arXiv:2303.17711v1 [math.GN] 30 Mar 2023

桌子定理何时意味着方形钉问题有解?

STEFAN FRIEDL 和 KENAN INCE

摘要。我们将阐述拓扑学中最优美的定理之一——Fenn 的桌子定理，与拓扑学中最著名的未解问题之一——方形钉问题之间的关系。

1. 引言

为了介绍方形钉问题，我们需要以下定义 :

定义 1.1。 单射连续映射 $S^1 \to \mathbb{R}^2$ 的像称为一条若尔当曲线。给定一条若尔当曲线 C，如果矩形 R 的所有顶点都位于 C上，我们就称矩形 R 内接于 C 。

以下问题最早由 Otto Toeplitz 于 [托1911] 1911年提出。

问题 1.2。（**方形钉问题**）每条若尔当曲线都包含边长为 >0 的内接正方形吗?

自提出以来，这个问题及其有趣的变体一直令数学家们着迷。人们已经取得了许多部分结果。例如，已知每条若尔当曲线都可以内接一个矩形[梅1982], 而 Lev Schnirelmann[斯1944] 证明，如果若尔当曲线是 C^2，那么总能内接一个正方形；但这个问题的一般情形仍未解决。关于这一问题及其历史的讨论见[马2014] 和 [GL2021]。

以下定理最早由 Roger Fenn 于 [费1970] 在 1970年提出并证明。（该证明的另一种写法见 [Fr2023，第 133 章。1]）

定理 1.3.（**桌子定理**）设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个非空的紧凸子集。设 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个连续映射，满足对于所有 $x \in D$，都有 $f(x) \geq 0$，并且对于所有 $x \notin D$，都有 $f(x) = 0$。设 $s > 0$ 是一个实数。那么存在四个点 a_1， a_2， a_3， $a_4 \in \mathbb{R}^2$，满足以下性质:

(1) 这些点构成一个边长为 s的正方形，(
2) 正方形中心位于 D中，(3) 我们有 $f(a_1)$
$= f(a_2) = f(a_3) = f(a_4)$。

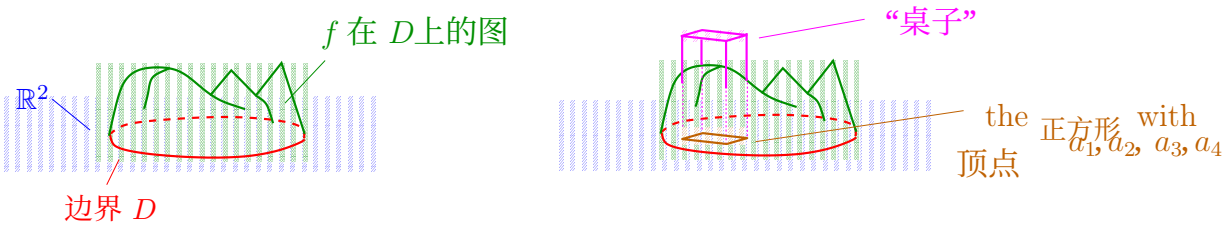


图 1.1. 桌子定理示意图。

换句话说，桌子定理指出，任意给定的一张方桌都可以放置在由 f 的图像所定义的“地面”上，使得四条桌腿都落在地面上，桌面保持水平，且桌面中心位于 D中。

长期以来，人们就知道桌子定理 1.3 对方形钉问题有推论。Ma2014 [Ma2014、Ta2017] 指出，桌子定理 1.3 蕴含了凸若尔当曲线的方形钉问题的解。但在我们看来，事情似乎更复杂，因为正如我们将在第 2 节看到的，在许多情况下，桌子定理存在平凡解，无法告诉我们任何有趣的事情。这引出了以下定义。

定义 1.4. 我们称 D of $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ 的一个子集为钝角，如果对于任意 $x \in \partial D$，都存在一个 $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和一个角 $\theta > \frac{\pi}{2}$，使得

$$T_{v,\theta}(x) := \{x + r \cdot e^{i\phi} \cdot v : \phi \in [0,\theta] \text{ and } r \in [0,1]\} \subset D.$$

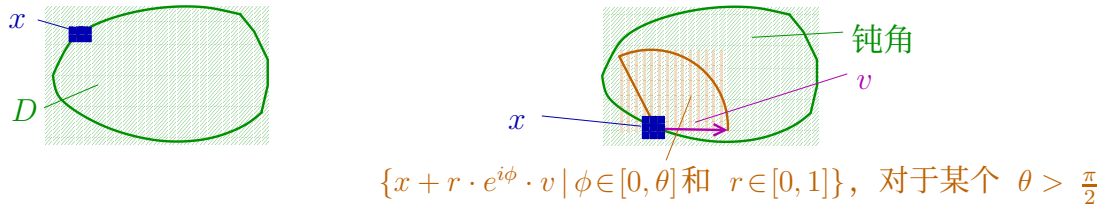


图1.2. 一个钝集 D 以及一幅$T_{v,\theta}(x)$的图。

在这篇简短的说明中，我们将在主引理 2.2 中证明，桌子定理 1.3有非平凡解，当且仅当 D 是钝角。我们将利用桌子定理 1.3 为以下定理给出一个新的证明。

定理1.5.（主要定理）设 J 是一条若尔当曲线，它是某个紧凸子集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 的边界。若 D 是钝角，则 J 存在一个内接正方形。

不过请注意，凸曲线的方形钉问题 1.2 早已为人所知；事实上，K. Zindler [Zi1921] 和 C. M. Christensen [Chr1950]曾证明过。

2. 预备知识

我们回到桌子定理的语境。注意，给定一个紧凸的非空集合 $D \subset \mathbb{R}^2$，当 s 足够大时，我们只需将桌腿放在 D 外（事实上，根据 f 的连续性，将桌腿放在 D 的内部之外），同时保持桌子中心

位于 D 中，因为此时 $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = 0$。受桌子定理的一种“平凡解”启发，我们作如下定义：

定义 2.1。设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的子集，且 $s \in \mathbb{R}$。如果存在一个位于 $\mathbb{R}^2$ 中、边长为 $t \in (0, s]$ 的正方形，其顶点均位于 D 的内部之外，而正方形中心位于 D 中，则称 D 为 s-平凡的。否则，称 D 为 s-非平凡的。换言之，如果对于所有边长为 $t \in (0, s]$、中心位于 D 中的正方形，至少有一个顶点位于 D 的内部，则称 D 为 s-非平凡的。

请注意，根据我们的定义，如果对于某个 s，D 是 s-平凡的，那么显然对于所有 $s' > s$，D 都是 s'-平凡的。此外，对于所有充分大的 s，每个非空紧集 D 都是 s-平凡的；例如，可以取 $s \geq \text{diam}(D)$，并将边长为 s 的平凡正方形的中心置于 D 中的任意一点。

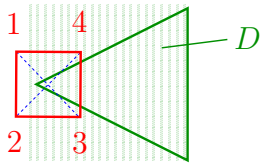


图 2.1. 对所有 $s > 0$，一个 s-平凡的子集 $D \subset \mathbb{C}$ 示例。

以下引理是本文证明的主要技术结果。

引理 2.2.（主引理）设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个紧致、凸且非空的集合。当且仅当存在某个 $s > 0$，使得 D 为钝角时，D 才是 s-非平凡的。

因此，引理2.2 恰好给出了使桌子定理能够推出方形钉问题的非平凡解所需的条件；这里的解不是仅仅把正方形做得足够大，以至于它的所有顶点都落在 之外。

下一节将证明主引理2.2。在第4节中，我们将证明主引理2.2 蕴含定理1.5。

3. Proof of the Main Lemma 2.2

定义 3.1。设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是紧致且凸的。我们考虑函数

$$f_D\colon D \to \mathbb{R}_{\geq 0} x \mapsto \text{上确界}\{\|v\| : v \in \mathbb{R}^2 \text{ 使得存在一个} \gamma > \tfrac{\pi}{2} \text{ 满足} T_{v,\gamma}(x) \subset D\}.$$

注意，我们总可以取 $v = 0$，也就是说，我们是在一个非空集合上取上确界。

引理 3.2。设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是紧凸的。上述定义的函数 $f_D\colon D \to \mathbb{R}$ 是下半连续的。也就是说，对于任意 $x \in D$ 和任意 $\epsilon > 0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $\|x - y\| < \delta$的 $y \in D$，有 $f_D(y) > f_D(x) - \epsilon$。

证明。设 $x \in D$ 和 $\epsilon > 0$ 任意。若 $f_D(x) = 0$，则无需证明。因此现在可以假设 $f_D(x) > 0$。根据 f_D 作为上确界的定义，存在一个非零向量 $v \in \mathbb{R}^2$，使得 $\|v\| > f_D(x) - \frac{\epsilon}{2}$，以及一个角 $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，满足 $T_{v,\gamma}(x) \subset D$。

只需证明存在 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $\|x-y\| < \delta$的 $y \in D$，都可以找到一个 $w \in \mathbb{R}^2$，满足 $\|w\| > f_D(x) - \epsilon$，以及一个角 $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$，满足 $T_{w,\beta}(y) \subset D$。
我们设 $A := x + v$ 以及 $B := x + e^{i\gamma} \cdot v$。我们考虑映射

$$\begin{aligned} g\colon D \setminus \{A, B\} &\to [0, \pi] \\ y &\mapsto \sphericalangle_{AyB} := \arccos\left(\frac{\langle A-y, B-y\rangle}{\|A-y\| \cdot \|B-y\|}\right). \end{aligned}$$

显然，g 是连续的。由于 $g(x) = \gamma > \frac{\pi}{2}$，我们看到存在某个 $\mu > 0$，使得对于所有满足 $\|x-y\| < \mu$的 $y \in D$，都有 $g(y) > \frac{\pi}{2}$。我们设 $\delta := \min\{\mu, \frac{\epsilon}{2}\}$。我们声称 δ 具有所需的性质。

设 $y \in D$，其中 $\|x-y\| < \delta$。我们声称 $w := A - y$ 和 $\beta := g(y)$ 具有所需的性质。
首先注意到，由 $\delta \le \mu$ 可推出 $\sphericalangle_{AyB} = g(y) > \frac{\pi}{2}$。
根据 D 的凸性，我们知道，对于每个 $\varphi \in [0, \gamma]$，从 y 到 $z = x + e^{i\varphi} \cdot v$的线段都包含于 D中。此外，注意到由于 $\delta < \frac{\epsilon}{2}$，我们看到对于每个 $z = x + e^{i\varphi} \cdot v$，都有 $\|z-y\| \ge \|z-x\| - \|y-x\| > f_D(x) - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = f_D(x) - \epsilon$。由此可知，$T_{w,\beta}(y) \subset D$。□

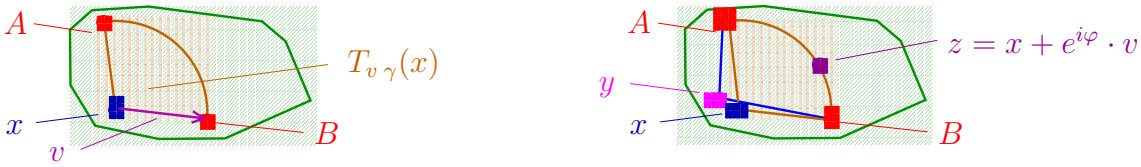


图3.1。引理 3.2 的证明示意图。

现在我们来证明主引理 2.2。因此，设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为一个紧、凸且非空的集合。我们要证明以下结论：

$$D \text{ is obtuse} \iff D \text{ is } s\text{-nontrivial for some } s > 0.$$

我们分别证明两个方向。

主引理 2.2 $\Longrightarrow$ 的证明。设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为一个紧、凸、钝角且非空的集合。我们需要证明存在一个实数 $s > 0$，使得 D 是 s-非平凡的。沿用上述记号；特别地，我们考虑函数 $f_D\colon D \to \mathbb{R}$。注意，对于内部 D 中的任意 x，显然有 $f_D(x) > 0$。此外，由于 D 是钝角的，对于任意 $x \in \partial D$，也有 $f_D(x) > 0$。总之，我们已经证明 $f_D\colon D \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 处处非零。回顾一下，定义在非空紧子集上的每个下半连续函数都能取得全局最小值（例如参见 [Cho1966，定理 II.10.1]）。因此，由引理 3.2 可知，$f_D\colon D \to \mathbb{R}$能取得全局最小值。记

$$s := \min\{f_D(x) : x \in D\}.$$

如上所述，f_D 处处非零，因此我们得到 $s > 0$。

我们声称 D 是 s-非平凡的。令 $x \in D$。我们需要证明，以x 为中心、边长为 $\le s$ 的每个正方形，至少有一个顶点位于 $\operatorname{int}(D)$ 中。

根据 f_D 的定义以及上确界的定义，我们知道存在一个长度为 $v > \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_D(x)$ 的 $v \in \mathbb{R}^2$，以及一个 $\beta > \frac{\pi}{2}$，使得 $T_{(v,\beta)}(x) \subset D$。由于 $\beta > \frac{\pi}{2}$，由初等几何可知，以 x 为中心、边长为 $\leq \sqrt{2} \cdot \|v\|$ 的任意正方形都包含一个位于 $\mathrm{int}(T_{(v,\beta)}(x))$ 中的顶点。由于 $\sqrt{2} \cdot \|v\| \geq f_D(x) \geq s$，我们看到，以 x 为中心、边长为 $\leq s$ 的任意正方形都至少有一个顶点位于 D 的 int 中。

□

主引理的证明 *2.2* $\Longleftarrow$. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个紧凸集。我们需要证明，如果 D 是非钝角，则子集 D 是 s-平凡的，对所有 $s > 0$均成立。

因此，我们假设 D 是非钝角。回想一下，这意味着存在一个 $x \in \partial D$，使得对于所有 $v \neq 0$ 和所有 $\theta > \frac{\pi}{2}$，我们都有 $T_{v,\theta}(x) \not\subset D$。经过平移，我们不失一般性地假设 $x = 0$。

设 $s > 0$。我们需要证明 D 是 s-平凡的。只需证明在 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个正方形，满足以下性质：

(1) 正方形中心为 $x = 0$。(2) 到四个顶点的距离均为 x： $d := \frac{1}{\sqrt{2}} s$。（这意味着边长为 s。）(3) 四个顶点都位于 D的内部之外。

我们设

$$B := \{v \in S^1 \mid \mathbb{R}_{>0} \cdot v \cap D \neq \emptyset\}.$$

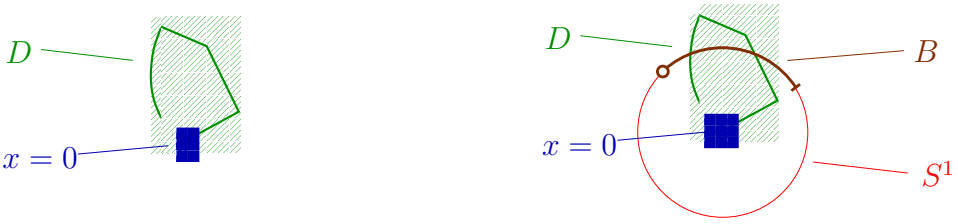


图 3.2。非钝角集合 D 及其对应集合 B 的示意图。

如果 B 仅由两个相对的点 v、$-v$ 组成，那么所需的正方形顶点为 $v \cdot e^{i(\pi/4 + k \cdot \pi/2)}$、$k = 0$、1、2、3。因此，下文假设 B 不仅由两个相对的点组成。

断言 3.3。 子集 $B \subset S^1$ 是路径连通的。

令 $v \neq w \in B$。我们需要证明 v 和 w 可由 B 中的一条路径连接。首先考虑 $v \neq -w$ 的情形。我们选取 $r > 0$、$s > 0$，使得 $r \cdot v$、$s \cdot w \in D$。令

$\tilde{v} := r \cdot v$ 和 $\tilde{w} := s \cdot w$。考虑由 0、$\tilde{v}$、$\tilde{w}$ 形成的三角形。由 D 的凸性可知，该三角形包含于 D 中。这意味着所有形如

$$\frac{\tilde{v} \cdot (1-t) + \tilde{w} \cdot t}{\|\tilde{v} \cdot (1-t) + \tilde{w} \cdot t\|}$$

包含在 B 中。（事实是，$v \neq -w$ 蕴含 $\tilde{v} \cdot (1-t)$ 对所有 $t \in [0,1]$ 都成立。）因此，v 和 w 由 B 中的一条路径连接。

现在假设 $v = -w$。根据前面论断之前的讨论，可知存在一个 $u \in B$，使得 $u \neq \{v, -w\}$。但根据上文，我们可以在 B 中用一条路径连接 v 和 u，也可以在 B 中用一条路径连接 u 和 w。因此，我们可以在 B 中用一条路径连接 v 和 w。至此，论断的证明完成。

由于 $B \subset S^1$ 是连通的，存在一个长度为 $\leq 2\pi$ 的区间 $I \subset \mathbb{R}$，使得

$$B = \{e^{it} \mid t \in I\}.$$

我们令 $\varphi := \inf(I)$，并令 $\psi := \sup(I)$。

断言 3.4。我们有 $\psi - \varphi \leq \frac{\pi}{2}$。

假设 $\psi - \varphi > \frac{\pi}{2}$。我们选取 φ', ψ'，使得 $\varphi < \varphi' < \psi' < \psi$，并满足 $\psi' - \varphi' \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$。根据上确界和下确界的定义，并且由于 I 是一个区间，我们知道 $\varphi', \psi' \in I$，这意味着 $e^{i\varphi'}, e^{i\psi'} \in B$，进而意味着存在 $r > 0$ 和 $s > 0$，使得 $r \cdot e^{i\varphi'} \in D$ 且 $s \cdot e^{i\psi'} \in D$。由 D 的凸性可知，由 0、$r \cdot e^{i\varphi'}$、$s \cdot e^{i\psi'}$ 构成的三角形包含于 D 中。现在通过一个初等几何论证可知，存在一个 $\lambda > 0$，使得 $T_{\lambda e^{i\varphi'},\ \psi' - \varphi'}(0) \subset D$。由于 $\psi' - \varphi' > 0$，这与我们对 x 的选择矛盾。断言得证。

现在考虑由顶点 $d \cdot e^{i(\varphi + k \cdot \frac{\pi}{2})}$、$k = 0$、1、2、3 给出的正方形。显然，(1) 和 (2) 均成立。因此，只需证明以下断言。

断言 3.5：所有四个顶点都位于 D 的内部之外。

首先观察到：如果 $r \cdot e^{i\beta}$ 位于 D 的内部，那么由于 D 的内部是开集，存在一个 $\epsilon > 0$，使得对所有 $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon)$，$r \cdot e^{i(\beta+\sigma)} \in D$ 均成立；这意味着 $(\beta - \epsilon, \beta + \epsilon) \subset I$。由此观察以及下确界和上确界的定义可得该断言。□

4. 非平凡性意味着方形钉问题有解

现在我们可以给出主要定理 1.5 的证明。我们所提供论证的核心思想原则上早已为人所知，参见例如 [Ma2014]。但请注意，此前尚未阐明钝角性质所起的作用。

证明。设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个紧致凸非空钝集。我们需要证明，存在四个点 a_1、a_2、a_3、$a_4 \in \partial D$，它们构成一个边长为 > 0的正方形。经过平移后，我们可以假设原点 0 位于 D的内部。给定$x \in D \setminus \{0\}$，我们设

$$\rho(x) := \sup\left\{\|r \cdot x\| \,\middle|\, r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ and } r \cdot x \in D\right\} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

根据一个初等论证可知，参见例如 [Be2009，第 11 章。3]，， ρ 是连续的。我们考虑映射

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1-\|x\|\cdot\frac{1}{\rho(x)}, & \text{if } x\in D\setminus\{0\}, \\ 1, & \text{if } x=0, \\ 0, & \text{if } x\notin D. \end{cases} \end{array}$$

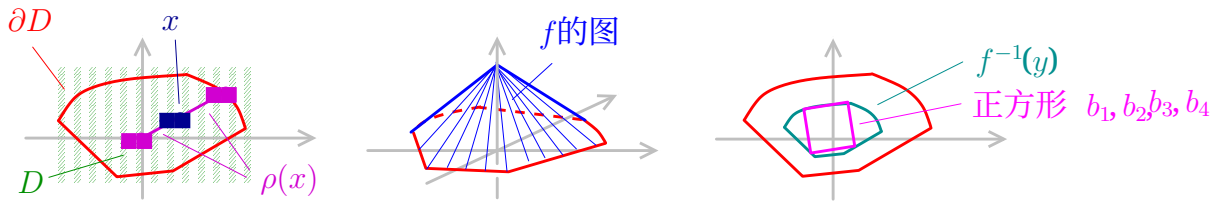
由于 ρ 是连续的，因此很容易验证 f 是连续的。由于 D 是钝角，根据主引理2.2 可知，存在一个 $d>0$ 使得 D 是 d-非平凡的。根据桌子定理1.3，存在四个点 b_1、b_2、b_3、$b_4\in\mathbb{R}^2$，满足以下性质：

（1）这些点构成一个边长为 d的正方形，

（2）正方形的中心位于 D中，

(3) we have $f(b_1)=f(b_2)=f(b_3)=f(b_4)$.

由于 D 是 d-非平凡的，我们看到至少有一个顶点位于 D的内部。但由于f 在 D的内部处处非零，我们看到公共的 f-值（记作 y）位于开区间(0, 1)内。根据 f 的定义，立即可得四个点b_1、b_2、b_3、b_4位于子集$(1-y)\cdot\partial D$上。换言之，将这四个点乘以$\frac{1}{1-y}$后，就得到所需的位于 ∂D上的四个点 a_1、a_2、a_3、a_4。□



致谢。第一作者获得了雷根斯堡大学 CRC 1085“高阶不变量”项目的资助。第二作者谨此感谢威斯敏斯特学院戈尔个人暑期资助以及雷根斯堡大学为支持这项合作提供的经费。

参考文献

[Be2009] M. Berger。《几何学》第一卷，Universitext，施普林格出版社（2009年）。[Cho1966] G. Choquet。《拓扑学》，纯粹与应用数学丛书第19卷（专著与教科书系列）。纽约和伦敦：学术出版社（1966年）。[Chr1950] C. M. Christensen.《凸图形内接正方形》，《Matematisk Tidsskrift B》1950（1950年），22–26。[Fe1970] R. Fenn.《桌子定理》，《伦敦数学会公报》2（1970年），73–76。[Fr2023] S. Friedl.《拓扑学》讲义，雷根斯堡大学 https://friedl.app.uni-regensburg.de/[GL2021] J. Greene 和 A. Lobb.《矩形钉问题》，《数学年刊》（第2辑）194，第2期（2021年），509–517。[Ma2014] B. Matschke.《正方形钉问题综述》，《美国数学会通报》61，第4期（2014年），346–352。[Me1982] M. Meyerson.《平衡技巧》，《拓扑学》，会议论文集，第6卷第1期，布莱克斯堡，弗吉尼亚州，1981年（1982年），59–75。

[Ta2017] 陶哲轩。一种求解托普利兹方形内接问题的积分方法，Forum Math. Sigma 5，论文编号 e30，共63页（2017年）。[Sc1944] L. G. Schnirelman。闭曲线的一些几何性质，Usp. Mat. Nauk 10（1944年），34–44。[To1911] O. Toeplitz。《关于位置分析中的若干问题》，Verhandlungen der Schweizerischen Natur- forschendenGesellschaft in Solothurn 4（1911年），197。[Zi1921] K. Zindler。《关于凸形体》，Monatshefte f ür Mathematik und Physik 31（1921年），25–56。