arXiv:2303.17586v1 [math.CV] 30 Mar 2023

$n = 7$ 的 Dual Smale 均值猜想

AIMO HINKKANEN, ILGIZ R. KAYUMOV, DIANA M. KHAMMATOVA

Abstract. 我们针对 $n = 7$ 的情形，给出了 Dual Smale 均值猜想的解析证明。

1. Introduction

本文研究一个与斯梅尔平均值猜想密切相关的问题。我们考虑由下式定义的多项式类

$$\mathfrak{P}_n = \{z + \sum_{k=2}^{n} c_k z^k \colon c_k \in \mathbb{C}, c_n \neq 0\},$$

其中 $n \geq 2$。换言之，这是所有次数为 n、满足 $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1$ 的多项式 $f(z)$ 所构成的类。我们用 ζ_k 表示 f 的临界点，即 f' 的零点，其中 $1 \leq k \leq n-1$，通常记作 ζ。

对于每个 $f \in \mathfrak{P}_n$，我们记作

$$T(f) = \min \left\{ \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| : \ f'(\zeta) = 0 \right\}$$

and

$$S(f) = \max \left\{ \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| : \ f'(\zeta) = 0 \right\}.$$

1981 年，Smale [6] 证明了估计 $T(f) < 4$，并猜想 $\max_{f \in \mathfrak{P}_n} T(f) = 1 - \frac{1}{n}$。容易验证，对于 $f(z) = z + cz^n$，其中 $c \neq 0$，我们得到 $T(f) = 1 - \frac{1}{n}$。因此，已知

$$1 - \frac{1}{n} \leq T(f) < 4.$$

关于各种特殊情形，已有许多估计。其中一些可见于论文 [1], [4]。

当前研究的主要对象是一个称为对偶 Smale 猜想的猜想。

猜想。$\min_{f \in \mathfrak{P}_n} S(f) = \frac{1}{n}$。

这一猜想由 Dubinin 和 Sugawa 于 [3] 提出，Ng 也独立提出了这一猜想。

2000年数学主题分类。主要分类：30C10。关键词和短语。Dual Smale 均值猜想、临界点、多项式的临界值。

Tischler [7] 证明了这一猜想对所有满足以下条件的多项式均成立

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta} = \mathrm{Const}, \qquad f'(\zeta) = 0.$$

满足这一条件的多项式称为保守多项式。

Dubinin 和 Sugawa [3] 证明了存在一个临界点 ζ，使得

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \geq \frac{1}{n4^n}.$$

2018年 Dubinin [2] 证明，对于每个多项式 $f \in \mathfrak{P}_n$、 $n \geq 2$以及每个点 z，都存在 f 的一个临界点 ζ，使得

$$\left|\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\right| \geq \frac{1}{n} \tan\frac{\pi}{4n}|f'(z)|.$$

作者指出，不等式中的 tan $\frac{\pi}{4n}$ 可以替换为 $\frac{1}{n}$。

对于 n 的较小值，可以直接验证该猜想，但即使对于 $n = 4$，问题也会变得相当复杂。

对于情形 $n = 4$ 的证明由 Tischler 于 [7]给出。证明了存在多项式 $f \in \mathfrak{P}_n$ 的一个临界点 ζ，使得

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad 2 \leq n \leq 4.$$

然而，Tyson 后来在 [8] 指出，对于 $n \geq 5$，这个不等式不成立 .

2019年，作者 [5] 证明了关于 $n = 5$ 和 $n = 6$ 的猜想。数值实验表明，同样的方法也可用于 $n = 7$，但计算似乎过于复杂。

在本文中，我们证明了关于 $n = 7$ 的对偶 Smale 猜想。因此，我们得到以下定理。

定理1. 设 f 是一个次数为 7 的多项式，且 $f(0) = 0$， $f'(0) = 1$。那么存在一点 ζ，使得 $f'(\zeta) = 0$ 且 $|f(\zeta)/\zeta| \geq 1/7$。

如果不存在点 ζ使得 $f'(\zeta) = 0$且 $|f(\zeta)/\zeta| > 1/7$，那么 f的形式为

$$f(z) = \frac{1}{7a}(1 - (1 - az)^7) \tag{1}$$

其中 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$。

本文结构如下。第二节简要介绍证明的主要思路。第三节从技术性主要结果定理 2 推导出定理1。第四节包含若干对证明至关重要的补充事实。第五节证明给出所需结果的主定理。第六节简要总结当前研究。

2. The main idea

我们的方法基于一个相当简单的策略：选择给定多项式的一个临界点 ζ，使其模在所有临界点中最小。

更准确地说，我们来表述一个辅助问题。

问题 1. 设 $\alpha_f = \text{最小值}_{f'(\zeta)=0}|\zeta|$,

$$\Lambda_f = \max\left\{\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| : \quad f'(\zeta)=0, |\zeta| = \alpha_f\right\}. \tag{2}$$

Find

$$\Lambda = \min_{f\in\mathfrak{P}_7} \Lambda_f \tag{3}$$

并找出极值函数。

显然，如果 $\Lambda = 1/7$，那么关于 $n = 7$ 的 Dual Smale 均值猜想成立。

设 $f \in \mathfrak{P}_7$。则 f 恰有六个临界点 ζ_1、.....、ζ_6，按重数计。我们注意到，可以用函数 $\frac{f(az)}{a}$ 替换 $f(z)$，其中 $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$。因此，不失一般性，可以假设对于 $1 \le k \le 5$， $\zeta_6 = 1$ 且 $|\zeta_k| \ge 1$。

我们使用积分表示

$$\frac{f(w)}{w} = \int_0^1 (1-tw)\prod_{j=1}^{5}\left(1-\frac{tw}{\zeta_j}\right)dt. \tag{4}$$

现在我们写出 $\frac{1}{\zeta_j} = z_j$, $|z_j| \le 1$，并计算点 $w = 1$ 处的表达式 :

$$\frac{f(1)}{1} = \int_0^1 (1-t)(1-z_1t)(1-z_2t)(1-z_3t)(1-z_4t)(1-z_5t)\,dt.$$

我们将证明以下事实。

命题 1. 假设 $f \in \mathfrak{P}_7$，并令点 $\zeta_k := \frac{1}{z_k}$, $1 \le k \le 5$ 和 $z_6 = 1$为 f的临界点，其中 $|z_k| \le 1$对 $1 \le k \le 5$成立。则 $f(1) \ne 0$。

那么，我们可以像在 [5] 中那样使用最小值原理，并且只考虑边界上的点，即满足 $|z_k| = 1$ 对 $1 \le k \le 5$成立的点 z_k。

因此，要解决问题 1，只需证明以下定理。

定理 2. 设 $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 \in \mathbb{C}$ 为位于单位圆上的复数。那么

$$S = \left|\int_0^1 (1-t)(1-z_1t)(1-z_2t)(1-z_3t)(1-z_4t)(1-z_5t)\,dt\right| \ge \frac{1}{7}. \tag{5}$$

当且仅当.....时，等式成立，

$$z_i = 1,\ 1 \le i \le 5 \qquad or \qquad z_i = e^{\frac{i\pi}{3}},\ 1 \le i \le 5 \qquad or \qquad z_i = e^{-\frac{i\pi}{3}},\ 1 \le i \le 5.$$

3. Proof of Theorem 1

我们说明如何在假设定理 2成立的情况下证明定理1。定理 2表明，由 (3) 定义的 Λ 满足 $\Lambda \ge 1/7$。为了找出所有满足 $\Lambda_f = 1/7$的 f，对于由 (2) 定义的Λ_f，我们可以假设 f 由 (4) 给出。回想一下， f 的临界点是 1 和 $\zeta_j = 1/z_j$。

如果对于所有满足 $1 \le j \le 5$的 j，都有 $z_j = 1$，那么

$$f(z) = z \int_0^1 (1 - tz)^6 \, dt = \frac{1}{7} \left(1 - (1 - z)^7\right). \tag{6}$$

在 f 的唯一临界点 $\zeta = 1$ 处，我们有 $f(\zeta)/\zeta = 1/7$，因此 $\Lambda_f = 1/7$.

如果对于所有满足 $1 \le j \le 5$ 的 j，都有 $z_j = q$，其中 $q = e^{i\pi/3}$ 或 $q = e^{-i\pi/3}$，从而 $1 - q = \overline{q}$ 且 $(1 - q)^6 = 1$，那么由 (6) 和分部积分可得，

$$\begin{aligned} f(z) &= z \int_0^1 (1 - tz)(1 - tqz)^5 \, dt = \frac{-1}{6qz} z \int_0^1 (1 - tz) \, d(1 - tqz)^6 \\ &= \frac{-1}{6q} \left((1 - z)(1 - qz)^6 - 1 + \frac{-1}{7q} ((1 - qz)^7 - 1) \right) \\ &= \frac{1}{42q^2} \left((7q - 1)(1 - (1 - qz)^6) + 6qz(1 - qz)^6 \right). \end{aligned}$$

现在， f 的不同临界点为 1 和 $1/q$。当 $q = e^{\pm i\pi/3}$ 时，我们有 e

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{(7q - 1) + (1 - q)^7}{42q^2} = \frac{6q}{42q^2} = \frac{1}{7q}$$

因此 $|f(1)/1| = 1/7$，而

$$\frac{f(1/q)}{1/q} = \frac{7q - 1}{42q^2},$$

因此

$$\left| \frac{f(1/q)}{1/q} \right| = \frac{\sqrt{50 - 14\mathrm{Re}\, q}}{42} = \frac{\sqrt{43}}{42} \approx 0.156 > \frac{1}{7}.$$

因此，当对所有满足 $1 \le j \le 5$ 的 j 都有 $z_j = q$，其中 $q = e^{i\pi/3}$ 或 $q = e^{-i\pi/3}$ 时，我们有 $\Lambda_f > 1/7$。于是，当且仅当存在 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 使得 $f(az)/a$ 由 (6) 的右端给出时，我们有 $\Lambda_f = 1/7$。这就证明了定理1。

4. Proof of the Proposition 1

我们需要以下引理。

引理 1. 设

$$a = \int_0^1 t(1 - t)(1 - z_1 t)(1 - z_2 t)(1 - z_3 t)(1 - z_4 t) \, dt,$$

$$b = \int_0^1 (1 - t)(1 - z_1 t)(1 - z_2 t)(1 - z_3 t)(1 - z_4 t) \, dt,$$

其中 $|z_k| = 1$, $1 \le k \le 4$。那么 $|b| > |a|$。

证明。我们将每个 z_k 表示为 $z_k = x_k + iy_k$, $x_k^2 + y_k^2 = 1$。那么

$$11025(|b|^2 - |a|^2) = 3730 + 1064x_1x_2x_3x_4 - 2359(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 84y_1y_2y_3y_4 +$$
$$+1701(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4)-329(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3+y_1y_4+y_2y_4+y_3y_4)-$$
$$- 1316(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + 238(x_3y_1y_2 + x_4y_1y_2 + x_2y_1y_3 +$$
$$+ x_4y_1y_3 + x_1y_2y_3 + x_4y_2y_3 + x_2y_1y_4 + x_3y_1y_4 + x_1y_2y_4 + x_3y_2y_4 + x_1y_3y_4 + x_2y_3y_4)-$$
$$- 182(x_3x_4y_1y_2 + x_2x_4y_1y_3 + x_1x_4y_2y_3 + x_2x_3y_1y_4 + x_1x_3y_2y_4 + x_1x_2y_3y_4)$$

我们将所得表达式的右端记为 h。显然，它不小于

$$h_1 = h - 7((y_1 - y_2)^2(y_3 - y_4)^2 + (y_1 - y_3)^2(y_2 - y_4)^2 + (y_1 - y_4)^2(y_3 - y_2)^2).$$

考虑到等式 $x_k^2+y_k^2 = 1$，我们得到一个包含以下形式表达式的函数

$$-(301 - 238x_3 + 14x_3^2 + (-238 + 182x_3)x_4 + 14x_4^2)y_1y_2$$

容易看出，括号内表达式非负，因此

$$\begin{aligned} h_1 \geq h_1 - \frac{1}{2}&(301 - 238x_3 + 14x_3^2 - 238x_4 + 182x_3x_4 + 14x_4^2)(y_1 - y_2)^2 - \\ &- \frac{1}{2}(301 - 238x_2 + 14x_2^2 - 238x_4 + 182x_2x_4 + 14x_4^2)(y_1 - y_3)^2 - \\ &- \frac{1}{2}(301 - 238x_2 + 14x_2^2 - 238x_3 + 182x_2x_3 + 14x_3^2)(y_1 - y_4)^2 - \\ &- \frac{1}{2}(301 - 238x_1 + 14x_1^2 - 238x_4 + 182x_1x_4 + 14x_4^2)(y_2 - y_3)^2 - \\ &- \frac{1}{2}(301 - 238x_1 + 14x_1^2 - 238x_3 + 182x_1x_3 + 14x_3^2)(y_2 - y_4)^2 - \\ &- \frac{1}{2}(301 - 238x_1 + 14x_1^2 - 238x_2 + 182x_1x_2 + 14x_2^2)(y_3 - y_4)^2 \end{aligned}$$

再次利用等式 $x_k^2 + y_k^2 = 1$，我们得到一个仅依赖于 x_k, $1 \leq k \leq 4$ 的表达式。

我们重新 代入 $x_k = 1 - 2w_k$, $0 \leq w_k \leq 1$，并将所得函数记为 h_2。现在

$$h_2 = 216+17024w_1w_2w_3w_4+70(w_1+w_2+w_3+w_4+(w_1-w_2)^2+(w_1-w_3)^2+(w_1-w_4)$$
$$^2++(w_2-w_3)^2+(w_2-w_4)^2+(w_3-w_4)^2) +112((w_3+w_4)(w_2-w_1)^2+(w_2+w_4)(w_1-w_3)$$
$$^2++(w_2+w_3)(w_1-w_4)^2+(w_1+w_4)(w_2-w_3)^2+(w_1+w_3)(w_2-w_4)^2+(w_2+w_1)(w_4-w_3)^2)+$$
$$+56((w_1w_2+w_1w_3+w_2w_3)((5w_4-1)^2+w_4^2) +(w_1w_2+w_1w_4+w_2w_4)((5w_3-1)^2+w_3^2)++$$
$$(w_1w_3+w_1w_4+w_3w_4)((5w_2-1)^2+w_2^2)+(w_2w_3+w_2w_4+w_3w_4)((5w_1-1)^2+w_1^2))++14$$
$$((4w_1w_2-1)^2+(4w_1w_3-1)^2+(4w_1w_4-1)^2+(4w_3w_2-1)^2+(4w_4w_2-1)^2+(4w_3w_4-1)^2).$$

由此可见 $h_2 > 0$，因此 $|b| > |a|$。引理得证。

□

现在我们回到命题 1 的证明。容易看出

$$f(1) = b - z_5 a,$$

其中 a 和 b 由与引理 1 中相同的公式给出，但现在我们考虑 $|z_k| \le 1$、$1 \le k \le 5$ 的情形。

在论文 [5] 中，已证明 $|b| > \frac{1}{6}$ 对单位圆中的所有 z_k 都成立。因此，$b \neq 0$ 对所有 z_k 都成立。于是，$\frac{a}{b}$ 是四个变量的解析函数。由引理 1 可知，当 $|z_k| = 1$、$1 \le k \le 4$ 时有 $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$，因此，对每个变量应用最大值原理，我们看到同一个不等式对 $|z_k| \le 1$ 也成立。这实质上与 [5] 中为证明关于六次多项式的类似结果所给出的论证相同。因此，$|b| > |a|$ 且 $|f\ (1)\ | > 0$。

命题 1 已得到证明。

5. Proof of the main result, Theorem 2

由于 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 位于单位圆上，它们可以表示为

$$z_1 = e^{i\phi_1},\ z_2 = e^{i\phi_2},\ z_3 = e^{i\phi_3},\ z_4 = e^{i\phi_4},\ z_5 = e^{i\phi_5}.$$

我们考虑表达式

$$g(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5) = 25200 \left(S^2 - \frac{1}{49} \right).$$

如果对于变量 ϕ_k 从 $1 \le k \le 5$ 开始的所有实数值，该表达式均为非负数，则所需的不等式成立。

为简便起见，我们记

$$\cos\phi_i - \cos\phi_j = x_{ij}, \quad \sin\phi_i - \sin\phi_j = y_{ij}, \quad 1 - \cos\phi_i = d_i, \quad 1 - 2\cos\phi_i = b_i.$$

我们将 E_1 记为集合 $\{1,2,3,4,5\}$的所有排列的集合，也就是将 $\{1,2,3,4,5\}$ 映射到其自身的双射φ。

我们将 E_2 记为由 $\{1,2,3,4,5\}$中的元素组成的无序对的有序对的集合，其中每种情况下 $\{1,2,3,4,5\}$ 中的四个元素均不相同。于是，E_2 有30个元素，例如集合 $[\{5,1\},\{2,4\}]$; 请注意，在这两个无序对中，按照惯例，集合中的元素没有特定的顺序。我们以某种确定的方式将 E_2 中的元素标记为 e_1、.....、e_{30}，现在为所涉及的 $\{1,2,3,4,5\}$中的元素选定一个确定的顺序，对于每个 e_j，将 e_j 写成 $e_j = [\{e_{j,1}, e_{j,2}\}, \{e_{j,3}, e_{j,4}\}]$的形式。

我们将所有由 $\{1,2,3,4,5\}$ 中不同元素组成的 10 个无序对的集合记为 E_3，并以某种确定的方式将它们标记为 $T_j = \{t_{j,1}, t_{j,2}\}$; 同时为每个集合 T_j 中的元素选择某种确定的顺序，其中 $1 \le j \le 10$。

我们将 E_4 记为所有形如 $(k_1, \{k_2, k_3, k_4\})$ 的有序对所组成的集合，其中数字 k_1、k_2、k_3、k_4 是 $\{1,2,3,4,5\}$ 的互不相同的元素，而三元组 k_2、k_3、k_4 是无序的，以集合的形式表示。E_4 中有 20 个元素，我们以某种确定的方式将它们标记为 U_j（$1 \le j \le 20$）。我们写作 $U_j = (u_{j,\ 1},\ \{u_{j,2}, u_{j,3}, u_{j,4}\})$，其中三元组中的元素选取了某种（无关紧要但）确定的顺序。

我们定义

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{115}{6}\sum_{\varphi\in E_1} d_{\varphi(1)}d_{\varphi(2)}d_{\varphi(3)}y^2_{\varphi(4)\varphi(5)} + 4\sum_{j=1}^{30} x^2_{e_{j,1}e_{j,2}}y^2_{e_{j,3}e_{j,4}} \\ &+ \frac{11}{12}\sum_{\varphi\in E_1}(b_{\varphi(1)}+b_{\varphi(2)}+b_{\varphi(3)})^2 d_{\varphi(4)}d_{\varphi(5)} \\ &+ \frac{205}{48}\sum_{\varphi\in E_1} d_{\varphi(1)}d_{\varphi(2)}d_{\varphi(3)}(b_{\varphi(4)}+b_{\varphi(5)})^2 \\ &+ \frac{1}{144}\sum_{\varphi\in E_1}(d_{\varphi(1)}+d_{\varphi(2)}+d_{\varphi(3)})(19b^2_{\varphi(4)}b^2_{\varphi(5)}+96y^2_{\varphi(4)\varphi(5)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{16}\sum_{\varphi\in E_1}\big(2(15d_{\varphi(1)}+4)(y^2_{\varphi(2)\varphi(3)}y^2_{\varphi(4)\varphi(5)}) \\ &+ \frac{3}{8}d_{\varphi(1)}(b_{\varphi(2)}+b_{\varphi(3)}+b_{\varphi(4)}+b_{\varphi(5)})^2 + \frac{43}{12}b^2_{\varphi(1)}(d_{\varphi(2)}+d_{\varphi(3)}+d_{\varphi(4)}+d_{\varphi(5)})\big) \\ &+ \frac{25}{4}\sum_{j=1}^{20} b^2_{u_{j,1}}d_{u_{j,2}}d_{u_{j,3}}d_{u_{j,4}}, \end{aligned}$$

$$J_3 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{30}(b_{e_{j,1}}b_{e_{j,2}} - b_{e_{j,3}}b_{e_{j,4}})^2,$$

$$J_4 = 2\sum_{j=1}^{10}\left(7x^2_{t_{j,1}t_{j,2}} + 10y^2_{t_{j,1}t_{j,2}}\right),$$

and

$$J_5 = \frac{1}{192}\sum_{\varphi\in E_1}\big(7(b_{\varphi(1)}+b_{\varphi(2)}b_{\varphi(3)})^2(d_{\varphi(4)}+d_{\varphi(5)}) + 720d^2_{\varphi(1)}y^2_{\varphi(2)\varphi(3)}(d_{\varphi(4)}+d_{\varphi(5)})\big)$$

由于对所有 i， $d_i \geq 0$，显然对所有满足 $k = 1$、.....、5 的 k， $J_k \geq 0$。可以验证

$$g(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\phi_5) = J_1+J_2+J_3+J_4+J_5. \tag{7}$$

于是 $g \geq 0$，因此 $S^2 \geq \frac{1}{49}$，这等价于 (5)。

此外，只有当每一项 J_k 都等于零时，等式 $g = 0$ 才成立。从等式 $J_4 = 0$ 可以看出，对所有 $1 \leq i$、$j \leq 5$， $x_{ij} = y_{ij} = 0$。这意味着所有点 ϕ_i 都相等。现在显然，在这种情况下，对所有 i， $d_i = 0$；或者对所有 i， $b_i = 0$。由此得到三个极小值点:

$$\phi_i = 0, \quad i = 1,\dots,5, \qquad \phi_i = \frac{\pi}{3}, \quad i = 1,\dots,5, \qquad \text{and} \qquad \phi_i = -\frac{\pi}{3}, \quad i = 1,\dots,5.$$

在这些情形中， $g = 0$，因此 $S = 1/7$。这证明了定理 2。

注记1。将这一结果与论文 *[5],* 中的结果进行比较，可以看出，情形 $n = 7$ 更为复杂。特别是，对于 $n = 6$的问题1的对应问题（该问题也在 *[5]* 中得到了隐含证明），极值函数只有一类；而对于 $n = 7$ ，则有三类。

对于 $n = 6$ ，所有极值函数均由下式描述

$$f(z) := \frac{1}{6a}(1 - (1 - az)^6), \qquad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

对于 $n = 7$ ，我们得到

- 函数

$$\tilde{g}_1(z) = z \int_0^1 (1 - tz)^6 \, dt$$

以及所有形如 $g_1(z) = \tilde{g}_1(az)\ a$ 的函数：

$$g_1(z) := \frac{1}{7a}(1 - (1 - az)^7), \qquad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

等式 $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{1}{7}$ 将在临界点 $z = \frac{1}{a}$ 处取等。

- *The* f 函数

$$\tilde{g}_{2,3}(z) = z \int_0^1 (1 - tz)(1 - tqz)^5 \, dt, \qquad q = e^{\pm\frac{i\pi}{3}}$$

以及所有形如 $g_{2,3}(z) = \tilde{g}_{2,3}(az)\ a$ 的函数：

$$g_{2,3}(z) := \frac{1}{42q^2a}((7q - 1)(1 - (1 - aqz)^6) + 6qaz(1 - aqz)^6), \qquad a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

正如我们所见，函数 $g_{2,3}(z)$ 并非初始对偶斯梅尔问题的极值函数。然而，它们是问题 1 的极值函数。

6. Conclusion

本文继续研究对偶 Smale 均值猜想。文中给出了 $n = 7$ 情形的解析证明。证明的基本思路与文献 [5], 相同，但所用方法不同。

我们采用的方法基于求解一个辅助问题，记为问题 1。结果表明，对于 $n = 7$ ，该问题恰有三类极值函数，这使其有别于所有以往的情形。

我们已经从 [5] 得知，对于 $n > 7$ ，采用选择绝对值最小的任意点这一相同方法并不奏效。这意味着，在进一步研究中需要对该方法进行修改。

7. Acknowledgments

D.M. Khammatova 的工作由俄罗斯科学基金会项目编号 22-71-10094 资助。

References

[1] A. F. Beardon、D. Minda、T.W. Ng，《斯梅尔平均值猜想与双曲度量》，《数学年刊》322:4（2002），623–632。[2] V.N. Dubinin，关于复多项式的对偶平均值猜想，《数学札记》106:1（2018年），133–135。[3] V. Dubinin 和 T. Sugawa，复多项式的对偶平均值问题，《日本学士院院刊A辑数学科学》85:9（2009），135–137。[4] A. Hinkkanen、I.R. Kayumov，关于具有实临界点的多项式的临界值，Construc- tive Approximation 32:2（2010），385–392。[5] A. Hinkkanen、I.R. Kayumov、D.M. Khammatova，斯梅尔对偶平均值猜想，《美国数学会会刊》147:12（2019年），5227–5237。[6] S. Smale，代数基本定理与复杂性理论，《美国数学会通报》（新系列）4（1981），1–36。[7] D. Tischler，复多项式的临界点与临界值，《复杂性杂志》5（1989），438–456。[8] J.T. Tyson，关于 Tischler 的斯梅尔平均值猜想强形式的反例，《伦敦数学会通报》37（2005），95–106。

Aimo Hinkkanen, Department of Mathematics University of Illinois at Urbana-Champaign 1409 W. Green Street Urbana, Illinois 61801-2975电子邮箱地址：aimo@math.uiuc.edu

I.R. Kayumov, Kazan Federal University, Kremlevskaya 18, 420 008 Kazan, Russia电子邮箱地址：ikayumov@kpfu.ru

D.M. Khammatova, Moscow Polytechnic University, Bolshaya Semyonovskaya 38, 107023Moscow, Russia; Kazan Federal University, Kremlevskaya 18, 420 008 Kazan, Russia电子邮箱地址：dianalynx@rambler.ru