arXiv:2303.17575v1 [math.CT] 30 Mar 2023

一阶理论稳定，当且仅当其类型空间是单纯可缩的

谨以此文纪念 *Vita Kreps*

misha gavrilovich

摘要。— 一阶理论的可定义类型，等同于其类型空间（视为单纯拓扑空间）的单纯路径空间（退移）中的一个截面（收缩）；众所周知，在单纯集合范畴中，这样的截面对应于收缩每个连通分支的同伦。若不使用单纯形语言，这一结果见 [**Tent-Ziegler**，《练习 8.3》。3], 该文定义了一个双射，连接所有在参数集 B 上可定义的 1-类型的集合，与所有“相容”的连续截面族 $\pi_n : S_n^T(B) \to S_{n+1}^T(B)$ 的集合；其中 $S_n^T(B)$ 是该理论 T 中带有参数 B 的 n 变量类型的 Stone 空间。

因此，稳定性的定义“每个类型都是可定义的”表示：一个一阶理论稳定，当且仅当其类型空间是单纯可缩的；更准确地说，单纯类型空间函子 $\mathbb{S}_\bullet^T(B) : \Delta^{op} \longrightarrow \mathsf{Top}$，$n \mapsto \mathbb{S}_{n+1}(B)$ 适合于单纯拓扑空间范畴中的某个众所周知的单纯图，而该单纯图确实为纤维化单纯集合定义了可缩性。

在本文中，我们详细阐述表示模型论中诸如参数集和类型、类型是不变的、可定义的，以及不变类型的乘积等概念的这类图表及类似图表，并指出同伦论中相同图表的相关资料。

在本文中，我们用单纯图改写稳定性理论中的若干定义，并指出同伦论中类似图表的相关资料。本文始于我们注意到 [**Tent-Ziegler** 练习 8.3.3] 中几乎明确呈现的单纯形语言；该练习在集合 B 上可定义的所有全局类型的集合与所有“相容”的连续截面族 $\pi_n : \mathbb{S}_n(B) \longrightarrow \mathbb{S}_{n+1}(B)$，$n > 0$之间建立了一个双射，其中，按照惯例，$\mathbb{S}_n(B)$ 表示理论 T 中 B 上的n-类型的 Stone 空间：

$$\pi_n : r(y_1, ..., y_n) \longmapsto \{\varphi(x, y_1, ..., y_n) : \mathrm{d}_p\, \varphi \in r\}$$

如果 $p(x/\mathfrak{C})$ 是 B 上的全局类型不变量，那么这个映射可以用类型的乘积来描述为 $\pi_n : r(y_1、 ..... y_n) \mapsto p(x) \otimes r(y_1、 ..... y_n)$

在单纯形语言中，这样一个“相容”的连续截面族，恰好就是下列单纯拓扑

我们感谢 M.Bays 进行了许多有帮助且有益的讨论。V.Sosnilo 指出了我们所用单纯公式在同伦论中的含义。意见请发送至此处或 miishapp@sddf.org。海法大学。本研究由以色列科学基金会（ISF）资助，项目编号 290/19。本说明记录了相关工作与进展，更新请见 mishap.sdf.org/rfc22.pdf。

空间或仿有限集范畴中的提升映射，详见 2.2：

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}_\bullet(B)\circ[+1] \\ & \overset{\pi_\bullet}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{2,3,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)\circ[+1] \\ & \overset{\pi_\bullet}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{2,3,..}} \\ \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B) \end{array}$$

这里， $\mathbb{S}_\bullet(B) : n \mapsto \mathbb{S}_n(B)$ 是参数集$B \subset \mathfrak{C}$上 T的类型单纯空间，而 $[+1] : \Delta^{\mathrm{op}} \to \Delta^{\mathrm{op}}, n \mapsto n+1$ 是 Δ^{op}的退移移位自同态，因此 $\mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1] : n \mapsto \mathbb{S}_{n+1}(B)$ 就是所谓的$\mathbb{S}_\bullet(B)$的单纯路径空间。左侧图表展开了右侧图表： $\mathfrak{C}_\bullet : n \mapsto \mathfrak{C}^{n+1}$是由 T 的怪兽模型 $\mathfrak{C}$ 表示的单纯集，其中每个 $\mathfrak{C}^{n+1}$都配备了由以下解集生成的拓扑： B 中的参数所构成的公式的解集 $\{(x_0, ..., x_n) \in \mathfrak{C}^{n+1} \mid \mathfrak{C} \vDash \varphi(x_0, .., x_n, b_1, .., b_m)\ m \geq 0, b_1, ..., b_m \in B\}$；商空间按对角作用取商。去掉连续性要求（即在单纯集合范畴中考察此图表）便得到关于 B的全局类型不变量这一概念；在单纯滤子范畴 $s\mathbb{A}$中，它定义了一种类似于非分叉的概念。两个“相容”的截面族 $\pi_n^p, \pi_n^q : \mathbb{S}_n(B) \longrightarrow \mathbb{S}_{n+1}(B)$可以用显然的方式复合： $\mathbb{S}_n(B) \overset{\pi_n}{\longrightarrow} \mathbb{S}_{n+1}(B) \overset{\pi_n^q}{\longrightarrow} \mathbb{S}_{n+2}(B)$，而复合得到的相干截面族对应于类型的乘积 $p(x) \otimes q(x)$。用单纯形术语（§1.4）来说，给定提升 $\pi_\bullet^p, \pi_\bullet^q : \mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$，构造复合 $\mathbb{S}_\bullet(B) \overset{\pi_\bullet^p}{\longrightarrow} \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1] \overset{\pi_\bullet^q[+1]}{\longrightarrow} \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+2]$。因此，不变类型 p 的 Morley 序列就是无穷复合

$$\mathbb{S}_\bullet(B) \xrightarrow{\pi_\bullet^p} \mathbb{S}_\bullet(B)\circ[+1] \xrightarrow{\pi_\bullet^p[+1]} \mathbb{S}_\bullet(B)\circ[+2] \xrightarrow{\pi_\bullet^p[+2]} \ldots$$

在纤维化单纯集合的单纯集合范畴 中，这些图表定义了收缩每个连通分支的同伦概念；而在Top 中，它们对应于分解$X \longrightarrow \mathrm{Cone}(X) \longrightarrow X$ 或 $X \longrightarrow \mathbb{S}X \to X$ 恒等映射 $: X \longrightarrow X$ 的分解，其中使用了锥或悬挂(1) ，针对一个足够良好的连通空间 X；对于 X 非连通空间，则需要取其连通分支 X的锥（分别为悬挂）的不交并。在单纯滤子的范畴 $s\mathbb{A}$ 中，同一个图表刻画了收敛的概念。

回顾一下，一个理论是稳定的，当且仅当对于任意集合（等价地，任意模型），该集合上的每个 1-类型都是可定义的。因此，在下方图表 (2) 所给出的某种精确意义下，

> 一个理论是稳定的，当且仅当其在任意集合上的类型空间是单纯地收缩的，其精确含义是它适合放入以下图表中，该图表位于范畴 $sTop$ 或其全子范畴 $sProFiniteSets$中

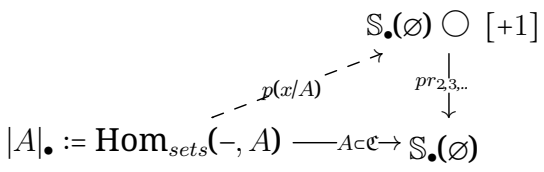
$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}_\bullet(B)\circ[+1] \\ & \overset{\pi_\bullet}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_{2,3,..}} \\ \mathrm{const}_\bullet \mathbb{S}_1(B) \times \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{const}_\bullet \mathbb{S}_1(B) \times \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

这里，$\mathrm{const}_\bullet \mathbb{S}_1(B)$ 表示常值函子 $(\mathrm{const}_\bullet \mathbb{S}_1(B))_n := \mathbb{S}_1(B)$。

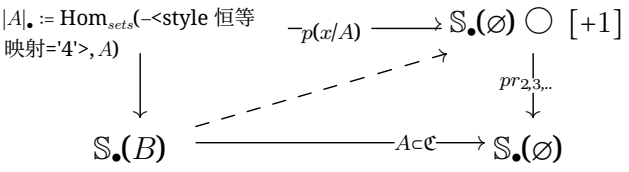
(1)回忆一下，$\mathrm{Cone}(X) := X \times [0,1] / X \times \{1\}$，以及 $\mathbb{S}(X) := X \star \{-1, 1\} = X \times [-1, 1] / \{X \times \{-1\}\ X \times \{1\}\}$。此外， $\mathbb{S}S^n = S^{n+1}$ 其中 S^n 表示第 n 个球面， $\pi_n(\mathbb{S}^k(X)\ x) = \pi_{n+k}(X, x)$， $0 \leqslant k \leqslant n$，更一般地， $[\mathbb{S}X, Y] = [X, \Omega Y]$，其中 $[-,-]$ 表示映射的同伦类，而 $\Omega Y := \mathrm{Hom}(S^1, Y)$ 是 Y 的环路空间。

遗憾的是，我们不太确定说这个图表定义了可缩性是否恰当。或许非正式地说，这个图表表达了该空间可以收缩到其中的每一个点。

从单纯的角度看，参数集 $A \subset \mathfrak{C}$，或者说其完全图示，分别可以描述为单纯集合范畴 $sSets$ 中的一个映射：从由 A 表示的单纯集$|A|_\bullet : n\mathbb{Z}\to A^{n+1}$，映射到空集上类型的空间 $\mathbb{S}_\bullet(\varnothing)$；或者映射到退移平移后的空间 $\mathbb{S}_\bullet(\varnothing) \bigcirc [+1]$，参见 §1.1。



一个定义在 $A \subset \mathfrak{C}$ 上的类型



一个定义在 A 上、在 $B \subset A$ 上不变的类型

模型论与拓扑学的一份简略非正式术语表。——由此得到下面这份关于模型论与拓扑学的简略非正式术语表：两边的概念都可以纳入同一组单纯公式。下文

$$\mathrm{Cone}_{c.c.}(X) := \bigsqcup_{X_{c.c.} \text{ a connected component of } X} \mathrm{Cone}(X_{c.c.})$$

$$\mathbb{S}_{c.c.}(X) := \bigsqcup_{X_{c.c.} \text{ a connected component of } X} \mathbb{S}(X_{c.c.})$$

是 X 的各个连通分支的锥（分别对应悬挂）的不交并。只有对于足够“良好”的拓扑空间，这种定义才具有实用意义。

– 稳定理论——可缩空间– 一个不变类型或可定义类型——同伦锥$_{c.c.}(X)$——$\to X$ 或 $h : \mathbb{S}_{c.c.}X \longrightarrow X$ 收缩恒等映射 $: X \longrightarrow X$– 不变类型的乘积 $p(x) \otimes q(y)$——同伦的复合

$$h^p \circ \mathbb{S}_{c.c.}h^q : \mathbb{S}_{c.c.}\mathbb{S}_{c.c.}X \longrightarrow X$$

– a Morley 序列——一种与稳定同伦论中的谱有些相似的序列

$$h \circ \mathbb{S}_{c.c.}h \circ ... \circ \mathbb{S}^{n-1}_{c.c.}h : \mathbb{S}^n_{c.c.}X \longrightarrow X, n > 0$$

请注意，同伦论中的一条标准建议（参见注 1.3.1）是使用商空间 $\mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$的一种“更好”的标准构造，称为群作用的分类空间或 Borel 构造。

如果考虑单纯拓扑空间，（simplicial topological spaces）类别$sTop$、仿有限集$sProFiniteSets$或滤子 sÅ 中的图表 (1)、(2)，便会与稳定性理论产生联系。单纯拓扑空间$sTop$ 和单纯仿有限集$sProFiniteSets$ 的同伦论已为人所知；然而，我们无法理解我们的图表如何与其中的可缩性/零同伦概念相关。在 sÅ 中，同一个图表定义了收敛的概念，但不存在 sÅ 理论，只有将拓扑学、分析学和模型论中的各种基本概念重新表述的例子，其中包括将稳定性重新表述为提升性质 [**Z1**, **Z2**]。

本文的结构。— 在第 §1 节中，我们概述如何将参数和参数上的类型视为单纯集合：理论的模型中，一个参数集合（分别地，一个类型），或者更确切地说，其完全图示，是从一个可表集合到该理论的（分别为移位后的）单纯 Stone 空间的态射。沿用 [**Tent-Ziegler**，练习 8.3.3], 不变性和类型的可定义性随后被解释为$sSets$ 和$sTop$中的提升图（retract）。

在 §2 中，我们更详细地重述 §1 的部分内容，并详细说明如何用单纯形语言来看待[**Tent-Ziegler**，练习 8.3。3] 我们特别注意使 §2 可以独立阅读。

在 §3.1 中，我们说明，将单纯公式 (1) 应用于足够良好的拓扑空间的奇异复形时，它在拓扑空间范畴中定义了收缩每个连通分支的一个同伦这一通常概念。

因此，在某种精确的意义上，一个可定义全局类型 是一个收缩类型的单纯 Stone 空间的同伦。两个全局不变类型的乘积 $p(x) \otimes q(x)$ 对应于在单纯集合范畴中的这类同伦的复合，因此，Morley 序列的类型对应于在单纯集合范畴 中将一个不变类型与其自身不断复合并移位 $...\pi_\bullet[n] \bigcirc\ \pi_\bullet[n-1] \bigcirc .. \bigcirc\ \pi_\bullet$。

回顾一下，一个理论稳定，当且仅当任意集合（等价地，任意模型）上的每个类型都是可定义的。因此，$sTop$ 中的（2）在某种精确意义上表明，

一个理论稳定，当且仅当它在任意参数集 B 上的类型单纯空间是可缩的

在 §3.2 中，我们给出一条参考文献，说明同一个公式定义了滤子范畴中单纯对象范畴里的收敛概念。

在 §4 中，我们提出一些希望较为简单的问题，以期引导模型论中单纯形重构的发展。

读者或许可以跳过 §5；该节旨在明确提出征求读者意见的请求，而非追求任何趣味。通过加入这一节，转述 [**RFC3**], ，我们希望促进交流和讨论那些远非权威的观点，并消除一种自然的顾虑：为了征求意见和寻求合作，而发表尚未完善的内容。

致谢。——Will Johnson 建议考察类型的单纯集合，尽管我已经用 [**Z1**]中的单纯 Stone 空间对非分裂作出了一个尚不成熟的刻画，我还是忽略了这个建议。我们感谢 David Blanc、Boris Chorny、Assaf Hasson、Kobi Peterzil、Ori Segel 和 Andr´es Villaveces，与他们的交流令人深受鼓舞。

1. 单纯形语言：作为变量名称的记录

我们将说明如何把参数（更准确地说，是它们的完全图示）和类型视为单纯集合范畴或单纯拓扑空间范畴中的态射。

本质上，单纯形性／函子性是在有限相容的公式集合中记录变量或参数名称的一种方式。

预备知识：固定单纯形记号。— 令 Δ 表示由 $\{1 < .. < n\}$ 表示的非空有限线性序范畴。令 $[+1] : \Delta \longrightarrow \Delta$ 为

退移自函子，它为每个有限线性序添加一个新的最小元素 :

$$[+1]:\{1<..<n\}\longmapsto\{0<1<...<n\}$$

$$f:\{1<...<m\}\longrightarrow\{1<...<n\}\longmapsto f[+1](0):=0, f[+1](l)=:l$$

我们将有限线性序 $\{1<...<n\}$ 记作 $n^{\leqslant}$ 或 $[n-1]$，这符合单纯形文献中的标准记法。对于范畴 C 中的函子 $X_\bullet:\Delta^{\mathrm{op}}\longrightarrow \mathsf{C}$，包含映射 $\{1<..<n\}\subset\{0<1<...<n\}$ 诱导出映射 $X_\bullet((n+1)^{\leqslant})\longrightarrow X_\bullet(n^{\leqslant})$，这些映射构成一个自然变换，我们将其记作 $\mathrm{pr}_{2,3,\dots}: X_\bullet\bigcirc[+1]\longrightarrow X_\bullet$。类似地，包含映射 $\{0\}\subset\{0<1<..<n\}$ 诱导出映射 $X_\bullet((n+1)^{\leqslant})\longrightarrow X_\bullet(1^{\leqslant})$，这些映射构成一个自然变换，我们将其记作 $\mathrm{pr}_1: X_\bullet\bigcirc[+1]\longrightarrow X(1^{\leqslant})_\bullet$。

范畴 C 中的单纯对象按定义是一个函子 $\Delta^{\mathrm{op}}\longrightarrow$C。它们构成一个通常记作 sC 的范畴。我们将研究单纯拓扑空间的范畴 $sTop$ 、单纯有限集$sProFiniteSets$以及单纯集的范畴$sSets$ ，还有单纯滤子（见 §5.2.5）的范畴 sÅ。

1.1. 以单纯方式讨论参数及其上的类型。——固定一个语言 L 中的理论 T，以及 T 的一个“怪兽”模型 $\mathfrak{C}$。请记住，这里的“怪兽”是指我们假设 $\mathfrak{C}$ 是一个相对于所有“小”子集都饱和且齐次的模型；我认为这些假设意味着（是指？）我们可以利用下文所述的单纯空间 $\mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$ 重构 $\mathfrak{C}$。对于子集 $B\subset\mathfrak{C}$，令 $\mathbb{S}_n^T(B):=\mathfrak{C}^n/\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$ 表示在 B 上完全 n-类型的拓扑 Stone 空间；我们通常省略上标 T。在模型论中，$\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$ 的轨道称为类型。回忆一下，$\mathbb{S}_n(B)$ 上的拓扑由开（且必然也是闭）子集 $U_\phi=\{p(\bar{x})\in S_n(B):\phi(\bar{x})\in p(\bar{x})\}$ 生成，其中 $\phi(\bar{x})$ 遍历 L 中所有带有 B 中参数的公式。换言之，这是使每个 $L(B)$-公式都定义一个连续的、$\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$-不变函数 $\mathbb{S}_n(B)\to\{0,1\}$ 到带平凡作用的离散两点集的最弱拓扑。

作为集合，Stone 空间 $\mathbb{S}_n(B)=\mathfrak{C}^n/\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$ 是 $\mathfrak{C}^n$ 对保持 B 中每个点不变的 L-自同构取商得到的商空间。我们可以用显然的方式为 $\mathfrak{C}^n$ 赋予拓扑，使得这一等式在拓扑空间范畴中成立。

空间 $\mathbb{S}_n(B)$ 构成一个函子 $\mathbb{S}_\bullet(B)$:有限集合$_{\neq\varnothing}\longrightarrow Top$，{1，2，.....，$n$} z→$\mathbb{S}_n(B)$。它是函子 $\mathfrak{C}_\bullet:=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\{1,\dots,n\},\mathfrak{C})=\mathfrak{C}^n$ 按 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ 取商得到的商函子（不过请注意，这里的 $\mathfrak{C}^n$ 上的拓扑不是乘积拓扑）。

由于 Δ^{op} ⊂有限集合$_{\neq\varnothing}$ 是一个子范畴，这些函子限制到 Δ^{op}，因而可以视为单纯拓扑空间范畴 和 单纯集合范畴中的对象。对于下文中我们关于 $\mathbb{S}_\bullet(B)$ 所说的一切，函子定义在哪个范畴上并不重要。

1.1.1. 作为到单纯 *Stone* 空间的态射的参数。— 对于集合 A，令$|A|_\bullet:=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\{1,..,n\},A)=|A|^n$为由$A$表示的单纯拓扑空间；这里赋予 $|A|^n$ 离散拓扑。

回顾一下，子集 $A\subset M$ 在参数 $B\subset M$ 上的完全图示，是所有满足以下条件的公式构成的集合：公式中的参数取自 B，变量由A中的元素索引，并且将变量替换为 A中对应的元素后，公式成立。

给出模型 M中理论T 的子集 $A\cup B\subset M, A\neq\varnothing$ 的完全图示，等同于给出一个单纯映射，其取值于单纯集合范畴

$$|A|_\bullet:=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(-,A)\xrightarrow{\tau_A}\mathbb{S}_\bullet^T(B)$$

使得对于 $b\in A\cap B$ $\tau_A(b)=\{x_b=b\}$。

事实上，对于每个 n，我们得到一个映射 $A^n \longrightarrow S_n(B)$，也就是说，我们知道/指定了 A 中每个元组在 B上的完备类型。函子性确保这些类型是一致的，即 tp(ab/B) 确实扩展了 tp(a/B) 和 tp(b/B)。

因此，单纯形性／函子性是一种记录（追踪）类型中变量或参数名称的方式。

1.1.2. 类型作为到退移后的单纯 *Stone* 空间的态射。——要给出子集 $A \cup B \subset M$, $A \neq \varnothing$ 上的完备 1-类型 $p(x/AB)$，等同于给出单纯集合范畴 $sSets$ 中的一个提升

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+1] \\ & \overset{p(x/AB)}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle pr_{2,3,..}} \\ |A|_\bullet := \mathrm{Hom}_{sets}(-, A) & \xrightarrow{\tau_A} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

事实上，对每个 n，我们得到一个映射 $A^n \longrightarrow \mathbb{S}_{1+n}(B)$，也就是说，对于每个有限元组 $\bar{a} \subset A$，我们知道／指定一个类型 $p(-, \bar{a}/B)$。

要给出子集 $A \cup B \subset M$, $A \neq \varnothing$ 上的完备 N-类型 $p(\bar{x}/AB)$，等同于给出单纯集合范畴 $sSets$ 中的一个单纯映射

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+N] \\ & \overset{p(\bar{x}/AB)}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,..}} \\ |A|_\bullet := \mathrm{Hom}_{sets}(-, A) & \xrightarrow{\tau_A} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

事实上，对每个 n，我们得到一个映射 $A^n \longrightarrow S_{N+n}(T)$，也就是说，对于每个有限元组 $\bar{a} \subset A$，我们知道／指定一个类型$p(-, -, .., -, \bar{a}/B)$。

由此我们再次看到，单纯形性／函子性是一种记录变量名称的方式...

1.2. 不变类型与可定义类型。—

1.2.1. 不变类型</*style*》。— *Tent-Ziegler*，练习 8.3.3] 指出，正如我们将在 §2.2 中解释的那样，全局类型 $p(\bar{x}/\mathfrak{C})$在 上不变等价于单纯集合范畴 $sSets$ 中的下述提升图：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+N] \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

要看出这一点，请考虑图表(2) 于 单纯集合范畴中

$$\begin{array}{ccccc} |\mathfrak{C}|_\bullet := \mathrm{Hom}_{sets}(-, \mathfrak{C}) & \xrightarrow{p(\bar{x}/AB)} & \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+N] \\ \downarrow{\scriptstyle AB \subset \mathfrak{C}} & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array} \tag{3}$$

模型 $\mathfrak{C}$ 在 B 上饱和，恰好意味着右侧的映射在每个层级上都是满射的（即对每个 n， n-单形的映射都是满射的）。因此，

(2) 具有单纯观点的读者可能会将此图表视为关于 B 的全局类型不变量的定义。

至多存在一个提升映射，我们只需验证它是良定义的。提升映射是良定义的，当且仅当对于一个元组 $\bar{c} \subset \mathfrak{C}$， $\varphi(\bar{x}, \bar{c}) \in p(x/\mathfrak{C})$ 是否成立只取决于参数在 B 上的类型 $\mathrm{tp}(\bar{c}/B)$。这正是关于 B 的不变性的定义。

由此可知，类型 $p(\bar{x}/AB)$ 能扩张为 B 上的全局类型不变式，当且仅当 单纯集合范畴 中存在一个提升图：

$$\begin{array}{ccc} |A|_\bullet := \mathrm{Hom}_{sets}(-, A) & \xrightarrow{p(\bar{x}/AB)} & \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+N] \\ \downarrow{\scriptstyle AB \subset \mathfrak{C}} & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

1.2.2. 可定义类型。——此外， [**Tent-Ziegler** 的练习 8.3.3]指出，正如下文所解释的，全局类型 $p(x/\mathfrak{C})$ 在 B 上可定义，当且仅当上面的对角映射是连续的，也就是说，它等价于 单纯拓扑空间范畴 中的以下提升图，或者等价地，等价于 $sProFiniteSets$中的以下提升图：

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+N] \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

为了解释这一点，考虑单纯拓扑空间范畴中的图表 (3)。对角箭头的连续性意味着，对于每个公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{c})$，都存在一个公式 $\mathrm{d}_p\varphi(\bar{x}, \bar{c})$，使得对于每个元组$\bar{c} \subset \mathfrak{C}$，都有 $\varphi(\bar{x}, \bar{c}) \in p(\bar{x}/\mathfrak{C})$ 当且仅当 $\mathrm{d}_p\varphi(\bar{x}, \bar{c}) \in \mathrm{tp}(\bar{c}/B)$。这恰好意味着，$\mathrm{d}_p\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ 是 φ 在 B 上的定义。

由此可知，类型 $p(\bar{x}/AB)$ 能够扩展为在 B 上可定义的全局类型，当且仅当在 单纯拓扑空间范畴 中存在一个提升图；或者等价地，在其由紧豪斯多夫全不连通空间构成的全子范畴 $sProFiniteSets$ 中存在这样的图。

$$\begin{array}{ccc} |A|_\bullet := \mathrm{Hom}_{sets}(-, A) & \xrightarrow{p(\bar{x}/AB)} & \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+N] \\ \downarrow{\scriptstyle AB \subset \mathfrak{C}} & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

由于这一点十分重要，我们重写该图，并展开类型（=轨道）空间的记号：

$$\begin{array}{ccc} |A|_\bullet := \mathrm{Hom}_{sets}(-, A) & \xrightarrow{p(\bar{x}/AB)} & \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}, B) \circ [+N] \\ \downarrow{\scriptstyle AB \subset \mathfrak{C}} & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle pr_{N+1,N+2,..}} \\ \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}, B) & \xrightarrow{\quad\mathrm{id}\quad} & \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}, B) \end{array}$$

1.3. 若干评注。 — 我们作几点评注。

1.3.1. 一种更适用于同伦论的可定义类型或不变类型概念。— 同伦论学家通常建议，为改进类型这一概念，应将商空间 $\mathfrak{C}/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$) 替换为一种“更好”且“标准”的商空间，它能保留更多信息，即群 $G := \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)$ 作用于空间 X 所得的分类空间 $\mathbb{B}(G, X)$。

我还没有尝试对其进行解释，而且我下面说明这种解释方式时会立即遇到一些技术上的困难。

注 ***1.3.1*** ($\mathbb{B}_\bullet(G,\ X)$ **而不是** $\mathbb{S}_\bullet(B)$)。——对于作用在一个集合X上的群 G ，存在一个显然的典范映射

$$X \times G \times ... \times G \longrightarrow X \times X \times ... \times X$$

$$(x, g_1, ..., g_n) \longmapsto (x, xg_1^{-1}, ..., xg_n^{-1})$$

在对角作用下不变

$$(x, g_1, ..., g_n) \longmapsto (xg, g_1 g, ..., g_n g).$$

回想一下[3]，群作用的单纯 ***Borel*** 构造 $\mathbb{B}_\bullet(G,\ X) = X \times_G \mathbb{E}_\bullet(G)$ 由 $\rho : G \times X \dashrightarrow X$ 定义（明确给出）为

$$\mathbb{B}_\bullet(G, X)(n^\leqslant) := (X \times G^n)/G$$

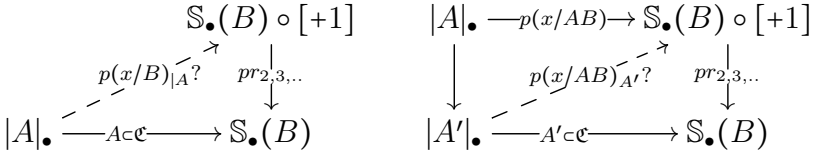
并且这个空间被视为 X 关于 G 的一个“更好”、“正确”的商空间。

上述内容导出一个单纯映射 $\mathbb{B}_\bullet(\mathfrak{C},\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$，它从分类空间 $\mathbb{B}_\bullet(\mathfrak{C},\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B))$ 出发。不过请注意，其像只包含所有元素实现同一类型的元组。

因此，同伦论学家的标准建议是，在上面的图表中用与 $\mathbb{B}(\mathfrak{C},\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B))$ 相关的某个对象替换 $\mathbb{S}_\bullet(B)$。事实上，也许有必要考虑单纯群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)_\bullet$ 对应的 $\mathbb{B}_\bullet(\mathfrak{C}_\bullet,\ \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)_\bullet)$，其中 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B)_\bullet(n^\leqslant) := \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}^n/B^n)$...

这个建议有道理吗？我还没有仔细思考过，而且存在一些直接的技术困难.....

1.3.2. 扩展类型的参数集。— 模型论中的一个典型工具/问题，是将一个类型自由地扩展/定义到更大的参数集上。这对应于寻找/定义一种规范方式来定义提升



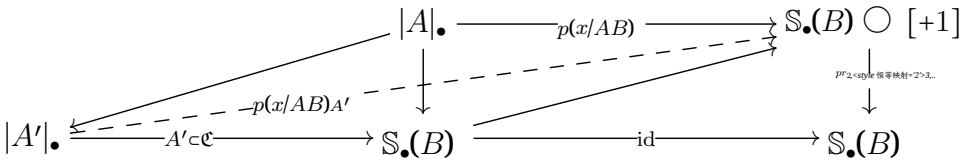
$$p(x/B) \text{ to } p(x/B)_{|A} \qquad\qquad p(x/AB) \text{ to } p(x/AB)_{|A'}$$

注意，如果类型 $p(x/AB)$延拓为一个全局的 B-不变类型，则将$p(x/AB)$延拓到 $p(x/A'AB)$，可通过取复合 $|A'|_\bullet \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow$ 来得到

---

(3)下面这段来自 [nlab、关于 Borel 构造] 的略作改写的引文有助于理解：对于 X一个拓扑空间、G 一个拓扑群以及 $\rho : G \times X \longrightarrow X$ 一个连续的 G—作用（即一个拓扑 G—空间），ρ 的 Borel 构造是拓扑空间 $X \times_G \mathbb{E}G$，因此是 X 与 G—泛主单纯复形 $\mathbb{E}(G)$ 的全空间的乘积关于 G 在二者上的对角作用所得的商空间。类似地，对于 $G_\bullet : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow$Groups 一个单纯群、 $X_\bullet : \Delta^{\mathrm{op}} \dashrightarrow$ Sets 一个单纯集，以及$G_\bullet \times X_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ 一个单纯群作用，其 Borel 构造是在$sSets$ 中，将 $X_\bullet$ 与泛主单纯复形 $\mathbb{E}G_\bullet$ 的笛卡尔积关于 $G_\bullet$ 在这两个对象上的对角作用取商所得的空间 $(X_\bullet \times \mathbb{E}_\bullet(G))/G_\bullet$。

$\mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$。



$p(x/AB)$ 到 $p(x/AB)_{|A'}$

1.4. 不变类型的乘积与 Morley 序列。—

1.4.1. 不变类型的乘积。—注意，提升 $\pi^p_\bullet, \pi^q_\bullet : \mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$ 可以复合为

$$\mathbb{S}_\bullet(B) \xrightarrow{\pi^q_\bullet} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+1] \xrightarrow{\pi^p_\bullet [+1]} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+2]$$

这一构造对应于不变类型 [**Simon, 2.2.1**] 的乘积 $p(x) \otimes q(y)$。类型的乘积是传递的，即 $p(x) \otimes (q(y) \otimes s(z)) = (p(x) \otimes q(y)) \otimes s(z)$：这对应于

$$\pi^s_\bullet \circ (\pi^q_\bullet \circ \pi^p[+1])[+1] = \pi^s_\bullet \circ \pi^q_\bullet[+1] \circ \pi^p[+2] = (\pi^s_\bullet \circ \pi^q_\bullet[+1]) \circ \pi^p[+2]$$

$$\mathbb{S}_\bullet(B) \xrightarrow{\pi^s_\bullet} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+1] \xrightarrow{\pi^p_\bullet [+1]} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+2] \xrightarrow{\pi^p_\bullet [+2]} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+3]$$

回忆一下 [**Simon, 2.2.1**]，两个 $p(x) \otimes p(y)$不变全局类型 B-不变全局类型$p(x/\mathfrak{C})$ $q(y/\mathfrak{C}) \in S(\mathfrak{C})$ 的乘积可以由以下性质定义。

给定公式 $\varphi(x; y) \in L(C)$，其中 $B \subset C \subset \mathfrak{C}$，则 $\varphi(x,\ y) \in p(x) \otimes q(y)$ 当且仅当 $\varphi(x; c) \in p$ 对于某个（等价地，对于任意一个）满足 $c \vDash q_{|C}$ 的 $c \in \mathfrak{C}$。

1.4.2. Morley 序列。——不变类型的 *Morley* 序列$p(x)$ 的 n-类型由 $p^{\otimes n}(x) := p(x_1) \otimes ... \otimes p(x_n)$ 给出，其中 $n > 0$。因此，Morley 序列对应于取自复合

$$\mathbb{S}_\bullet(B) \xrightarrow{\pi^p_\bullet} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+1] \xrightarrow{\pi^p_\bullet [+1]} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+2] \longrightarrow ... \xrightarrow{\pi^p_\bullet [+n-1]} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+n] \longrightarrow ...$$

更准确地说，一个全局 B-不变类型 $p(x/\mathfrak{C})$在 C 上的 Morley 序列，是将以下全局 B-不变类型序列限制到 C 所得：

$$p \in \mathbb{S}_1(\mathfrak{C}),\ \pi^p_\bullet(p) \in \mathbb{S}_2(\mathfrak{C}),\ \pi^p_\bullet[+1] \circ \pi^p_\bullet(p) \in \mathbb{S}_3(\mathfrak{C}) \ , ...,\ \pi^p_\bullet[n] \circ ... \circ \pi^p_\bullet(p) \in \mathbb{S}_{n+1}(\mathfrak{C}), ...$$

Morley 序列的不可区分性源于结合律：对于每个映射 $[i_1 < ... < i_m] : m^{\leqslant} \longrightarrow n^{\leqslant}$，我们都有

$$\pi^p_\bullet[n] \circ ... \circ \pi^p_\bullet(p)[i_1 < ... < i_m] = \pi^p_\bullet[m] \circ ... \circ \pi^p_\bullet(p)$$

读者或许可以将此与模型论论述 [**Simon**，2.2.1] 进行比较：

If $p(x)$ is an A-invariant type, we define by induction on $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p^{(1)}(x_0) = p(x_0) \quad \text{and} \quad p^{(n+1)}(x_0, \dots, x_n) = p(x_n) \otimes p^{(n)}(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Let also $p^{(\omega)}(x_0, x_1, \dots) = \bigcup p^{(n)}$. For any $B \supseteq A$, a realization $(a_i : i < \omega)$ of $p^{(\omega)}|_B$ is called a *Morley sequence* of p over B (indexed by ω). It follows from associativity of $\otimes$ that such a sequence $(a_i : i < \omega)$ is indiscernible over B (indeed for any $i_1 < \cdots < i_n \in \omega$, we have $\mathrm{tp}(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}/B) = p^{(n)}|_B$).

More generally, any sequence indiscernible over B whose EM-type over B is given by $\{p^{(n)}|_B : 1 \leq n < \omega\}$ is called a Morley sequence of p over B.

1.4.3. 泛稳定类型。—置换 $\sigma : N \longrightarrow N$ 通过置换变量作用于 $\mathbb{S}_\bullet[+N]$， $p(x_1, .., x_n, y_1, .., y_m) \mapsto p(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}, y_1, .., y_n)$。类型为泛稳定，当且仅当 $p(x) \otimes p(y) = p(y) \otimes p(x)$，也就是说，当且仅当 $\pi^p_\bullet[+1] \bigcirc \pi^p_\bullet$ 与置换 $\sigma : \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+2] \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+2]$ 交换，这个置换会置换两个变量（Simon，2.2.2，定理 2.29）。事实上，如果 $p(x)$ 是泛稳定的，那么对于任意提升 $\pi^q_\bullet$（Simon，2.2.2，命题 2.33），这一结论都成立。

1.4.4. 稳定理论中类型的乘积。——回顾一下，对于可定义类型 $p(-/B)$[**Tent-Ziegler**，定义 8.1.4] 以及任意带有参数且参数属于 B [**Tent-Ziegler** 的 L-公式 $\phi(\bar{x}, \bar{y})$，定义 8.1.4] 通过下式定义公式 $d_p \bar{x} \phi(\bar{x}, b)$：

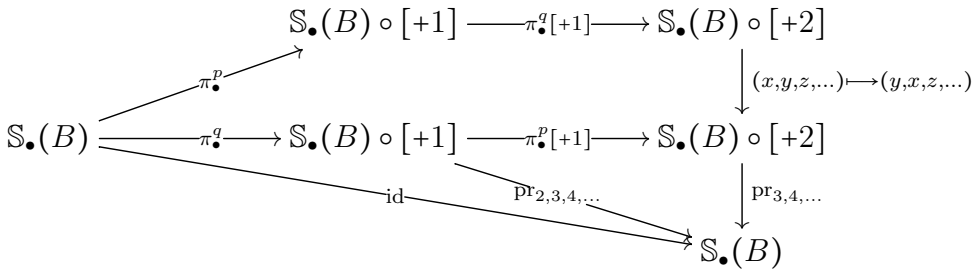
$$\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in p \text{ if and only if } \models \mathrm{d}_p \, \overline{x} \varphi(\overline{x}, \overline{b}).$$

在 [**Tent-Ziegler**]，中，稳定理论中 $p(x) \otimes p(y) = p(y) \otimes p(x)$ 这一事实表述为

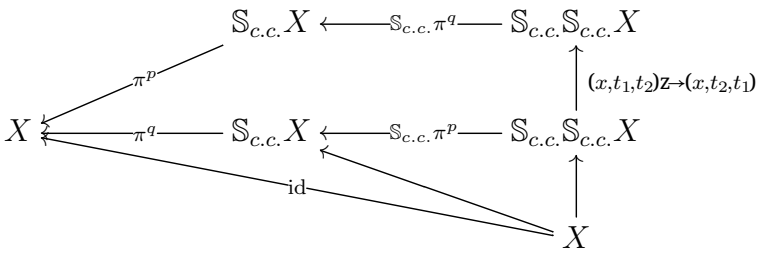
Lemma 8.3.4 (Harrington). *Let T be stable and let $p(x)$ and $q(y)$ be global types. Then for every formula $\varphi(x, y)$ with parameters*

$$\mathrm{d}_p \, x \varphi(x, y) \in q(y) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}_q \, y \varphi(x, y) \in p(x).$$

用单纯形记号表示如下图表：



This 对应于以下涉及悬挂（或锥）的拓扑图景):



1.4.5. 可定义性模式（推测）. — 不妨将可定义性模式视为可能提升 $\mathbb{S}_\bullet(M) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(M) \circ [+1]$ 上某种类似于结构（例如紧开拓扑）的东西；也就是说，类比而言，它定义在同伦 $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}X, X)$ 的集合（空间.....）上，这些同伦在 X 上是恒等映射.....目前我还不能说得更多。

1.5. 解释。 —

1.5.1. 作为态射的约化. — 子语言 $L_0 \subset L$ 和参数子集 $B_0 \subset B$ 定义了显然的遗忘态射 $\mathbb{S}^T_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}^{T(L_0)}_\bullet(B_0)$，它只保留类型的 $L_0(B_0)$-公式。

1.5.2. 可缩性与通过外部可定义集得到的 *Shelah* 扩张。— 若此映射可缩（即可纳入图表 (4)），这就意味着每个在 B 上的 $T(L_0)$-类型都可在 $L(B)$ 中定义。粗略地说，对于 $B = M$ 一个模型，这意味着 T 包含 $T_0 := T(L_0)$ 的 Shelah 扩张。

(4)
$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^{T(L_0)}_\bullet(M) \circ [+1] \\ & \overset{\pi_\bullet}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_{2,3,..}} \\ \mathrm{const}_\bullet \mathbb{S}^T_1(M) \times \mathbb{S}^T_\bullet(M) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{const}_\bullet \mathbb{S}^{T(L_0)}_1(M) \times \mathbb{S}^{T(L_0)}_\bullet(M) \end{array}$$

如果 $T_0 = T(L_0)$ 不稳定，并且我们取基数足够大且相同的 B_0 和 B，那么这必定不成立：在 B_0 上的 $T(L_0)$-类型比 B 上的 T-公式更多。

1.5.3. 用同伦论证明不可解释性？— 因此，如果同伦论的方法能够证明某些单纯（非可缩）类型空间之间的每个映射都是可缩的，那么我们或许就能在模型论中证明一个不可解释性结果.....

1.5.4. 能否以单纯的方式刻画解释？— 我无话可说。 [**Morley** 定理 3.1] 刻画了由 $L_{\omega_1\omega}$-理论产生的单纯类型空间（但没有明确使用“函子”或“范畴”这两个词）。另见 [**Levon**，§3] 以及[**Kamsma**]，了解在不同背景下对类型空间函子的现代阐述，特别是 [**Levon**，§3（类型空间函子与理论的解释）] 以及[**Kamsma**，定义 4.19-20]，这些我还没读过。

1.6. Shelah 的可表示性。—— 两个广义 Stone 空间之间态射的含义，让人联想到 Shelah 引入的一个结构表示另一个结构的概念 [CoSh:919]（我们引用 [Sh:1043]），其目的在于“试图将这样的直觉形式化：‘稳定一阶理论的模型类并不比模型类 $M = (A, ..., E_t, ...)_{s\in I}$（其中 E^M_t是一个

在 $s<t$ 上细化 E^M_s 的等价关系；而 I 是一个基数为 $\leq |T|$ 的线性序。”“在 [**Z1** §3.2.4] 中，我们重新表述了 [CoSh:919] 中稳定理论刻画的一个推论，并对这一直觉给出了更字面化的形式化：一个理论是稳定的，当且仅当存在 κ，使得对于该理论的每个模型，都存在一个从某个结构到其广义 Stone 空间的满态射，其中该结构的语言至多由 κ 个等价关系和一元谓词组成（除此之外没有别的内容）。基于这一重新表述，我们提出了一个猜想，用范畴论刻画稳定理论的模型类。

将这一点与 [Boney 的《Erdos-Rado 类》，定理 6.8] 进行比较，会很有意思。

1.7. 稳定性作为提升性质。— 在 [**Z1** 的 §3.3.2] 中，我们注意到，稳定性可以用提升性质来定义。下面简要概述这一观察，并将其调整到我们当前的语境中。设 $I := \mathbb{Q}$ 为一个可数稠密线性序，$I^{\leqslant}_\bullet$ 和 $|I|_\bullet$ 分别为由该线性序及其元素集合表示的单纯集合：

$$I^{\leqslant}_\bullet : n \longmapsto \mathrm{Hom}_{preorders}(n^{\leqslant}, I)$$

$$|I|_\bullet : n \longmapsto \mathrm{Hom}_{Sets}(n, I) = I^n$$

回忆一下，对于每个 $n>0$，一个理论稳定，当且仅当任意无限的 n-元组不可区分序列必定是不可区分集。对于 $n=1$，这个定义可由 单纯集合范畴 中的下图刻画（这里只考虑像具有无界维数的水平箭头）：

$$\begin{array}{ccc} I^{\leqslant}_\bullet/\mathrm{Aut}(I^{\leqslant}) & \xrightarrow{\text{unbounded dimension}} & \mathbb{S}_\bullet(\varnothing) \\ \downarrow & \nearrow & \\ |I|_\bullet/\mathrm{Aut}(I) & & \end{array}$$

将此图表转化为实际提升性质的一种方法，是在范畴 $s\text{Æ}$ 中考察它；该范畴由几乎处处定义且连续的映射构成，包含单纯滤子（见定义 5.2.5）。给 I 配备余有限子集滤子，并给每个 $I^{\leqslant}_\bullet(n)$ 和 $|I|_\bullet(n)$ 配备最粗的滤子，使得由 $1^{\leqslant} \longrightarrow n^{\leqslant}$ 诱导的所有单纯映射都是连续的。

2. 将练习 8.3.3 转写为单纯图追逐

我们将练习 8.3.3 转写为单纯形语言。本节内容自成一体，可以先行阅读。

2.1. 练习 8.3.3：模型论语言。— 我们先完整引述练习 8.3.3、其解答，以及（唯一）所需的可定义类型的定义。固定一个理论 T 和 T 的一个怪兽模型 $\mathfrak{C}$。对于一个子集 $B \subset \mathfrak{C}$，令 $S_n(B) := \mathfrak{C}^n/\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$ 表示关于 B 的完备 n-类型空间。回顾一下，其拓扑

由开集 $U_\phi = \{p(\bar{x}) \in S_n(B) : \phi(\bar{x}) \in p(\bar{x})\}$ 生成，其中 ϕ 遍历所有参数取自 B的公式。

DEFINITION 8.1.4. A type $p(\overline{x}) \in \mathrm{S}_n(B)$ is *definable* over C if the following holds: for any L-formula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ there is an $L(C)$-formula $\psi(\overline{y})$ such that for all $\overline{b} \in B$

$$\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in p \text{ if and only if } \models \psi(\overline{b}).$$

We say p is *definable* if it is definable over its domain B.

We write $\psi(\overline{y})$ as $\mathrm{d}_p\, \overline{x}\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ to indicate the dependence on $p, \varphi(\overline{x}, \overline{y})$ and the choice of the variable tuple $\overline{x}$. (So d_p has the syntax of a generalised quantifier, see [59].) Thus, we have

$$\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in p \text{ if and only if } \models \mathrm{d}_p\, \overline{x}\varphi(\overline{x}, \overline{b}).$$

Note that $\mathrm{d}_p\, \overline{x}\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ is also meaningful for formulas φ with parameters in B.

EXERCISE 8.3.3. Let $p(x) \in \mathrm{S}(\mathfrak{C})$ be definable over B. Then, for any n, the map

$$r(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \{\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \mid \mathrm{d}_p\, x\varphi \in r\}$$

defines a continuous section $\pi_n \colon \mathrm{S}_n(B) \to \mathrm{S}_{n+1}(B)$. Show that this defines a bijection between all types definable over B and all "coherent" families (π_n) of continuous sections $\mathrm{S}_n(B) \to \mathrm{S}_{n+1}(B)$.

EXERCISE 8.3.3. Let $\pi_n : \mathrm{S}_n(B) \to \mathrm{S}_{n+1}(B)$ be a continuous section. For any n-tuple c if π_n maps $\mathrm{tp}(c/B)$ to $p(x, y)$, then $p_c = p(x, c)$ is a type over cB. Continuity implies that for every $\varphi(x, y)$ there is a B–formula $\psi(y)$ such that for all c we have $\varphi(x, c) \in p_c \Leftrightarrow \models \psi(c)$. The following coherence condition ensures that $p = \bigcup_{c \in \mathfrak{C}} p_c$ is consistent. For any map $s : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ let $s^{\#} : \mathrm{S}_n(B) \to \mathrm{S}_m(B)$ and $s^* : \mathrm{S}_{n+1}(B) \to \mathrm{S}_{m+1}(B)$ be the associated natural restriction maps. Then coherence means $\pi_m \circ s^{\#} = s^* \circ \pi_n$.

2.2. 用单纯形语言表述练习 8.3.3。—令 Δ 表示由 $\{1 < .. < n\}$ 表示的非空有限线性序范畴。令 $[+1] : \Delta \longrightarrow \Delta$ 为退移自函子，它为每个有限线性序添加一个新的最小元素：

$$[+1] : \{1 < .. < n\} \longmapsto \{0 < 1 < ... < n\}$$

$$f : \{1 < ... < m\} \longrightarrow \{1 < ... < n\} \longmapsto f[+1](0) := 0, f[+1](l) =: l$$

按照单纯形文献中的标准记法，有限线性序 $\{1 < ... < n\}$ 既记作 $n^{<}$，也记作 $[n-1]$。

令 $\mathbb{S}_\bullet(B) : \Delta^{op} \longrightarrow Top$ 为如下函子：它将每个有限线性序 $\{1 < ... < n\}$ 送到 $S_n(B) = \mathfrak{C}/\mathrm{Aut}_L(\mathfrak{C}/B)$。回顾一下，函子 $\Delta^{op} \longrightarrow Top$ 称为范畴 Top 的单纯对象，有时也称为单纯拓扑空间。事实上，函子 $\mathbb{S}_\bullet(B) : \Delta^{op} \longrightarrow Top$ 可通过范畴 Δ^{op} 到非空有限集的范畴 $\mathit{finiteSets}_{\neq\varnothing}$ 的对偶的嵌入进行分解，并令 $\mathbb{S}_\bullet(B) : \mathit{finiteSets}_{\neq\varnothing} \longrightarrow Top$ 为相应的函子。

一族“相干”的截面 $\pi_n : S_n(B) \longrightarrow S_{n+1}(B)$ 定义了一个自然变换 $\mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$。事实上，相干条件 $\pi_m \bigcirc s^\# = s^* \bigcirc \pi_n$ 正是自然变换 $\mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$ 的定义性质。事实上，由于对称性，只要求对非递减映射 $s : \{1, ..., m\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$ 满足相干条件即可：对于任意置换 $\sigma : \{1, ..., m\} \longrightarrow \{1, ..., m\}$，等式 $\pi_m \bigcirc s^\#(q(y_1, ..., y_n) = s^* \bigcirc \pi_n(q(y_1, ..., y_n)$ 等价于 $\pi_m \bigcirc s^\#(q(y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(n)}) = s^* \bigcirc \pi_n(q(y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(n)})$。因此，等价地说，一族“相干”的截面 $\pi_n : S_n(B) \longrightarrow S_{n+1}(B)$ 定义了一个自然变换 $\mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$。

这些相干条件等价于全局类型的一致性

$$p(x/\mathfrak{C}) = \bigcup_{c \in \mathfrak{C}^n, n>0} p_c = \{\varphi(x, \bar{c}) : \phi(x, \bar{y}) \in \pi_n(\mathrm{tp}(\bar{c}/B))\}$$

确实，考虑公式的有限集 $\varphi_i(x, \bar{c}_i) \in p(x/\mathfrak{C})$，$i < n$。考虑联合 N-元组 $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$ 的类型 $\pi_N \mathrm{tp}(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n/B)$。对于适当的映射 $s : \mathrm{length}(\bar{c}_i)^{\leqslant} \longrightarrow N^{\leqslant}$，相干条件（=函子性）蕴含$\pi_{\mathrm{length}(\bar{c}_i)}(\bar{c}_i) = \pi(s)(\pi_N(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n))$，因此 $\varphi_i(x, \bar{c}_i) \in \pi_N(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$，这是相容的。

根据构造，全局类型 $p(x/\mathfrak{C})$ 是 B-不变的。

因此，全局 B不变类型与（可能不连续的）截面（π_n）的“相干”族之间存在双射；等价地，单纯集合的（可能不连续的）截面 $\mathbb{S}_\bullet(B) \longrightarrow \mathbb{S}_\bullet(B) \bigcirc [+1]$。

因此，我们可以将练习 8.3.3 改述如下：

Exercise 8.3.3。设 $p(x) \in S(\mathfrak{C})$可在 B上定义。那么，对任意 n，映射

$$r(y_1, ..., y_n) \longmapsto \{\phi(x, y_1, ..., y_n) | d_p x\phi \in r\}$$

或者，等价地，

$$r \longmapsto p \otimes r$$

定义了一个连续截面 $\pi_n : S_n(B) \longrightarrow S_{n+1}(B)$。证明这定义了以下对象之间的一个双射：

– 所有可在 B上定义的类型– 所有连续截面 $S_n(B) \longrightarrow S_{n+1}(B)$的“相干”族（$\pi_n$）。– 单纯拓扑空间图表中的提升箭头

(5)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+1] & & \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B) \circ [+1] \\ {\scriptstyle \pi_\bullet}\nearrow \quad \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{2,3,..}} & & {\scriptstyle \pi_\bullet}\nearrow \quad \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{2,3,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{S}_\bullet(B) & & \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathfrak{C}_\bullet/\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B) \end{array}$$

此外，证明这定义了一个双射

– 所有在 B 上不变的全局类型– 所有可能不连续的截面 $S_n(B)$ 的“相干”族 $(\pi_n) \longrightarrow S_{n+1}(B)$。– 单纯集合图表中的提升箭头

(6)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_\bullet(B) \circ [+1] \\ {\scriptstyle \pi_\bullet}\nearrow \quad \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{2,3,..}} \\ \mathbb{S}_\bullet(B) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{S}_\bullet(B) \end{array}$$

请注意，根据 [Simon，2.2，例 2.17]，任何有限可满足的全局类型在 B 上必然是 B-不变的。由于模型上的每个类型必然有限可满足，这意味着模型上的每个全局类型都会在 单纯集合范畴中导出一个图表 (6)。因此，连续性概念对于定义可定义性至关重要。

3. 练习 8.3 的同伦论解释背景。 **3**

众所周知，单纯公式 (5) 在$sSets$中定义了同伦平凡性，V.Sosnilo 曾向我们指出这一点。注意，图表 (5) 可以写成任意范畴的单纯对象范畴中的图表。

遗憾的是，我们对这个公式知之甚少，因此希望从事同伦论研究的读者提出意见。

我们将在 §3.1 中说明，将公式 (5) 和 (2) 应用于足够良好的拓扑空间的奇异复形时，它们定义了拓扑空间范畴中映射可缩这一通常概念。

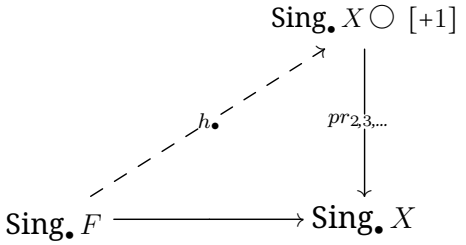
在 §3.2 中，我们指出，同一公式定义了滤子范畴的单纯对象范畴中的收敛概念。

3.1. 拓扑空间范畴中的单纯同伦。—事实上，在拓扑空间范畴 Top 中，将一个空间 F 在一个空间 X 内收缩到一点的同伦（即一个映射 $h : F \times [0,1]/F \times \{1\} \to X$，从 F的锥X出发），会导出一个映射

$$h_\bullet : \mathrm{Sing}_\bullet F \longrightarrow \mathrm{Sing}_\bullet X[+1]$$

奇异复形之间的提升映射 $(h_{|F\times\{0\}})_\bullet : \mathrm{Sing}_\bullet F \longrightarrow \mathrm{Sing}_\bullet X$，定义如下。该映射将 $\mathrm{Sing}_\bullet F((n+1)^\leqslant)$ 中的每个 $\delta : \Delta^n \to F$ 映射为 $\mathrm{Sing}_\bullet X((n+2)^\leqslant)$ 中由 $h_*(\delta)(x,t) := h(\delta(x)\ t)$ 定义的 $h_*(\delta) : \Delta^n \times [0,1]/\Delta^n \times \{1\} \to X$。

(7)



所谓良好的拓扑空间，是指任意一类空间，使得映射 $h : F \longrightarrow X$可缩（=零伦的）当且仅当它是弱可缩的；怀特海德定理表明，CW空间在此意义下是良好的。

命题***1***。—如果 F 和 X 是良好的，且 F 是连通的，那么映射 $h_0 : F \longrightarrow X$ 可经由 F 的锥分解为

$$F \longrightarrow F \times [0,1]/F \times \{1\} \longrightarrow X$$

当且仅当奇异复形的诱导映射 $\mathrm{Sing}_\bullet X \longrightarrow \mathrm{Sing}_\bullet X$ 可经由退移 $\mathrm{pr}_{2,3,..} : \mathrm{Sing}_\bullet X \circ [+1] \longrightarrow \mathrm{Sing}\, X_\bullet$分解。

证明。——回忆一下，奇异复形是利用单形定义的

$$\Delta^n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{preorders}}([0,1]^\leqslant, (n+1)^\leqslant)$$

作为“测试空间”：

$$\begin{gathered}\mathrm{Sing}_\bullet F((n+1)^\leqslant) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta^n, F),\\ \mathrm{Sing}_\bullet X((n+1)^\leqslant) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta^n, X),\\ \mathrm{Sing}_\bullet X \circ [+1]((n+1)^\leqslant) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\Delta^n \times [0,1]/\Delta^n \times \{1\}, X)\end{gathered}$$

其中 $n \geqslant 0$ 和 $\Delta^n \times [0,1]/\Delta^n \times \{1\}$ 是 n-单纯形 Δ^n 的锥。

为了定义一个提升 $h_\bullet$，给定映射 $h : F \times [0,1]/F \times \{1\} \longrightarrow X$，将 $F_\bullet((n+1)^\leqslant)$ 中的每个 $\delta : \Delta^n \to F$ 映射到 $h_*(\delta) : \Delta^n \times [0,1]/\Delta^n \times \{1\} \to X$，其中 $X_\bullet((n+2)^\leqslant)$ 由$h_*(\delta)(x,\ t) := h(\delta(x)\ t)$ 定义。

要证明反方向，注意映射 $h_\bullet : F_\bullet \longrightarrow X_\bullet[+1]$ 将 F 的一个奇异单形 $\delta : \Delta^n \to F$ 映到 X 的一个奇异单形 $h_\bullet(\delta) : \Delta^{n+1} = \Delta^n \times [0,1]/\Delta^n \times \{1\} \longrightarrow X$，使得 $\delta = \mathrm{pr}_{2<3<\ldots<n} h_\bullet(\delta)$，即 $\delta = h_\bullet(\delta)_{|\Delta^n \times \{0\}}$，因此每个$\delta : \Delta^n \longrightarrow F \longrightarrow X$ 都经由 Δ^n 的锥分解。利用函子性验证可知，对于来自任意连通球面 $\mathbb{S}^n = \partial\Delta^{n+1}$, $n > 0$ 的映射 $\delta' : \mathbb{S}^n = \partial\Delta^{n+1}$，同样的分解也成立；这恰好意味着 h_0 弱可缩，而对于良好的拓扑空间，可缩与弱可缩是等价的。 □

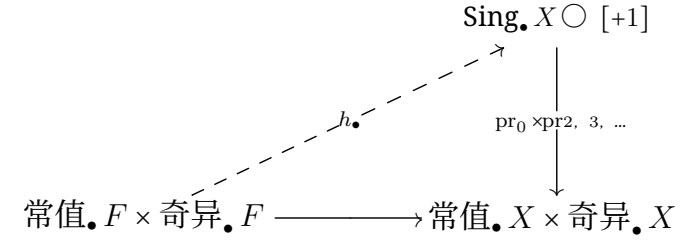
令 $\mathrm{const}_\bullet F$ 表示常值函子 $\Delta^{op} \longrightarrow Top$，$\mathrm{const}_\bullet F(n^\leqslant) := F$ 对所有$n > 0$。

命题 *2*. — 假设拓扑空间 F 和 X 都是良好的。

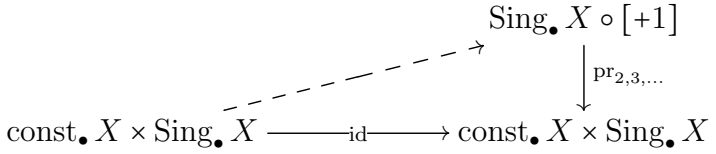
映射 $h_0 : F \longrightarrow X$ 同伦于一个常值映射，即可分解为经过 F 的锥，形式如下

$$F \longrightarrow F \times [0,1]/F \times \{1\} \longrightarrow X$$

当且仅当奇异复形的诱导映射 $\mathrm{const}_\bullet F \times \mathrm{Sing}_\bullet F \longrightarrow \mathrm{const}_\bullet X \times \mathrm{Sing}_\bullet X$ 经过退移 $\mathrm{pr}_{2,3,\ldots} : \mathrm{Sing}_\bullet X \circ [+1] \longrightarrow \mathrm{const}_\bullet X \times \mathrm{Sing}\, X_\bullet$ 分解。



特别地，一个良好的（可能不连通的）空间 X 可缩，当且仅当



3.2. 收敛即为可缩。—在 [**L**]中，我们观察到，我们将拓扑空间 X 中的一列点 $(a_i)_i$ 与滤子范畴 Å 中单纯对象范畴sÅ 的一个态射联系起来（参见定义 5.2.5），使其可按公式 (7) 分解当且仅当该序列收敛；此外，该序列的极限恰好对应于各种提升。事实上，我们最初在 [?], 中转录拓扑空间上滤子的极限定义时，写下了 [**mintsGE**，§3.2]中的单纯图表 (7)，但遗憾的是，直到 V.Sosnilo 提出一条评论，我们才意识到它与可缩性的联系。

4. 研究方向。测试问题。

我们提出几个测试问题，可用于指导模型论的单纯重构的发展。

4.1. 以单纯形式陈述并证明稳定性理论基本定理。—— 稳定性理论基本定理声称，稳定性的两个定义是等价的，并且这两个定义都允许进行单纯形重构：（*）每个集合上的类型都是可定义的；（**）没有公式具有序性质。第一个定义正是本文所讨论的内容，而第二个定义与 [**Z1**, **Z2**], 尤其是 [**Z1**，§3.3.2],[**Z2**，§17] 另见 §1.7中以提升性质表述的重构十分接近。此外，这一结论还可由关于紧致性的一般定理推出，即格罗滕迪克双极限定理 [**Groth**，定理6], ，正如[**BenYaacov**, **Starchenko**]中所解释的那样。注意，存在一种涉及图表的紧致性定义，其所用图表与定义可定义性时使用的图表相似 [**L**]。

C是否有人能给出这个定理的纯单纯方法或同伦论证明?

一个直接的难点是，我们不太清楚应该在哪个范畴中开展工作：[**Z1**, **Z2**] 中的重述采用了单纯滤子与连续映射的范畴 sÅ（尽管 §1.7 表明，采用几乎处处连续映射或许更好）；而这里我们使用的是单纯拓扑空间范畴单纯拓扑空间范畴，或其由单纯形有限拓扑豪斯多夫紧空间构成的全子范畴$sProFiniteSets$ 。另见 §4.2.1 中的猜想（分叉作为连续性概念？）。

4.2. 关于独立关系的 Kim-Pillay 非分叉刻画。——将简单理论的刻画 [**Kim-Pillay**，§4，定义 4.1]，以及稳定理论的刻画 [**Harnik-Harrington**，公理 0-4]，用参数集和作为态射的类型到 $\mathbb{S}^T_\bullet(\varnothing)$ 的方式改写为单纯形式。这样做似乎很直接，难点在于确定这种转换所引出的范畴论概念。注意，[**Lieberman-Rosicky-Vasey**，定义 2.1]，以及 [**Kamsma2**]采用了不同的方法，以范畴论的方式重述这些概念。

4.2.1. 分叉是一种连续性概念吗？— [**Harnik-Harrington**]指出，一阶理论 T 的稳定性可以用其完备类型的一类特定扩张 $p \subset q$ 来刻画（此处 $p \subset q$ 表示 p中的每个公式也都属于 q），这些扩张定义在任意参数集上；另见 [**Tent-Ziegler**，定理 8.5.10（分叉的刻画）]。他们用 $p \sqsubset q$ 表示理论 T的完备类型之间的这种关系，直观上，$p \sqsubset q$ 表示 q 是 p 到更大参数集上的一个自由扩张。他们证明，理论 T 稳定，当且仅当其定义在任意参数集上的完备类型之间存在一种关系 $p \sqsubset q$，满足以下公理：

Axiom 0. If $p \sqsubset q$ then $p \subset q$ and if f is elementary then $p \sqsubset q$ iff $fp \sqsubset fq$

Axiom 1. If $p \subset q \subset r$, then:
(a) $p \sqsubset q \sqsubset r$ implies that $p \sqsubset r$,
(b) $p \sqsubset r$ implies that $p \sqsubset q$,
(c) $p \sqsubset r$ implies that $q \sqsubset r$.

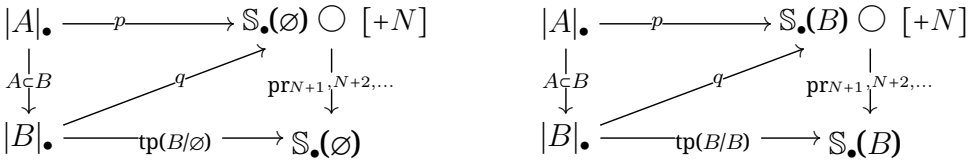
Axiom 2. If $p \in S(A)$ and $A \subset B$, then $p \sqsubset q$ for some $q \in S(B)$.

Axiom $3_{\aleph_0}$. If $p \in S(A)$, then $p \restriction A_0 \sqsubset p$ for some finite $A_0 \subset A$.

Axiom 4. For any p there is a cardinal λ such that there are at most λ mutually contradictory types q s.t. $p \sqsubset q$.

Axiom 3. There is a cardinal κ such that if $p \in S(A)$, then $p \restriction A_0 \sqsubset p$ for some $A_0 \subset A$ with $|A_0| < \kappa$.

用单纯形术语来说，关系 $p \sqsubset q$ 是 单纯集合范畴中的一类特定图表



连续性概念为单纯集合范畴 定义了一种额外结构，它确实提供了一类特 distinguished 图表，因此人们不禁想知道，这是否是理解非分叉的一种有用视角。在范畴上定义类似拓扑的标准方法，是采用范畴上的格洛腾迪克拓扑概念，即选取一族特 distinguished 的态射 $\{f_i : U_i \longrightarrow U\}_i$ ，称为覆盖。请注意，公理 3 让人联想到可达范畴。

4.2.2. 用独立关系表述稳定性。— 我们无话可说，只能引述一些定义，希望读者能够认出其中涉及的图表。[**Kim-Pillay**定理 5.2（另见定理 3.2 和定义 4.1] ）刻画了简单理论这一类。我们将引述独立关系的公理。 [**Kim-Pillay**定理 3.2（模型上的独立性定理）] 陈述了独立关系的一个非平凡性条件，该条件刻画简单理论。令 $tp(a/A) \sqsubset tp(a/BA)$ 当且仅当 (a, B, A) 独立，这便将独立关系与上文的非分叉扩张联系起来。

Definition 4.1. Let T be an arbitrary theory, and let Γ be a collection of triples (a, B, A) (where a is a tuple from $\mathscr{C}$ and $A \subseteq B$ are small subsets of $\mathscr{C}$). We will say that Γ is a notion of independence if the following hold:

(i) (invariance) Γ is invariant under automorphisms of $\mathscr{C}$.
(ii) (local character) For any a, B there is $A \subseteq B$ such that the cardinality of A is at most the cardinality of T and $(a, B, A) \in \Gamma$.
(iii) (finite character) $(a, B, A) \in \Gamma$ if and only if for every finite tuple b from B, $(a, A \cup \{b\}, A) \in \Gamma$.
(iv) (extension) For any a, A and $B \supseteq A$ there is a' such that $tp(a'/A) = tp(a/A)$ and $(a', B, A) \in \Gamma$.
(v) (symmetry) If $(a, A \cup \{b\}, A) \in \Gamma$ then $(b, A \cup \{a\}, A) \in \Gamma$.
(vi) (transitivity) Suppose $A \subseteq B \subseteq C$. Then $(a, C, B) \in \Gamma$ and $(a, B, A) \in \Gamma$ if and only if $(a, C, A) \in \Gamma$.

I用单纯形术语来说，这描述了一组具有如下形式的特 distinguished 图表

$$\begin{array}{ccc} |a| \vee |B|_\bullet & \longleftarrow & |a|_\bullet \\ \uparrow & \searrow & \downarrow \\ |B|_\bullet & \longrightarrow & \mathbb{S}_\bullet(A) \end{array}$$

4.3. 重新表述超稳定性、非独立性性质、范畴性、简单性、独立关系与非分叉的性质、Kim 分裂与 Kim 分叉、优良性.....— 重新表述一些经典理论。特别是，以单纯的方式重新表述结构的模型论性质，这些性质与组合学或代数几何相关，例如与 Elkes-Szabo 或伪指数化相关的性质。

5. 附录。征求意见

在附录中，我斗胆列出一些问题，这些问题是我在私人交谈或电子邮件中会提出的。

5.1. 向同伦论学家征求意见。— 我对用于定义理论的可缩性、收敛性和稳定性的单纯公式 (5) 所知甚少。任何关于一般理论的参考资料都将不胜感激。

同伦论是否能为处理稳定理论提供一种视角或技巧？尤其是考虑到群作用的 Borel 构造与注 1.3.1 中提到的单纯 Stone 空间之间的联系。例如，¯是否有人考虑过伽罗瓦作用¯在 $\mathbb{Q}$ 上的 Borel 构造 $\mathbb{B}_\bullet(\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})\ \mathbb{Q})$？对于向量空间 V， $\mathbb{B}_\bullet(\mathrm{GL}(V)\ V)$ 大概是标准的考虑对象，但它与向量空间理论的 Stone 空间 $\mathbb{S}^{\mathrm{VectorSpaces}}$ • 有什么关系呢.....

我指出，稳定性（以及理论的许多其他性质）可以通过相对于一个明确给定的态射的提升性质来定义，这发生在一个颇为类似的范畴 sÅ 中；该范畴是滤子范畴Å中的单纯对象范畴 [**Z1**,**Z2**]。

我应该明确说明，我并非同伦论方面的专家，欢迎大家合作交流。

问题 ***1*** **（关于我们用于定义可缩性的单纯公式的背景）**
– 请推荐一篇探讨这个单纯公式和退移的优质参考文献。

– 这个单纯公式可以在任意范畴的单纯对象范畴中解释，因此定义了一种映射可缩的概念。有人研究过将这个公式作为可缩性的定义吗？它的性质好吗？我们确实知道，在单纯集合范畴中，它为纤维化单纯集定义了一种标准的可缩性概念。– 是否存在一个类似的公式，利用 Δ 的自同态来定义任意范畴的单纯对象范畴中两个映射何时同伦等价？

5.2. 来自一位模型论学家的意见征询。— 该如何进一步推进？模型论中有哪些概念似乎可以加入我们的小词汇表？

一个显而易见的愿望，是在模型论中运用同伦论的方法或直觉。比如，在模型论中进行一次同伦论计算。

5.2.1. 稳定同伦论中的 *Morley* 序列作为谱？— 这两个概念都涉及一个序列，并在每一步取悬挂。它们之间是否存在某种类比？

5.2.2. 分类空间是否

$$\mathbb{B}_{\bullet}(\mathfrak{C}, \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}/B))$$

出现在模型论中？— 注 **1.3.1** 是否会让人联想到模型论中的任何内容？

5.2.3. 一个技术性问题：具有不同连续性概念的同一图表。— [**Z1**, **Z2**] 表明，稳定性以及其他一些概念，是通过提升性质在单纯拓扑空间的范畴 $sTop$ 之外的范畴中定义的，而是在滤子的范畴中定义的单纯对象范畴 $s\mathring{\mathrm{A}}$ 中定义的。在该范畴中解释 **(5)**，会得到类型的另一种性质，我在下面陈述这一性质。这一性质是否为人所熟知？

问题 ***2***。— 以下类型性质是否为人所熟知？它看起来非常类似于非分裂，但只适用于元素，而不适用于元组，[**Tent-Ziegler**，推论 **7.1**。5]注意，该性质在 $s\mathcal{P}$ 中被表达为提升性质，见 [**Z1**，**5.3**。2]。

– （过度简化的表述）一个在 B 上不变的全局类型 $p(x/\mathfrak{C})$，使得如果 $\bar{c}$ 在 B上不可区分，那么 $p(x/\mathfrak{C})$ 包含所有表明 $\bar{c}$ 在 x上不可区分的公式。– 一个在 B 上不变的全局类型 $p(x/\mathfrak{C})$，使得–　–

• 对于每个长度 $l > 0$，对于每个公式 $\varphi(x, \bar{y}, b)$，$b \subset B$，存在有限多个¯　¯公式 $\psi_i(-, b_i)$，$b_i \subset B$，$0 < i < n$，使得–

∗ 对于任意长度为 l 的元组 $\bar{c} \subset \mathfrak{C}$，如果 $\bar{c}$ 相对于每个 $\psi(-, b_i)$ 都是不可分辨的，$0 < i < n$，那么 $p(x/\mathfrak{C})$ 包含一个公式，说明 $\bar{c}$ 相对于 $\phi(x, -, b)$ 是不可分辨的。–与上文相同，但将“相对于有限多个公式不可分辨”改为“可扩展为任意长的有限元组，并且该元组相对于有限多个公式不可分辨”。因此现在表述为：一个全局类型 $p(x/\mathfrak{C})$在 B 上不变，且

• 对于每个长度 $l < l_1$，对于在 B 上的公式的每个有限集 Θ，存在 $l_2 > 0$ 以及在 B 上的公式的有限集 Δ，使得

> *对于长度为 l 的任意元组 $\bar{c} \subset \mathfrak{C}$，如果 $\bar{c}$ 可扩展为某个长度为 l_2 且关于 Δ 不可分辨的有限元组，那么 $p(x/\mathfrak{C})$ 包含这样一个公式：$\bar{c}$ 可扩展为一个长度为 l_1 且关于 Θ 不可分辨的元组 $\bar{c}\bar{c}'$

5.2.4. 模型论中关于单纯类型空间的参考文献？— 我所知道的关于单纯类型空间的参考文献只有三篇：Michael Morley 的《拓扑在 $L_{\omega_1\omega}$ 中的应用》（1974）[**Morley**]，，Levon Haykazyan 的《正模型论中的类型空间》（《符号逻辑杂志》84（2019），833–848）[**Levon**]，，以及 Mark Kamsma 的《正逻辑中的类型空间函子与解释》（2020）。后两篇 [**Levon, Kamsma**] 以“类型空间函子”之名提及单纯类型空间，并在正逻辑的背景下对其进行考察。我们特别提请读者关注 [**Levon**，第 3 节（类型空间函子与理论的解释）] 以及 [**Kamsma**，定义 4.19——20] 这部分我尚未读过。

[**Morley**] 称与一个 $L_{\omega_1\omega}$-理论相关的类型结构，但从未明确使用“函子”或“范畴”这些词。请看 Morley 用来引入刻画与一个 $L_{\omega_1\omega}$-理论相关的单纯空间（称为“类型结构”）所需概念的以下表述。

> In considering these spaces and maps between them some complexities are introduced by the substitution properties of equality. We shall, therefore, usually consider not S_n but the closed-open subset Q_n consisting of the types of sequences of distinct elements. Similarly, we shall consider only the maps f^* which are induced by one-one f. The collection of all the Q_n's together with the maps f^* will be called the *type structure* for T.
>
> We shall always use Π to denote f^* where f is the identity map of n into $n+1$. (The value of n will be clear from context.) Similarly λ will always denote f^* where $f: n \to n+1$ is defined by $f(i) = i$ for $i < n-1$ and $f(n-1) = n$.

还有其他内容吗？特别是关于作为类型空间映射的解释。

5.2.5. 滤子范畴中的类型单纯 *Stone* 空间的简明定义。——现在让我定义带有连续映射的滤子范畴 Å，以及几乎处处定义的带有连续映射的滤子范畴 Æ。

定义 ***5.2.1***。——Å 中的一个对象是一个配备了滤子的集合。一个态射 $f:(X, \mathrm{F}) \to (Y, \mathrm{G})$ 是底集的一个映射 $f: X \longrightarrow Y$，满足大集合的原像是大集合，即 $\{f^{-1}(U) : U \in \mathrm{G}\} \subset \mathrm{F}$。我们将这样的滤子映射称为连续，因为这使我们能够表述：一个拓扑空间的映射是连续的，当且仅当所诱导的邻域滤子映射是连续的。

令 Æ 表示一个滤子的范畴，其中态射仅在大子集上定义，并将那些在某个大子集上重合的映射视为相同。也就是说，Æ 和 Å 具有相同的对象；在 Æ 中，态射 $f: (X, \mathrm{F}) \longrightarrow (Y, \mathrm{G})$ 是一个映射 $f: U_X \longrightarrow Y$，定义在大子集 $U_X \in \mathrm{F}$ 上，且大集合的原像是大集合，即 $\{f^{-1}(U) : U \in \mathrm{G}\} \subset \mathrm{F}$。两个这样的态射相同，当且仅当它们在某个大子集上重合。我们称这样的滤子映射为几乎处处连续。注意，我们仍可称拓扑空间之间的映射连续，当且仅当它所诱导的邻域滤子之间的映射几乎处处连续。

我们可以将类型空间 $S_n(B)$ 视为 Æ 的对象，只要为 $S_n(B)$ 配备以下由包含一个公式的类型集生成的不可分辨性 滤子

在 B 上，形式为

$$\bigwedge_{0<l<k}(x_{i_l}\neq x_{i_{l+1}}\,\&\,x_{j_l}\neq x_{j_{l+1}})\implies(\varphi(x_{i_1},...,x_{i_k})\leftrightarrow\varphi(x_{j_1},...,x_{j_k}))$$

或许，更合理的做法是稍微改变这些滤子的定义：对于每个 $k<N$ 以及关于 B 的公式有限集 φ_s，取如下形式的公式：

$$\bigwedge_{0<l<k}(x_{i_l}\neq x_{i_{l+1}}\,\&\,x_{j_l}\neq x_{j_{l+1}})\implies\exists x_{n+1}...x_N(\bigwedge_{n<r<s\leqslant N}x_r\neq x_s\ \&$$

$$\bigwedge_{\substack{i_k<i_{k+1}<...<i_r\leqslant N,\\ j_k<j_{k+1}<...<j_r\leqslant N}}(\bigwedge_s\varphi_s(x_{i_1},...,x_{i_r})\leftrightarrow\varphi_s(x_{j_1},...,x_{j_r}))$$

这个公式旨在表达：元组 $x_1,..,x_n$ 可以扩展为任意长的有限元组，并且相对于关于B的任意有限多个公式都是不可分辨的。

参考文献

[ErgB]M. Gromov. 结构、学习与*Ergosystems*。 http://www.ihes.fr/~gromov/PDF/ergobrain.pdf，2009年。[Simon] P.Simon。《非独立性性质理论指南》。逻辑讲义。ASL与剑桥大学出版社。https://www.normalesup.org/~simon/NIP_guide.pdf[Tent-Ziegler] K.Tent，M.Ziegler。《模型论课程》。剑桥大学出版社。2012年。[RFC3] Steve Crocker。文档约定。1969年4月。https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc3[Levon] Levon Haykazyan。《正模型论中的类型空间》。符号逻辑杂志，84（2019），833–848。http://arXiv.org/pdf/1711.05754[Kamsma]Mark Kamsma。《正逻辑中的类型空间函子与解释》。https://arxiv.org/abs/2005.03376。《数学逻辑文献》，2022年3月。[Morley] Michael Morley。拓扑在 $L_{\omega_1\omega}$中的应用。载于Leon Henkin、John Addison、C. C. Chang、William Craig、Dana Scott和Robert Vaught编，《塔斯基研讨会论文集》，第233–240页。美国数学会，1974年。（下载）[BenYaacov] Itaı Ben Yaacov。模型论稳定性与类型的可定义性：继A. Grothendieck之后。《符号逻辑公报》，20（2014），第4期，491–496。MR3294276[Groth]Alexandre Grothendieck。《一般函数空间中的紧性判据》。美国数学杂志，74（1952），168–186。MR0047313 https://agrothendieck.github.io/divers/fonctgen52scan.pdf[Starchenko] Sergei Starchenko。《论Grothendieck的稳定性方法》。https://www3. nd.edu/~sstarche/papers/groth-stab.pdf[Kamsma2] Mark Kamsma。《抽象初等范畴中的Kim-Pillay定理》。符号逻辑杂志，85(4):1717–1741，2020年。https://doi.org/10.1017/jsl. 2020.75 https://arxiv.org/pdf/2003.00319.[Lieberman-Rosicky-Vasey] Michael Lieberman、Jiri Rosicky、Sebastien Vasey。《诱导的高维稳定独立性》。http://arxiv.org/pdf/2011.13962[Kim-Pillay]B.Kim, A.Pillay。简单理论。《纯粹与应用逻辑年刊》，88（1997），149–164 https://pdf.sciencedirectassets.com/271596/1-s2.0-S0168007200X00474/1-s2.0-S0168007297000195/main.pdf

[Harnik-Harrington] V.Harnik，L.Harrington。《分叉基础》。纯粹与应用逻辑年刊，26（1984），245–286。https://pdf.sciencedirectassets.com/271596/1-s2.0-S0168007200X01923/1-s2.0-0168007284900058/main.pdf[DMG]《德摩根公报》。伦敦数学会。http://education.lms.ac.uk/wp- content/uploads/2014/08/DMG 5 no 4 2014.pdf[G] M. Gavrilovich。《提升性质作为否定的实例》。本文当前版本，http://mishap.sdf.org/mints-lifting-property-as-negation ⋆http://mishap.sdf.org//yet_another_not_an_obfuscated_story.pdf[DMG]《德摩根公报》。伦敦数学会。http://education.lms.ac.uk/wp- content/uploads/2014/08/DMG 5 no 4 2014.pdf[G] M. Gavrilovich。《提升性质作为否定的实例》。本文当前版本，http://mishap.sdf.org/mints-lifting-property-as-negation ⋆http://mishap.sdf.org//yet_another_not_an_obfuscated_story.pdf[mintsGE] M. Gavrilovich，K.Pimenov。《形式化温和拓扑的朴素图表追踪方法》。http://mishap.sdf.org/mintsGE.pdf（尤其是§2.1–2.3和§4）。2018年。[6a6ywke]M. Gavrilovich。《具有小性概念的单纯集合》。http://mishap.sdf.org/6a6ywke/6a6ywke.pdf 2018年。[L] M.Gavrilovich。《收敛与同伦平凡性由同一个单纯公式定义》。https://mishap.sdf.org/yetanothernotanobfuscatedsign.pdf[S] 《广义拓扑空间概述》。包含模型论概念的改写概要。ncatlab.com/show/situs[LP1]提升性质。en.wikipedia.org/wiki/Lifting_property ncatlab.com/ show/lift[LP2] 迭代提升性质示例列表。ncatlab.com/show/lift[Z1] M.Gavrilovich。《Shelah分类理论与Quillen否定的评注》。mishap.sdf.org/yetanothernotanobfuscatedstudy.pdf 2020年。[Z2] M.Gavrilovich。K.Pimenov。《Shelah分界线的范畴论解释》。mishap.sdf.org/yet_another_not_an_obfuscated_study.pdf 2022年。海报。

---

*2013*年 数学家是一种法国人：和他们说话时，他们就会把话翻译成自己的语言，然后意思马上就完全变了。——*J.W. von Goethe*。《格言与笔记》。据歌德与席勒档案馆手稿编，*Max Hecker* 主编，歌德学会出版社，魏玛，*1907*年，《遗稿选》，第*1005*条，论自然与自然科学。《箴言与思考》。你装成这样能得到什么呢？miishapp@sddf.org.MISHA GAVRILOVICH