353–8404，2021。4, 12, 15[14] Srikanth K Iyer 和 D Yogeshwaran。《随机 ˇcech 复形和 Vietoris–Rips复形中“孤立”面消失的阈值》。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》，56(3)：1869–1897，2020。3[15] Matthew Kahle。《随机团复形的拓扑学》。《离散数学》，309(6)：1658–1671，2009。2[16] Matthew Kahle。《随机旗复形上同调的尖锐消失阈值》。《数学年刊》，第1085–1107页，2014。1, 2, 3, 4, 7, 12[17] Matthew Kahle。《随机单纯复形的拓扑学：综述》。《AMS当代数学》，620：201–222，2014。1[18] Matthew Kahle 和 Boris Pittel。《随机 k-复形上同调的临界窗口内部》。《随机结构与算法》，48(1)：102–124，2016。3[19] Nathan Linial 和 Roy Meshulam。《随机2-复形的同调连通性》。《组合学》，26(4)：475–487，2006。3[20] Roy Meshulam 和 Nathan Wallach。《随机k维复形的同调连通性》。《随机结构与算法》，34(3)：408–417，2009。3[21] James R. Munkres。《拓扑学》。Prentice Hall公司，新泽西州上萨德尔河，2000。第二版。5[22]Takashi Owada。《极值样本云贝蒂数的极限定理及其在持久性条形码中的应用》。《应用概率年刊》，28(5)：2814–2854，2018。9[23] Mathew D Penrose。《随机最小生成树的最长边》。《应用概率年刊》，7(2)：340–361，1997。3[24]Sidney I Resnick。《极值、正则变差与点过程》，第4卷。Springer Science & Business Media，2008。9, 10[25] Primoz Skraba、Gugan Thoppe 和 D Yogeshwaran。《随机加权 $d-$ 复形：最小生成无圈复形与持久性图》。《电子组合学杂志》，27，2017。3, 9, 11[26] Remco Van Der Hofstad。《随机图与复杂网络》，第43卷。剑桥大学出版社，2016。10[27] Roman Vershynin。《高维概率：导论及其在数据科学中的应用》，第47卷。剑桥大学出版社，2018。17, 20[28] Andrzej Zuk。《离散群的性质（T）与 Kazhdan常数》。《几何与泛函分析》，13：643–670，2003。5

School of Mathematics, Georgia Tech, Atlanta, USA.
电子邮件地址：aroy86@gatech.edu

Theoretical Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, Bangalore.
电子邮件地址：d.yogesh@isibang.ac.in