arXiv:2303.17567v1 [math.RA] 30 Mar 2023

p^4 阶 2 阶幂零类群作为局部近环的加法群

Iryna Raievska、Maryna Raievska，华沙大学，波兰华沙；
乌克兰国家科学院数学研究所，乌克兰基辅
raeirina@imath.kiev.ua，raemarina@imath.kiev.ua

关键词：局部近环， p-群，2 阶幂零类 AMS 学科分类：
16Y30，20D15

摘要

我们研究了 p^4 阶 2 阶幂零类群中作为局部近环加法群的群。已有结果表明，对于奇素数 p，这类群共有 6 个，其中 4 个是局部近环的加法群。我们还明确构造了这类近环的一些例子。

1 引言

自 20 世纪 60 年代末以来，人们一直在研究哪些群可以作为含幺近环的加法群。 [1] 和 [2], 中的一些研究取得了这方面的结果，分别证明了带有 $n \geq 3$ 的对称群 S_n 和交错群 A_4 不能作为含幺近环的加法群。不存在加法群同构于四元数群Q_8 [3]的含幺近环。

对局部近环的研究最早由 [4] 开启，并发现有限零对称局部近环的加法群是一个 p-群。 [5] 证明，除同构外，存在 $p-1$ 个加法群为阶 p^2 的初等阿贝尔群、且不可逆元素子群的阶为 p的局部零对称近环，也就是说，这些近环不是近域。结合基础性论文 [6] 和 [1], ，人们完整描述了所有阶为 p^2的零对称局部近环。阶为 8 的二面体群 D_4 不能作为局部近环 [7]的加法群。 [8],证明了有限阿贝尔 p-群上局部近环的存在性，即每个阶为 $p^n > 4$ 的非循环阿贝尔 p-群，都是某个非环零对称局部近环的加法群。此外， [9] 确立了任意阶为 $p^n > 8$ 的非超二面体 Miller–Moreno p-群，都是某个局部近环的加法群。 [9], [10] 和 [11]研究了 Miller–Moreno 群上的含幺近环和局部近环。

Boykett 和 N¨obauer [12] 对所有阶小于 32、可作为含幺近环加法群的非阿贝尔群进行了分类，并找出了定义在这些群上的非同构含幺近环的数量。计算机代数系统 SONATA [13] 的

GAP [14] 包含一个阶至多为 15 的所有非同构近环，以及阶至多为 31 的含幺近环的数据库，其中有 698 个是局部的。

然而，更高阶近环的分类需要复杂得多的计算。对于局部近环，这些计算通过一个名为 LocalNR [15]的新 GAP 软件包得以实现。其当前版本（尚未随 GAP 一起发布）包含了阶不超过 361 的 37599 个局部近环，但不包括阶为 128、256 以及部分阶为 32、64 和 243 的情形。我们已经计算了部分阶为 32、64、128、243 和 625 的局部近环类。

然而，并非任何有限群都是含幺近环的加法群。因此，确定这类群，并在这些群上对某些含幺近环类（例如局部近环）进行分类，是十分重要的。

在 [16] 中证明了，在每个满足 $p > 2$ 的阶为 p^3 的群上都存在一个局部近环。此外，还得到了阶为p^3 的群上局部近环数量的下界。已经确定，在每个阶为 p^3 的非超循环非阿贝尔群或超循环阿贝尔群上，至少存在 $p + 1$ 个非同构局部近环。在 [20] 中证明了，在阶为 p^3的初等阿贝尔加法群上，按同构计至少存在 p 个不是近域的局部近环。

接下来顺理成章的一步，是研究阶为 p^4 的群作为局部近环的加法群。在本文中，我们考察阶为 p^4 的 2 阶幂零类群，它们是局部近环的加法群。

2 预备知识

下面给出基本定义。

定义 1. 一个非空集合 R 配备两个二元运算“ $+$ ”和“ $\cdot$”，若满足以下条件，则称为近环：

1) $(R, +)$ 是一个以 0 为中性元的群；2) $(R, \cdot)$ 是一个半群；3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 对所有 x, y，$z \in R$ 均成立。

这样的近环称为左近环。若将公理 3) 替换为公理 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 对所有 x, y，$z \in R$ 均成立，则得到右近环。

近环 R 的群 $(R, +)$ 记作 R^+，称为 R 的加法群。容易看出，对于 R^+ 的每个子群 M 以及每个元素 $x \in R$，集合 $xM = \{x \cdot y | y \in M\}$ 是 R^+ 的子群，特别地，$x \cdot 0 = 0$。如果进一步对所有 $x \in R$ 都有 $0 \cdot x = 0$，则称近环 R 为零对称的。此外，如果半群 $(R, \cdot)$ 是具有单位元 i 的幺半群，则 R 是一个具有单位元 i 的近环。在后一种情况下，幺半群 $(R, \cdot)$ 的所有可逆元构成的群记作 R^*，称为 R 的乘法群。 R^+ 的子群 M 称为 R^* -不变的，如果对于每个 $r \in R^*$ 都有 $rM \leq M$；如果对于任意的 x、$y \in R$ 都有 $xMy \subseteq M$，则称其为 (R, R)-子群。

以下断言是众所周知的（例如参见 [1], 定理 3）。

引理 1. 有限拟环 R 的加法群的指数等于 i 的加法阶，而这也等于 R中每个可逆元的加法阶，其中 R 具有单位元 i 。

定义 2. 具有单位元的近环 R 称为局部的，若 R 中所有不可逆元构成的集合 L 是加法群 R^+ 的子群；若 $L = 0$，则称为拟域。

本文中， L 表示 R中不可逆元构成的子群。下述引理概述了有限局部近环的主要性质（参见 [18],引理 3.2）。

引理 2. 设 R 是具有单位元 i的局部近环。则以下结论成立:

1) L 是 R^+ 的 (R, R)-子群；2) R^+ 的每个真 R^* -不变子群都包含于 L中；3) 集合 $i + L$ 构成 R^* 的乘法群的一个子群。

具有循环不可逆元子群的有限局部近环在 [19, 定理 1]中进行了描述。

定理 1. 设 R 是一个阶为 p^n 的局部近环，其 $n > 1$ 的子群 L 是循环且非平凡的。则加法群 R^+ 或者是循环的，或者是阶为 p^2的初等阿贝尔群。在第一种情况下， R 是一个交换局部环，它同构于剩余环 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ，其中 $n \geq 2$；在另一种情况下，存在 p 个彼此非同构的此类近环 R ，其中 $|L| = p$个是零对称拟环，并且它们的乘法群 R^* 同构于两个阶分别为 p 和 $p - 1$的循环子群的半直积。

下述定理由 Maxson 在 [5] （定理 2.1）中证明。

定理 2. 如果 R 是一个不是拟域的有限局部近环，则 $|R| < |L|^2$。

由定理1和定理2可得以下结果。

推论1. 设 R 是一个阶为 p^4 、加法群为非阿贝尔且不是拟域的局部近环。那么，不可逆元的子群 L 是一个阶为 p^3 或 p^2的非循环群。

我们回顾以下定义。

定义 3. 真子群均为阿贝尔群的有限非阿贝尔群称为 Miller–Moreno群。

3 阶为 p^4 的 2 阶幂零类群

我们将考虑阶为 p^4 的 2 阶幂零类群。L
et $[n,i]$ be the i-th 群 o f order n in the SmallG群 lib计算机中的库
代数系统 GAP。我们用 C_n 表示阶为 n 的循环群。
例如，在 GAP 中验证下面的断言是一件很容易的事。

注记 1. 阶为 $2^4=16$ 的 2 阶幂零类群共有 6 个，其中 *re:*

1. $(C_4\times C_2)\rtimes C_2$ $[16,3]$；
2. $C_4\rtimes C_4$ $[16,4]$； 3.
$C_8\rtimes C_2$ $[16,6]$； 4.
$C_2\times D_8$ $[16,11]$； 5.
$C_2\times Q_8$ $[16,12]$； 6. (
$C_4\times C_2)\rtimes C_2$ $[16,13]$。

以下定理给出了阶为 p^4 的 2 阶幂零类群的分类，其中 p 是奇素数（参见 [21]，以及例如 [22]）。

定理 3. 阶为 p^4 的 2 阶幂零类群共有 6 个，其中 p 是奇素数，它们分别为:

- $G_1=\langle a,b:\ a^{p^2}=b^p=[a,[a,b]]=[b,[a,b]]=[a,b]^p=e\rangle=(C_{p^2}\times C_p)\rtimes C_p$；
- $G_2=\langle a,b:\ a^{p^2}=b^{p^2}=e,[b,a]=b^p\rangle=C_{p^2}\rtimes C_{p^2}$；
- $G_3=\langle a,b:\ a^{p^3}=b^p=e,[b,a]=a^{p^2}\rangle=C_{p^3}\rtimes C_p$；
- $G_4=\langle a,b,d:\ a^p=b^p=c^p=d^p=[a,c]=[b,c]=[a,d]=[b,d]=[c,d]=e\rangle=C_p\times((C_p\times C_p)\rtimes C_p)$，其中 $c=[a,b]$；
- $G_5=\langle a、\ b、\ c:\ a^{p^2}=b^p=c^p=[a,c]=[b,c]=e、\ [b,a]=a^p\rangle=C_p\times(C_{p^2}\rtimes C_p)$；
- $G_6=\langle a、\ b、\ c:\ a^{p^2}=b^p=c^p=[a,b]=[a,c]=e、\ [c,b]=a^p\rangle=(C_{p^2}\times C_p)\rtimes C_p$。

4 阶为 16 的 2 阶幂零类群与局部近环

如上文所述，所有阶不超过 31 的非同构含幺近环的数据库都包含在 SONATA 软件包中，因此可以得到所有阶为 16 的非同构局部近环（见 [12]）。

引理3。以下 2 阶幂零类群且仅有这些群是阶为 16 的局部近环的加法群:

1. $(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$ $[16,3]$；
2. $C_4 \rtimes C_4$ $[16,4]$； 3. $C_8 \rtimes C_2$ $[16,6]$； 4. $C_2 \times Q_8$ $[16,12]$。

令 $n(G)$ 表示所有加法群 R^+ 与群 G 同构的非同构局部近环 R 的数量。

$StructureDescription(R^+)$	$n(R^+)$
$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	37
$C_4 \rtimes C_4$	24
$C_8 \rtimes C_2$	33
$C_2 \times Q_8$	2

4.1 群 G_1、 G_2 和 G_3 与局部近环

定理 3 中的群 G_1、 G_2 和 G_3 是 Miller–Moreno 群。

由于 [23] G_2 和 G_3 分别是群 $G(p^2,p^2)$和 $G(p^3,p)$（例如，参见引理 2 [23]）。因此，根据定理 2 [23]，存在一个局部近环 R，其加法群 R^+ 与 G_3同构。因此，加法群为 G_2 的局部近环不存在。

设 R 是一个局部近环，其加法群 R^+ 与 G_2同构。则$R^+ = \langle a\rangle + \langle b\rangle$，其中 a和 b是 R 中的元素，并满足关系 $ap^3 = 0$、 $bp = 0$和 $-b+a+b = a(1-p^2)$。特别地，每个元素 $x \in R$ 都能唯一地写成 $x = ax_1 + bx_2$ 的形式，其中系数为 $0 \le x_1 < p^3$ 和 $0 \le x_2 < p$。

米勒–莫雷诺亚循环群上局部近环的元素乘法公式定义于 [23]中。 G_2 上的零对称局部近环中任意元素的乘法公式在证明定理 [23, 2], 时给出，即:

$$x \cdot y = a(x_1y_1 + p^2x_1x_2\binom{y_1}{2}) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2),$$

其中 $\beta(x) = \begin{cases} 1, & if\ x_1 \not\equiv 0\ (\text{模 } p); \\ 0, & if\ x_1 \equiv 0\ (\text{模 } p). \end{cases}$

例 1. 设 $G \cong C_{27} \rtimes C_3$. 若 $x = ax_1 + bx_2$ 且 $y = ay_1 + by_2 \in G$ 且 $(G,+,\cdot)$ 是一个局部近环，则如上所述，“ $\cdot$”可以是如下乘法:

$$x \cdot y = a(x_1y_1 + 9x_1x_2\binom{y_1}{2}) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2),$$

其中 $\beta(x) = \begin{cases} 1, & if\ x_1 \not\equiv 0\ (\text{模 } 3); \\ 0, & if\ x_1 \equiv 0\ (\text{模 } 3). \end{cases}$

用于验证例 1 中得到的近环确实是局部近环的计算机程序已上传至 GitHub:

https://github.com/raemarina/Examples/blob/main/LNR_81-6.txt
根据 LocalNR 软件包和 [24]，我们得到阶为 81 和 625 的 G_3 上所有非同构零对称局部近环的数量如下。

$StructureDescription(R^+)$	$n(R^+)$
$C_{27} \rtimes C_3$	10
$C_{125} \rtimes C_5$	5

类似地，根据 [9]， G_1 是群 $G(p^2, p, p)$。因此，由定理 3 [9]可知，存在一个加法群同构于 G_1的局部近环。由于 G_1 是米勒–莫雷诺非亚循环群，根据 [9, 的定理 3], ，对于 G_1 的任意元素 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ 和 $y = ay_1 + by_2 + cy_3$，我们得到如下乘法公式：

$$x \cdot y = a(x_1y_1 + p^k x_2y_2) + b(x_2y_1 + x_1y_2) + c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + x_1^2y_3),$$

其中 $k = 1$，2。

容易看出， $R = (G_1, +, \cdot)$是一个非零对称局部近环。

例2。令 $G \cong (C_9 \times C_3) \rtimes C_3$。如果 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ 和 $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in G$，且 $(G, +, \cdot)$ 是一个局部近环，那么如上所述，“ $\cdot$ ”可以是以下乘法之一：

(1) $x \cdot y = a(x_1y_1 + 3x_2y_2) + b(x_2y_1 + x_1y_2) + c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + x_1^2y_3)$;

(2) $x \cdot y = a(x_1y_1) + b(x_2y_1 + x_1y_2) + c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + x_1^2y_3)$.

一个计算机程序验证了例2中得到的近环确实是局部近环，该程序已存放在 GitHub：

https://github.com/raemarina/Examples/blob/main/LNR_81-3.txt
根据 LocalNR 软件包和 [24]，我们得到阶为 81 和 625 的所有非同构零对称局部近环的数量如下。

$StructureDescription(R^+)$	$n(R^+)$
$(C_9 \times C_3) \rtimes C_3$	46
$(C_{25} \times C_5) \rtimes C_5$	154

4.2 群 G_4

设 G_4 是定理 3 中以加法记号表示的群。那么，对于满足关系 $ap = 0$、 $bp = 0$、 $cp = 0$、 $dp = 0$、 $a + b = b + a + c$、 $a + c = c + a$、 $b + c = c + b$、 $a + d = d + a$、 $b + d = d + b$ 和 $c + d = d + c$ 的 R 中的某些元素 a、 b、 c 和 d，有 $G_4 = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$。

引理 4. 对群 G_4 中任意整数 k 和 l，等式 $-ak - bl + ak + bl = c(kl)$ 和 $bl + ak = -c(kl) + ak + bl$ 成立。

证明. 由于 $-a-b+a+b=c$，我们得到 $-b+a+b=a+c$。然后

$$-bl+ak+bl=(a+cl)k=ak+c(kl).$$

因此， $-ak-bl+ak+bl=c(kl)$，所以 $bl+ak=-c(kl)+ak+bl$。 □

引理 5. 对群 G_4 中任意自然数 k、 l、 n、 m 和 r，等式 $(ak+bl+cm+dn)r=a(kr)+b(lr)+c(mr-kl\binom{r}{2})+d(nr)$ 成立。

证明。将对 r 使用归纳法进行证明。当 $r=1$ 时，等式成立。设当 r 时等式成立，即

$$(ak+bl+cm+dn)r=a(kr)+b(lr)+c(mr-kl\binom{r}{2})+d(nr).$$

下面证明当 $r+1$ 时等式成立：

$$\begin{aligned}&(ak+bl+cm+dn)(r+1)=\\&\quad=a(kr)+b(lr)+ak+bl+c(kl\tbinom{r}{2})+c(m(r+1))+d(n(r+1))=\\&\quad=a(k(r+1))+b(l(r+1))+c(-klr)+c(-kl\tbinom{r}{2})+\\&\quad+c(m(r+1))+d(n(r+1))=\\&\quad=a(k(r+1))+b(l(r+1))+c(m(r+1)-kl(r+\tbinom{r}{2}))+d(n(r+1))=\\&\quad=a(k(r+1))+b(l(r+1))+c(m(r+1)-kl\tbinom{r+1}{2})+dn(r+1).\end{aligned}$$

因此，对任意 r，等式均成立。 □

4.3 加法群同构于 G_4 的含幺近环

设 R 为一个带单位元的近环，其加法群 R^+ 同构于 G_4。那么，对于满足关系 $ap=0$、$bp=0$、 $cp=0$、 $dp=0$、 $a+b=b+a+c$、 $a+c=c+a$、 $b+c=c+b$、$a+d=d+a$、$b+d=d+b$ 和 $c+d=d+c$ 的 R 中的某些元素 a、 b、 c 和 d，有 $R^+=\langle a\rangle+\langle b\rangle+\langle c\rangle+\langle d\rangle$。特别地，每个元素 $x\in R$ 都可以唯一地写成 $x=ax_1+bx_2+cx_3+dx_4$ 的形式，其中系数为 $0\le x_1<p$、 $0\le x_2<p$、 $0\le x_3<p$ 和 $0\le x_4<p$。

由于元素 a 的阶等于群 G 的指数，根据引理 1，我们可以假设 a 是 R 的单位元，即对于每个 $x\in R$，都有 $ax=xa=x$。此外，对于每个 $x\in R$，存在系数 $\alpha(x)$、 $\beta(x)$、 $\gamma(x)$、 $\varphi(x)$、 $\lambda(x)$、 $\mu(x)$、 $\nu(x)$ 和 $\psi(x)$，使得 $xb=a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)+d\varphi(x)$，以及 $xd=a\lambda(x)+b\mu(x)+c\nu(x)+d\psi(x)$。显然，它们在模 p 的意义下唯一确定，因此可确定映射 $\alpha\colon R\to\mathbb{Z}_p$、 $\beta\colon R\to Z_p$、 $\gamma\colon R\to Z_p$、 $\varphi\colon R\to Z_p$、 $\lambda\colon R\to Z_p$、 $\mu\colon R\to Z_p$、 $\nu\colon R\to Z_p$ 以及 $\psi\colon R\to Z_p$。

引理 6. 设 R 是一个具有单位元的近环，其加法群 R^+ 与G_4同构。若 a与 R的单位元重合，$x=ax_1+bx_2+cx_3+dx_4$，$y=ay_1+by_2+$

$cy_3+dy_4 \in R$, $xb = a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)+d\varphi(x)$ 和 $xd = a\lambda(x)+b\mu(x)+c\nu(x)+d\psi(x)$, 则

$$\begin{gathered} xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + \lambda(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_4)+ \\ +c(-x_1x_2\tbinom{y_1}{2} - \alpha(x)\beta(x)\tbinom{y_2}{2} - x_2\alpha(x)y_1y_2 - \lambda(x)\mu(x)\tbinom{y_4}{2} - x_2\alpha(x)y_3+ \\ +x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_3 + \nu(x)y_4) + d(x_4y_1 + \varphi(x)y_2 + \psi(x)y_4). \end{gathered}$$

此外，对于这些映射
$\alpha\colon R \to \mathbb{Z}_p, \beta : R \to Z_p, \gamma : R \to Z_p, \varphi : R \to Z_p, \lambda : R \to Z_p, \mu : R \to Z_p,$
$\nu : R \to Z_p$ *and* $\psi : R \to Z_p$ *the following statements hold*:

(0) $\alpha(0) \equiv 0$ (模 p) , $\beta(0) \equiv 0$ (模 p) , $\gamma(0) \equiv 0$ (模 p) ;$\varphi(0) \equiv 0$ (模 p) , $\lambda(0) \equiv 0$ (模 p) , $\mu(0) \equiv 0$ (模 p) ,$\nu(0) \equiv 0$(模 p) 且 $\psi(0) \equiv 0$ (模 p) 当且仅当近环 R 是零对称的;

(1) $\alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + \lambda(x)\varphi(y)$ (模 p);

(2) $\beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\varphi(y)$ (模 p);

(3) $\gamma(xy) \equiv -x_1x_2\tbinom{\alpha(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\tbinom{\beta(y)}{2} - x_2\alpha(x)\alpha(y)\beta(y) - \lambda(x)\mu(x)\tbinom{\varphi(y)}{2}$ _
$-x_2\alpha(x)\gamma(y) + x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) + \nu(x)\varphi(y)$ (mod p);

(4) $\varphi(xy) \equiv x_4\alpha(y) + \varphi(x)\beta(y) + \psi(x)\varphi(y)$ (模 p);

(5) $\lambda(xy) \equiv x_1\lambda(y) + \alpha(x)\mu(y) + \lambda(x)\psi(y)$ (模 p);

(6) $\mu(xy) \equiv x_2\lambda(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\psi(y)$ (模 p);

(7) $\nu(xy) \equiv -x_1x_2\tbinom{\lambda(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\tbinom{\mu(y)}{2} - x_2\alpha(x)\lambda(y)\mu(y) - \lambda(x)\mu(x)\tbinom{\psi(y)}{2}$ _
$-x_2\alpha(x)\nu(y) + x_3\lambda(y) + \gamma(x)\mu(y) + x_1\beta(x)\nu(y) + \nu(x)\psi(y)$（模 p）；

(8) $\psi(xy) \equiv x_4\lambda(y) + \varphi(x)\mu(y) + \psi(x)\psi(y)$（模 p）。

证明。由于 $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, 可知 R 是零对称拟环当且仅当

$$0 = 0 \cdot b = a\alpha(0) + b\beta(0) + c\gamma(0) + d\varphi(0)$$

and

$$0 = 0 \cdot d = a\lambda(0) + b\mu(0) + c\nu(0) + d\psi(0).$$

等价地，我们有
$\alpha(0) \equiv 0$ （模 p） $\beta(0) \equiv 0$（模 p） $\gamma(0) \equiv 0$（模 p） $\varphi(0) \equiv 0$ （模 p），
$\lambda(0) \equiv 0$ （模 p） $\mu(0) \equiv 0$（模 p） $\nu(0) \equiv 0$（模 p）以及 $\psi(0) \equiv 0$ （模 p）。
此外，由于 $c = -a - b + a + b$ 以及左分配律，我们有 $0 \cdot c = -0 \cdot a - 0 \cdot b + 0 \cdot a + 0 \cdot b = 0$, 因此

$$0 \cdot x = 0 \cdot (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4) = (0 \cdot a)x_1 + (0 \cdot b)x_2 + (0 \cdot c)x_3 + (0 \cdot d)x_4 = 0.$$

因此，陈述（0）成立。

此外，利用引理 4，我们得到

$$\begin{gathered}xc=-xa-xb+xa+xb=-cx_3-bx_2-ax_1-c\gamma(x)-\\-b\beta(x)-a\alpha(x)+ax_1+bx_2+cx_3+a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)=\\=-bx_2-ax_1-b\beta(x)-a\alpha(x)+ax_1+bx_2+a\alpha(x)+b\beta(x)=\\=-bx_2+cx_1\beta(x)-b\beta(x)-ax_1-a(\alpha(x)-x_1)+bx_2+a\alpha(x)+b\beta(x)=\\=cx_1\beta(x)-b(x_2+\beta(x))-a\alpha(x)+bx_2+a\alpha(x)+b\beta(x)=\\=cx_1\beta(x)-b(x_2+\beta(x))-a\alpha(x)-cx_2\alpha(x)+a\alpha(x)+bx_2+b\beta(x)=\\=c(x_1\beta(x)-x_2\alpha(x))-b(x_2+\beta(x))+bx_2+b\beta(x)=c(x_1\beta(x)-x_2\alpha(x)).\end{gathered}$$

进一步利用左分配律，我们得到

$$\begin{gathered}xy=(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)y_1+(a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)+d\varphi(x))y_2+\\+(c(x_1\beta(x)-x_2\alpha(x)))y_3+(a\lambda(x)+b\mu(x)+c\nu(x)+d\psi(x))y_4.\end{gathered}$$

根据引理 5，我们得到

$$\begin{gathered}(ax_1+bx_2+cx_3+dx_4)y_1=ax_1y_1+bx_2y_1+c(x_3y_1-x_1x_2\tbinom{y_1}{2})+dx_4y_1,\\(a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)+d\varphi(x))y_2=a\alpha(x)y_2+b\beta(x)y_2+\\+c(\gamma(x)y_2-\alpha(x)\beta(x)\tbinom{y_2}{2})+d\varphi(x)y_2,\\(a\lambda(x)+b\mu(x)+c\nu(x)+d\psi(x))y_4=a\lambda(x)y_4+b\mu(x)y_4+\\+c(\nu(x)y_4-\lambda(x)\mu(x)\tbinom{y_4}{2})+d\psi(x)y_4.\end{gathered}$$

根据引理 5，我们有

$$bx_2y_1+a\alpha(x)y_2=a\alpha(x)y_2+bx_2y_1-cx_2\alpha(x)y_1y_2,$$

and

$$b\beta(x)y_2+a\lambda(x)y_4=a\lambda(x)y_4+b\beta(x)y_2-c\lambda(x)\beta(x)y_2y_4.$$

因此，利用左分配律，我们有

$$\begin{gathered}xy=a(x_1y_1+\alpha(x)y_2+\lambda(x)y_4)+b(x_2y_1+\beta(x)y_2+\mu(x)y_4)+c(-x_1x_2\tbinom{y_1}{2}-\\-\alpha(x)\beta(x)\tbinom{y_2}{2}-x_2\alpha(x)y_1y_2-\lambda(x)\mu(x)\tbinom{y_4}{2}-x_2\alpha(x)y_3+\\+x_3y_1+\gamma(x)y_2+x_1\beta(x)y_3+\nu(x)y_4)+d(x_4y_1+\varphi(x)y_2+\psi(x)y_4).\end{gathered}$$

R 中的乘法结合律意味着，对于所有的 x、 $y\in R$

1) $$(xy)b=x(yb)$$

and

2) $$(xy)d=x(yd).$$

根据 $xb=a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)+d\varphi(x)$，我们得到

3) $$(xy)b=a\alpha(xy)+b\beta(xy)+c\gamma(xy)+d\varphi(xy)$$

并且 $yb = a\alpha(y) + b\beta(y) + c\gamma(y) + d\varphi(y)$。将最后一个等式代入等式 1) 的右边，我们还得到

$$\begin{aligned} x(yb) = {} & a(x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + \lambda(x)\varphi(y)) + b(x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\varphi(y)) + \\ & + c(-x_1x_2\tbinom{\alpha(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\tbinom{\beta(y)}{2} - x_2\alpha(x)\alpha(y)\beta(y) - \\ & - \lambda(x)\mu(x)\tbinom{\varphi(y)}{2} - x_2\alpha(x)\gamma(y) + x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) + \\ & + \nu(x)\varphi(y)) + d(x_4\alpha(y) + \varphi(x)\beta(y) + \psi(x)\varphi(y)). \end{aligned} \tag{4}$$

由于等式 1) 蕴含公式 3) 和 4) 中相应系数的同余关系，我们得到陈述 (1)–(4)。

接下来，根据 $xd = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x) + d\psi(x)$ 代替等式 2) 中的 y，我们得到

$$(xy)d = a\lambda(xy) + b\mu(xy) + c\nu(xy) + d\psi(xy) \tag{5}$$

以及 $yd = a\lambda(y) + b\mu(y) + c\nu(y) + d\psi(y)$。将最后一个等式代入等式 2) 的右部，我们还得到

$$\begin{aligned} x(yd) = {} & a(x_1\lambda(y) + \alpha(x)\mu(y) + \lambda(x)\psi(y)) + b(x_2\lambda(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\psi(y)) + \\ & + c(-x_1x_2\tbinom{\lambda(y)}{2} - \alpha(x)\beta(x)\tbinom{\mu(y)}{2} - x_2\alpha(x)\lambda(y)\mu(y) - \\ & - \lambda(x)\mu(x)\tbinom{\psi(y)}{2} - x_2\alpha(x)\nu(y) + x_3\lambda(y) + \gamma(x)\mu(y) + x_1\beta(x)\nu(y) + \\ & + \nu(x)\psi(y)) + d(x_4\lambda(y) + \varphi(x)\mu(y) + \psi(x)\psi(y)). \end{aligned} \tag{6}$$

最后，比较公式 5) 和 6) 中 a、 b、 c 和 d 下的系数，我们推导出该引理的陈述 (5)–(8)。 □

4.4 加法群同构于 G_4 的局部近环

设 R 是一个局部近环，其加法群 R^+ 同构于 G_4。则对于满足关系 $ap = 0$、 $bp = 0$、 $cp = 0$、 $dp = 0$、 $a + b = b + a + c$、 $a + c = c + a$、 $b + c = c + b$、$d + c = c + d$、 $a + d = d + a$ 和 $b + d = d + b$ 的 R 中的某些元素 a、 b、 c 和 d，有 $R^+ = \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle + \langle d\rangle$。特别地，每个元素 $x \in R$ 都可唯一地写成形式 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$，其中系数为 $0 \le x_1 < p$、$0 \le x_2 < p$、 $0 \le x_3 < p$ 和 $0 \le x_4 < p$。

由于元素 a 的阶等于群 G 的指数，即 p，由引理 1 可知，我们可以假设 a 是 R 的单位元，即对每个 $x \in R$，$ax = xa = x$。此外，对每个 $x \in R$，存在系数 $\alpha(x)$、 $\beta(x)$、 $\gamma(x)$、$\varphi(x)$、 $\lambda(x)$、 $\mu(x)$、 $\nu(x)$ 和 $\psi(x)$，使得 $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\varphi(x)$，且 $xd = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x) + d\psi(x)$。显然，这些系数模 p 唯一确定，因此确定了若干映射： $\alpha\colon R \to \mathbb{Z}_p$、 $\beta\colon R \to Z_p$、 $\gamma\colon R \to Z_p$、 $\varphi\colon R \to Z_p$、 $\lambda\colon R \to Z_p$、$\mu\colon R \to Z_p$、 $\nu\colon R \to Z_p$ 和 $\psi\colon R \to Z_p$。

根据推论1， L 是 R中阶为 p^3 或 p^2 的正规子群。由于 L 包含 R^+ 的导出子群，因此我们可以选择生成元 b 和 c，使得 $c = -a - b + a + b$。如果 $|L| = p^3$，那么 $L = \langle b\rangle + \langle c\rangle + \langle d\rangle$。由于 $R^* = R \setminus L$，

可得 $R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 + cx_4 \mid x_1 \neq 0$ （模 p ）$\}$，并且 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$可逆当且仅当 $x_1 \neq 0$ （模 p ）。

在本节中，设 R 是一个局部近环，且 $|R: L| = p$。

引理 7. 如果 a 与 R 的单位元重合， $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ 、$y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in R$ 、 $|R: L| = p$、 $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\varphi(x)$，并且 $xd = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x) + d\psi(x)$，那么

$$xy = a(x_1y_1) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_4) + c(-x_1x_2\tbinom{y_1}{2} + \\ +x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + x_1\beta(x)y_3 + \nu(x)y_4) + d(x_4y_1 + \varphi(x)y_2 + \psi(x)y_4). \ (*)$$

此外，对于映射 $\alpha: R \to \mathbb{Z}_p$、 $\beta: R \to Z_p$、 $\gamma: R \to Z_p$、 $\varphi: R \to Z_p$、 $\lambda: R \to Z_p$、 $\mu: R \to Z_p$、 $\nu: R \to Z_p$ 以及 $\psi: R \to Z_p$，以下陈述成立:

(0) $\beta(0) \equiv 0$ （模 p），$\gamma(0) \equiv 0$ （模 p），$\varphi(0) \equiv 0$ （模 p），$\gamma(0) \equiv 0$ （模 p），$\mu(0) \equiv 0$ （模 p），$\nu(0) \equiv 0$ （模 p）以及 $\psi(0) \equiv 0$ （模 p）当且仅当近环 R 是零对称的;

(1) $\alpha(x) \equiv 0$ (模 p) 和 $\lambda(x) \equiv 0$ (模 p);

(2) 若 $\beta(x) \equiv 0$ (mod p), 则 $x_1 \equiv 0$ (mod p);

(3) $\beta(xy) \equiv \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\varphi(y)$ (模 p);

(4) $\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) + \nu(x)\varphi(y)$ (mod p);

(5) $\varphi(xy) \equiv \varphi(x)\beta(y) + \psi(x)\varphi(y)$（模 p ）;

(6) $\mu(xy) \equiv \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\psi(y)$（模 p ）;

(7) $\nu(xy) \equiv \gamma(x)\mu(y) + x_1\beta(x)\gamma(y) + \nu(x)\psi(y)$（模 p ）;

(8) $\psi(xy) \equiv \varphi(x)\mu(y) + \psi(x)\psi(y)$（模 p ）。

证明。若 $|L| = p^3$，则 $L = \langle b\rangle + \langle c\rangle + \langle d\rangle$。由于根据引理 2 的陈述 1), L 是 R^+ 中的 (R, R)-子群，因此可得 $xb \in L$ 和 $xd \in L$，从而对每个 $x \in R$， $a\alpha(x) \in L$ 且 $a\lambda(x) \in L$。于是 $\alpha(x) \equiv 0$ （模 p），且 $\lambda(x) \equiv 0$ （模 p），因此得到陈述 (1)。将所得的 $\alpha(x) \equiv 0$（模 p）和 $\lambda(x) \equiv 0$ （模 p）的值代入引理 6 的陈述 (2)–(4) 和 (6)–(8)，即可得到该引理的陈述 (3)–(8) 以及乘法公式（$*$）。令 $y = c$，得到 $xc = c(x_1\beta(x))$。因此，若 $\beta(x) \equiv 0$ （模 p），则 $xc = 0$，故 $x \in L$。因此， $x_1 \equiv 0$ （模 p），如陈述 (2) 所述。事实上，陈述 (0) 重复了引理 6 的陈述 (0)。 □

接下来，我们给出局部近环的例子 .

引理 8. 设 R 是一个局部近环，其 R^+ 的加法群与G_4及 $|R$同构: $L| = p$。若 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$，$y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in R$，则由乘法（$*$）得到的映射 $\beta: R \to Z_p$，$\gamma: R \to Z_p$，$\varphi: R \to Z_p$，$\mu: R \to Z_p$，$\nu: R \to Z_p$ 和$\psi: R \to Z_p$ 可以是以下之一:

1) $\beta(x) = {x_1}^i$ *and* $\psi(x) = {x_1}^i$ $(0 < i < p)$, $\gamma(x) = \varphi(x) = \mu(x) = \nu(x) = 0$;

2) $\beta(x) = 1$ 和 $\psi(x) = 1$，$\gamma(x) = \varphi(x) = \mu(x) = \nu(x) = 0$.

证明。容易验证，陈述 1) 和 2) 中的函数满足定理 7 的条件 2)–8)。

□

作为引理 8 的推论，我们得到以下结果。

定理 4。对于每个奇素数 p，存在一个局部近环 R，其加法群 R^+ 与 G_4 同构。

例 3。设 $G \cong C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3)$。如果 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ 和 $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in G$，且 $(G, +, \cdot)$ 是一个局部近环，那么根据引理 8，“$\cdot$”可以是以下乘法之一：

(1) $x \cdot y = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + x_1y_2) + c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + x_1^2y_3) + d(x_4y_1 + x_1y_4)$；

(2) $x \cdot y = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + x_1^2y_2) + c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + y_3) + d(x_4y_1 + x_1^2y_4)$；

(3) $x \cdot y = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + y_2) + c(-x_1x_2\binom{y_1}{2} + x_3y_1 + x_1y_3) + d(x_4y_1 + y_4)$.

计算机程序验证了：由引理 8 得到的近环确实是局部近环（见例 1），程序已存放在 GitHub：

https://github.com/raemarina/Examples/blob/main/LNR_81-12.txt

根据 LocalNR 软件包和 [24]，我们得到阶为 81 和 625 的所有非同构零对称局部近环的数量如下。

$StructureDescription(R^+)$	$n(R^+)$
$C_3 \times ((C_3 \times C_3) \rtimes C_3)$	**794**
$\lvert R : L\rvert = 3$	782
$\lvert R : L\rvert = 9$	12
$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_5)$	**2090**
$\lvert R : L\rvert = 5$	2078
$\lvert R : L\rvert = 25$	12

4.5 群 G_5

设 G_5 为定理 3 中以加法记号表示的群。那么，对于 R 中满足关系 $ap^2 = bp = cp = 0$、$a + b = b + a(1 - p)$、$a + c = c + a$ 和 $b + c = c + b$ 的某些元素 a、b 和 c，有 $G_5 = \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle$。

回顾一下，有限 p-群的指数是其元素的最大阶。以下断言很容易验证。

引理 9. 若 x 是 G_5 中阶最大的元素，则存在该群的生成元 a、b 和 c，使得 $a = x$，且关系 $ap^2 = bp = cp = 0$、$-b + a + b = a(1 - p)$、$a + c = c + a$、$b + c = c + b$ 成立。

引理 10. 对群 G_5 中任意自然数 k、r、s 和 t，等式 $ck + bs + ar = ar(1 + sp) + bs + ck$ 以及 $(ar + bs + ck)t = ar(t + s\binom{t}{2}p) + bst + ckt$ 成立。

证明。令 $q=1+p$。由于 $-b+a+b=a(1-p)$、 $a+c=c+a$ 和 $b+c=c+b$，因此 $c+b+a=aq+b+c$，所以对任意整数$k\geq 0$、 $r\geq 0$ 和 $s\geq 0$，$ck+bs+ar=arq^s+bs+ck$。考虑到，

$$q^s=(1+p)^s\equiv 1+sp\ (\mod p^2)$$

根据二项式公式，得到 $ck+bs+ar=ar(1+sp)+bs+ck$。接下来，通过对 t 使用归纳法，$(ar+bs+ck)t=ar(1+q^s+\cdots+q^{s(t-1)})+bst+ckt$。因此， $1+q^s+\cdots+q^{s(t-1)}\equiv 1+(1+sp)+\cdots+(1+s(t-1)p)=t+s\binom{t}{2}p$（模 p^2），从而 $(ar+bs+ckt)t=ar(t+s\binom{t}{2}p)+bst+ckt$。 □

4.6 加法群同构于 G_5 的含幺近环

设 R 是一个单位元为 R^+、其加法群同构于 G_5 的近环。则 $R^+=\langle a\rangle+\langle b\rangle+\langle c\rangle$ 具有元素 a、 b 和 c，其中 a 与 R 的单位元重合，且关系 $ap^2=bp=cp=0$、 $a+b=b+a(1-p)$、 $a+c=c+a$、$b+c=c+b$ 成立。此外，每个元素 $x\in R$ 都可以唯一地写成 $x=ax_1+bx_2+cx_3$ 的形式，其系数为 $0\leq x_1<p^2$、 $0\leq x_2<p$ 和 $0\leq x_3<p$。

考虑到 a 与 R的单位元重合，因此对于每个$x\in R$， $xa=ax=x$。此外，对于每个 $x\in R$，存在整数 $\alpha(x)$、 $\beta(x)$、 $\gamma(x)$、 $\nu(x)$、 $\mu(x)$ 和 $\phi(x)$，使得 $xb=a\alpha(x)+b\beta(x)+c\gamma(x)$ 且 $xc=a\nu(x)+b\mu(x)+c\phi(x)$。显然，模 p^2、 p、 p 以及 p^2、p、 p，这些整数分别由 x 唯一确定，因此可确定映射 $\alpha:R\to\mathbb{Z}_{p^2}$、 $\beta:R\to\mathbb{Z}_p$、$\gamma:R\to\mathbb{Z}_p$、$\nu:R\to\mathbb{Z}_{p^2}$、 $\mu:R\to\mathbb{Z}_p$ 和 $\phi:R\to\mathbb{Z}_p$。

引理 11. 设 $x=ax_1+bx_2+cx_3$ 和 $y=ay_1+by_2+cy_3$ 是 R 的元素。若 a 与 R 的单位元重合，则

$$\begin{aligned}xy=a(x_1y_1+\alpha(x)y_2+x_1x_2\tbinom{y_1}{2}p+\nu(x)y_3)+\\ +b(x_2y_1+\beta(x)y_2+\mu(x)y_3)+c(x_3y_1+\gamma(x)y_2+\phi(x)y_3).\ (**)\end{aligned}$$

此外，对于这些映射

$$\alpha:R\to\mathbb{Z}_{p^2},\beta:R\to\mathbb{Z}_p,\gamma:R\to\mathbb{Z}_p,\ \nu:R\to\mathbb{Z}_{p^2},$$
$$\mu:R\to\mathbb{Z}_p\ \textit{and}\ \phi:R\to\mathbb{Z}_p\ \textit{the following statements hold:}$$

(0) $\alpha(0)=\beta(0)=\gamma(0)=\nu(0)=\mu(0)=\phi(0)=0$ 当且仅当近环 R 是零对称的；

(1) $\alpha(a)=0$，$\beta(a)=1$，$\gamma(a)=0$，$\nu(c)=0$，$\mu(c)=0$和 $\phi(c)=1$；
(2) $\alpha(x)\equiv 0$（模 p）和 $\nu(x)\equiv 0$（模 p）；(3) $\alpha(xy)=x_1\alpha(y)+\alpha(x)\beta(y)+x_1x_2\binom{\alpha(y)}{2}p+\nu(x)\gamma(y)$（模 p^2）；(4) $\beta(xy)=x_2\alpha(y)+\beta(x)\beta(y)+\mu(x)\gamma(y)$（模 p）；

(5) $\gamma(xy) = x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + \phi(x)\gamma(y)$ (模 p); (6) $\nu(xy) = x_1\nu(y) + \alpha(x)\mu(y) + x_1x_2\binom{\mu(y)}{2}p + \nu(x)\phi(y)$ (模 p^2); (7) $\mu(xy) = x_2\nu(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\phi(y)$ (模 p); (8) $\phi(xy) = x_3\nu(y) + \gamma(x)\mu(y) + \phi(x)\phi(y)$ (模 p)。

证明。根据左分配律，我们有

$$xy = (xa)y_1 + (xb)y_2 + (xc)y_3 = (ax_1 + bx_2 + cx_3)y_1 + (a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x))y_2 + \\ +(a\nu(x) + b\mu(x) + c\phi(x))y_3.$$

此外，引理 10 表明

$$(ax_1 + bx_2 + cx_3)y_1 = ax_1(y_1 + x_2\tbinom{y_1}{2}p) + bx_2y_1 + cx_3y_1,$$

$$(a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x))y_2 = a\alpha(x)(y_2 + \beta(x)\tbinom{y_2}{2}p) + b\beta(x)y_2 + c\gamma(x)y_2,$$

and

$$(a\nu(x) + b\mu(x) + c\phi(x))y_3 = a\nu(x)(y_3 + \mu(x)\tbinom{y_3}{2}p) + b\mu(x)y_3 + c\phi(x)y_3.$$

根据引理 10，我们有

$$bx_2y_1 + a\alpha(x)(y_2 + \beta(x)\tbinom{y_2}{2}p) \\ = a\alpha(x)(y_2 - \beta(x)\tbinom{y_2}{2}p)(1 - x_2y_1p) + bx_2y_1$$

and

$$b\beta(x)y_2 + a\nu(x)(y_3 + \mu(x)\tbinom{y_3}{2}p) \\ = a\nu(x)(y_2 - \mu(x)\tbinom{y_2}{2}p)(1 - \beta(x)y_2) + b\beta(x)y_2.$$

因此我们得到

$$xy = a((x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + (x_1x_2\tbinom{y_1}{2} + \alpha(x)y_2 + \alpha(x)x_2y_1y_2p + \\ + \alpha(x)\beta(x)\tbinom{y_2}{2})p + \nu(x)y_3 + \nu(x)x_2y_1y_2p + \nu(x)\beta(x)y_2y_3p + \\ + \nu(x)\mu(x)\tbinom{y_3}{2}p) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + \\ + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \phi(x)y_3).$$

作为 $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$，近环 R 是零对称的，当且仅当 $0 = 0 \cdot b = a\alpha(0) + b\beta(0) + c\gamma(0)$ 且 $0 = 0 \cdot c = a\nu(0) + b\mu(0) + c\phi(0)$，因此 $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = \nu(0) = \mu(0) = \phi(0) = 0$。类似地，由等式 $b = ab = a\alpha(a) + b\beta(a)$ 和 $c = ac = a\nu(c) + b\mu(c) + c\phi(c)$ 可得 $\alpha(a) = 0$、$\beta(a) = 1$、$\gamma(a) = 0$、$\nu(c) = 0$、$\mu(c) = 0$ 以及 $\phi(c) = 1$，从而得到陈述 (1)。由于 $(xb)p = x(bp) = 0$ 且 $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$，由引理 10 可得 $0 = (a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x))p = a\alpha(x)(p + \beta(x)\binom{p}{2}p) = a\alpha(x)p$，因此 $\alpha(x) \equiv 0 \pmod{p}$。此外，由于 $(xc)p = x(cp) = 0$ 且 $xc = a\nu(x) + b\mu(x) + c\phi(x)$，由引理 10 可得 $0 = (a\nu(x) + b\mu(x) + c\phi(x))p = a\nu(x)(p + \mu(x)\binom{p}{2}p) = a\nu(x)p$，因此 $\nu(x) \equiv 0 \pmod{p}$，故得到陈述 (2)。因此，我们得到

$$xy = a((x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + x_1x_2\tbinom{y_1}{2}p + \nu(x)y_3) + \\ + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \phi(x)y_3),$$

如 (∗∗) 中所需。

最后， R 中的乘法结合律表明， $x(yb) = (xy)b = a\alpha(xy)+b\beta(xy)+c\gamma(xy)$ 且 $x(yc) = (xy)c = a\nu(xy) + b\mu(xy)+c\phi(xy)$。此外，在公式（∗∗）中用 $yb = a\alpha(y) + b\beta(y) + c\gamma(y)$ 代替 y，我们还得到

$$\begin{aligned} x(yb) = a((&x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + x_1x_2\tbinom{\alpha(y)}{2}p + \nu(x)\gamma(y))+ \\ &+ b(x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y)) + c(x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + \phi(x)\gamma(y)). \end{aligned}$$

比较关于 a 和 b 的系数在为 $x(yb)$ 得到的两个表达式中，我们推出引理的陈述 (3)–(5)。

接下来，在公式（∗∗）中用 $yc = a\nu(y) + b\mu(y) + c\phi(y)$ 代替 y，得到

$$\begin{aligned} x(yc) = a((&x_1\nu(y) + \alpha(x)\mu(y) + x_1x_2\tbinom{\mu(y)}{2}p + \nu(x)\phi(y))+ \\ &+ b(x_2\nu(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\phi(y)) + c(x_3\nu(y) + \gamma(x)\mu(y) + \phi(x)\phi(y)). \end{aligned}$$

最后，比较关于 a 和 b 的系数在为 $x(yc)$ 得到的两个表达式中，我们推出引理的陈述 (6)–(8)。 □

4.7 加法群同构于 G_5 的局部近环

设 R 是一个局部近环，其加法群 R^+ 与 G_5 同构。则 $R^+ = \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle$ 具有元素 a、b 和 c，其中 a 与 R 的单位元重合，且关系 $ap^2 = bp = cp = 0$、$a + b = b + a\ (1 - p)$、$a + c = c + a$ 和 $b + c = c + b$ 成立。此外，每个元素 $x \in R$ 都能唯一地写成 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ 的形式，其中系数为 $0 \le x_1 < p^2$、$0 \le x_2 < p$ 和 $0 \le x_3 < p$。

考虑 a 与 R 的单位元重合，从而对于每个 $x \in R$ 都有 $xa = ax = x$。此外，对于每个 $x \in R$，存在整数 $\alpha(x)$、$\beta(x)$、$\gamma(x)$、$\nu(x)$、$\mu(x)$ 和 $\phi(x)$，使得 $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$，并且 $xc = a\nu(x) + b\mu(x) + c\phi(x)$。显然，分别模 p^2、p、p 和 p^2、p、p，这些整数由 x 唯一确定，因此确定了映射 $\alpha\colon R \to \mathbb{Z}_{p^2}$、$\beta\colon R \to \mathbb{Z}_p$、$\gamma\colon R \to \mathbb{Z}_p$、$\nu\colon R \to \mathbb{Z}_{p^2}$、$\mu\colon R \to \mathbb{Z}_p$ 和 $\phi\colon R \to \mathbb{Z}_p$。

根据推论1，L 是 R中阶为 p^3 或 p^2 的正规子群。在本节中，设 R 为满足 $|R\colon L| = p$的局部近环。

若 $|L| = p^3$，则 $L = \langle ap\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle$。由于 $R^* = R \setminus L$，可得

$$R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 \mid x_1 \not\equiv 0 \pmod p\}$$

并且 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ 可逆，当且仅当 $x_1 \not\equiv 0$（模 p）。由于根据引理 2 的陈述 1)，L 是 R^+ 中的 (R, R)-子群，因此可得 $xb \in L$ 和$xc \in L$，从而对每个 $x \in R$，$a\alpha(x) \in L$ 且 $a\nu(x) \in L$。因此，$\alpha(x) \equiv 0$（模 p）且$\nu(x) \equiv 0$（模 p），与定理 12 的陈述（2）相同。因此，对于局部近环 R，其乘法与含幺近环相同，即乘法（∗∗）。

引理 12. 设 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ 和 $y = ay_1 + by_2 + cy_3$ 是 R 和$|R\colon L| = p$的元素。如果 a 与 R 的单位元相同，则定理 12 中的映射满足乘法 (∗∗)。

接下来，我们将给出局部近环的例子。

引理 13. 设 R 是一个局部近环，其加法群 R^+ 同构于 G_5和 $|R: L| = p$。若 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$， $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in R$，则映射$\alpha: R \to \mathbb{Z}_{p^2}$， $\beta: R \to \mathbb{Z}_p$， $\gamma: R \to \mathbb{Z}_p$， $\nu: R \to \mathbb{Z}_{p^2}$， $\mu: R \to \mathbb{Z}_p$ 和 $\phi: R \to \mathbb{Z}_p$ 可以是以下之一:

1) $\beta(x) = \phi(x) = \begin{cases} 1, & if\ x_1 \not\equiv 0 \ (\bmod p); \\ 0, & if\ x_1 \equiv 0 \ (\bmod p), \end{cases}$ $\alpha(x) = \gamma(x) = \mu(x) = \nu(x) = 0;$

2) $\beta(x) = \phi(x) = 1$， $\alpha(x) = \gamma(x) = \mu(x) = \nu(x) = 0$.

证明. 容易验证，陈述 1) 和 2) 中的函数满足定理 7 的条件 1)–8)。

□

由引理 13 可得以下结果。

定理 5. 对每个奇素数 p，都存在一个局部近环 R，其加法群R^+ 同构于 G_5。

例 4. 设 $G \cong (C_9 \rtimes C_3) \times C_3$。若 $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ 且 $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in G$ 且 $(G, +, \cdot)$ 是一个局部近环，则根据引理 8，“$\cdot$”可以是以下乘法之一。

(1) $x \cdot y = a(x_1y_1 + 3x_1x_2\binom{y_1}{2}) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) + c(x_3y_1 + \phi(x)y_3)$，其中

$$\beta(x) = \phi(x) = \begin{cases} 1, & if\ x_1 \not\equiv 0 \ (\bmod 3); \\ 0, & if\ x_1 \equiv 0 \ (\bmod 3), \end{cases}$$

(2) $x \cdot y = a(x_1y_1 + 3x_1x_2\binom{y_1}{2}) + b(x_2y_1 + y_2) + c(x_3y_1 + y_3)$。

计算机程序验证了，对于 $p = 3$，引理 13 中得到的近环确实是一个局部近环（见例2），该程序已存放在 GitHub 上:

https://github.com/raemarina/Examples/blob/main/LNR_81-13.txt

根据 LocalNR 软件包和 [24]，我们得到阶为 81 和 625 的群上所有非同构局部近环的数量如下: G_5。

$StructureDescription(R^+)$	$n(R^+)$
$(C_9 \times C_3) \rtimes C_3$	337
$(C_{25} \times C_5) \rtimes C_5$	630

4.8 群 G_6

设 G_6 是定理 3 中以加法记法表示的群。那么，对于满足关系 $ap^2 = 0$、 $bp = 0$、 $cp = 0$、$a + b = b + a$、 $a + c = c + a$、 $c + b = b + c + ap$ 的 R 中某些元素 a、 b 和 c，有 $G_6 = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$。

猜想 1. 不存在加法群同构于 G_6 的局部近环。

利用 GAP 和 LocalNR 软件包，猜想 1 对阶为 $3^4 = 81$ 和 $5^4 = 625$ 的群得到了验证。

致谢。作者感谢 IIE-SRF 对我们在华沙大学奖学金的支持。本工作部分得到了主题研究计划“张量：几何、复杂性与量子纠缠”、华沙大学、卓越倡议——研究型大学以及西蒙斯基金会授予波兰科学院数学研究所的第 663281 号奖项（2021—2023 年）的支持。

参考文献

[1] Clay J. R., Malone Jr., 某些有限群上的带单位元近环，《数学斯堪的纳维亚》19 (1966), 146–150.[2] Clay J. R., Doi D., 交错群上的带单位元近环，《数学斯堪的纳维亚》23 (1968), 54—56.[3] Clay J. R., 使用数字计算机研究近环理论，BIT. 10 (1970), 249–265.[4] Maxson C. J., 关于局部近环，《数学杂志》106 (1968), 197–205.[5] Maxson C. J., 基数为 p^2 的局部近环，《加拿大数学通报》11, no. 4 (1968), 555–561..[6] Zassenhaus H., 关于有限拟体，Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg. 11 (1935/36), 187–220.[7] Maxson C. J., 有限局部近环的构造（II）：关于非阿贝尔p群，《牛津数学季刊》(2). 22 (1971), 65–72.[8] Maxson C. J., 有限局部近环的构造（I）：关于非循环阿贝尔 p群，《牛津数学季刊》(2). 21 (1970), 449–457.
[9] Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., Sysak Ya. P., 非元循环 Miller-Moreno 群上的局部近环，《基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学通报：物理与数学系列》, 3 (2012), 39–46（乌克兰语）。[10] Raievska I. Yu., Miller-Moreno p 群上的局部近环，《基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学通报：数学与力学》25 (2011), 43–45（乌克兰语）。[11] Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., 有限非阿贝尔二生成 p 群上的局部近环。《喀尔巴阡数学出版物》12, No. 1, 2020, 199–207.[12] Boykett T. H. H., Nöbauer C., 一类不能作为带单位元近环加法群的群，《一般代数文集》（克拉根福，1997），克拉根福：Heyn. 10 (1998), 89—99。

[13] Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P. 和 Noebauer C. SONATA——近环及其应用系统，GAP 软件包，版本 2.9.1，2018，https://gap-packages.github.io/sonata/
[14] GAP 团队，GAP——群、算法与编程，版本 4.12.0；2022，
https://www.gap-system.org[15] Raievska, I., Raievska, M. 和 Sysak, Y.，LocalNR，局部近环软件包，版本 1.0.3（2021）（GAP 软件包），
(https://gap-packages.github.io/LocalNR)[16] I. Raievska, M. Raievska. 群的阶为 p^3 时局部近环数量的下界。（2022）。arXiv 预印本
https://arxiv.org/pdf/2205.08359.pdf[17] Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., 阶为 p^3 的初等阿贝尔群上的局部近环，《乌日霍罗德大学科学通报：数学与信息学系列》，1, 38 (2021), 85–93（乌克兰语）。[18] Amberg B., Hubert P., Sysak Ya., 具有二面体乘法群的局部近环，《代数学杂志》273 (2004), 700–717.[19] Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., 对乘法群及不可逆元素子群有限制的局部近环，《德拉戈马诺夫师范大学科学杂志·第一辑：物理与数学科学》（基辅）14 (2013), 134–145（乌克兰语）。[20] Raievska I. Yu., Raievska M. Yu., 阶为 p^3 的初等阿贝尔群上的局部近环，《乌日霍罗德大学科学通报：数学与信息学系列》, 1, 38 (2021), 85–93（乌克兰语）。[21] Burnside W.《有限群论》。— 剑桥：大学出版社，1897。— 430 页。[22] Al-Hasanat B. N., Almazaydeh A. 关于阶为 p^4 的群的分类，其中 p 为奇素数。《国际数学与计算机科学杂志》17, no. 4, (2022), 1569–1593.[23] Raievska I. Yu., Sysak Ya. P., 元循环 Miller–Moreno$p$群上的有限局部近环，《代数与离散数学》13, 1 (2012), 111–127.[24] Raievska I., Raievska M., Sysak Y. (2023). DatabaseEndom625 (v0.2) [数据集]. Zenodo.
https://doi.org/10.5281/zenodo.7613145