正则椭球与非对称凸体投影的布拉施克-桑塔洛型不等式

Beatrice-Helen Vritsiou

摘要

本文证明，对于 K 中的任意凸体（不一定对称） $\mathbb{R}^n$ ，都存在其仿射像 K ，使得用不断扩大的单位欧几里得球˜的伸缩体覆盖 K 所需的覆盖数，以及用不断扩大的 K的伸缩体覆盖单位欧几里得球所需的覆盖数，均以正则的方式递减。这将 Pisier 的一个著名定理推广到了非对称情形，尽管覆盖数递减速率的估计较差˜。仿射像 K 可以选取为重心或桑塔洛点位于原点。

在证明中，我们将皮西耶定理作为黑箱使用，同时采用 Klartag 和 V. Milman 提出的方法。一个关键的新要素是关于桑塔洛点位于原点的凸体 K 的投影˜的布拉施克-桑塔洛型不等式′，这本身也可能具有独立的研究价值。与其在覆盖问题中的应用不同，这些不等式（以及 Klartag 和 Milman [27]已经研究过的中心化凸体的类似不等式）可以证明在绝对常数范围内是最优的。

我们还将介绍一项应用，它涉及关于各向同性（不一定对称）凸体的平均范数的相关结果。

1 引言

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K、L， K 被 L 覆盖的覆盖数 $N(K,L)$，是使 L 的若干平移后的并集覆盖 K 所需的最小数量。首先假设 K 关于原点对称（即 $K=-K$），且 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位欧几里得球 B_2^n。V. Milman [34] 的一个著名定理˜指出，任意这样的 K 都有一个线性像 $K=T(K)$，其中 $T\in$ 属于 GL(n)，使得

$$\max\{N(\tilde{K},B_2^n),N(\tilde{K}^\circ,B_2^n),N(B_2^n,\tilde{K}),N(B_2^n,\tilde{K}^\circ)\}\leqslant\exp(Cn) \tag{1}$$

其中常数 $C>0$ 与 n 或 K 无关。这里， L° 表示凸体 L 的极集，且该凸体的内部包含 0：

$$L^\circ:=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle x,y\rangle\leqslant 1 \text{ for all } x\in L\}.$$

Pisier [39] 通过进一步研究当覆盖凸体不断扩张时覆盖数可能如何减小，对这一结果作了改进。

定理 1。（Pisier，1989年）对于每个 $\alpha\in\in(0,2)$，都存在常数 $C_\alpha\geqslant 1$ ，使得以下结论成立：对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个对称凸体 K ，我们都可以找到一个椭球 $\mathcal{E}=\mathcal{E}(K,\alpha)$，它属于 $\mathbb{R}^n$ ，并具有如下性质：对于每个 $t\geqslant C_\alpha^{1/\alpha}$，

$$\max\{N(K,t\mathcal{E}),N(K^\circ,t\mathcal{E}^\circ),N(\mathcal{E},tK),N(\mathcal{E}^\circ,tK^\circ)\}\leqslant\exp\big(C_\alpha\, n/t^\alpha\big). \tag{2}$$

˜等价地，我们可以找到 $T\in$ GL(n)，使得令 $K=T(K)$ 后，有

$$\max\{N(\tilde{K},tB_2^n),N(\tilde{K}^\circ,tB_2^n),N(B_2^n,t\tilde{K}),N(B_2^n,t\tilde{K}^\circ)\}\leqslant\exp\big(C_\alpha\, n/t^\alpha\big) \tag{3}$$

对所有 $t \geqslant C_\alpha^{1/\alpha}$ 均成立。

The constants C_α satisfy $C_\alpha = O\Big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\Big)$ as $\alpha \to 2^-$.

我们称满足 (1) 的凸体 K 处于 M-位置，或称 $K = T(K)$ 是 K 的 M-位置。类似地，我们称满足 (3) 且对某个 $\alpha \in (0, 2)$ 成立的凸体 K 处于 α-正则 M-位置，而 (2) 中出现的椭球 $\mathcal{E}(K, \alpha)$ 则称为 K 的 α-正则 M-椭球。

对于米尔曼定理，不久之后人们观察到，借助凸几何中的其他核心结果，该定理可以推广到不一定对称的凸体 K：为 K 确定位置时，最常见的做法是假设其重心或其 Santal´o 点位于原点，然后通过某个线性变换将其变为 M-位置（我们将在第 2 节简要介绍其中的细节）。

不过，对于皮西耶定理，将非对称情形约化为已知的对称情形要微妙得多。这正是本文的主要动机：

定理 2. 对每个 $\beta \in \big(0, \frac{2}{5}\big)$，都存在一个常数 $D_\beta \geqslant 1$，使得下述结论成立：对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个凸体 K，我们都能找到 K 的一个仿射像 $\tilde{K}$（即对 K 的一个平移进行线性变换所得的像），使其满足

$$\max\{N(\tilde{K}, tB_2^n), N(\tilde{K}^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}), N(B_2^n, t\tilde{K}^\circ)\} \leqslant \exp\big(D_\beta\, n/t^\beta\big) \tag{4}$$

对于每个 $t \geqslant D_\beta^{1/\beta}$。

此外，若 K 的重心或 Santal´o 点位于原点，则只需进行线性变换即可找到 $\tilde{K}$。

这些常数 D_β 满足 $D_\beta \simeq \big(C_{\frac{4\beta}{2-3\beta}}\big)^{(2-3\beta)/2} = O\Big((2-5\beta)^{-\beta}\Big)$，其中 C_α 和 $\alpha = \frac{4\beta}{2-3\beta}$ 是定理 1 中出现的常数。

显然，本文中的定量估计不如对称情形中的估计。此外，从证明中可以看出，我们并未分析并尝试改编 Pisier 对定理 1 的证明，而是将其视为一个黑箱；与米尔曼定理的情形一样，我们采用其他工具，将非对称凸体的覆盖数与相关对称凸体的覆盖数进行比较。因此，我们认为这些估计远非最优；若要得到显著接近皮西耶定理中结果的估计，就需要采用更直接的方法。

我们还应注意，Pisier 是先证明了以下更强的结论，从而得到定理 1：对于每个 $\alpha \in (0,2)$ 以及每个 $\mathbb{R}^n$ 中的对称凸体 K，我们都可以找到一个线性像 $\tilde{K}$，使得对于每个 $1 \leqslant l \leqslant n$,

$$\max\{c_l(\tilde{K}, B_2^n),\, c_l(\tilde{K}^\circ, B_2^n)\} \leqslant C_0 C_\alpha^{1/\alpha} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha}, \tag{5}$$

其中，$c_l(K, L)$ 称为凸体 K 关于凸体 L 的格尔范德数，定义如下：

$$c_l(K, L) := \inf\{r :\ \exists\, F \in G_{n,n-l+1} \text{ such that } K \cap F \subseteq r(L \cap F)\}$$

（在（5）中，C_α 是定理 1 陈述中的同一个常数。）建立这一点后，可以应用 Carl [13] 的一个定理（其陈述见第 2 节），该定理将格尔范德数与覆盖数联系起来，从而推导出定理 1 作为推论。我们也可以得到这一更强陈述的类似结果。

命题 3. 对于每个 $\beta \in \left(0、\ \frac{2}{5}\right)$，以及每个 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K，若其˜重心或 Santal´o 点位于原点，则可以找到 K 的一个线性像 K，使得对所有 $1 \leqslant l \leqslant n$,

$$\max\{c_l(\tilde{K}, B_2^n),\, c_l(\tilde{K}^\circ, B_2^n)\} \leqslant C_0 D_\beta^{1/\beta} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta},$$

其中，D_β 与定理 2 中的常数相同，C_0 是一个绝对常数。

将非对称情形化归为对称情形所需的工具之一，是针对具有原点处的 Santal´o 点的凸体投影的布拉施克-Santal´o 型不等式。回顾一下，给定一个凸体 L，函数 $z \in \mathrm{int}(L) \mapsto |L||(L-z)^\circ|$ 是严格凸的，并且具有唯一的极小点，该点称为 s_L 的 Santal´o 点 L （这里，$|\cdot|$，有时也记作 $|\cdot|_n$，表示 n 维勒贝格体积）。著名的 Blashke-Santal´o 不等式（最初由 Blaschke [7] 在 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中证明，随后由 Santal´o [46] 在所有维数中证明；关于该不等式及/或其等号情形的进一步证明，另见 [37], [45], [31] 和 [6] ）指出，在满足 $s_L = 0$ 的凸体 L 中，体积乘积 $|L||L^\circ|$ 在椭球处取得唯一最大值。

此外，根据以下事实：(i) $(L^\circ)^\circ = L$ ；(ii) 若 L 的重心位于原点，则$s_{L^\circ} = 0$ （这是对 L°的 Santal´o 点的另一种刻画），我们还可以得出结论：$|L||L^\circ| \leqslant |B_2^n|^2$ 对所有重心位于原点的凸体 L 均成立。

我们还给出了此类凸体的投影的类似近似结果。

定理4. 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，其重心或 Santal´o 点位于原点。对于每个 $1 \leqslant l < n$，以及每个子空间 $F \in G_{n,\ l}$，我们有

$$\left(|\mathrm{Proj}_F(K)|_l \cdot |K^\circ \cap F|_l\right)^{1/l} \leqslant C_0 \frac{n}{l} |B_2^l|^{2/l} \tag{6}$$

其中 C_0为某个绝对常数。

此外，除常数 C_0的取值外，该结论是最优的：一个例子是 n维单纯形的投影。

2 预备知识

˜在本文所讨论或证明的不等式中，我们将使用符号 $C, C, c, \tilde{c}$ 等表示绝对常数。除非通过下标另行说明，这些常数不依赖于任何参数（当然也不依赖于环境空间的维数）。同一符号在不同位置出现时，所表示的这些未指定常数可能取不同的值。有时，我们也会写作 $a \lesssim b$ 或 $b \gtrsim a$，表示存在一个绝对常数使得 $a \leqslant Cb$。最后，$a \simeq b$ 表示 $a \lesssim b$ 和 $b \lesssim a$ 同时成立。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，凸体 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个凸紧子集，且内部非空。我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准点积，而 $|A|$ （有时也写作 $|A|_n$）表示n维勒贝格体积。若 $l \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$，则用 $G_{n,\ l}$表示由 $\mathbb{R}^n$ 中所有 l 维（线性）子空间构成的格拉斯曼空间。若 $F \in G_{n,\ l}$，则 $\mathrm{Proj}_F(K)$ 表示 K 在 F 上的正交投影，而 $K \cap F$ 表示它被 F 截出的截面（假设 $K \cap F \neq \emptyset$）。除非另有说明，当我们写

$$|\mathrm{Proj}_F(K)| \quad \text{or} \quad |K \cap F|,$$

我们指这些集合的 l维勒贝格体积（即子空间 F内的体积）。回顾一下，若 $0 \in \mathrm{int}(K)$，则截面 $K \cap F$在子空间 F 内的极集$(K \cap F)^\circ = (K \cap F)^{\circ,\ F}$是良定义的，且等于投影 $\mathrm{Proj}_F(K^\circ)$。

我们用 B_2^n 表示 $\mathbb{R}^n$中的单位欧几里得球，用 S^{n-1} 表示单位欧几里得球面，它带有一个（唯一的）旋转不变概率测度 σ （Haar 概率测度）。给定一个满足 $0 \in \text{int}(K)$的凸体 K，我们将 K 的内半径 $r(K)$和外接半径 $R(K)$定义为

$$r(K) := \sup\{r > 0 : rB_2^n \subseteq K\} \quad \text{and} \quad R(K) := \inf\{R > 0 : K \subseteq RB_2^n\}.$$

由于 $K \subseteq L \Rightarrow L^\circ \subseteq K^\circ$，我们有 $r(K) = \frac{1}{R(K^\circ)}$，且 $R(K) = \frac{1}{r(K^\circ)}$。$K$ 的重心$b(K)$定义如下：

$$b(K) := \frac{1}{|K|}\int_K x\,dx.$$

我们将 K 的支撑函数 h_K 定义为

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto h_K(x) := \max\{\langle y, x\rangle : y \in K\},$$

并且，如果我们还有 $0 \in \text{int}(K)$，则将其闵可夫斯基泛函定义为

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_K := \inf\{t > 0 : x \in tK\}$$

（如果 K关于原点对称，那么 $\|\cdot\|_K$是 $\mathbb{R}^n$上的一个范数）。我们可以验证 $\|x\|_K = h_{K^\circ}(x)$，且 $h_K(x) = \|x\|_{K^\circ}$。K 的平均宽度定义为

$$M^*(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\,d\sigma(\theta),$$

其平均范数定义为

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K\,d\sigma(\theta).$$

根据刚才所述，我们有 $M^*(K) = M(K^\circ)$，且 $M(K) = M^*(K^\circ)$。

对于覆盖数，以下体积界成立：

$$\frac{|K|}{|L|} \leqslant N(K,L) \leqslant \frac{|K + \frac{1}{2}(L \cap (-L))|}{|\frac{1}{2}(L \cap (-L))|} = \frac{|2K + (L \cap (-L))|}{|L \cap (-L)|} \tag{7}$$

（我们甚至可以先对 L 作平移，使得 $L \cap (-L)$ 的体积“较大”，甚至使 $|L \cap (-L)| = \sup_{x \in \text{int}(L)} |(L - x) \cap (x - L)|$）。

2.1 “局部理论”：关于投影和截面的结果

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体 K，其体积半径定义为 $\text{vrad}(K) := \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}$（注意，它是 $\simeq \sqrt{n}\,|K|^{1/n}$）。如果 $F \in G_{n,\,l}$，则 $\text{vrad}(\text{Proj}_F(K))$ 表示子空间 F 内 $\text{Proj}_F(K)$ 的体积半径，因此 $\left(\frac{|\text{Proj}_F(K)|}{|B_2^l|}\right)^{1/l}$；$\text{vrad}(K \cap F)$ 的含义也类似。

对于任意 $1 \leqslant l < n$，我们定义

$$v_l(K) := \sup_{F \in G_{n,l}} \text{vrad}(\text{Proj}_F(K)) \quad \text{and} \quad v_l^-(K) := \inf_{F \in G_{n,l}} \text{vrad}(\text{Proj}_F(K)),$$

且如果 $0 \in \text{int}(K)$，我们还定义

$$w_l(K) := \sup_{F \in G_{n,l}} \text{vrad}(K \cap F) \quad \text{and} \quad w_l^-(K) := \inf_{F \in G_{n,l}} \text{vrad}(K \cap F).$$

对于任意 $k \geqslant 1$，我们将 K 的熵数 $e_k(K, L)$ 定义为 L，如下所示：

$$e_k(K, L) := \inf\{R : N(K, RL) \leqslant 2^{k-1}\}.$$

回顾一下引言中已经提到的格尔范德数 $c_k(K, L)$：对于任意 $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$：

$$c_k(K, L) := \inf\{r : \exists F \in G_{n,n-k+1} \text{ such that } K \cap F \subseteq r(L \cap F)\}$$

（为方便下文讨论，我们也可以在 $k > n$ 时设 $c_k(K, L) = 0$）。下述定理就是引言中所说的 Carl 定理，它表明熵数在某种意义上受格尔范德数控制（也就是说，就任意“合理的”洛伦兹范数而言）。

定理 5。（Carl, [13], 1981）设 K, L 是 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点对称的凸体。对于任意 $\alpha > 0$，存在常数 $\rho_\alpha, \rho'_\alpha > 0$，使得对每个整数 $k \geqslant 1$，都有

$$\sup_{m=1,2,\ldots,k} m^\alpha e_m(K, L) \leqslant \rho_\alpha \sup_{m=1,2,\ldots,k} m^\alpha c_m(K, L)$$

and

$$\sum_{m=1}^{k} m^{-1+\alpha} e_m(K, L) \leqslant \rho'_\alpha \sum_{m=1}^{k} m^{-1+\alpha} c_m(K, L)\,.$$

2.2 体积比较结果

1. Bourgain-Milman不等式。Bourgain 和 Milman 在其开创性工作 [10], 中，证明了布拉施克-桑塔洛不等式的一个“渐近逆命题”：存在一个绝对常数 $c_0 > 0$（与 n 无关），使得对于 $\mathbb{R}^n$ 中所有满足 $0 \in \text{int}(K)$ 的凸体 K，

$$|K||K^\circ| \geqslant |K||(K - s(K))^\circ| \geqslant c_0^n |B_2^n|^2. \tag{8}$$

结合布拉施克-桑塔洛不等式，我们可以得出

$$\big(|K||K^\circ|\big)^{1/n} \simeq |B_2^n|^{2/n} \simeq \frac{1}{n}$$

若 K 关于原点对称，或者其重心或桑塔洛点位于原点。

此外，若 K 关于原点对称，则有

$$\text{vrad}(\text{Proj}_F(K)) \simeq \frac{1}{\text{vrad}(K^\circ \cap F)}$$

对于任意 $F \in G_{n,\ l}$，因此也有 $v_l(K) \simeq 1/w_l^-(K^\circ)$ 和 $v_l^-(K) \simeq 1/w_l(K^\circ)$。（我们将看到，若 L 不关于原点对称，这些等价关系可能不再成立。）

2. 差体的体积与对称凸包的体积。在 [41] Rogers and Shephard 中证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意凸体 K，

$$|K - K| \leqslant \binom{2n}{n} |K|$$

当且仅当 K 是一个 n 维单纯形时等号成立（这里 $K - K := \{x - y : x, y \in K\}$ 是 K 的差体）。此外，在 [42] 中他们还证明，若 $0 \in K$，则

$$|\text{conv}(K, -K)| \leqslant 2^n |K|. \tag{9}$$

由此可得 $\mathrm{vrad}(K) \simeq \mathrm{vrad}(K-K) \simeq \mathrm{vrad}(\mathrm{conv}(K,-K))$。

3. 米尔曼-帕约尔不等式：对称交集的体积。在 [35]Milman 和 Pajor 证明，若 K 是 $\mathbb{R}^n$ ($b(K) = 0$) 中以原点为中心的凸体，则

$$|K \cap (-K)| \geqslant \frac{1}{2^n}|K|. \tag{10}$$

注意，指数底数未必是最优的（例如参见 [21] 和 [12]），但对于这里的论证，无需精确取值；我们只需要如下形式的不等式：

$$|K \cap (-K)| \geqslant c^n|K| \tag{11}$$

某个绝对常数 $c > 0$。

正如 Rudelson 在 [44], 中指出的，要证明这一点，只需结合布拉施克-桑塔洛不等式与布尔甘-米尔曼不等式，以及关系式 $\big(\mathrm{conv}(K,-K)\big)^\circ = K^\circ \cap (-K^\circ)$；对于满足 $0 \in \mathrm{int}(K)$ 的任意凸体 K，该关系式均成立。Rudelson 运用这一推理，在 $s(K) = 0$ 的情形下得到了 (11)。

注记 6。现在我们可以简要说明，如何将关于存在某个M-位置的米尔曼定理推广到非对称凸体。假设 K 的重心或 Santal´o 点位于原点，并且 $\overline{K} := \text{凸包}(K,-K)$处于 M-位置。换言之，假设我们已知

$$\max\left\{N(\overline{K}, B_2^n),\, N(B_2^n, \overline{K}),\, N(K^\circ \cap (-K^\circ), B_2^n),\, N(B_2^n, K^\circ \cap (-K^\circ))\right\} \leqslant \exp(Cn).$$

那么覆盖数 $N(K, B_2^n)$ 和 $N(B_2^n, K^\circ)$ 已经得到了控制。对于覆盖数 $N(B_2^n, K)$，我们则利用它等于 $\leqslant N(B_2^n, K \cap (-K))$ 这一事实。根据米尔曼-帕约尔不等式（或 Rudelson 的变体）、罗杰斯-谢泼德不等式以及覆盖数的体积界 (7)，我们可以验证

$$N(B_2^n, K \cap (-K)) \leqslant \exp(C'n) N(B_2^n, \overline{K}) \leqslant \exp(C''n),$$

这里我们还关键地利用了 $N(\overline{K}, B_2^n) \leqslant \exp(Cn)$ 这一事实（因此，布伦-闵可夫斯基不等式基本上可以反向使用）。类似地，我们通过将覆盖数 $N(\overline{K^\circ}, B_2^n)$ 和 $N(K^\circ, B_2^n)$ 与数量 $N(K^\circ \cap (-K^\circ)\ B_2^n)$ 进行比较，得到它们的界。

4. Rudels on 关于差体截面的结果。注意，给定 $F \in G_{n,\ l}$，我们有

$$\mathrm{Proj}_F(K-K) = \mathrm{Proj}_F(K) - \mathrm{Proj}_F(K)$$
$$\text{and}\quad \mathrm{Proj}_F(\mathrm{conv}(K,-K)) = \mathrm{conv}(\mathrm{Proj}_F(K), -\mathrm{Proj}_F(K)),$$

因此，差体的投影以及K 的对称凸包的投影体积，都可以由 K相应投影的体积很好地控制。在 [43] 中，Rudelson 提出了这些结果在差体截面上的类似结论：他证明了

$$|(K-K) \cap F|^{1/l} \leqslant C \min\left\{\sqrt{l}, \frac{n}{l}\right\} \max_{x \in \mathbb{R}^n} |K \cap (x+F)|^{1/l}. \tag{12}$$

注意，我们只会用到带有 $\frac{n}{l}$ 因子的界。

5. 关于最大体积截面的 Fradelizi的结果。在 [18]Fradelizi 证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意凸体 K、任意 $1 \leqslant l < n$ 以及任意 $F \in G_{n,\ l}$,

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} |K \cap (x+F)| \leqslant \left(\frac{n+1}{l+1}\right)^l |K \cap (b(K)+F)|. \tag{13}$$

他还确定了等号成立的情形。

6. 投影与其正交截面的体积乘积。Rogers and Shephard [42] （另见 [14]）证明，对于 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$ 中任意关于原点对称凸体 K、任意 $1 \leqslant l < n$ 以及任意$F \in G_{n,\ l}$,

$$|K| \leqslant |\mathrm{Proj}_F(K)| \cdot |K \cap F^{\perp}| \leqslant \binom{n}{l} |K| \tag{14}$$

（事实上，即使 $0 \in \mathrm{int}(K)$，上界也成立。）Spingarn [48] 还将下界推广到了中心化凸体。

2.3 各向同性凸体

若凸体 K 属于 $\mathbb{R}^n$，且 K 的重心位于原点、协方差矩阵是单位矩阵的倍数，则称其为各向同性凸体；等价地，对于每个 $\theta \in S^{n-1}$，都有

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 \, dx = L_K^2.$$

˜常数 L_K 称为 K 的各向同性常数。注意，每个属于 $\mathbb{R}^n$ 的凸体 K 都有一个处于各向同性位置的仿射像；该仿射像在正交变换意义下唯一。

渐近凸几何中的一个核心问题，是所有各向同性常数能否有一致的上界。Bourgain [8],最先提出了这个问题（当时 Bourgain 需要的是一致下界，他证明对于所有 $K \subset \mathbb{R}^n$，当 $L_K \geqslant L_{B_2^n} = \frac{1}{\sqrt{n+2}\,|B_2^n|^{1/n}} \simeq 1$ 时，下界确实成立）。最早的非平凡界由 Bourgain [9] 给出（对所有$K \subset \mathbb{R}^n$，$L_K \lesssim \sqrt[4]{n}\log(n)$），Klartag [24] 也给出了界（$L_K \lesssim \sqrt[4]{n}$）。此后，人们将该问题大幅化简为渐近凸几何中的其他核心问题，而 Yuansi Chen [15], 、Klartag 和 Lehec [26], 、Jambulapati、Lee 与 Vempala [22],在这些方向上取得了近期重大突破；更近来，Klartag [25], 的工作使得维数 n 下的 L_K 获得了对数界（倒数第二篇论文发表于 2022 年，给出了对每个 $K \subset \mathbb{R}^n$ 都成立的 $L_K \lesssim \log^{2.2226}(n)$；最新论文则给出了 $L_K \lesssim \sqrt{\log(n)}$）。

后文将用到的各向同性位置的标准性质如下:

- 若 K是 $\mathbb{R}^n$中的关于原点对称的各向同性凸体，则 $K \supset L_K B_2^n$。若 K不对称而只是以原点为中心，则这一包含关系可能不再成立，但仍存在一个绝对常数 $c_0 < 1$ 使得 $K \supset c_0 L_K B_2^n$（参见例如 [11, 第 3.2.1] 小节）。换言之，$r(K) = R^{-1}(K^{\circ}) \geqslant c_0 L_K$ 处于各向同性位置。

- 对每个 $1 \leqslant l \leqslant n-1$，以及每个 $F \in G_{n,\ l}$我们都有（参见例如 [11, 命题 5.1.15]）：

$$|K \cap F^{\perp}|^{1/l} \simeq \frac{L_{\pi_F(\mathbf{1}_K)}}{L_K},$$

其中 $\pi_F(\mathbf{1}_K)$ 表示均匀分布在 K上的分布关于子空间 F的边缘分布，而 $L_{\pi_F(\mathbf{1}_K)}$ 是其各向同性常数（有关将各向同性常数的定义推广到对数凹分布，以及如何证明一般的上下界相同的历史与细节，参见 [11]）。

因此，由 (14) 可得，对于 $F \in G_{n,\ l}$,

$$|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l} \geqslant \frac{1}{|K \cap F^{\perp}|^{1/l}} \gtrsim \frac{L_K}{L_{\pi_F(\mathbf{1}_K)}} \gtrsim \frac{L_K}{\sup_{M \subset \mathbb{R}^l} L_M}. \tag{15}$$

2.4 Klartag 和 Milman 关于定理 2 的一种建议思路

正如米尔曼关于 M-位置的定理以及注记 6 中的推理，Klartag 和 Milman [27, 28] 建议用对称凸体 $\overline{K} := \mathrm{conv}(K, -K)$ 和 $\underline{K} := K \cap (-K)$ 来夹住一个 K 内部包含原点的凸体= （对这些对称凸体可以应用皮西耶定理）。正如我们将看到的，他们的方法所引出并归结为的关键问题是，我们能在多大程度上比较

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l} \qquad \text{and} \qquad |\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}$$

对于所有可行维数 l 中的任意子空间 F。

事实上，不失一般性，可以假设 $\underline{K}$ 处于某个 $\alpha \in (0, 2)$ 对应的 α-正则 M-位置。若 $\overline{K}$ 同时也处于 α-正则 M-位置，那么问题便迎刃而解，因为所有覆盖数

$$N(K, tB_2^n), N(K^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, tK), N(B_2^n, tK^\circ)$$

都可以由涉及 $\underline{K}$ 或 $\overline{K}$ 的相应覆盖数作为上界。然而，更有可能的是，$\overline{K}$ 的 α-正则 M-椭球 $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\overline{K}, \alpha)$ 并非 B_2^n，而是另一个椭球。在这种情况下，我们首先应控制覆盖数

$$N(\mathcal{E}, tB_2^n) \quad \text{and} \quad N(B_2^n, t\mathcal{E}) = N(\mathcal{E}^\circ, tB_2^n), \qquad t \geqslant 1. \tag{16}$$

（事实上，估计覆盖数 $N(\mathcal{E}^\circ, tB_2^n)$ 并非应用于 K 的覆盖数所必需，但为了阐明使另一种情况更为困难的细微之处，我们也在下文概述这种情况。）根据以下引理，这归结为控制 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^\circ$ 的任意正交投影的体积。

引理 7.（例如参见 [40, 注 5.15]）设 $\mathcal{Q} = T(B_2^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个椭球，其 T 为正定矩阵，并设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 为 T 的特征值。对于每个 $k \geqslant 1$，设

$$\phi_k(T) := \sup_{1 \leqslant l \leqslant n} \Big\{ 2^{-k/l} \cdot \Big[\prod_{1 \leqslant j \leqslant l} \lambda_j \Big]^{1/l} \Big\}.$$

那么，对于每个 $k \geqslant 1$，我们都有 $\phi_k(T) \leqslant e_{k+1}(\mathcal{Q}, B_2^n) \leqslant 6\phi_k(T)$。

Remark 8. (i) 由于 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是一个递减序列，因此对于任意 $l < n$，我们有 th at

$$\Big[\prod_{1 \leqslant j \leqslant l+1} \lambda_j \Big]^{1/(l+1)} \leqslant \Big[\prod_{1 \leqslant j \leqslant l} \lambda_j \Big]^{1/l}.$$

此外，对于任意 $l \geqslant k$，也有 $2^{-k/l} \simeq 1$。由此可见，$\phi_K(T) \simeq \sup_{l \leqslant k} \Big\{ 2^{-k/l} \cdot \Big[\prod_{1 \leqslant j \leqslant l} \lambda_j \Big]^{1/l} \Big\}$。

(ii) 如果我们知道存在一些正常数 γ 和 $C(\gamma) \geqslant 1$，使得对所有 $1 \leqslant l \leqslant n$，

$$\Big[\prod_{1 \leqslant j \leqslant l} \lambda_j \Big]^{1/l} \leqslant C(\gamma) \cdot \Big(\frac{n}{l} \Big)^\gamma, \tag{17}$$

那么数值 $\phi_k(T)$，以及由此得到的熵数 $e_{k+1}(\mathcal{Q}, B_2^n)$，可以估计其上界如下：

$$\phi_k(T) \simeq e_{k+1}(\mathcal{Q}, B_2^n) \lesssim \begin{cases} C(\gamma) \Big(\frac{\gamma}{e \log(2)} \Big)^\gamma \big(\frac{n}{k} \big)^\gamma & \text{if } k \in \big[\frac{\gamma}{\log(2)}, \frac{\gamma}{\log(2)} n \big] \\ \frac{C(\gamma)\, n^\gamma}{2^k} & \text{if } k < \frac{\gamma}{\log(2)} \\ \frac{C(\gamma)}{2^{k/n}} & \text{if } k > \frac{\gamma}{\log(2)} n \end{cases}.$$

那么根据熵数的定义，我们得到

$$N(\mathcal{Q}, tB_2^n) \leqslant \exp\Big(\gamma[6C(\gamma)]^{1/\gamma}\,\frac{n}{t^{1/\gamma}}\Big) \qquad \text{for every } t \geqslant 6C(\gamma)/e^{\gamma}.$$

(iii) 利用柯西-比内公式（例如参见 [28, 引理 4.1]），可以证明对于任意 $1 \leqslant l < n$,

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant l} \lambda_j = \frac{1}{|B_2^l|}\cdot \max_{F\in G_{n,l}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{Q})| = \frac{1}{|B_2^l|}\cdot \max_{F\in G_{n,l}} |\mathcal{Q}\cap F|,$$

类似地

$$\prod_{n-l+1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j = \frac{1}{|B_2^l|}\cdot \min_{F\in G_{n,l}} |\mathcal{Q}\cap F| = |B_2^l|\cdot \frac{1}{\max\limits_{F\in G_{n,l}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{Q}^\circ)|}.$$

引理 7 和注记 8(iii) 表明，要对式 (16) 中的覆盖数给出上界，我们需要对不同维数下 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^\circ$ 的投影体积给出上界。Klartag 和 Milman 使用了上述假设：为简单起见，若假设我们已考虑 $\underline{K}$ 的一个 1-正则 M-位置以及 $\overline{K}$ 的一个 1-正则 M-椭球，则有

$$\max\big\{N\big(\underline{K}, tB_2^n\big), N\big((\underline{K})^\circ, tB_2^n\big), N\big(B_2^n, t\underline{K}\big), N\big(B_2^n, t(\underline{K})^\circ\big)\big\} \leqslant \exp\big(C_1\, n/t\big)$$
$$\text{and}\quad \max\big\{N\big(\overline{K}, t\mathcal{E}\big), N\big((\overline{K})^\circ, t\mathcal{E}^\circ\big), N\big(\mathcal{E}, t\overline{K}\big), N\big(\mathcal{E}^\circ, t(\overline{K})^\circ\big)\big\} \leqslant \exp\big(C_1\, n/t\big)$$

对每个 $t \geqslant C_1$ 均成立。

立即可得，对于任意 $1 \leqslant l < n$ 和任意 $F \in G_{n,\,l}$,

$$N\big(\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}^\circ), t\,\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)\big) \leqslant N\big(\mathcal{E}^\circ, t(\overline{K})^\circ\big) \leqslant \exp\big(C_1\, n/t\big)$$

对每个 $t \geqslant C_1$ 均成立；若令 $t_l = C_1 n/l$，则可得

$$N\big(\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}^\circ), t_l\,\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)\big) \leqslant e^l.$$

因此

$$\begin{aligned}|\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}^\circ)|^{1/l} &\leqslant \big[N\big(\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}^\circ), t_l\,\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)\big)\big]^{1/l}\cdot |t_l\,\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)|^{1/l}\\ &\leqslant e\,t_l\,|\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)|^{1/l} = eC_1\frac{n}{l}\,|\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)|^{1/l}.\end{aligned}$$

同理，我们可以证明

$$|\mathrm{Proj}_F((\underline{K})^\circ)|^{1/l} \leqslant eC_1\frac{n}{l}\,|B_F|^{1/l} = eC_1\frac{n}{l}\,|B_2^l|^{1/l}.$$

我们得出

$$\begin{aligned}\max_{F\in G_{n,l}} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}^\circ)|^{1/l} &\leqslant eC_1\frac{n}{l}\max_{F\in G_{n,l}} |\mathrm{Proj}_F((\overline{K})^\circ)|^{1/l}\\ &\leqslant eC_1\frac{n}{l}\max_{F\in G_{n,l}} |\mathrm{Proj}_F((\underline{K})^\circ)|^{1/l} \leqslant (eC_1)^2\left(\frac{n}{l}\right)^2 |B_2^l|^{1/l}\end{aligned}$$

鉴于 $\underline{K} \subseteq \overline{K} \Rightarrow (\overline{K})^\circ \subseteq (\underline{K})^\circ$，这给出了注记 8(ii) 中讨论的形式的上界。注意，即使在 $l = n$ 的情况下，同样的上界仍然成立；也就是说，按照同样的推理，我们有$|\mathcal{E}^\circ|^{1/n} \leqslant (eC_1)^2\,|B_2^n|^{1/n}$

要为 $\mathcal{E}$ 的投影体积取得类似的上界则更为棘手，因为包含关系 $\underline{K} \subseteq \overline{K}$ 不再对我们有利。下面介绍 Klartag 和 Milman 是如何处理这一问题的。

注释 9。请注意，到目前为止，我们只规定 K 的内部包含原点（这样我们就可以考虑 K°）。我们可以为 K 选择一个更具体的位置： [27, 28], 中所作的假设不再是无损一般性的，即 K 的重心和 Santal´o 点都位于原点，或者等价地， K 和 K° 都以原点为中心。

当然，并非每个 n 维实空间中的凸体都具有这一性质。事实上，正如 Meyer、Sch¨utt 和 Werner [32], 所考察的那样，在所有维数中都存在重心与 Santal´o 点相距甚远的凸体。

回顾 若 K 以原点为中心，则根据罗杰斯-谢泼德不等式和 Milman-Pajor 不等式 ，

$$|\overline{K}|^{1/n} \leqslant 2|K|^{1/n} \leqslant 4|\underline{K}|^{1/n}. \tag{18}$$

对于低维投影，Klartag 和 Milman 的论证如下:

为了给 $|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}$ 建立上界，再次应用罗杰斯-谢泼德不等式，

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l} = \left|\overline{\mathrm{Proj}_F(K)}\right|^{1/l} \leqslant 2|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l}.$$

接下来，我们希望将 $|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l}$ 与 $|K^\circ \cap F|^{1/l}$进行比较，但这并不能直接从经典的布拉施克-桑塔洛不等式推出，因为即使 K 以原点为中心，$\mathrm{Proj}_F(K)$ 的重心和 Santal´o 点也未必位于原点。

相反，Klartag 和 Milman 建立了如下针对 $\mathrm{Proj}_F(K)$ 的近似布拉施克-桑塔洛型不等式：$\mathrm{Proj}_F(K)$ 是边缘分布 $\pi_F(\mathbf{1}_K) \equiv \pi_F(K)$ 在 $\mathbf{1}_K$ on F 上的支撑集，其具有由下式给出的 $1/(n-l)$- 凹密度

$$y \in F \quad \mapsto \quad g_{\pi_F(K)}(y) := |K \cap (y + F^\perp)| = \int_{F^\perp} \mathbf{1}_K(y+z)\, dz.$$

也不难看出， $\pi_F(K)$ 的重心位于原点。因此，已知我们可以找到一个关联凸体 $T \in F$, 使其以原点为中心，且与 $\pi_F(K)$ 的支撑集相差不大，具体如下:

$$\frac{1}{e}T \subseteq \mathrm{Proj}_F(K) \subseteq e\frac{n+1}{l+1}T \tag{19}$$

（这是通过从与对数凹密度 {v1}相关的集合族中选取合适的候选集合来完成的

$$K_p(g) := \left\{ y \in F : \int_0^\infty g(sy) s^{p-1}\, ds \geqslant g(0)/p \right\}, \qquad p > 0,$$

, 其中 $g(0) > 0$; Ball [3] 证明，对于所有 $p \geqslant 1$ ，这些集合都是凸体（另见 [5], , 其中证实该证明只需稍作修改，也适用于不一定为偶函数的密度，以及 $p \in (0,1)$）；此处合适的候选集合是 $T = K_{l+1}(g_{\pi_F(K)})$, 如果 l 维密度$g = g_{\pi_F(K)}$ 以原点为中心，则该集合也以原点为中心；包含关系 (19) 可通过对 [23, Lemma 2.2] 结合 Fradelizi 的结果 (13) 作直接改编得到）。

一旦我们得到了以原点为中心的某个凸体 $T \in F$ 所对应的式（19）, 就可以写出

$$\begin{aligned} |\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l} \cdot |K^\circ \cap F|^{1/l} &\leqslant \left| e\frac{n+1}{l+1}T \right|^{1/l} \cdot |eT^\circ|^{1/l} \\ &= e^2 \frac{n+1}{l+1} \left(|T||T^\circ|\right)^{1/l} \leqslant e^2 \frac{n+1}{l+1} |B_2^l|^{2/l}, \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l}}{|B_2^l|^{1/l}} \leqslant e^2 \frac{n+1}{l+1} \frac{|B_2^l|^{1/l}}{|K^\circ \cap F|^{1/l}}. \tag{20}$$

在下一节中，我们将介绍一种略有不同的方法来得到 (20)。这种方法利用了较新的结果（不过这些结果仍然依赖于函数 $y \in F \mapsto |K \cap (y+F^\perp)|$ 的 $1/(n-l)$-凹性）。

为 $|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}$ 给出下界。这里的目标同样是将 $|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}$ 与 $|K^\circ \cap F|^{1/l}$ 联系起来；Klartag 和 Milman 通过假设 K° 也以原点为中心来实现这一点。

根据 Bourgain-Milman不等式 和 Rudelson 的结果，我们有

$$\frac{|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}}{|B_2^l|^{1/l}} \geqslant c_0 \frac{|B_2^l|^{1/l}}{\left|\overline{(K^\circ)} \cap F\right|^{1/l}} \geqslant c_0' \frac{l}{n} \frac{|B_2^l|^{1/l}}{\max\limits_{y \in F^\perp} |K^\circ \cap (y+F)|^{1/l}}$$

其中 c_0、$c_0' > 0$ 是绝对常数。

现在，由于已假设 K° 以原点为中心，根据 Fradelizi的结果，我们还有

$$\frac{1}{\max\limits_{y \in F^\perp} |K^\circ \cap (y+F)|^{1/l}} \geqslant \frac{l+1}{n+1} \frac{1}{|K^\circ \cap F|^{1/l}}.$$

因此我们得出

$$\frac{|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}}{|B_2^l|^{1/l}} \geqslant c \left(\frac{l}{n}\right)^2 \frac{|B_2^l|^{1/l}}{\left|K^\circ \cap F\right|^{1/l}} \tag{21}$$

对于某个绝对常数 $c > 0$，结合 (20) 最终得到

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l} \leqslant 2|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l} \leqslant C \left(\frac{n}{l}\right)^3 |\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}.$$

现在可以验证，上述推理确立了如下事实：对于所有满足其重心与 Santal´o 点重合的非对称凸体 K，都存在满足定理 1 意义下的 α-正则椭球（其中 α 取到 $2/9$ 不包含在内，甚至通过额外技巧可取到 $2/5$ 不包含在内；正如我们将在下文通过更为仔细的计算所看到的）。

例如，这证明了单纯形存在正则椭球，尽管在这一情形下，覆盖数的正则性实际上可以选取得强得多；后者可以通过一种更直接、且更针对单纯形的论证看出，我们将在本文的结语中详细说明。

在下一节中，我们将对上述方法稍作修改，以处理不具有性质 $b(K) = s(K)$ 的凸体。显然，论证的最后两个步骤需要谨慎处理：正如我们将看到的，我们保留第二步不变，只关注第一步。换言之，我们假设 K° 以原点为中心，或者等价地，假设 K 的 Santal´o 点位于原点，并在这种定位下为 K 的投影建立近似的布拉施克-桑塔洛型不等式。

3 布拉施克-桑塔洛型投影不等式：定理4的证明

我们关键地运用了 [31], 的核心定理。Meyer 和 Pajor 通过 Steiner 对称化，为所有（不一定对称的）凸体重新证明了经典的布拉施克-桑塔洛不等式。我们将沿用他们的术语：给定 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体 K、一个仿射超平面 $H=\{x\in\mathbb{R}^n\colon \langle x,u_H\rangle = a_H\}$ 和 $\lambda\in(0,1)$，若满足以下条件，则称 H 对 K 是 λ-分离的

$$|K\cap H^+| := |\{x\in K : \langle x,u_H\rangle \geqslant a_H\}| = \lambda|K|.$$

Note 无论 $\lambda\in(0,1)$ 是什么，如果 H 对 K 是 λ-分离的，那么 $\mathrm{int}(K)\cap H\neq\emptyset$.

定理 10.（Meyer-Pajor, [31]）设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，且 H 是一个仿射超平面，对于某个 $\lambda\in(0,1)$，它将 K 按 λ 分离。那么存在 $z\in\mathrm{int}(K)\cap H$，使得

$$|K|\,|(K-z)^\circ| \leqslant \frac{|B_2^n|^2}{4\lambda(1-\lambda)}. \tag{22}$$

更确切地说（见 *[31,* 引理 *2]*），上文 z 的最优选择（即使左侧体积乘积最小化的选择）是 $\mathrm{int}(K)\cap H$ 中满足以下性质的唯一点 $z_0\in$：$(K-z_0)^\circ$ 的重心位于 $H^\perp\equiv\mathbb{R}u_H$ 中。

定理 4 的证明。当 $b(K)=0$ 时，所需的不等式已由 Klartag 和 Milman 按照我们在上一节概述的方式证明。不过，我们还可以给出另一种论证，其思路与证明第二部分（关于桑塔洛点）非常相似，也希望这有助于阐明关键思想。

Stephen 和 Zhang [49] 已经证明，对于每个 $1\leqslant l<n$、每个 $F\in G_{n,\,l}$ 以及每个 $\xi\in F\setminus\{0\}$，若令 $\xi_F^+:=\{y\in F\colon \langle y,\xi\rangle\geqslant 0\}$，则有

$$|\mathrm{Proj}_F(K)\cap\xi_F^+|_l = |\{y\in\mathrm{Proj}_F(K) : \langle y,\xi\rangle\geqslant 0\}|_l \geqslant \Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l |\mathrm{Proj}_F(K)|_l \tag{23}$$

（回顾一下，我们比较的是 l 维体积，因此下标为 l；从这里开始我们省略该下标）。将此结果也应用于 $-\xi$，我们还可以得到

$$|\mathrm{Proj}_F(K)\cap\xi_F^+| \leqslant \left(1-\Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l\right)|\mathrm{Proj}_F(K)|.$$

我们将此结果改写如下：对于每个 $\xi\in F\setminus\{0\}$，子空间 $\xi_F^\perp:=F\cap\xi^\perp$ 是 F 中经过原点的仿射超平面；对于某个满足以下条件的 λ，它将 $\mathrm{Proj}_F(K)$ 分隔为 λ

$$\lambda\in\left[\Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l,\ 1-\Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l\right].$$

我们的思路是，从上述超平面中选取合适的一个（即选取合适的 $\xi_0\in F$），应用定理 10，从而得出

$$|\mathrm{Proj}_F(K)|\,|K^\circ\cap F| \leqslant \frac{|B_2^l|^2}{4\lambda_{\xi_0}(1-\lambda_{\xi_0})} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{n+1}{l}\Big)^l |B_2^l|^2. \tag{24}$$

要看出存在一个合适的 $\xi_0\in F$ 能得出这一结论，请注意以下几点：

- 如果 $K^\circ\cap F$ 的重心位于原点，则经典的布拉施克-桑塔洛不等式可立即适用，因此我们有 $|\mathrm{Proj}_F(K)|\,|K^\circ\cap F|\leqslant|B_2^l|^2$。

• 如果情况相反 $b\big(K^\circ \cap F\big) \neq 0$，记其为 ξ_0；显然在这种情况下 $\xi_0 \in F \setminus \{0\}$。应用定理 10，我们看到存在 $z_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Proj}_F(K)) \cap \xi_0^\perp$使得

$$|\mathrm{Proj}_F(K)| \cdot \big|(\mathrm{Proj}_F(K) - z_0)^\circ\big| \leqslant \frac{|B_2^l|^2}{4\lambda_{\xi_0}(1-\lambda_{\xi_0})},$$

其中，极集是在 F 内取的。事实上，最优的 z_0 是唯一满足$\in \mathrm{int}(\mathrm{Proj}_F(K)) \cap \xi_0^\perp$的点，使得 $(\mathrm{Proj}_F(K) - z_0)^\circ$ 的重心为 $\in \mathbb{R}\xi_0$。由于 $(\mathrm{Proj}_F(K) - 0)^\circ = K^\circ \cap F$ 已经具有这一性质，我们便得出 0 是这个唯一的点，且 (24) 成立。

现在假设 K 在原点处有 Santal´o 点，换言之， K° 的重心在原点。固定 $1 \leqslant l < n$ 和 $F \in G_{n,\ l}$。同样，如果我们能够证明，对于每个 $\xi \in F \setminus \{0\}$，超平面 $\xi_F^\perp$是 λ-分离 $K^\circ \cap F$的，对某个满足以下条件的 λ

$$\lambda \in [c_{n,l}, 1 - c_{n,l}]$$

结合 $c_{n,\ l}$ 与前一个下界非常相似，我们便可完全类似地进行论证（证明中由 $K^\circ \cap F$扮演 $\mathrm{Proj}_F(K)$ 的角色，反之亦然），并得出

$$|\mathrm{Proj}_F(K)|\,|K^\circ \cap F| \leqslant \frac{|B_2^l|^2}{4\lambda_{\xi_0}(1-\lambda_{\xi_0})} \leqslant \frac{1}{2c_{n,l}}\,|B_2^l|^2. \tag{25}$$

我们可以这样做，是因为 Myroshnychenko、Stephen 和 Zhang [36],给出了一个类似的结果，该结果指出，对于 $L \subset \mathbb{R}^n$ 以原点为中心的，

$$|L \cap \xi_F^+|_l = |\{y \in L \cap F : \langle y, \xi\rangle \geqslant 0\}|_l \geqslant \Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l |L \cap F|_l \tag{26}$$

（正如在 [49], 中一样，这也被证明是最优的）。我们将其应用于 $L = K^\circ$（这也说明了为什么我们在此关注 $K^\circ \cap F$，而不是 $\mathrm{Proj}_F(K)$）。

附带说明。需要指出的是，与这些结果相比，我们所需的不等式相当粗略，因为我们最终的目标是对体积半径进行界定，因此，在诸如（26）这样的不等式中，乘上以 l 为指数的额外常数因子，基本不会影响其在此处的应用。因此，即使是更早、目标相同的结果，也足以用于此处：在 [36] 中，Fradelizi、Meyer 和 Yaskin 于 [19, 推论 9] 证明了

$$c_{n,l} \geqslant c\Big(\frac{n+1}{n-l+1}\Big)^2 \frac{1}{l^2}\Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l > \frac{c}{l^2}\Big(\frac{l}{n+1}\Big)^l$$

对于某个绝对常数 $c > 0$，其值为 $\geqslant \big(c'\frac{l}{n+1}\big)^l$。

现在我们讨论定理4的最优性。设 S_n 是一个边长为$\sqrt{2}$ 、重心位于原点的正则单纯形。注意，如果我们考虑它的 l 个顶点以及其余 $n+1-l$个顶点的平均值，这些点的仿射包与一个 l维（线性）子空间 F_l 重合（因此该子空间包含 S_n的重心）。此外，通过以标准方式将S_n 嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$：

$$S_n = \mathrm{conv}\Big\{e_i - \frac{1}{n+1}\mathbf{1} : 1 \leqslant i \leqslant n+1\Big\}$$

（其中 $\mathbf{1} = e_1 + e_2 + \ldots + e_{n+1}$），或者直接写出它在 $\mathbb{R}^n$ 中的顶点（其中 n 个顶点分别为向量 e_i，然后适当平移，使重心变为原点），我们可以直接计算得出

$$|S_n \cap F_l| = \frac{\sqrt{n+1}}{l!\,\sqrt{n+1-l}}.$$

同时， $S_n^\circ = -(n+1)S_n$，因此

$$\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n^\circ) = -(n+1)\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n).$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned}\big(|\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n^\circ)|\cdot|S_n\cap F_l|\big)^{1/l} &= (n+1)\big(|\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n)|\cdot|S_n\cap F_l|\big)^{1/l}\\ &\geqslant (n+1)|S_n\cap F_l|^{2/l} \simeq \frac{n+1}{l^2}\simeq\frac{n+1}{l}|B_2^l|^{2/l},\end{aligned}$$

这表明，我们得到的布拉施克-桑塔洛型不等式是最优的：无论是凸体的桑塔洛点位于原点的情形，还是中心对称凸体的情形，结论都成立。 □

在 [16] Dirksen 猜想，在所有经过正则单纯形重心的截面中，我们所考虑的截面具有最大体积。他还给出了此类截面体积的一个渐近等价上界：若 $E\in G_{n,\ l}$，则

$$|S_n\cap E|\leqslant\frac{(\sqrt{l+1})^{\frac{l+1}{n+1}}}{l!}.$$

根据上述结果和推理，可以得到一个精度稍低但类似的上界：事实上，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{l}\right)^l|B_2^l|^2\geqslant|\mathrm{Proj}_E(S_n^\circ)|\cdot|S_n\cap E|\geqslant(n+1)^l\,|S_n\cap E|^2.$$

对于上文考虑的子空间 F_l，我们甚至可以直接且更精确地估计体积乘积 $|\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n^\circ)|\cdot|S_n\cap F_l|$（之后再将其与给定的上界比较）。事实上，根据罗杰斯-谢泼德不等式，

$$|\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n)|^{1/l}\geqslant\frac{1}{2}|\mathrm{Proj}_{F_l}(\overline{S_n})|$$

并且我们可以回顾一下，$\overline{S_n}$ 可以看作 ℓ_1单位球 B_1^{n+1}的一个投影：

$$\overline{S_n}=\mathrm{conv}\Big\{\pm\big(e_i-\tfrac{1}{n+1}\mathbf{1}\big):1\leqslant i\leqslant n+1\Big\}=\mathrm{Proj}_{H_\mathbf{1}}\big(B_1^{n+1}\big)$$

其中 $H_\mathbf{1}$ 是与向量 $\mathbf{1}$ 正交的超平面。但如果我们假设 F_l 是由 S_n的前 l 个顶点张成的子空间，则向量 $e_j-\frac{1}{n+1}\mathbf{1}$、$1\leqslant j\leqslant l$可以验证，

$$\mathrm{Proj}_{F_l}(\overline{S_n})=\mathrm{Proj}_{F_l}\big(B_1^{n+1}\big)=\mathrm{conv}\Big\{\pm\big(e_j-\tfrac{1}{n+1}\mathbf{1}\big):1\leqslant j\leqslant l\Big\}.$$

同时， S_n 其余顶点的平均值属于向量 $-\big(e_j-\frac{1}{n+1}\mathbf{1}\big)$、$1\leqslant j\leqslant l$和原点的凸包，因此

$$\mathrm{conv}(S_n\cap F_l,-(S_n\cap F_l))=\mathrm{conv}\Big\{\pm\big(e_j-\tfrac{1}{n+1}\mathbf{1}\big):1\leqslant j\leqslant l\Big\}=\mathrm{Proj}_{F_l}(\overline{S_n}).$$

这意味着

$$(n+1)^l|S_n\cap F_l|^2\leqslant|\mathrm{Proj}_{F_l}(S_n^\circ)|\cdot|S_n\cap F_l|\leqslant(2(n+1))^l|S_n\cap F_l|^2.$$

这也表明，我们用来证明定理4最优性的“极端”情形，与 Fradelizi的结果中的任何极端情形都相去甚远（后者的一个实例是：所考虑的l维子空间平行于单纯形的 l维面的仿射包）。我们尚不清楚是否存在更好地结合这两个结果的方法。

4 定理 2 和命题 3 的证明

我们从

定理的证明。我们需要的大部分步骤已在第 2.4 小节中讨论过或有所提示。下面简要说明为在一般情形下证明该结果，以及适用于所有 $\beta \in \big(0, \frac{2}{5}\big)$，所需作出的调整（另请注意，直接调整前面讨论过的证明方案，会使 β 的取值范围为 $\big(0, \frac{2}{9}\big)$；因此，我们还在证明过程中加入一个“平衡”步骤，从而略微改进最终估计；感谢 Alexander Litvak 提出了这个技巧）。

固定 $\beta \in \big(0, \frac{2}{5}\big)$，并令 $\alpha = \frac{4\beta}{2-3\beta}$；注意 $\alpha \in (0, 2)$。再设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一个凸体 .

步骤 1。这次我们先假设 K 的桑塔洛点位于原点，且 $\underline{K} := K \cap (-K)$ 处于 α-正则 M-位置，也就是说，

$$\max\big\{N\big(\underline{K}, tB_2^n\big), N\big((\underline{K})^\circ, tB_2^n\big), N\big(B_2^n, t\underline{K}\big), N\big(B_2^n, t(\underline{K})^\circ\big)\big\} \leqslant \exp\big(C_\alpha\, n/t^\alpha\big)$$

对每个 $t \geqslant C_\alpha^{1/\alpha}$，我们还为 $\overline{K} :=$ 凸包$(K, -K)$ 找到一个 α-正则 M-椭球 $\mathcal{E}$：

$$\max\big\{N\big(\overline{K}, t\mathcal{E}\big), N\big((\overline{K})^\circ, t\mathcal{E}^\circ\big), N\big(\mathcal{E}, t\overline{K}\big), N\big(\mathcal{E}^\circ, t(\overline{K})^\circ\big)\big\} \leqslant \exp\big(C_\alpha\, n/t^\alpha\big)$$

对每个 $t \geqslant C_\alpha^{1/\alpha}$.

最后，除了上述假设外，我们还可以再作一项假设，这将使步骤 2 更易读：如有需要，对 K 应用正交变换（因此 $\overline{K}$ 和 $\underline{K}$ 也随之变换），即可假设 $\mathcal{E} = \Delta_\lambda B_2^n$ 的 Δ_λ 是一个对角矩阵，其对角线元素为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$。

我们首先注意到，根据 Rogers-Shephard 不等式、布拉施克-桑塔洛不等式以及布尔甘-米尔曼不等式，

$$\begin{aligned} & |(\underline{K})^\circ| = |\mathrm{conv}(K^\circ, -K^\circ)| \leqslant 2^n |K^\circ| \\ \Longrightarrow \quad & |\overline{K}| \leqslant 2^n |K| \leqslant 4^n \frac{|K| \cdot |K^\circ|}{|(\underline{K})^\circ| \cdot |\underline{K}|}\, |\underline{K}| \leqslant C_0^n |\underline{K}| \\ \Longrightarrow \quad & |\mathcal{E}|^{1/n} \leqslant e^2 C_0\, C_\alpha^{2/\alpha} |B_2^n|^{1/n} \end{aligned}$$

对于某个 绝对常数 C_0 （取决于 Bourgain-Milman 不等式中的常数).

此外，由定理4得到（20）（我们在 Santal´o 点位于原点的情形下应用该定理），并将其与（21）结合（当 K° 以原点为中心时，（21）成立，本例正是如此），我们可以对每个 $1 \leqslant l < n$ 和每个 $F \in G_{n,\, l}$ 写出：

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l} \leqslant 2|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l} \leqslant C \left(\frac{n}{l}\right)^3 |\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}. \tag{27}$$

我们还有

$$|\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E})|^{1/l} \leqslant e\, C_\alpha^{1/\alpha} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha} |\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l} \quad \text{and} \quad |\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l} \leqslant e\, C_\alpha^{1/\alpha} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha} |B_2^l|^{1/l}.$$

因此，

$$v_l(\mathcal{E}) = \max_{F \in G_{n,l}} \frac{|\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E})|^{1/l}}{|B_2^l|^{1/l}} \leqslant \tilde{C}\, C_\alpha^{2/\alpha} \left(\frac{n}{l}\right)^{(2+3\alpha)/\alpha}.$$

步骤 2。令 $\Delta_{\sqrt{\lambda}}$ 为对角矩阵，其对角线元素为 $\sqrt{\lambda_1} \geqslant \sqrt{\lambda_2} \geqslant \cdots \sqrt{\lambda_n}$，并令 $\mathcal{Q}_\mathcal{E}$ 为椭球 $\Delta_{\sqrt{\lambda}} B_2^n = \Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1} \mathcal{E}$。我们有

最大值$\big\{N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}, t\mathcal{Q}_\mathcal{E}^\circ\big), N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})^\circ, t\mathcal{Q}_\mathcal{E}\big), N\big(\mathcal{Q}_\mathcal{E}^\circ, t\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}\big), N\big(\mathcal{Q}_\mathcal{E}, t(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})^\circ\big)\big\} \leqslant \exp\big(C_\alpha\, n/t^\alpha$

and

$$\max\{N(\overline{\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K}, t\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}), N\big((\overline{\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K})^\circ, t\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ\big), N\big(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}, t\overline{\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K}\big), N\big(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ, t(\overline{\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K})^\circ\big)\} \leqslant \exp\big(C_\alpha\, n/t^\alpha\big)$$

此外，对于所有 $1 \leqslant l \leqslant n$,

$$v_l(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}) = \sqrt{v_l(\mathcal{E})} \leqslant \tilde{C}\, C_\alpha^{1/\alpha} \left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{2}}.$$

现在，应用引理 7（如注记 8(ii) 中所述），我们得到

$$N(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}, tB_2^n) = N(B_2^n, t\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ) \leqslant \exp\left(\alpha^{-1}\tilde{C}_0\, C_\alpha^{2/(2+3\alpha)}\, \frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{2+3\alpha}}}\right)$$

对每个 $t \geqslant \tilde{C}_0\, C_\alpha^{1/\alpha}$，存在某个绝对常数 $\tilde{C}_0 \geqslant 2$。

步骤 3。利用上述结果，我们可以写出

$$N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}, tB_2^n\big) \leqslant N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}, s\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\big) N(s\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}, tB_2^n) \leqslant \exp\big(C_\alpha\, n/s^\alpha\big) \cdot \exp\left(\alpha^{-1}\tilde{C}_0\, C_\alpha^{\frac{2}{2+3\alpha}}\, n\Big(\frac{s}{t}\Big)^{\frac{2\alpha}{2+3\alpha}}\right)$$

$$\text{as long as } \; s \geqslant C_\alpha^{1/\alpha} \;\; \text{ and } \;\; \frac{t}{s} \geqslant \tilde{C}_0\, C_\alpha^{1/\alpha}.$$

对 s 进行优化，我们得到

$$\frac{C_\alpha}{s^\alpha} = \frac{\alpha^{-1}\tilde{C}_0\, C_\alpha^{\frac{2}{2+3\alpha}}\, s^{\frac{2\alpha}{2+3\alpha}}}{t^{\frac{2\alpha}{2+3\alpha}}} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{C_\alpha^{\frac{3}{4+3\alpha}}\, t^{\frac{2}{4+3\alpha}}}{(\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{4\alpha+3\alpha^2}}},$$

这 $\quad s \geqslant C_\alpha^{1/\alpha}$若 $t \geqslant (\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}\, C_\alpha^{2/\alpha}$。此外，对于相同的 t, $\frac{t}{s} \geqslant \tilde{C}_0\, C_\alpha^{1/\alpha}$。因此 $\quad$ e

$$N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}, tB_2^n\big) \leqslant \exp\big(2C_\alpha\, n/s^\alpha\big) = \exp\Big(2(\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{4+3\alpha}}\, C_\alpha^{\frac{4}{4+3\alpha}}\, \frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{4+3\alpha}}}\Big)$$

对于每个 $t \geqslant (\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}\, C_\alpha^{2/\alpha}$。

类似地，

$$\begin{aligned} N\big(B_2^n, t\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K}\big) &\leqslant N\Big(B_2^n, \frac{t}{s}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ\Big) N\Big(\frac{t}{s}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ, t\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K}\Big) \\ &= N\Big(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}, \frac{t}{s}B_2^n,\Big) N\Big(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ, s\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K}\Big) \\ &\leqslant \exp\left(\alpha^{-1}\tilde{C}_0\, C_\alpha^{\frac{2}{2+3\alpha}}\, n\Big(\frac{s}{t}\Big)^{\frac{2\alpha}{2+3\alpha}}\right) \cdot \exp\big(C_\alpha\, n/s^\alpha\big) \\ &= \exp\Big(2(\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{4+3\alpha}}\, C_\alpha^{\frac{4}{4+3\alpha}}\, \frac{n}{t^{\frac{2\alpha}{4+3\alpha}}}\Big) \end{aligned}$$

其中 s 同前，且 $t \geqslant (\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}\, C_\alpha^{2/\alpha}$。

最后，同样地，我们可以估计覆盖数

$$N\big(B_2^n, t(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})^\circ\big) \leqslant N\Big(B_2^n, \frac{t}{s}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ\Big) N\Big(\frac{t}{s}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ, t(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})^\circ\Big)$$

$$\text{and} \;\; N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K})^\circ, tB_2^n\big) \leqslant N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K})^\circ, s\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\big) N(s\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}, tB_2^n)$$

对所有 $t \geqslant (\alpha^{-1}C_0)^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}\, C_\alpha^{2/\alpha}$（并且辅助参数 s 按照之前的方式选取）。

步骤 4。注意到

$$\begin{aligned}\max\big\{N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K, tB_2^n\big), N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)^\circ, tB_2^n\big), N\big(B_2^n, t\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K\big), N\big(B_2^n, t(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)^\circ\big)\big\}\\ \leqslant \max\big\{N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}, tB_2^n\big), N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K})^\circ, tB_2^n\big), N\big(B_2^n, t\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K}\big), N\big(B_2^n, t(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})^\circ\big)\big\}.\end{aligned}$$

根据我们对 α 的选择，有 $\frac{2\alpha}{4+3\alpha} = \beta$。令

$$D_\beta := 2(\alpha^{-1}\tilde{C}_0)^{\frac{2+3\alpha}{4+3\alpha}} C_\alpha^{\frac{4}{4+3\alpha}},$$

于是我们可以写成

$$\max\big\{N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K, tB_2^n\big), N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)^\circ, tB_2^n\big), N\big(B_2^n, t\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K\big), N\big(B_2^n, t(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)^\circ\big)\big\} \leqslant \exp\big(D_\beta\, n/t^\beta\big) \tag{28}$$

对所有 $t \geqslant D_\beta^{1/\beta}$ 均成立。我们最初假设 $\underline{K}$ 处于 α-正则 M-位置，而 $\Delta_\lambda B_2^n$ 是关于 $\overline{K}$ 的一个 α-正则 M-椭球，因此可得， K 的线性像 $\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K$ 处于 β-正则 M-位置。

这就完成了 K 的桑塔洛点位于原点的情形下定理的证明。不过请注意，(28) 关于 K 和 K° 是对称的（例如，按此意义， $N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)^\circ, tB_2^n\big) = N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}(K^\circ), tB_2^n\big)$ 以及 $N\big(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K, tB_2^n\big) = N\big((\Delta_{\sqrt{\lambda}}(K)^\circ)^\circ, tB_2^n\big)$），并且回想一下，当 K 遍历所有桑塔洛点位于原点的凸体时，K° 遍历所有中心化凸体。因此，中心化凸体的情形也得证。

□

命题 3 的证明。再次假设 K 的 Santal´o 点位于原点，且 $\underline{K}$处于 α-正则 M-位置，其中 $\alpha = \frac{4\beta}{2-3\beta}$。现在我们将其理解为 Pisier 的更强结论成立：对于所有 $1 \leqslant l \leqslant n$,

$$\max\big\{c_l\big(\underline{K}, B_2^n\big),\, c_l\big((\underline{K})^\circ, B_2^n\big)\big\} \leqslant C_0 C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha}.$$

回想一下，这也意味着我们之前所述的覆盖数界： $\underline{K}$ 和 $(\underline{K})^\circ$ 可由 B_2^n 的伸缩体覆盖。

我们还可以为 $\overline{K}$ 找到一个“在强意义下”的 α-正则 M-椭球 $\mathcal{E}$，即满足格尔范德数的正则性：

$$\max\big\{c_l\big(\overline{K}, \mathcal{E}\big),\, c_l\big((\overline{K})^\circ, \mathcal{E}^\circ\big)\big\} \leqslant C_0 C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha}$$

（我们可以先考虑 $\overline{K}$ 的一个“在强意义下”的 α-正则 M-位置，我们知道这样的椭球存在，然后再变换回 $\overline{K}$的当前位置；注意，对于任意线性变换 T，由于 $c_l(TK_1, TL_1) = c_l(K_1, L_1)$，这些界将保持不变。）同样，我们之前所述涉及 $\overline{K}$ 的覆盖数界也成立，因此可以得出，对于所有 $1 \leqslant l \leqslant n$， $v_l(\mathcal{E}) \leqslant \tilde{C}\, C_\alpha^{2/\alpha}\big(n/l\big)^{(2+3\alpha)/\alpha}$。

最后，为了方便起见，我们还可以假设 $\mathcal{E} = \Delta_\lambda B_2^n$，其中 Δ_λ 是定理 2 证明中的对角矩阵。与前面一样，我们令 $\mathcal{Q}_\mathcal{E} = \Delta_{\sqrt{\lambda}} B_2^n = \Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\mathcal{E}$，于是有

$$v_l(\mathcal{Q}_\mathcal{E}) = \sqrt{v_l(\mathcal{E})} \leqslant \tilde{C}\, C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{n}{l}\right)^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}. \tag{29}$$

此外，

$$\max\{c_l(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K},\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}),c_l((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})^\circ,\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ),\ c_l(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K},\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}^\circ),c_l((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K})^\circ,\mathcal{Q}_{\mathcal{E}})\}\leqslant C_0C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha}$$

for all $1\leqslant l\leqslant n$. 首先，根据 $c_1(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K},\mathcal{Q}_{\mathcal{E}})$ 的界以及（29），我们可以写成

$$\begin{aligned}\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K\subseteq\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K}&\subseteq C_0(C_\alpha n)^{1/\alpha}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\\&\subseteq C_0(C_\alpha n)^{1/\alpha}\cdot\sqrt{\lambda_1}B_2^n\subseteq\tilde{C}_0(C_\alpha n)^{1/\alpha}\cdot C_\alpha^{1/\alpha}n^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}\,B_2^n\subseteq\tilde{\tilde{C}}_0D_\beta^{1/\beta}n^{1/\beta}\,B_2^n.\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\Delta_{\sqrt{\lambda}}K^\circ=(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)^\circ\subseteq(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K})^\circ\subseteq C_0(C_\alpha n)^{1/\alpha}\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\subseteq\tilde{C}_0D_\beta^{1/\beta}n^{1/\beta}\,B_2^n.$$

现在考虑一个偶 $l\in\{2,\dots,n\}$。根据 $c_{l/2}(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K},\mathcal{Q}_{\mathcal{E}})$的界，我们可以找到一个子空间 $F_0\in G_{n,\ n-\frac{l}{2}+1}$ 使得

$$(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})\cap F_0\subseteq C_0C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{2n}{l}\right)^{1/\alpha}(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\cap F_0).$$

设 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-\frac{l}{2}+1}$ 为椭球 $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\cap F_0$ 的半轴长度，设 $F_1\leqslant F_0$ 为由其中最短的 $n-l+1$ 条半轴张成的子空间（因此，F_1 在 F_0 中的正交补 $F_1^\perp\cap F_0$ 是由 $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\cap F_0$ 中最长的 $l/2$ 条半轴张成的子空间）。那么 $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\cap F_1\subseteq\mu_{\frac{l}{2}+1}B_{F_1}$ 并且

$$\mu_{\frac{l}{2}+1}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{l/2}\mu_i\right)^{2/l}=\mathrm{vrad}(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\cap F_1^\perp\cap F_0)\leqslant w_{l/2}(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}})=v_{l/2}(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}).$$

因此，由（29）可得

$$\begin{aligned}(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K)\cap F_1\subseteq(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\overline{K})\cap F_1&\subseteq C_0C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{2n}{l}\right)^{1/\alpha}(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}\cap F_1)\subseteq C_0C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{2n}{l}\right)^{1/\alpha}\cdot v_{l/2}(\mathcal{Q}_{\mathcal{E}})\,B_{F_1}\\&\subseteq\tilde{C}_0C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{2n}{l}\right)^{1/\alpha}\cdot C_\alpha^{1/\alpha}\left(\frac{2n}{l}\right)^{\frac{2+3\alpha}{2\alpha}}\,B_{F_1}\subseteq\tilde{\tilde{C}}_0D_\beta^{1/\beta}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta}\,B_{F_1}.\end{aligned}$$

这表明 $c_l(\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K,B_2^n)\leqslant\tilde{\tilde{C}}_0D_\beta^{1/\beta}(n/l)^{1/\beta}$。

类似地，利用 $c_{l/2}((\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}\underline{K})^\circ$ 的界以及（29），我们可得 $c_l(\Delta_{\sqrt{\lambda}}K^\circ,B_2^n)$ 的界。

最后，我们注意到数列 $l\in\{1,2,\dots,n\}\mapsto c_l(K_1,B_2^n)$（其中 $K_1=\Delta_{\sqrt{\lambda}}^{-1}K$ 或= $\Delta_{\sqrt{\lambda}}K^\circ$）是递减的，因此稍微调整绝对常数 C_0 后，也可以给出这些数列其余项的界。

与之前一样，如果 K 的重心位于原点，则我们沿用相同的思路，但令 K° 扮演 K 的角色。证明至此完成。□

回想一下，为了证明定理 2，我们依赖于 (27)，它比较了 $\overline{K}$ 与 $\underline{K}$ 的对应投影的体积，其中 $s(K)=0$（估计值以规则方式取决于投影的维数）。现在利用定理 2，我们可以对 K 以原点为中心时此类投影的体积建立类似的比较。

推论 11. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个中心对称凸体，并设 $1\leqslant l\leqslant n$。对于每个 $F\in G_{n,\ l}$，我们都有

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}\leqslant C\left(\frac{n}{l}\right)^5\big(\log(en/l)\big)^2\,|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}.$$

推论的证明留待下一节给出。

5 备注与应用

1. 定理 2 的证明表明，若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的 Santal´o 点位于原点，则可找到 K 的 β-正则位置：对 K 应用线性变换 $T \in$GL(n)，使其变为 α-正则 M-位置，然后稍作调整，使 $\overline{K}$ 和 $\big(\widetilde{K}\big)^\circ$ 以正则方式被同一个椭球覆盖。类似地，若 K 的重心位于原点，则我们先将 $\overline{K}$ 置于 α-正则 M-位置，其中 $\alpha = \frac{4\beta}{2-3\beta}$。

这种方法所得到的覆盖数的正则性很可能不是最优的，甚至可以猜想，对于任意非必然对称的凸体，都存在一个 1-正则的 M-位置。话虽如此，如果我们坚持采用这种方法的核心原则，即依赖于一个类似于 (27) 的投影体积不等式，那么我们很可能无法做到这一点。这是因为单纯形的例子表明，任何与 (27) 形式相似的不等式中，$\frac{n}{l}$ 的指数都至少应为 $1\ 2$ （代入我们论证的其余部分后，至多只能得到 $6\ 11$-正则性）。

ˆ 的确，设 $l \leqslant \frac{n}{2}$。如我们已经看到的，边长为 $\frac{n+1}{\sqrt{2}}$ 的正则单纯形 S_n，其经过重心的 l 维截面的体积为

$$\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^l \frac{\sqrt{n+1}}{l!\sqrt{n+1-l}}$$

再者，我们回顾一下，这个单纯形可以嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$，使其重心位于原点，且包含它的超平面是与向量 $\mathbf{1} = e_1 + e_2 + \ldots + e_{n+1}$ 正交的超平面 $H_{\mathbf{1}}$。于是

$$\hat{S}_n \cap (-\hat{S}_n) = \tfrac{1}{2}B_\infty^{n+1} \cap H_{\mathbf{1}}$$

其中 $\frac{1}{2}B_\infty^{n+1} = \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中体积为 1 的（关于原点对称）立方体（例如参见 [50], 此规范化的思路取自该文）。

现在考虑超平面 $H_{\mathbf{1}}$中的任意一个 l维子空间 F；于是

$$\big(\hat{S}_n \cap (-\hat{S}_n)\big) \cap F = \big(\tfrac{1}{2}B_\infty^{n+1} \cap H_{\mathbf{1}}\big) \cap F = \tfrac{1}{2}B_\infty^{n+1} \cap F.$$

还需回顾 K. Ball 的一个结果 [4] （在许多情况下是最优的），该结果表明，对于任意这样的子空间 F,

$$|\tfrac{1}{2}B_\infty^{n+1} \cap F|_l \leqslant \left(\sqrt{\frac{n+1}{l}}\right)^l.$$

由此可知，我们不可能有

$$\big|\big(\hat{S}_n - \hat{S}_n\big) \cap F\big|^{1/l} \leqslant C\Big(\frac{n}{l}\Big)^\gamma \big|\big(\hat{S}_n \cap (-\hat{S}_n)\big) \cap F\big|^{1/l}$$

其中 $\gamma < \frac{1}{2}$ （另请注意，根据极性以及布拉施克-桑塔洛和 Bourgain-Milman 不等式，这个最后的不等式等价于一个形如 (27) 的不等式）。

2. 尽管有我们的第一条评论，但对于单纯形，确实存在一个 α-正则M-位置，适用于任意 $\alpha \in \in$(0, 2)。不过也应指出，这在一般情况下似乎并不成立。

为验证这一点，我们现在考虑嵌入于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中、边长为 $\sqrt{2}$ 且重心位于原点的正则单纯形 S_n：

$$S_n = \operatorname{conv}\Big\{e_i - \frac{1}{n+1}\mathbf{1} : 1 \leqslant i \leqslant n+1\Big\}.$$

再次回顾 所有 $\overline{S_n} = \mathrm{conv}\{S_n, -S_n\}$ 都可以视为 ℓ_1 单位球 B_1^{n+1} 的投影 :

$$\mathrm{conv}\{S_n, -S_n\} = \mathrm{Proj}_{H_{\mathbf{1}}}\big(B_1^{n+1}\big).$$

还要回忆一下， S_n 满足 $S_n^\circ = (n+1)S_n$ （其中极集取在 $H_{\mathbf{1}}$内），因此

$$\begin{aligned}\underline{S_n} = S_n \cap (-S_n) = \frac{1}{n+1}\big(S_n^\circ \cap (-S_n^\circ)\big) &= \frac{1}{n+1}\big(\mathrm{conv}\{S_n, -S_n\}\big)^\circ \\ &= \frac{1}{n+1}\big(\mathrm{Proj}_{H_{\mathbf{1}}}\big(B_1^{n+1}\big)\big)^\circ = \frac{1}{n+1}\big(B_\infty^{n+1} \cap H_{\mathbf{1}}\big).\end{aligned}$$

Sch¨utt [47]证明了

$$e_{k+1}\Big(B_1^{n+1}, \frac{1}{\sqrt{n}}B_2^{n+1}\Big) \simeq \begin{cases} \sqrt{n} & \text{if } k \leqslant \log(n+1) \\ \sqrt{\frac{n}{k}}\,\sqrt{\log(en/k)} & \text{if } \log(n+1) \leqslant k \leqslant n+1 \\ 2^{-k/n}n & \text{if } k \geqslant n+1 \end{cases}.$$

将此与以下事实结合：对每个$p > \frac{1}{2}$和任意 $1 \leqslant k \leqslant n+1$,

$$\exp\left(\Big(p - \frac{1}{2}\Big)\log(en/k)\right) \geqslant \sqrt{\exp\left(\Big(p - \frac{1}{2}\Big)\log(en/k)\right)} \geqslant \sqrt{\Big(p - \frac{1}{2}\Big)\log(en/k)}$$

$$\implies \quad e_{k+1}\Big(B_1^{n+1}, \frac{1}{\sqrt{n}}B_2^{n+1}\Big) \lesssim \sqrt{\frac{en}{k}}\,\sqrt{\log(en/k)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{p - \frac{1}{2}}}\,\Big(\frac{en}{k}\Big)^p$$

从而得到

$$N\Big(B_1^{n+1}, \frac{t}{\sqrt{n}}B_2^{n+1}\Big) \leqslant \exp\Big(C\big(p - \tfrac{1}{2}\big)^{-\frac{1}{2p}}\, n/t^{1/p}\Big)$$

对任意 $t \geqslant e^p\big(p - \frac{1}{2}\big)^{-1/2}$，其中 C 为一个绝对常数。

与此同时，根据对偶 Sudakov 不等式（例如参见 [2, 定理 4.2.2]）

$$N\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^{n+1}, tB_1^{n+1}\Big) \leqslant \exp(Cn/t^2)$$

对于每个 $t > 0$。

因此,

$$\max\Big\{N\Big(\mathrm{Proj}_{H_{\mathbf{1}}}\big(B_1^{n+1}\big), \frac{t}{\sqrt{n}}B_2^n\Big), N\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n, t\mathrm{Proj}_{H_{\mathbf{1}}}\big(B_1^{n+1}\big)\Big)\Big\} \leqslant \exp\Big(C'\big(p - \tfrac{1}{2}\big)^{-\frac{1}{2p}}\, n/t^{1/p}\Big)$$

对于每个 $t \geqslant e^p\big(p - \frac{1}{2}\big)^{-1/2}$，并且根据覆盖数对偶性， [1] 同一上界（绝对常数略有不同）对.....也成立

$$\max\Big\{N\Big(\big(\mathrm{Proj}_{H_{\mathbf{1}}}\big(B_1^{n+1}\big)\big)^\circ, t\sqrt{n}B_2^n\Big), N\Big(\sqrt{n}B_2^n, t\big(\mathrm{Proj}_{H_{\mathbf{1}}}\big(B_1^{n+1}\big)\big)^\circ\Big)\Big\}.$$

因此我们看到，对于任意 $\alpha \in (0, 2)$，$\sqrt{n}\,\overline{S_n}$和 $\sqrt{n}\,\underline{S_n}$都处于 α-正则的 M-位置，其常数形式与定理 1 中相同（事实上，这里只需知道其中一个处于正则位置，因为 $\big(\overline{S_n}\big)^\circ = (n+1)\underline{S_n}$）。这显然也意味着 $\sqrt{n}\,S_n$具有相同的性质。

3. 从第 2.4 小节应当可以清楚看出，如果存在一个 Fradelizi 结果的推广版本，那么 Klartag 和 Milman 的论证也可以修改为适用于一般情形:

$$\min_{F\in G_{n,l}} \frac{|K\cap F|}{\max\limits_{y\in\mathbb{R}^n}|K\cap(y+F)|} \geqslant \Big(\frac{l+1}{n+1}\Big)^l \tag{30}$$

当 K 的 Santal´o 点位于原点时，也成立。

根据定理 2，现在可以得到这样一个版本，尽管其中的估计可能相当粗糙，这大概也是我们所预期的。事实上，设 K 是一个 Santal´o 点位于原点的凸体，且$1\leqslant l<n$。由于 (30) 的左端在线性变换下保持不变，我们可以假设 K 处于 β_l-正则位置，并满足

$$\beta_l=\frac{2}{5}-\frac{1}{5\log(en/l)}.$$

于是，对每个 $F\in G_{n,\ l}$,

$$\max\big\{|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l},|\mathrm{Proj}_F(K^\circ)|^{1/l}\big\}\leqslant eD_{\beta_l}^{1/\beta_l}\Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/\beta_l}|B_2^l|^{1/l}.$$

结合 Bourgain-Milman不等式，我们得到

$$\begin{aligned}|K\cap F|^{1/l}&\geqslant c_0\frac{|B_2^l|^{2/l}}{|\mathrm{Proj}_F(K^\circ)|^{1/l}}\geqslant\frac{c_0}{eD_{\beta_l}^{1/\beta_l}}\Big(\frac{l}{n}\Big)^{1/\beta_l}|B_2^l|^{1/l}\\&\geqslant\frac{c_0}{e^2D_{\beta_l}^{2/\beta_l}}\Big(\frac{l}{n}\Big)^{2/\beta_l}|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l}\geqslant\frac{c_0}{e^2D_{\beta_l}^{2/\beta_l}}\Big(\frac{l}{n}\Big)^{2/\beta_l}\max_{y\in\mathbb{R}^n}|K\cap(y+F)|^{1/l}.\end{aligned}$$

注意到 $D_{\beta_l}^{2/\beta_l}\lesssim\big(\log(en/l)\big)^2$，我们得出

$$\min_{F\in G_{n,l}}\frac{|K\cap F|}{\max\limits_{y\in\mathbb{R}^n}|K\cap(y+F)|}\geqslant\frac{c^l}{\big(\log(en/l)\big)^{2l}}\Big(\frac{l}{n}\Big)^{5l}$$

其中某个绝对常数为 $c>0$。

5.1 比较当 K 以原点为中心时$\overline{K}$ 和 $\underline{K}$ 的投影体积

重复第 2.4 小节中的步骤，唯一的修改是将 Fradelizi的结果替换为我们上面得到的对应结果，我们只能得到 $|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}\leqslant C(n/l)^7\log^2(en/l)|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}$ ，其中$F\in G_{n,\ l}$。相反，若仔细应用定理 2证明中的第 1 步，我们可以得到更好的估计。

推论 11 的证明。固定 $1\leqslant l<n$，并设 $\alpha_l=2-\quad^1/_{\log(en/l)}$。由于

$$\sup_{F\in G_{n,l}}\frac{|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}}{|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}}$$

具有线性不变性，因此我们可以为中心对称凸体 K选取合适的位置。如定理 2 的证明所示，如果$\overline{K}$ 处于 α_l-正则 M 位置，且 $\mathcal{D}$ 是 $\underline{K}$的 α_l-正则 M-椭球，那么

$$w_l(\mathcal{D}^\circ)=v_l(\mathcal{D}^\circ)\leqslant C\,C_{\alpha_l}^{2/\alpha_l}\Big(\frac{n}{l}\Big)^{(2+3\alpha_l)/\alpha_l}.$$

于是我们可以写成

$$\begin{aligned}|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l} &\leqslant C\, C_{\alpha_l}^{1/\alpha_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha_l} |B_2^l|^{1/l} \\ &\leqslant C\, \frac{1}{v_l^-(\mathcal{D})}\, C_{\alpha_l}^{1/\alpha_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha_l} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{D})|^{1/l} \\ &= C\, w_l(\mathcal{D}^\circ)\, C_{\alpha_l}^{1/\alpha_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\alpha_l} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{D})|^{1/l} \\ &\leqslant C'\, C_{\alpha_l}^{3/\alpha_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{(3+3\alpha_l)/\alpha_l} |\mathrm{Proj}_F(\mathcal{D})|^{1/l} \\ &\leqslant C''\, C_{\alpha_l}^{4/\alpha_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{(4+3\alpha_l)/\alpha_l} |\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}.\end{aligned}$$

结论由此得出。 □

备注 12. 我们也可以把定理 2 当作黑箱使用（即只依赖其陈述），但我们先给出了上述证明，这表明我们得到的几乎$_2$ $_5$-正则性，在该定理证明第一步的应用中已有所体现。若改为从中心对称凸体 K 的线性像 K_l 出发，并且满足

$$\max\{N(K_l, tB_2^n),\, N(K_l^\circ, tB_2^n)\} \leqslant \exp\left(D_{\beta_l} n/t^{\beta_l}\right)$$

对所有满足 $\beta_l = \frac{2}{5} - {}_5{}^{1}{}_{\log(en/l)}$ ~~的 $t \geqslant$~~ $D_{\beta_l}^{1/\beta_l}$，则可观察到如下事实：由于 K_l 是凸的，且原点位于其内部，因此有 $\overline{K_l} = \text{凸包}(K_l, -K_l) = \{\lambda x + (1-\lambda)y\colon\ x, -y \in K_l,$ $\lambda \in [0,1]\} \subset K_l - K_l$，从而

$$N(\overline{K_l}, 2tB_2^n) \leqslant N(K_l - K_l, 2tB_2^n) \leqslant \left(N(K_l, tB_2^n)\right)^2 \leqslant \exp\left(2D_{\beta_l} n/t^{\beta_l}\right)$$

对于范围相同的 t 也成立。同理可得

$$N(\overline{K_l^\circ}, 2tB_2^n) \leqslant \left(N(K_l^\circ, tB_2^n)\right)^2 \leqslant \exp\left(2D_{\beta_l} n/t^{\beta_l}\right),$$

根据覆盖数对偶性（见 [1]），可得

$$N(B_2^n, \gamma_1 t\, \underline{K_l}) = N\left(B_2^n, \gamma_1 t (\overline{K_l^\circ})^\circ\right) \leqslant \exp\left(\gamma_2 D_{\beta_l} n/t^{\beta_l}\right)$$

其中 γ_1、γ_2 是某些绝对常数，且 t 也取相同范围内的值。现在，对于任意 $F \in G_{n,\,l}$，我们可以写出：

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K_l})|^{1/l} \leqslant C\, D_{\beta_l}^{1/\beta_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta_l} |B_2^l|^{1/l} \leqslant C'_{\gamma_1,\gamma_2}\, D_{\beta_l}^{2/\beta_l} \left(\frac{n}{l}\right)^{2/\beta_l} |\mathrm{Proj}_F(\underline{K_l})|^{1/l},$$

根据我们对 β_l 的选择，这会得到与上述相同的估计。

由此我们还可以得出，要使非对称凸体 K（具有 $0 \in \mathrm{int}(K)$）具有正则覆盖，类似于（27）的不等式是充要的：按照 Klartag 和 Milman 提出的思路，这样的不等式（对于特定的凸体 K）会为 K导出正则M-椭球；而如果我们知道 K 具有 β-正则性，或近似具有 β-正则性，那么就可以推出类似于（27）的不等式（其中因子 n/l 的指数为 $2/\beta$，或 $2/\beta + o(1)$）。当然，我们并没有精确等价性，因为从一个结果过渡到另一个结果时，估计会变差。

顺便一提，当 K 以原点为中心时，我们还给出了 $\sup_{F\in G_{n,\ l}} \frac{|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}()\mathrm{Proj}()}{|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}}$ 的另外两个估计，它们在具体情况下可能会很有用。

a. 我们有

$$\frac{|B_2^l|^{2/l}}{|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}} \leqslant C|\overline{K^\circ}\cap F|^{1/l} \leqslant C'\left(\frac{n}{l}\right)\max_{x\in\mathbb{R}^n}|K^\circ\cap(x+F)|^{1/l} \leqslant C''\left(\frac{n}{l}\right)^2\left|\left(K^\circ-b(K^\circ)\right)\cap F\right|^{1/l}$$

根据 Bourgain-Milman不等式、Rudelson 和 Fradelizi的结果。

现在我们观察到

$$K^\circ-b(K^\circ)\subset K^\circ+\|-b(K^\circ)\|_{K^\circ}K^\circ=[1+\|-b(K^\circ)\|_{K^\circ}]K^\circ=[1+h_K(-b(K^\circ))]K^\circ.$$

Thus

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{l}\right)^2\left|\left(K^\circ-b(K^\circ)\right)\cap F\right|^{1/l} &\leqslant [1+h_K(-b(K^\circ))]\left(\frac{n}{l}\right)^2|K^\circ\cap F|^{1/l}\\ &\leqslant C[1+h_K(-b(K^\circ))]\left(\frac{n}{l}\right)^3\frac{|B_2^l|^{2/l}}{|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l}}\\ &\leqslant C'[1+h_K(-b(K^\circ))]\left(\frac{n}{l}\right)^3\frac{|B_2^l|^{2/l}}{|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}}\end{aligned}$$

其中倒数第二个不等式由定理4（或 Klartag 和 Milman 在第 2.4 小节中的论证）得出。

我们得出

$$\sup_{F\in G_{n,l}}\frac{|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}}{|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}} \leqslant C_0[1+h_K(-b(K^\circ))]\left(\frac{n}{l}\right)^3 \tag{31}$$

对于某个绝对常数 $C_0>0$ （注意，这一结论也给出了关于凸体 K （其 Santal´o 点位于原点）的相应估计，这正如预期，因为我们试图仿照该结论）。

b. 由于 $\sup_{F\in G_{n,l}} \frac{\text{投影}_F(\overline{K})|^{1/l}()\text{投影}()}{|\text{投影}_F(\underline{K})|^{1/l}}$ 是线性不变的，我们可以假设 K 处于各向同性位置。利用我们陈述的两类 Rogers-Shephard不等式（不等式 (9) 和不等式 (14)），对于每个 $F\in G_{n,l}$，有：

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}\simeq|\mathrm{Proj}_F(K)|^{1/l}\leqslant C\frac{n}{l}\frac{1}{|K\cap F^\perp|^{1/l}}.$$

现在我们结合前面提到的各向同性位置的若干性质 ：

$$C\frac{n}{l}\frac{1}{|K\cap F^\perp|^{1/l}}\leqslant C'\frac{n}{l}\frac{L_K}{L_{\pi_F(\mathbf{1}_K)}}\leqslant C''\frac{n}{l}L_K$$

（同时也考虑到所有各向同性常数都有一致的下界），而对于某个绝对常数 c_0，$K\supset c_0L_KB_2^n$立即也给出 $\underline{K}\supset c_0L_KB_2^n$。因此

$$|\mathrm{Proj}_F(\overline{K})|^{1/l}\leqslant C\frac{n}{l}\sqrt{l}|L_KB_2^l|^{1/l}\leqslant C\frac{n}{\sqrt{l}}|\mathrm{Proj}_F(\underline{K})|^{1/l}.$$

尽管这个估计看起来较为粗糙，但对于较小的维数 l（尤其是 $l\leqslant n^{4/5}$），它甚至比（31）给出的估计更好。不过，我们仍不清楚它能否对本文论证的任何部分产生影响。

5.2 A各向同性凸体平均范数相关结果的应用 s

除了与其同名的猜想之外，各向同性位置也是一种非常有用的规范化，在其他问题中也会用到，包括那些受算法应用启发的问题。因此，考察这种位置相对于一些在完全不同背景下引入、并用于优化或刻画凸体不同位置的参数时会呈现何种表现，似乎也很自然。在某些情况下，我们可以观察到其表现明显逊于针对相关参数的最优位置（例如参见 [30]及其中关于表面积的结果）；而在另一些情况下，其表现则相当接近。

这里我们关注与平均宽度和平均范数参数相关的问题。首先回顾一下，根据 Figiel–Tomczak-Jaegermann [17], Lewis [29]和 Pisier [38], 的结果，若 $K \subset \mathbb{R}^n$ 关于原点对称，则

$$\inf_{T\in \mathrm{GL}(n)} M(TK)\cdot M^*(TK) = \inf_{T\in \mathrm{GL}(n)} M(TK)\cdot M((TK)^\circ) \leqslant C\log(n) \tag{32}$$

其中 C 是一个绝对常数。此外，

$$\frac{1}{M(K)} \leqslant \mathrm{vrad}(K) \leqslant M^*(K),$$

其中，第一个不等式由詹森不等式推出，第二个不等式则是经典的乌雷松不等式（证明见例如 [40, 推论 1.4] ）。因此，对于 $\mathbb{R}^n$中体积为 1 的每个对称凸体 K ，我们可以找到 $T_0 \in \mathrm{GL}(n)$，使得

$$M(T_0K) \leqslant \tilde{C}\frac{\log(n)}{\sqrt{n}} \quad \text{and} \quad M^*((T_0K)^\circ) \leqslant \tilde{C}\sqrt{n}\log(n). \tag{33}$$

对于不一定关于原点对称的凸体 L ，若 $0 \in \mathrm{int}(L)$，则可以改用关系式 $h_L(\theta) = h_{L-0}(\theta) \leqslant h_{L-L}(\theta) = \max\{\langle x-z,\theta\rangle : x,z \in L\} \leqslant h_L(\theta) + h_L(-\theta)$，从而得到

$$M^*(L) \leqslant M^*(L-L) \leqslant 2M^*(L),$$

然后，我们可以对 $L-L$或 $L^\circ - L^\circ$进行适当变换，分别利用上述相同的、几乎最优的界来给出 $M^*(L)$ 或 $M(L) = M^*(L^\circ)$ 的上界（也就是说，若我们还假设 $|L| = 1$；对于后一种情形，若还可以说 $\mathrm{vrad}((L^\circ - L^\circ)^\circ) \simeq \mathrm{vrad}(L \cap (-L))$ 为 $\simeq \mathrm{vrad}(L)$，则根据 Rogers-Shephard、布拉施克-桑塔洛和布尔甘-米尔曼不等式，当 L 的桑塔洛点重心位于原点时，这实际上成立）。

我们还应指出，在非必然对称的情形下，式（32）目前已知的最佳类似结果由 Rudelson 给出 [44] （见其与 [43] 合作的配套论文），他证明了

$$\inf\big\{M(T(L-x))\cdot M^*(T(L-x)) : T \in \mathrm{GL}(n),\, x \in \mathrm{int}(L)\big\} \leqslant Cn^{1/3}\log^a(n)$$

其中 $a \leqslant 9$ 是某个绝对正常数。

回到估计各向同性位置下的平均宽度和平均范数这一问题，显然我们不能再对 K（或 $K-K$ 或 $K^\circ - K^\circ$）进行变换。在平均宽度的情形下，E. Milman [33] 证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个各向同性凸体 K ，

$$M^*(Z_n(K)) \leqslant C\sqrt{n}\log^2(n)L_K$$

其中， $Z_n(K)$ 是 K 的 L_n-质心体（其定义与此处无关，参考文献见例如 [33] 或 [11] ）。接下来应回顾 $Z_n(K) \simeq K - K$ （例如参见 [11, 推论 3.2.9]），由此可得 $M^*(Z_n(K)) \simeq M^*(K-K) \simeq M^*(K)$（无论 K 是对称的还是

仅以原点为中心）。事实上，随着近期一系列突破性进展带来了各向同性常数的对数界，此处的界如今在各种实际应用中基本上已是最优的。

然而，对于平均范数，我们完全无法确定对称情形和非对称情形是否会表现出相近的性质。对于对称的 n 维各向同性凸体，Giannopoulos 和 E. Milman [20] 的一种方法给出了以下上界：

$$M(K) \leqslant C\frac{\log^b(n)}{n^{1/6}L_K}$$

其中指数为 $b \leqslant 0.5$ （请注意，当时 Giannopoulos 和 Milman 尚无法利用各向同性常数的改进界，而我们现在可以将其代入他们的中间结果中）。他们的方法主要包括以下几个步骤。

首先是 Dudley 熵估计：

$$\sqrt{n}M^*(K) \leqslant C\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{l}}e_l(K, B_2^n) \tag{34}$$

（此表述见 [40, 定理 5.5] ，另请注意，由于 n 维空间中的标准体积估计，求和上限可以取为 $l = n$）。注意，这个估计对非对称凸体同样成立：我们已经看到 $M^*(K) \simeq M^*(K - K)$。此外，对于每个偶整数 l，都有

$$e_{l-1}(K - K, B_2^n) \leqslant 2e_{l/2}(K, B_2^n)$$

（因为 $N(K - K, 2t_0B_2^n) \leqslant N(K, t_0B_2^n)N(-K, t_0B_2^n) \leqslant 2^{l-2}$ 当且仅当 $t_0 = e_{l/2}(K, B_2^n)$）。

其次，有如下命题：

命题 13。（[20, 定理 1]）设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个关于原点对称的凸体。对任意 $l \in \{1, 2, \dots, n\}$，有

$$\begin{aligned} e_l(K, B_2^n) &\leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}w_m(K) : 1 \leqslant m \leqslant l\right\} \\ &\simeq C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}\frac{1}{v_m^-(K^\circ)} : 1 \leqslant m \leqslant l\right\}. \end{aligned}$$

请注意，第二个不等式无需在 [20, 定理 1] 中陈述，因为它可由布拉施克-桑塔洛不等式和布尔甘-米尔曼不等式直接推出。然而，在非对称情形下，正如我们已经看到的，从一个量转到另一个量有时需要额外付出一个 $\frac{n}{l}$ 因子。因此，接下来我们将尝试证明两个不等式中较容易得到的那个（幸运的是，它也最适用于我们的应用）。

此外，Giannopoulos 和 Milman 还得到了对称凸体 K 的 Gelfand 数的类似上界（根据 Carl 定理（见第 2 节），这些上界可以在关于 K 平均范数的应用中替代熵数的上界，并最终使他们能够略微简化这些计算）。

命题 14. ([20, 定理 2]) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点对称的凸体。对于每个 $l \in \{1, 2, \dots, \lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$，我们有

$$c_{2l-1}(K, B_2^n) \leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)w_l(K) \simeq C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)\frac{1}{v_l^-(K^\circ)}.$$

现在，我们可以给出这两个命题的一些类似版本，适用于不一定对称的凸体。

命题15。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，且 $l \in \{1, 2, \dots, n\}$。若 K 的重心位于原点，则

$$e_l(K, B_2^n) \leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}\left(\frac{n}{m}\right)^2 w_m(K) : 1 \leqslant m \leqslant l\right\} \tag{35}$$

and

$$e_l(K, B_2^n) \leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}\left(\frac{n}{m}\right)^3 \frac{1}{v_m^-(K^\circ)} : 1 \leqslant m \leqslant l\right\}.$$

另一方面，若 K 的重心或 Santal´o 点位于原点，则

$$e_l(K, B_2^n) \leqslant C\left(\frac{n}{l}\right)^5 \log^2\left(\frac{en}{l}\right)\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}\frac{1}{v_m^-(K^\circ)} : 1 \leqslant m \leqslant l\right\}. \tag{36}$$

最后，若 K 的 Santal´o 点位于原点，则

$$e_l(K, B_2^n) \leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)[1 + \|-b(K)\|_K]\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}\left(\frac{n}{m}\right)^2 w_m(K) : 1 \leqslant m \leqslant l\right\}. \tag{37}$$

and

$$e_l(K, B_2^n) \leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)[1 + \|-b(K)\|_K]\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}}\left(\frac{n}{m}\right)^3 \frac{1}{v_m^-(K^\circ)} : 1 \leqslant m \leqslant l\right\}.$$

证明。除不等式（36）外，其余部分可通过将问题化归为命题 13 所涵盖的对称情形来证明，然后利用我们已经见过的体积比较结果调整相关参数。事实上，若 K 的重心位于原点，则可写为

$$e_l(K, B_2^n) \leqslant e_l(K - K, B_2^n) \leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)\sup\left\{2^{-\frac{l}{3m}} w_m(K - K) : 1 \leqslant m \leqslant l\right\}$$

然后回顾

$$w_m(K - K) \leqslant C\frac{n}{m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} w_m(K - x) \leqslant C'\left(\frac{n}{m}\right)^2 w_m(K)$$

根据 Rudelson 和 Fradelizi 的结果。最后，结合此式与定理4，即可得到与（35）相应的不等式。

类似地，如果 K 的 Santal´o 点位于原点，则有

$$\begin{aligned} w_m(K - K) \leqslant C\frac{n}{m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} w_m(K - x) &\leqslant C'\left(\frac{n}{m}\right)^2 w_m(K - b(K)) \\ &\leqslant C'\left(\frac{n}{m}\right)^2 [1 + \|-b(K)\|_K]\, w_m(K). \end{aligned}$$

另一方面，为了证明（36），我们对命题 13 的证明进行调整（基本上是重复该证明，只是将定理 1 替换为定理 2）。为方便读者，我们简要概述论证过程。

由于 $l \mapsto e_l(K, B_2^n)$ 是递减的，我们只需尝试在某个等差数列中的整数 l 上，以及对 $l = 1$，给 $e_l(K, B_2^n)$ 找一个上界。

若 $l=1$，注意到 $v_1^-(K^\circ) \geqslant 2r(K^\circ)$，并回想 $2r^{\,1}{}_{(K^\circ)} = \frac{1}{2}R(K)$，而 $e_1(K,B_2^n) = R(K)$。因此，该不等式对 $l=1$ 成立（事实上，随着 n 越来越大，这个估计会变得非常粗略）。

现在假设 l 是 3 的倍数。根据定理 2，对于任意 $\beta \in (0, 2_5)$，我们可以找到一个 β-正则 M-椭球 $\mathcal{E}_\beta$，使其适用于 K（最终我们将取 $\beta_0 = \frac{2}{5} - {}_5{}^1{}_{\log(en/l))}$。我们可以写成

$$e_{l+1}(K,B_2^n) \leqslant e_{l/3+1}(K,\mathcal{E}_\beta) e_{2l/3+1}(\mathcal{E}_\beta, B_2^n) \leqslant D_\beta^{1/\beta} \left(\frac{3n}{\log(2)\, l}\right)^{1/\beta} e_{2l/3+1}(\mathcal{E}_\beta, B_2^n).$$

同时，根据引理 7 和注记 8 的 (i) 和 (iii)，我们知道

$$e_{2l/3+1}(\mathcal{E}_\beta, B_2^n) \leqslant C \sup_{1\leqslant m\leqslant l} 2^{-\frac{2l}{3m}} w_m(\mathcal{E}_\beta) = C \sup_{1\leqslant m\leqslant l} 2^{-\frac{2l}{3m}} \frac{1}{v_m^-(\mathcal{E}_\beta^\circ)}\,.$$

但对于每个 $F \in G_{n,m}$ 以及每个 $t \geqslant D_\beta^{1/\beta}$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{vrad}(\mathrm{Proj}_F(K^\circ))}{\mathrm{vrad}(\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\beta^\circ))} = \frac{|\mathrm{Proj}_F(K^\circ)|^{1/m}}{|\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\beta^\circ)|^{1/m}} &\leqslant t\, N(\mathrm{Proj}_F(K^\circ), t\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\beta^\circ))^{1/m} \\ &\leqslant t\, N(K^\circ, t\mathcal{E}_\beta^\circ)^{1/m} \leqslant t\, \exp(D_\beta n/(m\, t^\beta)),\end{aligned}$$

若取 $t = D_\beta^{1/\beta} \left({}^{3n}_{2}\log() \, l\right)^{1/\beta}$，便得到

$$\frac{\mathrm{vrad}(\mathrm{Proj}_F(K^\circ))}{\mathrm{vrad}(\mathrm{Proj}_F(\mathcal{E}_\beta^\circ))} \leqslant D_\beta^{1/\beta} \left(\frac{3n}{\log(2)\, l}\right)^{1/\beta} 2^{l/(3m)}.$$

由此可得

$$e_{2l/3+1}(\mathcal{E}_\beta, B_2^n) \leqslant C D_\beta^{1/\beta} \left(\frac{3n}{\log(2)\, l}\right)^{1/\beta} \sup_{1\leqslant m\leqslant l} 2^{-\frac{l}{3m}} \frac{1}{v_m^-(K^\circ)}$$

and

$$e_{l+1}(K,B_2^n) \leqslant C D_\beta^{2/\beta} \left(\frac{3n}{\log(2)\, l}\right)^{2/\beta} \sup_{1\leqslant m\leqslant l} 2^{-\frac{l}{3m}} \frac{1}{v_m^-(K^\circ)}$$

令 $\beta = \frac{2}{5} - {}_5{}^1{}_{\log(en/l)}$，证明即告完成。 □

命题 16. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体。若 K 的重心位于原点，则对于每个 $l \in \{1,2,\ldots,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$，我们都有

$$\begin{aligned} c_{2l-1}(K,B_2^n) &\leqslant C \left(\frac{n}{l}\right)^3 \log\left(\frac{en}{l}\right) w_l(K) \\ &\text{and} \quad c_{2l-1}(K,B_2^n) \leqslant C \left(\frac{n}{l}\right)^4 \log\left(\frac{en}{l}\right) \frac{1}{v_l^-(K^\circ)}\,. \end{aligned} \tag{38}$$

另一方面，如果 K 的 Santal´o 点位于原点，那么对于同一范围内的 l，

$$c_{2l-1}(K,B_2^n) \leqslant C \left(\frac{n}{l}\right)^5 \log^2\left(\frac{en}{l}\right) \frac{1}{v_l^-(K^\circ)}\,. \tag{39}$$

证明。再次地，对于（38），我们将问题归结为关于对称情形的相应命题，即命题 14:

$$c_{2l-1}(K,B_2^n)\leqslant c_{2l-1}(K-K,B_2^n)\leqslant C\frac{n}{l}\log\left(\frac{en}{l}\right)w_l(K-K)\,.$$

正如我们所看到的

$$w_l(K-K)\leqslant C\left(\frac{n}{l}\right)^2 w_l(K)\leqslant C'\left(\frac{n}{l}\right)^3\frac{1}{v_l^-(K^\circ)}$$

对于 K 以原点为中心。

另一方面，对于（39），我们对命题 14 的证明作出必要调整（将其中使用 Pisier 的定理 1 的部分替换为定理 2 和命题 3；事实上，该命题的证明与（39）的证明非常相似）。

固定 $l\in\{0,1,2,\dots,\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor\}$。根据定理 2 和命题 3，对于任意 $\beta\in(0,2_5)$，我们可以找到一个 β-正则的 M-椭球 $\mathcal{E}_\beta$，使得对于 K 我们有

$$c_l(K,\mathcal{E}_\beta)\leqslant C_0D_\beta^{1/\beta}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta}.$$

同样，我们可以假设 $l>1$，因为对于 $l=1$ 所要求的不等式显然成立（因为$c_1(K,B_2^n)=R(K)=\frac{2}{v_1^-(K^\circ)}$）。根据格尔范德数的定义，我们可以找到一个子空间 $F_0\in G_{n,n-l+1}$，使得

$$K\cap F_0\subseteq C_0D_\beta^{1/\beta}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta}\cdot\mathcal{E}_\beta\cap F_0\,.$$

设 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_{n-l+1}$ 为椭球 $\mathcal{E}_\beta\cap F_0$的半轴长度，并设$F_1\leqslant F_0$ 为由其中最短的 $n-2l+1$ 个半轴张成的子空间。于是 $\mathcal{E}_\beta\cap F_1\subseteq\mu_{l+1}B_{F_1}$且

$$\mu_{l+1}\leqslant\left(\prod_{i=1}^l\mu_i\right)^{1/l}=\mathrm{vrad}(\mathcal{E}_\beta\cap F_1^\perp\cap F_0)\leqslant w_l(\mathcal{E}_\beta)=\frac{1}{v_l^-(\mathcal{E}_\beta^\circ)}.$$

与前文一样，我们可以利用K° 关于 $\mathcal{E}_\beta^\circ$的覆盖数的正则性，比较 $v_l^-(\mathcal{E}_\beta^\circ)$ 与 $v_l^-(K^\circ)$:

$$\frac{1}{v_l^-(\mathcal{E}_\beta^\circ)}\leqslant CD_\beta^{1/\beta}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta}\frac{1}{v_l^-(K^\circ)}.$$

Thus

$$K\cap F_1\subseteq C_0D_\beta^{1/\beta}\left(\frac{n}{l}\right)^{1/\beta}\cdot\mathcal{E}_\beta\cap F_1\subseteq CD_\beta^{2/\beta}\left(\frac{n}{l}\right)^{2/\beta}\frac{1}{v_l^-(K^\circ)}\cdot B_{F_1}.$$

令 $\beta=\frac{2}{5}-{}_5{}^1{}_{\log(en/l)}$，即可完成证明。 □

推论17.（命题15的推论）设 K 为 $\mathbb{R}^n$中的一个不一定对称的各向同性凸体。则

$$M(K)\leqslant C\frac{\log^{\frac{5}{22}}(n)}{n^{\frac{1}{22}}L_K}.$$

此外，我们还有以下“条件”界

$$M(K)\leqslant C\left[1+h_K(-b(K^\circ))\right]\frac{\log^{\frac{1}{6}}(n)}{n^{\frac{1}{18}}L_K}.$$

证明。我们将 Dudley 熵估计与命题15中的（36）式结合起来（将其应用于凸体 K°，该凸体的 Santal´o 点位于原点），以及显然的界$e_l(K^\circ, B_2^n) \leqslant R(K^\circ) = r^{-1}(K)$：

$$\sqrt{n}M(K) = \sqrt{n}M^*(K^\circ) \leqslant C\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{l}} \min\left\{ \frac{1}{r(K)}, \left(\frac{n}{l}\right)^5 \log^2\left(\frac{en}{l}\right) \sup_{1\leqslant m\leqslant l} \left\{ 2^{-\frac{l}{3m}} \frac{1}{v_m^-(K)} \right\} \right\}.$$

根据我们在第 2.3 小节列出的各向同性位置的性质，我们有 $r(K) \geqslant c_0 L_K$；此外，对于每个 $F \in G_{n,\ m}$，

$$\mathrm{vrad}(\mathrm{Proj}_F(K)) \gtrsim \sqrt{m}\, \frac{L_K}{\sup_{M\subset\mathbb{R}^m} L_M}.$$

利用关于 $\sup_{M\subset\mathbb{R}^m} L_M$ 界的最新进展，我们得到

$$\frac{1}{v_m^-(K)} \leqslant C' \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{\log(m)}}{L_K} \leqslant C' \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{\log(n)}}{L_K},$$

因此我们可以计算

$$\sup_{1\leqslant m\leqslant l} \left\{ 2^{-\frac{l}{3m}} \frac{1}{v_m^-(K)} \right\} \leqslant C'' \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\sqrt{\log(n)}}{L_K}.$$

同样为简便起见，用 $\log^2(n)$ 对 $\log^2(en/l)$ 作上界，我们最终可以得出

$$\sqrt{n}M(K) \leqslant C\sum_{l=1}^{n} \min\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}\, L_K}, \frac{n^5}{l^6} \frac{\log^{5/2}(n)}{L_K} \right\} \leqslant C' \frac{n^{\frac{5}{11}}\ \log^{\frac{5}{22}}(n)}{L_K}.$$

类似地，这次利用不等式 (37) 之后的结论，可以推出另一个界 . □

致谢。作者感谢 Alexander Litvak 建议在定理 2 的证明中使用一个“平均”椭球。

参考文献

[1] S. Artstein、V. D. Milman 和 S. J. Szarek。“度量熵的对偶性”。《数学年刊》159（2004），第 3 期：1313-1328。[2] S. Artstein-Avidan、A. Giannopoulos 和 V. D. Milman。《渐近几何分析。第一部分》。《数学调查与专著》202。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年。[3] K. M. Ball。“对数凹函数与 $\mathbb{R}^n$ 中凸集的截面”。《数学研究》88（1988）：69-84。[4] K. M. Ball。“立方体截面的体积及相关问题”。《泛函分析的几何方面》（1987-88），《数学讲义》1376，施普林格（1989），柏林：251-260。[5] F. Barthe。“通过测度传输获得的泛函与几何不等式”。数学博士论文，马恩-拉瓦雷大学（1997）。[6] G. Bianchi 和 M. Kelly。“布拉施克-桑塔洛不等式的傅里叶分析证明”。《美国数学会会刊》143（2015），第 11 期：4901-4912。

.[7] W. Blaschke。“仿射几何 VII：椭圆与椭球的新极值性质”。萨克森州皇家科学院数学与物理学部报告 69（1917）：412-420。[8] J. Bourgain。“与凸体相关的高维极大函数”。《美国数学杂志》108（1986）：1467-1476。[9] J. Bourgain。“高维凸集上的多项式分布”。《泛函分析的几何方面》。《数学讲义》1469。施普林格，柏林（1991）：127-137。[10] J. Bourgain 和 V. D. Milman。“ $\mathbb{R}^n$ 中对称凸体的新体积比性质”。《数学新进展》88（1987）：319-340。[11] S. Brazitikos、A. Giannopoulos、P. Valettas 和 B.-H. Vritsiou。《各向同性凸体的几何》。《数学调查与专著》196。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2014年。[12] M. Campos、P. v. Hintum、R. Morris 和 M. Tiba。“通过 Bourgain 切片问题探讨 Hadwiger 猜想”。预印本（见 arXiv:2206.11227）。[13] B. Carl。“熵数、 s-数与特征值问题”。《泛函分析杂志》41（1981）：290-306。[14] G. D. Chakerian。“凸体差体的不等式”。《美国数学会会刊》18（1967）：879-884。[15] Y. Chen。“KLS 猜想中等周系数的近常数下界”。《几何与泛函分析》31（2021）：34-61。[16] H. Dirksen。“正则单纯形的截面——体积公式与估计”。《数学通讯》290（2017），第 16 期：2567-2584。[17] T. Figiel 和 N. Tomczak-Jaegermann。“巴拿赫空间的希尔伯特子空间上的投影”。《以色列数学杂志》33（1979）：155-171。[18] M. Fradelizi。“穿过凸体质心的截面”。《数学档案》69（1997）：515-522。[19] M. Fradelizi、M. Meyer 和 V. Yaskin。“锥截取凸体的体积”。《美国数学会会刊》145，第 7 期（2017）：3153-3164。[20] A. Giannopoulos 和 E. Milman。“各向同性凸体及其 L_q-质心体的 M-估计”。《泛函分析的几何方面》，《数学讲义》2116，施普林格（2014），沙姆：159-182。[21] H. Huang、B. A. Slomka、T. Tkocz 和 B.-H. Vritsiou。“利用薄壳估计改进 Hadwiger 覆盖问题的界”。《欧洲数学会杂志》24（2021）：1431-1448。[22] A. Jambulapati、Y. T. Lee 和 S. S. Vempala。“KLS 常数的略微改进界”。预印本（见 arXiv:2208.11644）。[23] B. Klartag。“切片问题的同构版本”。《泛函分析杂志》218（2005）：372-394。[24] B. Klartag。“具有有界各向同性常数的凸扰动”。《几何与泛函分析》16（2006）：1274-1290。[25] B. Klartag。“等周不等式与凸集截面的对数界”。预印本（见 arXiv:2303.14938）。[26] B. Klartag 和 J. Lehec。“Bourgain 切片问题与多对数精度下的 KLS 等周不等式”。《几何与泛函分析》32（2022）：1134-1159。

[27] B. Klartag 和 V. D. Milman. “大多数凸体的快速施泰纳对称化与切片问题”。B. Klartag 个人网页上的预印本：http://www.math.tau.ac.il/~klartagb/，访问于2023年3月26日。[28] B. Klartag 和 V. D. Milman. “大多数凸体的快速施泰纳对称化与切片问题”。《组合学、概率与计算》14（2005年），第5–6期：829–843。[29] D.R. Lewis. “由巴拿赫理想范数定义的椭球”。《Mathematika》26（1979年）：18–29。[30] E. Markessinis 和 P. Valettas. “中心对称凸体经典位置之间的距离”。《休斯敦数学杂志》41（2015年）：187–211。[31] M. Meyer 和 A. Pajor. “关于布拉施克–桑塔洛不等式”。《数学档案》55（1990年）：82–93。[32] M. Meyer、C. Sch¨utt 和 E. Werner. “凸体新的仿射对称度量”。《数学进展》228（2011年）：2920–2942。[33] E. Milman. “各向同性凸体的平均宽度及其相关质心体”。《国际数学研究论文集》（2015年），第11期：3408–3423。[34] V. D. Milman. “布伦–明可夫斯基逆不等式及其在赋范空间局部理论中的应用”。《法国科学院院报》302（1986年）：25–28。[35] V. D. Milman 和 A. Pajor. “非对称凸体的熵与渐近几何”。《数学进展》152（2000年），第2期：314–335。[36] S. Myroshnychenko、M. Stephen 和 N. Zhang. “截面的格伦鲍姆不等式”。《泛函分析杂志》275（2018年），第9期：2516–2537。[37] C. M. Petty. “仿射等周问题”。《离散几何与凸性》（纽约，1982年），《纽约科学院年刊》440，纽约科学院，纽约（1985年）：113–127。[38] G. Pisier. “全纯半群与巴拿赫空间几何”。《数学年刊》115（1982年）：375–392。[39] G. Pisier. “研究 V. Milman 若干结果的新方法”。《纯粹与应用数学杂志》393（1989年）：115–131。[40] G. Pisier. 《凸体的体积与巴拿赫空间几何》。剑桥数学论丛第94卷。剑桥大学出版社，剑桥，1989年。[41] C. A. Rogers 和 G. C. Shephard. “凸体的差体”。《数学档案》8（1957年）：220–233。[42] C. A. Rogers 和 G. C. Shephard. “与给定凸体相关的凸体”。《伦敦数学会杂志》33（1958年）：270–281。[43] M. Rudelson. “差体的截面”。《离散与计算几何》23（2000年），第1期：137–146。[44] M. Rudelson. “非对称凸体之间的距离与 MM^*-估计”。《Positivity》4（2000年），第2期：161–178。[45] J. Saint-Raymond. “关于对称凸体的体积”。《分析入门研讨班：G. Choquet-M. Rogalski-J. Saint-Raymond》，第20年：1980/1981年，《巴黎皮埃尔与玛丽·居里大学数学出版物》第46卷，巴黎第六大学，巴黎（1981年），报告第11号：第25页。[46] L. A. Santal´o. “空间中凸体的一个仿射不变量”。《葡萄牙数学》8（1949年）：155–161。

[47] C. Sch¨utt. “对称巴拿赫空间之间对角算子的熵数”。《逼近理论杂志》40 (1984)：121-128。[48] J. Spingarn. “关于凸集截面与投影的不等式”。Proc. Amer. Math.Soc. 118 (1993)：1219-1224。[49] M. Stephen 和 N. Zhang. “投影的 Gr¨unbaum 不等式”。《泛函分析杂志》272 (2017)：2628-2640。[50] S. Taschuk. “凸几何中的若干不等式”。数学博士论文，阿尔伯塔大学 (2013)。

Beatrice-Helen Vritsiou: 阿尔伯塔大学数学与统计科学系，CAB 632，埃德蒙顿，AB，加拿大 T6G 2G1
E-mail: vritsiou@ualberta.ca