arXiv:2303.17794v1 [math.MG] 31 Mar 2023

# 凸体的射影变换与体积乘积

F. BALACHEFF、G. SOLANES 与 K. TZANEV

摘要。本文研究了限制在某个固定凸体的小幅射影变形空间上的体积乘积泛函的若干变分性质。为此，我们给出 Klartag 定理的一个简短证明：截面猜想的强版本蕴含马勒猜想。我们还展示了一族有趣的二维临界凸体，其中包含该泛函的鞍点。

## 1. 引言

内部包含原点的凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的体积乘积定义为 $\mathrm{vp}(K) := |K| \cdot |K^\circ|$。这里 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准勒贝格测度，而 $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1 \ \forall x \in K\}$ 是 $K$ 的极体。众所周知，[Santaló 1949] 指出，在重心位于原点的凸体中，只有椭球能使体积乘积达到最大值；然而，在维数大于 2 时，其下界仍然未知。更准确地说，马勒猜想断言，任何 $K$ 内部包含原点的凸体都满足以下最优不等式：

$$\mathrm{vp}(K) \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2}.$$

任何顶点张成 $\mathbb{R}^n$ 且和为零的 $n$-单纯形，都能达到所猜想的下界。Mahler 实际上证明了维数为 $n = 2$ [Mahler 1939], 时的不等式，但迄今为止，这一猜想在更高维数下仍未解决。

若在 $\mathbb{R}^n$ 上赋予凸体空间通常的豪斯多夫拓扑，体积乘积便成为空间 $\mathcal{K}_0^n$ 上的连续函数，其中的凸体都包含原点，且原点位于其内部。标准的紧性论证表明，泛函 $\mathrm{vp} : \mathcal{K}_0^n \to (0, \infty)$ 能取到其最小值。根据 [Santaló 1949]，任何体积乘积的局部极小体 $K$ 都满足：其重心 $\mathbb{G}_K$ 与其极体的重心 $\mathbb{G}_{K^\circ}$均与原点重合。现在回想一下，重心位于原点的凸体 $K$ 的协方差矩阵 $\mathrm{cov}(K)$ 是一个对称矩阵，其各项如下：

$$\mathrm{cov}(K)_{ij} = \frac{1}{|K|}\int_K x_i x_j dx.$$

本文为以下由 Klartag 得出的结果给出一个简短证明。

**定理 1.1**。 [Klartag 2018] 设 $K$ 是体积乘积的局部极小值点。那么

$$\mathrm{cov}(K^\circ) \geq \frac{1}{(n+2)^2} \cdot \mathrm{cov}(K)^{-1}$$

按照对称矩阵的意义。

2010 数学主题分类。主要：52A20，52A40。次要：52A38。关键词与短语。凸体、马勒猜想、截面猜想、体积乘积。第一作者感谢 FSE/AEI/MICINN 项目 RYC-2016-19334“局部与整体的收缩几何与拓扑”提供的支持。第二作者得到 Serra Hunter 计划以及 AEI/MICINN María de Maeztu 项目 CEX2020-001084-M 的资助。第一作者和第二作者感谢 FEDER/AEI/MICINN 项目 PID2021-125625NB-I00“普适几何结构与不等式”以及 AGAUR 项目 2021-SGR-01015 提供的支持。

由此结果可知，强版本的截面猜想蕴含马勒猜想。这个强截面猜想指出，在重心位于原点的凸体中，齐次量 $\det[\mathrm{cov}(K)]/|K|^2$ 在任意$n$-单形上取得最大值，其中该单形的顶点张成 $\mathbb{R}^n$ 且顶点之和为零，更多细节参见 [Klartag 2018] 。

Klartag 对定理 1.1 的证明基于射影像空间中的一个变分论证，该论证大量运用了拉普拉斯变换。本文也将在 $K$ 的射影像空间中使用变分论证，以重新证明定理 1.1，但我们的计算将简单得多。更确切地说，在第2节中，我们考虑泛函 $\mathcal{F}_K(x,\xi) := \mathrm{vp}\,((K^\circ+\xi)^\circ + x)$，它在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 中原点的某个开邻域内的 $K$ 中任意凸体上都有定义。根据 Santaló 定理，我们很容易观察到（命题 2.1）：原点是泛函$\mathcal{F}_K$ 的临界点，当且仅当 $\mathbb{G}_K = \mathbb{G}_{K^\circ} = 0$。接着，通过初等计算（命题 2.2），我们将得到该临界点处海森矩阵的如下表达式：

$$\mathrm{Hess}_{(0,0)}\,\mathcal{F}_K = (n+1)\,\mathrm{vp}(K)\begin{pmatrix} (n+2)\,\mathrm{cov}(K^\circ) & -I_n \\ -I_n & (n+2)\,\mathrm{cov}(K)\end{pmatrix}.$$

最后，我们将验证（命题 2.3）：上述海森矩阵为半正定，当且仅当对称矩阵不等式 $(n+2)\cdot\mathrm{cov}(K^\circ) \geq [(n+2)\cdot\mathrm{cov}(K)]^{-1}$ 成立。这便推出定理 1.1。

我们的泛函 $\mathcal{F}_K$ 通过对凸体施加特殊的射影变换来定义，这些变换是将极体平移与凸体本身平移以特定方式组合而成的。在第3节中，我们将证明，该泛函涵盖了给定凸体的射影像空间上体积乘积变分性质的所有相关信息。更确切地说，我们首先将在命题 3.1 中证明：一旦选定合适的仿射坐标图，接近恒等映射的射影变换会将凸体 $K$ 变换为一个新的凸体，而该凸体的内部仍包含原点。随后，我们将在命题3.2 中证明，这些对凸体进行的小幅射影扰动所得到的体积乘积可通过映射 $\mathcal{F}_K$分解。

最后，在第4节中，我们将展示一个有趣的二维凸体族，它们在各自的射影像空间上都是体积乘积的临界点。更准确地说，我们将证明以下结论。

**定理 1.2**。 存在一个由轴对称五边形构成的等边三角形 $\Delta = P_{-1/\sqrt{2}}$-的一参数形变 $\{P_q\}_{q\in[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]}$，满足以下性质。

*i)* 每个五边形 $P_q$ 都是其自身射影轨道上的体积乘积临界点；更准确地说，函数 $F^{P_q}$ 在原点处有一个临界点。*ii)* 五边形 $P_0$ 是一个鞍点；更准确地说，海森矩阵 $\mathrm{Hess}^{(0,0)}F^{P_0}$ 是非退化且非定号的。

*iii)* 当 $q$ 足够接近 $-1/\sqrt{2}$ 时，我们有

$$\mathrm{tr}[\mathrm{cov}(P_q)\,\mathrm{cov}(P_q^\circ)] > \mathrm{tr}[\mathrm{cov}(\Delta)\,\mathrm{cov}(\Delta^\circ)] = 1/8. \tag{1.1}$$

这一族凸体最重要的性质是，其中一部分临界点是鞍点。存在满足 (1.1) 的 $\Delta$ 小形变这一最后的性质也值得注意，原因如下。回顾一下，二维欧几里得单位球 $B$ 也满足 $\mathrm{tr}[\mathrm{cov}(B)\,\mathrm{cov}(B^\circ)] = 1/8$；而 Kuperberg 在与 Klartag 的一次私人通信中指出，任意维数的欧几里得球都是泛函 $K\mapsto \mathrm{tr}[\mathrm{cov}(K)\,\mathrm{cov}(K^\circ)]$ 在具有足够光滑边界的中心对称凸体类中的局部极大值点，见 Klartag 2018，第 78] 页。在某个时期，这个上界是否为全局上界尚不明朗，直到 Klartag 2018 的命题 1.5] 在高维情形下将其推翻。我们的这一族凸体表明，在 $n$-单纯形附近，Kuperberg 的局部结论不存在任何非对称的对应版本，即使在低维情形下也是如此。

**致谢**。 我们谨感谢 B. Klartag 富有价值的交流。

## 2. 体积乘积的简单变分分析

本节旨在简要证明定理 1.1。固定一个包含原点于其内部的凸体 $K$，并考虑泛函

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_K : U_K &\to (0,\infty) \\ (x,\xi) &\mapsto \operatorname{vp}\left((K^\circ+\xi)^\circ + x\right) \end{aligned}$$

该泛函在 $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 的某个开邻域 $U_K$ 内定义良好。

**命题 2.1.** *$F_K$ 在原点处的雅可比矩阵如下：*

$$\operatorname{Jac}_{(0,0)} \mathcal{F}_K = -(n+1)\operatorname{vp}(K)\begin{pmatrix} \mathbb{G}_{K^\circ} & \mathbb{G}_K \end{pmatrix}.$$

回顾一下，凸体 $A$ 的重心由公式 $\mathbb{G}_A := |A|^{-1}\int_A x dx$ 定义。

证明。 等价地，我们将证明对于任意 $(v,\ \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，下式成立：

$$d_{(0,0)}\mathcal{F}_K(v,\eta) = -(n+1)\operatorname{vp}(K)(\langle \mathbb{G}_{K^\circ}, v\rangle + \langle \mathbb{G}_K, \eta\rangle).$$

首先回顾一下，Santaló 在 [Santaló 1949] 中证明了以下公式：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 |(K-tv)^\circ| = (n+1)\cdot|K^\circ|\cdot\langle \mathbb{G}_{K^\circ}, v\rangle .$$

接着，我们很容易计算得出

$$d_{(0,0)}\mathcal{F}_K(v,0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \operatorname{vp}(K+tv) = -(n+1)\cdot\operatorname{vp}(K)\cdot\langle \mathbb{G}_{K^\circ}, v\rangle .$$

等式 $d_{(0,0)}\mathcal{F}_K(0,\ \eta) = -(n+1)\cdot\operatorname{vp}(K)\cdot\langle \mathbb{G}_K,\ \eta\rangle$ 很容易由前面的计算得出，利用了 $\operatorname{vp}(K) = \operatorname{vp}(K^\circ)$。□

尤其是原点是泛函 $\mathcal{F}_K$ 的临界点，当且仅当 $\mathbb{G}_K = \mathbb{G}_{K^\circ} = 0$。

**命题 2.2.** *假设原点是 $F_K$ 的临界点。那么其海森矩阵如下：*

$$\operatorname{Hess}_{(0,0)}\mathcal{F}_K = (n+1)\operatorname{vp}(K)\begin{pmatrix} (n+2)\operatorname{cov}(K^\circ) & -I_n \\ -I_n & (n+2)\operatorname{cov}(K) \end{pmatrix}.$$

证明。 首先注意，对于任意 $v,\ w \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}_{(0,0)}\ \mathcal{F}_K[(v,0),(w,0)] &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \mathcal{F}_K(tv+sw,0) \\ \text{(using the previous proposition)} &= -(n+1)\cdot\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \operatorname{vp}(K+tv)\cdot\left\langle \mathbb{G}_{(K+tv)^\circ}, w\right\rangle \\ &= -(n+1)\cdot|K|\cdot\left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_0 [|(K+tv)^\circ|\cdot\mathbb{G}_{(K+tv)^\circ}], w\right\rangle . \end{aligned}$$

现在，利用凸体 $A \in \mathcal{K}_0^n$ 的径向函数 $\rho_A$、其极集的支撑函数 $h_{A^\circ}$，以及 $\rho_A = 1/h_{A^\circ}$ 这一事实，我们计算得

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_0 [|(K+tv)^\circ| \cdot \mathbb{G}_{(K+tv)^\circ}] &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \int_{(K+tv)^\circ} x dx \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{(K+tv)^\circ}(u)} (ru)\, r^{n-1} dr du \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \int_{S^{n-1}} \rho_{(K+tv)^\circ}(u)^{n+1} u\, du \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \int_{S^{n-1}} \frac{u}{h_{K+tv}(u)^{n+1}} du \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \int_{S^{n-1}} \frac{1}{(h_K(u) + t\langle v, u\rangle)^{n+1}}\, u du \\
&= -\int_{S^{n-1}} \frac{\langle v, u\rangle}{h_K(u)^{n+2}}\, u du.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{(0,0)}\, \mathcal{F}_K((v,0),(w,0)) &= (n+1) \cdot |K| \cdot \int_{S^{n-1}} \frac{\langle v, u\rangle \cdot \langle w, u\rangle}{h_K(u)^{n+2}}\, du \\
&= (n+1) \cdot (n+2) \cdot |K| \cdot \int_{K^\circ} \langle v, x\rangle \cdot \langle w, x\rangle\, dx \\
&= (n+1) \cdot \mathrm{vp}(K) \cdot (n+2) \cdot v^t \,\mathrm{cov}(K^\circ)\, w
\end{aligned}$$

正如所声称的那样。对偶项的计算

$$\mathrm{Hess}_{(0,0)}\, \mathcal{F}_K((0,\xi),(0,\eta)) = (n+1) \cdot \mathrm{vp}(K) \cdot (n+2) \cdot \xi^t \,\mathrm{cov}(K)\, \eta.$$

对于任意 $\xi$，$\eta \in \mathbb{R}^n$ 也类似。接下来计算混合项如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{(0,0)}\, \mathcal{F}_K((v,0),(0,\eta)) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \left( |(K^\circ + s\eta)^\circ| \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_0 |((K^\circ + s\eta)^\circ + tv)^\circ| \right) \\
&= -(n+1)\, \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (\mathrm{vp}(K^\circ + s\eta) \cdot \langle \mathbb{G}_{K^\circ + s\eta}, v\rangle) \\
\text{（原点是一个临界点）} &= -(n+1) \cdot \mathrm{vp}(K^\circ) \cdot \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \langle \mathbb{G}_{K^\circ + s\eta}, v\rangle \\
&= -(n+1) \cdot \mathrm{vp}(K) \cdot \langle \eta, v\rangle。
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

**命题 2.3.** 假设原点是 $F_K$ 的临界点。那么

$$\mathrm{Hess}_{(0,0)}\, \mathcal{F}_K \geq 0 \iff \mathrm{cov}(K^\circ) \geq \frac{1}{(n+2)^2} \cdot \mathrm{cov}(K)^{-1}.$$

此外

$$\det(\mathrm{Hess}_{(0,0)}\, \mathcal{F}_K) = (n+1)^n \,\mathrm{vp}(K)^n \det[(n+2)^2 \,\mathrm{cov}(K^\circ)\,\mathrm{cov}(K) - I_n]. \tag{2.1}$$

正如引言中所述，该陈述的第一部分蕴含定理 1.1。第二部分将在最后一节中发挥作用。

证明。只需指出，若 $A$ 和 $B$ 是两个对称正定矩阵，并且令

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} A & -I_n \\ -I_n & B \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P \coloneqq \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

由于 $P$ 可逆，以下结论成立：

$$M \geq 0 \iff P^t\, M\, P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - A^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \iff B \geq A^{-1}.$$

由于 $\det P = 1$,

$$\det M = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - A^{-1} \end{pmatrix} = \det(A)\det(B - A^{-1}) = \det(AB - I_n). \qquad \square$$

## 3. 射影变换与体积乘积

本节旨在说明，给定凸体 $K$ 的射影像空间上的体积乘积可通过映射 $\mathcal{F}_K$ 分解。因此，泛函 $\mathcal{F}_K$ 涵盖了给定凸体的射影像空间上体积乘积变分性质的所有相关信息。

首先回顾一些关于射影变换（也称为射影变换）的内容。考虑实射影空间 $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$。我们将使用 $\mathbb{RP}^n$ 中点的射影坐标 $[x_0, \ldots, x_n]$。回顾一下，射影变换是由 $\mathbb{RP}^n$ 的一个线性同构诱导的微分同胚，具体如下：给定 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$，所诱导的射影变换 $\mathbb{P}A$ 为

$$\mathbb{P}A[x_0, \ldots, x_n] = \left[ \sum_{i=0}^{n} a_{0i}x_i, \ldots, \sum_{i=0}^{n} a_{ni}x_i \right].$$

这使得我们可以将射影变换群 $\mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^n)$ 与射影线性群 $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})/(\mathbb{R}^* \cdot I_{n+1})$ 等同起来，并在其上定义自然拓扑。这里，$I_{n+1}$ 表示单位矩阵。我们将使用仿射坐标图

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{RP}^n \setminus H_0 \\ y = (y_1, \ldots, y_n) &\longmapsto [1, y] = [1, y_1, \ldots, y_n], \end{aligned}$$

其中 $H_0 = \{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \mid x_0 = 0\}$. Its i逆映射 is $F^{-1}[x_0, \ldots, x_n] = (x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$。给定两个以原点 $B_1 \subsetneq B_2$为中心的嵌套开球，我们将$\mathcal{K}_0^n$的开子集定义为

$$\mathcal{V} \coloneqq \{K \in \mathcal{K}_0^n \mid \mathrm{cl}(B_1) \subset \mathrm{int}(K) \subset K \subset B_2\}$$

其中，cl 和 int 分别表示闭包和内部。

**命题 3.1.** 存在恒等变换在$\mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^n)$ 中的一个开邻域 $U$，使得对于 $\forall K \in V$ 和 $\forall \pi \in U$，有 $\pi \circ F(K) \subset \mathbb{RP}^n \setminus H_0$，且 $F^{-1} \circ \pi \circ F(K) \in \mathcal{K}_0^n$。

证明。引入以下局部参数化

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^n) \simeq \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}) \\ (M, x, \xi) &\mapsto \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \xi^t \\ x & M \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然，$\Phi$ 是到其像的一个微分同胚，而该像是恒等变换的一个开邻域。我们容易计算得，对于任意 $\pi = \Phi(M, x, \xi)$ 及每个 $y \in \mathbb{R}^n$，有

$$\pi \circ F(y) = [1 + \xi^t y, x + My].$$

因此，$\pi \circ F(y) \in \mathbb{RP}^n \setminus H_0$ 当且仅当 $1 + \xi^t y \neq 0$；而 $\pi \circ F(K) \subset \mathbb{RP}^n \setminus H_0$ 的条件等价于 $-\xi \in \mathrm{int}(K^\circ)$ 的条件。现在，若 $-\xi \in \mathrm{int}(K^\circ)$，则良定义的集合$F^{-1} \circ \pi \circ F(K)$ 自动成为一个凸体；它包含于内部的零点，当且仅当 $-x \in \mathrm{int}(MK)$。因此，开集 $\mathcal{U} \coloneqq \Phi(\{(M, x, \xi) \mid -\xi \in B_2^\circ \text{ 且 } -x \in MB_1\})$ 满足命题的结论。$\square$

现在我们将对这个开邻域 $\mathcal{U}$ 重新参数化，以说明 $K$ 的射影像的体积乘积可通过映射 $\mathcal{F}_K$分解。

**命题3.2**。在$(I_n, 0, 0)$ 在$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$中存在一个开邻域 $W$ 以及一个映射 $\Psi : W \to \mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^n)$，使得 $\Psi(I_n, 0, 0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{RP}^n}$，$\Psi$ 是一个到其像上的微分同胚，并且满足以下条件：

$$\mathrm{vp}(F^{-1} \circ \Psi(M, x, \xi) \circ F(K)) = \mathcal{F}_K(x, \xi)$$

对于任意凸体 $K \in \mathcal{V}$ 以及任意$(M, x, \xi) \in \Psi^{-1}(U)$。

因此，为了研究凸体 $K \in \mathcal{K}_0^n$ 的射影像的体积乘积的变分性质，只需研究相应的泛函 $\mathcal{F}_K$。

证明。 考虑映射

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (N, y, \eta) &\mapsto \left(N(I_n + y\eta^t), Ny, \eta\right). \end{aligned}$$

对于任意 $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，映射 $\alpha$ 固定形如 $(M, 0, 0)$ 的点，并且在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 中存在点 $(I_n, 0, 0)$ 的一个开邻域 $\mathcal{W} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$，使得 $\alpha$ 在 $\mathcal{W}$ 上的限制是到其像的微分同胚，其逆映射为 $\alpha^{-1}(M, x, \xi) = \left(M - x\xi^t, (M - x\xi^t)^{-1}x, \xi\right)$。然后定义映射

$$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^n) \\ (N, y, \eta) &\mapsto \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & I_n \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \eta^t \\ 0 & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因为

$$\Phi \circ \alpha(N, y, \eta) = \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \eta^t \\ Ny & N(I_n + y\eta^t) \end{pmatrix},$$

而

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & I_n \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \eta^t \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Ny & N \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \eta^t \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \eta^t \\ Ny & N(I_n + y\eta^t) \end{pmatrix},$$

我们有 $\Psi = \Phi \circ \alpha$，这意味着 $\Psi$ 在 $\mathcal{W}$ 上的限制是到其像上的一个微分同胚。根据构造，$\Psi(I_n, 0, 0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{RP}^n}$。仍记 $\Psi : \mathcal{W} \to \mathrm{Proj}(\mathbb{RP}^n)$ 为映射 $\Psi$ 在 $\mathcal{W}$ 上的限制。现在，对任意凸体 $K \in \mathcal{V}$ 以及任意 $(M, x, \xi) \in \Psi^{-1}(\mathcal{U})$，下式成立：

$$\begin{aligned} F^{-1} \circ \Psi(M, x, \xi) \circ F(K) &= F^{-1} \circ \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & I_n \end{pmatrix} \cdot \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & \xi^t \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \circ F(K) \\ &= F^{-1} \circ \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \cdot \Psi(I_n, x, \xi) \circ F(K) \\ &= F^{-1} \circ \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \circ F \circ F^{-1} \circ \Psi(I_n, x, \xi) \circ F(K). \end{aligned}$$

但对所有 $y \in \mathbb{R}^n$

$$F^{-1} \circ \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \circ F(y) = My,$$

由此，利用体积乘积在线性群作用下的不变性，可得

$$\mathrm{vp}(F^{-1} \circ \Psi(M, x, \xi) \circ F(K)) = \mathrm{vp}(F^{-1} \circ \Psi(I_n, x, \xi) \circ F(K)).$$

现在注意到

$$F^{-1} \circ \Psi(I_n, x, \xi) \circ F(K) = (K^\circ + \xi)^\circ + x.$$

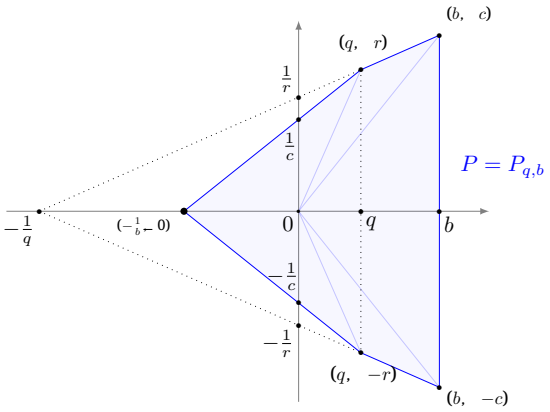
事实上，写作 $F^{-1} \circ \Psi(I_n, x, \xi) \circ F = F^{-1} \circ \Psi(I_n, x, 0) \circ F \circ F^{-1} \circ \Psi(I_n, 0, \xi) \circ F$。首先，$F^{-1} \circ \Psi(I_n, x, 0) \circ F(y) = x + y$，而 $F^{-1} \circ \Psi(I_n, 0, \xi) \circ F(y) = y/(1 + \xi^t y)$。经过直接计算可得 $F^{-1} \circ \Psi(I_n, 0, \xi) \circ F(K) = (K^\circ + \xi)^\circ$。

由此可得，$\mathrm{vp}(F^{-1} \circ \Psi(M, x, \xi) \circ F(K)) = \mathrm{vp}((K^\circ + \xi)^\circ + x)$，如所述。 □

### 4. 一族临界五边形

固定两个数 $b>0$ 和 $q\in[-\frac{1}{b},b]$，并令 $r=\sqrt{1+q^2}$ 和 $c=\frac{1+bq}{\sqrt{1+q^2}}$。

我们考虑五边形 $P_{q,\,b}\subset\mathbb{R}^2$，其顶点为 $(-\frac{1}{b},\ 0)$、$(q,\ \pm r)$ 和 $(b,\ \pm c)$。根据构造，$P=P_{q,\,b}$ 关于 $x$ 轴对称：




**引理 4.1.** $P$ 的对偶是 $-P$。

证明。这直接源于凸多边形的以下一般事实：点 $(A,\ B)$ 是 $P^\circ$ 的顶点，当且仅当直线 $Ax+By=1$ 包含 $P$ 的一条边。由此：

- 经过 $(-\frac{1}{q},\ 0)$ 和 $(0,\ \pm\frac{1}{r})$ 且包含 $P$ 的一条边的直线，对应于 $P^\circ$ 的顶点 $(-q,\ \pm r)$，
- 经过 $(-\frac{1}{b},\ 0)$ 和 $(0,\ \pm\frac{1}{c})$ 且包含 $P$ 的一条边的直线，对应于 $P^\circ$ 的顶点 $(-b,\ \pm c)$，
- 经过 $(b,\ c)$ 和 $(b,\ -c)$ 且包含 $P$ 的一条边的直线，对应于 $P^\circ$ 的顶点 $(\frac{1}{b},\ 0)$。

因此，$P^\circ$ 与 $-P$ 重合。 □

根据前一个引理，如果 $P$ 的重心位于原点，则其对偶 $-P$ 的重心也位于原点，因此 $P$ 是 $P$ 的射影像空间上体积乘积的临界点。

下一个引理给出了确保 $P$ 为此类临界点的点对 $(q,\ b)$ 的确切条件。

**引理 4.2。** $P$ 的重心位于原点，当且仅当

$$f(q,b):=q^3b-q^2b^2-q^2+2qb^5+qb+3b^4=1.$$

证明。由于 $P$ 具有对称性，其重心位于 $x$ 轴上，因此只需考虑重心的横坐标。将五边形分解为六个两两对称的三角形即可计算出该坐标，其中每个三角形的一个顶点位于原点，并且有一条公共边与 $P$ 重合。于是，重心条件变为

$$\frac{(b+b)}{3}\begin{vmatrix}b & b\\ 0 & c\end{vmatrix}+\frac{(b+q)}{3}\begin{vmatrix}b & q\\ c & r\end{vmatrix}+\frac{(q-\frac{1}{b})}{3}\begin{vmatrix}q & -\frac{1}{b}\\ r & 0\end{vmatrix}=0.$$

相乘 乘以 $3b^2r$，并利用 $r^2=1+q^2$ 和 $rc=1+bq$，即可得到所需条件。 □

作为满足 $P$ 为临界的成对实例 $(q,b)$，即引理 4.2 中方程的解，可以考虑以下各对：

- 两对 $(-1/\sqrt{2},\sqrt{2})$ 和 $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 分别使五边形退化为等边三角形 $\Delta$ 及其对偶 $-\Delta$，
- 五边形为正五边形时的数对 $(-\cos(2\pi/5)/\sqrt{\cos(\pi/5)},\ \sqrt{\cos(\pi/5)})$，

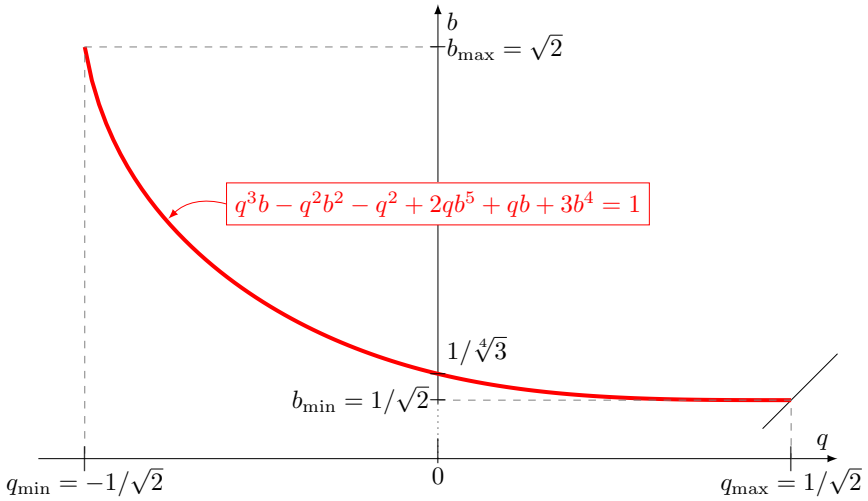
• 值得注意的数对 $(0,\ 1/\sqrt[4]{3})$，它对应一个临界鞍点，正如我们稍后将要证明的那样。

除了这些少数简单而具体的例子之外，下面的引理 4.3 表明，临界五边形确实构成了一个连续族 $\{P_q\}_{q\in[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]}$。

**引理 4.3**。集合

$$\left\{(q,b)\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]\times[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]\ \middle|\ q^3b-q^2b^2-q^2+2qb^5+qb+3b^4=1\right\}$$

是关于变量 $q$ 的单调递减光滑函数 $b(q)$ 的图像。




As 如上所述，极值五边形 $P_{\pm1/\sqrt{2}}$ 退化为等边三角形 s.

证明。 根据隐函数定理，只需进行初等计算即可得出结果：函数 $f(q,b)$ $=q^3b-q^2b^2-q^2+2qb^5+qb+3b^4$ 的两个偏导数在此区域内均严格为正，但在点 $(1/\sqrt{2},$ $1/\sqrt{2})$ 处，第一个偏导数为零。

事实上，首先注意到 $\partial_q f=3bq^2-2(b^2+1)q+2b^5+b$ 是关于变量 $q$ 的二次多项式。通过研究其一阶和二阶导数可以验证，对于 $b\in(1/\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$，其判别式 $-6b^6+b^4-b^2+1$ 始终为负；而在 $1/\sqrt{2}$ 处为零。

接下来，我们计算 $\partial_b f=q^3-2bq^2+(10b^4+1)q+12b^3$，并通过研究 $\partial_{bq}f$ 验证 $\partial_b f(q,\ b)\geq h(b)$ $:=\partial_b f(-1/\sqrt{2},\ b)$ 是一个四次多项式。对 $h$ 进行直接的变分分析可确保它在所需定义域上为正。□

现在，我们说明如何计算与属于上述族 $\{P_q\}$ 的某个五边形 $P$ 相关联的泛函 $\mathcal{F}_P$ 的海森矩阵。为此，我们必须计算这种五边形的惯性矩阵$I:=I(P)=\int_P x_ix_jdx$，以及其面积 $|P|$。由于这些量关于不相交并具有可加性，我们可以将五边形分解为三角形，并利用以下引理完成这些计算。

**引理 4.4.** 三角形 $\Delta$（其顶点为 $(0,0)$, $(x_1,y_1)$ 和 $(x_2,y_2)$）的惯性矩阵为

$$I(\Delta)=\frac{D}{12}\begin{pmatrix}I_{xx}(\Delta) & I_{xy}(\Delta)\\ I_{xy}(\Delta) & I_{yy}(\Delta)\end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{cases}I_{xx}(\Delta)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2\\ I_{xy}(\Delta)=x_1y_1+\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{2}+x_2y_2\\ I_{yy}(\Delta)=y_1^2+y_1y_2+y_2^2\end{cases}$$

且 $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ 是三角形面积的两倍。

证明。 由于下文不需要项 $I_{xy}(\Delta)$，我们只计算 $I_{xx}(\Delta)$，而 $I_{yy}(\Delta)$ 的情形完全相同。通过将三角形参数化为顶点为 (0，0)、(1，0) 和 (0，1) 的三角形，进行简单的变量替换，可得

$$I_{xx}(\Delta) = \int_0^1 \int_0^{1-t} (sx_1 + tx_2)^2 D ds dt = \frac{D}{12}\left[x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right].$$

□

由对称性可知，这种临界五边形的惯性矩阵是对角矩阵，因此我们只需计算项 $I_{xx}(P)$ 和 $I_{yy}(P)$。像之前一样，将 $P_q$ 分解为六个两两对称的三角形后，首先得到

$$|P_q| = \begin{vmatrix} q & -b^{-1} \\ r & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & q \\ c & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b \\ 0 & c \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

利用相同的分解和引理 4.4，我们推导出

$$I_{xx}(P) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} q & -b^{-1} \\ r & 0 \end{vmatrix}(-b^{-2} + -b^{-1}q + q^2) + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} b & q \\ c & r \end{vmatrix}(q^2 + qb + b^2) + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} b & b \\ 0 & c \end{vmatrix}(3b^2) \tag{4.2}$$

$$I_{yy}(P) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} q & -b^{-1} \\ r & 0 \end{vmatrix}(r^2) + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} b & q \\ c & r \end{vmatrix}(r^2 + rc + c^2) + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} b & b \\ 0 & c \end{vmatrix}(c^2) \tag{4.3}$$

定义函数

$$s(q,b) \coloneqq \det\left(|P|^2 I_2 - 16 I(P)^2\right) = \frac{1}{9}\det(\mathrm{Hess}_{(0,0)}\, \mathcal{F}_P),$$

其中第二个等号由方程 (2.1) 得出，且

$$t(q,b) \coloneqq \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(|P|^2 I_2 - 16 I(P)^2\right) = 8|P|^2\left(\operatorname{tr}(\operatorname{cov}(\Delta^\circ)\operatorname{cov}(\Delta)) - \operatorname{tr}(\operatorname{cov}(P^\circ)\operatorname{cov}(P))\right).$$

对于这对 $(q,b) = (0, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$，利用 (4.1)、(4.2) 和 (4.3)，可得

$$|P| = \sqrt[4]{3}\Big(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\Big), \qquad I_{xx}(P) = \sqrt[4]{3}\Big(\frac{2}{9} + \frac{1}{6}\sqrt{3}\Big), \qquad I_{yy}(P) = \sqrt[4]{3}\Big(\frac{1}{6} + \frac{2}{9}\sqrt{3}\Big)$$

因此

$$s(0, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) = \frac{1}{729}(12\sqrt{3} + 17)(4\sqrt{3} - 13) < 0.$$

所以 $\det(\mathrm{Hess}\,\mathcal{F}_{P_0})$ 为负，因此 $\mathcal{F}_{P_0}$ 在原点处有一个临界鞍点。这证明了定理 1.2 的 ii) 项。

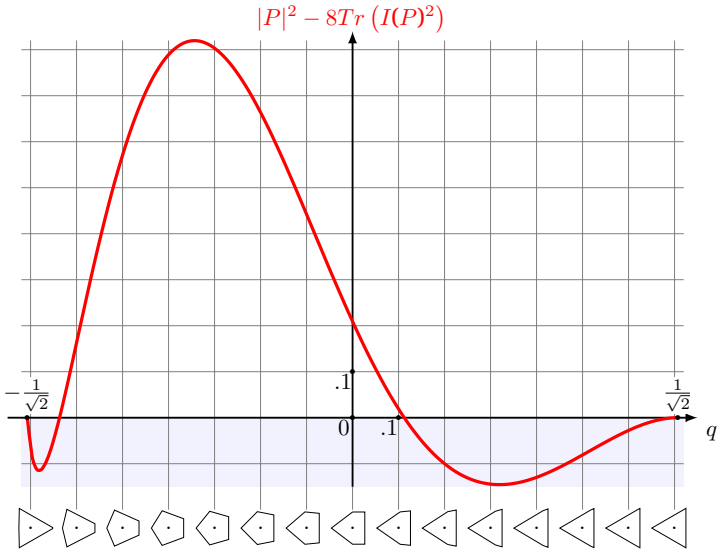
为了证明定理 1.2 的 iii) 项，只需计算 $t(q,\ b(q))$ 在 $q_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处的导数。首先，在 $(q_0,\ b_0) = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2})$ 处，我们有

$$\begin{aligned}
|P_q| &= \frac{3\sqrt{3}}{2}, & \frac{\partial}{\partial q}|P_q| &= \frac{\sqrt{6}}{2}, & \frac{\partial}{\partial b}|P_q| &= -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\
I_{xx}(P_q) &= \frac{3\sqrt{3}}{8}, & \frac{\partial}{\partial q} I_{xx}(P_q) &= \frac{\sqrt{6}}{2}, & \frac{\partial}{\partial b} I_{xx}(P_q) &= -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\
I_{yy}(P_q) &= \frac{3\sqrt{3}}{8}, & \frac{\partial}{\partial q} I_{yy}(P_q) &= -\frac{\sqrt{6}}{8}, & \frac{\partial}{\partial b} I_{yy}(P_q) &= -\frac{\sqrt{6}}{16}.
\end{aligned}$$

另一方面，有 $\nabla f(q_0,\ b_0) = \frac{9\sqrt{2}}{4}(6,\ 1)$，因此 $\frac{\partial b}{\partial q}(q_0) = -6$。于是，利用前面的值，

$$\left.\frac{\partial t}{\partial q}\right|_{(q_0,b_0)} = -\frac{9\sqrt{2}}{4}, \qquad \left.\frac{\partial t}{\partial b}\right|_{(q_0,b_0)} = \frac{9\sqrt{2}}{8}, \qquad \left.\frac{d}{dq}\right|_{q_0} t(q,b(q)) = \left.\frac{\partial t}{\partial q} + \frac{\partial b}{\partial q}\frac{\partial t}{\partial b}\right|_{(q_0,b_0)} = -9\sqrt{2}.$$

由于 $t(q_0,\ b_0) = 0$，这表明 $t(q,\ b(q)) < 0$ 在 $q_0$附近，从而完成了定理 1.2 的证明。




为完整呈现这一图景，我们最后对整个临界五边形族 $\{P_q\colon\ q \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]\}$进行数值分析。

前面三个引理（4.1、4.2 和 4.3）告诉我们，对于任意 $q \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$，我们都可以用很高的精度（至少达到 $10^{-15}$，使用 `python`，其中 `scipy`）计算出唯一的 $b \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$，使得 $P_{q,\ b}$ 是临界的。随后，所有顶点的计算精度至少为$10^{-14}$，因此多项式函数 $|P|^2 - 8\,\mathrm{tr}\ (I(P)^2)$ 的计算精度至少为 $10^{-13}$，从而得到上述曲线；当 $\mathrm{tr}[\mathrm{cov}(P_q)\ \mathrm{cov}(P_q^\circ)] > 1/8$ 如 $\mathrm{cov}(P_q) = I(P_q)/|P_q|$时，该曲线为负。

## 参考文献

[Klartag 2018] B. Klartag：各向同性常数与马勒体积。《数学进展》**330** (2018年), 74-108. [Mahler 1939] K. Mahler：凸体的一个传递原理。《数学与物理学杂志》**68** (1939), 93-102.[Santaló 1949] L. A. Santaló：$n$维空间凸体的一个仿射不变量。《葡萄牙数学》**8** (1949), 155-161.