arXiv:2303.17798v1 [math.RA] 31 Mar 2023

平均代数的控制结构、变形与同伦理论

APURBA DAS

Abstract. 结合代数 A 上的平均算子，是对时空中定义的实值函数空间上的时间平均算子的代数抽象。本文研究结合代数 A上的双模 M 上的相对平均算子。相对平均算子在空间 M上诱导出一种双结合代数结构。由结合代数、双模和相对平均算子组成的完整数据称为相对平均代数。我们定义了相对平均代数上的双模，使其与双结合代数的表示相契合。我们构造了一个分次李代数和一个 L_∞-代数，分别作为给定相对平均算子和相对平均代数的控制代数结构。我们还定义了相对平均算子与相对平均代数的上同调，并找到了关联各种上同调群的长正合列。作为应用，我们研究了相对平均代数的变形和阿贝尔扩张。最后，我们定义了同伦相对平均代数，并证明它们会诱导出同伦双结合代数。

2020年 MSC 分类：16D20、16W99、16E40、16S80。关键词：平均代数、双结合代数、 L_∞-代数、变形、同伦结构。

Contents

1. 引言 1
2. 双结合代数背景 4
3. 相对平均算子与相对平均代数 6
4. 相对平均算子的控制代数与上同调 14
5. 相对平均代数的控制代数与上同调 19
6. 相对平均代数的变形 26
7. 相对平均代数的阿贝尔扩张 29
8. 同伦相对平均代数与同伦双结合代数 32
参考文献 35

1. Introduction

平均算子的概念最初由 O. Reynolds 在 1895 [34] 中对流体力学湍流理论的研究中被隐式提出。在湍流理论的数学研究中，这种算子表现为对定义在时空上的实值函数进行时间平均的时间平均算子

$$f(x,t) \mapsto \overline{f}(x,t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x,t+\tau)d\tau.$$

平均算子的明确描述最早由 Kamp´e de F´eriet [16]给出。设 A 为一个结合代数。若线性映射 P: $A \to A$ 满足，则称其为 A 上的平均算子

$$P(a)\cdot P(b) = P(P(a)\cdot b) = P(a\cdot P(b)), \text{ for } a,b \in A. \tag{1}$$

由结合代数 A 和平均算子 P: $A \to A$ 组成的对 (A, P) 称为平均代数。上个世纪，关于平均算子的研究大多涉及泛函分析和应用数学的各个领域。为方便读者，下面列举其中几项。

在 [4] G. Birkhoff 证明，巴拿赫代数 $C(X$上紧豪斯多夫空间上的实值连续函数 X的正有界投影算子是幂等平均算子。后来，J. L. Kelly [18] 刻画了代数 $C_\infty(X$上局部紧豪斯多夫空间上在无穷远处消失的实值连续函数 X 的幂等平均算子。在 [13,29], 中，J. L. B. Gamlen 和 J. B. Miller 讨论了巴拿赫代数上平均算子的谱和预解集。此外，平均算子还与概率论相关联并得到研究。在 [30] 中，S.-T. C. Moy 探讨了平均算子、条件期望和一般积分理论之间的关系。

在平均算子的代数研究中，B. Brainerd [6] 考察了平均算子能够实现为实值可测函数环上积分算子的推广形式所需满足的条件。2000年，W. Cao [7] 从代数和组合的角度研究了平均算子。特别是，他研究了自由交换平均代数，并描述了由此诱导的李代数和莱布尼茨代数。在同一时期，J.-L. Loday[25] 引入了双结合代数的概念，以研究莱布尼茨代数的泛包络代数。双结合代数是一个配备两种结合乘法的向量空间，这两种乘法还满足另外三条类似结合律的相容条件。M. Aguiar [1] 证明，结合代数上的平均算子会诱导出双结合代数结构。文献 [2,31,32]系统地发展了任意二元欧拉运算子上的平均算子的代数研究，以及它们与运算子上的双后继、复制子和 Rota-Baxter算子之间的关系。近年来，J. Pei 和 L. Guo [33] 利用一类称为平均词的括号词构造了自由结合平均代数，并发现了它们与 Schr¨oder 数之间的关系。平均算子也出现在李代数的研究中。它们通常称为嵌入张量，与莱布尼茨代数、张量层级和高阶规范理论有重要联系 [5,23,36]。在 [20]中，Kotov 和 Strobl 从一个嵌入张量构造了一个 L_∞-代数，用以解释规范超引力理论玻色子扇区的张量层级。在[35] 中，Y. Sheng、R. Tang 和 C. Zhu 通过考察控制代数，研究了嵌入张量的上同调与变形。另见 [8,37]关于 Rota-Baxter算子的上同调研究。

本文将相对平均算子视为平均算子的一种推广。设 A 是一个结合代数， M 是一个 A-双模。若线性映射 $P\colon M \to A$ 满足恒等式 (8)，则称其为相对平均算子（在代数 A 上作用于 M），该恒等式是对 (1) 的推广。由结合代数 A、 A-双模 M 和相对平均算子 P 组成的三元组 (A, M, P) 称为相对平均代数。为方便起见，我们用记号 $M \xrightarrow{P} A$ 表示相对平均代数 (A, M, P)。我们给出了相对平均算子的若干刻画。我们还构造了任意二项链复形 $V \xrightarrow{f} W$ 上的自由相对平均代数。接下来，我们证明相对平均代数自然诱导出一种双结合代数结构。反过来，任意双结合代数都可由基于给定双结合代数构造的适当相对平均代数诱导得到。我们还定义了相对平均代数上的双模，并构造了相应的半直积。我们证明，相对平均代数上的双模可导出诱导的双结合代数的一些表示。

接下来，我们首先关注相对平均算子的上同调。给定一个结合代数 A 和一个 A-双模 M，我们构造一个分次李代数，使相对平均算子恰好是其 Maurer-Cartan 元。这个分次李代数是通过对 Majumdar and Mukherjee [28] 构造的分次李代数应用导出括号构造得到的。利用这一刻画，我们可以定义相对平均算子的上同调。我们进一步证明，这一上同调可视为诱导的二结合代数在适当表示中的上同调。我们还指出，在保持底层代数和双模不变的情况下，这一上同调可用于研究相对平均算子的形式变形。接下来，我们关注相对平均代数的上同调。为此，我们首先构造一个 L_∞-代数，使相对平均代数恰好是其 Maurer-Cartan 元。这有助于我们定义相对平均代数的上同调

代数（系数取伴随双模）。随后，我们考虑系数取任意双模时相对平均代数的上同调。

接下来，我们给出相对平均代数上同调理论的两个应用。首先，我们考察相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的变形，其中同时对 A 上的结合乘法、 M 上的 A-双模结构以及相对平均算子 P 进行变形。特别地，我们考察相对平均代数的形式变形和无穷小变形。我们在变形理论中的主要结果是：相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的无穷小变形等价类由第二上同调群 $H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 分类。上同调理论的另一个应用是分类阿贝尔扩张。具体而言，我们考察由一个双模扩张相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的阿贝尔扩张，并证明此类阿贝尔扩张的同构类由相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 以该双模为系数的第二上同调群分类。

在本文的最后一部分，我们定义了同伦相对平均算子。与定义在结合代数上的双模上的相对平均算子类似，同伦相对平均算子定义在 A_∞-代数上的表示空间上。给定一个 A_∞-代数及其一个表示，我们构造一个适当的 L_∞-代数（$\mathfrak{a}, \{l_k\}_{k=1}^{\infty}$）。这个 L_∞-代数是分次李代数的一种推广；分次李代数将相对平均算子刻画为 Maurer-Cartan 元。受此启发，我们将同伦相对平均算子定义为 L_∞-代数（$\mathfrak{a}, \{l_k\}_{k=1}^{\infty}$）的一个 Maurer-Cartan 元。由一个 A_∞- 代数、一个表示和一个同伦相对平均算子组成的三元组称为同伦相对平均代数。我们证明，同伦相对平均代数诱导出一个 a$Diass_\infty$-代数（强同伦二结合代数）结构。这推广了我们此前关于相对平均代数诱导出双结合代数的结果。最后，我们证明，一个 $Diass_\infty$-代数可以导出一个同伦相对平均代数。

注。 值得一提的是，Wang 和 Zhou [41] 最近研究了平均代数的上同调和变形理论。在他们的方法中，只考虑了平均代数会诱导出两种新的结合代数结构这一事实。然而，他们并未利用这两种诱导的结合代数结构构成一个双结合代数这一事实。本文首先指出平均代数与双结合代数之间的密切关系（见命题 3.18）。据我们所知，双结合代数是研究（相对）平均代数的关键对象。在命题 4.4中，我们证明，相对平均算子的上同调可视为具有适当表示的诱导双结合代数的上同调。在定理 4.7中，我们发现了相对平均算子与诱导双结合代数之间的一个上同调关系。由于 Wang 和 Zhou 未考虑完整的双结合代数（作为诱导结构），上述重要结果在他们的方法中便不再成立。本文还给出了许多其他结果，表明研究相对平均算子需要借助双结合代数（参见命题3.12、定理4.1、定理 5.7、定理 5.8）。因此，我们认为，我们的方法和所采用的构造（包括所有分次李代数和 L_∞-代数）适用于处理相对平均代数。

本文的组织结构。 在第 2节中，我们回顾双结合代数上同调的一些基本预备知识。在第 3节中，我们研究相对平均算子和相对平均代数，它们是本文研究的主要对象。我们还定义并研究相对平均代数上的双模。相对平均算子和相对平均代数的 Maurer-Cartan刻画及其上同调分别在第 4 节和第 5节中进行讨论。上同调的应用包括相对平均代数的变形和阿贝尔扩张，分别在第6 节和第 7节中进行研究。最后，在第 8节中，我们定义同伦相对平均代数，并发现其与$Diass_\infty$-代数之间的关系。

所有向量空间、线性映射和张量积均取自特征为 0 的域 k。

2. Background on diassociative algebras

本节回顾双结合代数的一些必要背景知识。具体而言，我们将介绍双结合代数的上同调理论。主要参考文献为 [11,25,28]。

Loday 在研究莱布尼茨代数时引入了双结合代数的概念 [25]。双结合代数的上同调理论由 Frabetti [11] 发展，并由 Majumdar 和 Mukherjee [28]进一步研究。

2.1. 定义。双结合代数是一个向量空间 D，配备两个双线性运算$\dashv$、$\vdash$：$D \times D \to D$，它们满足以下五个恒等式

$$\begin{cases} (a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \dashv c) = a \dashv (b \vdash c), \\ (a \vdash b) \dashv c = a \vdash (b \dashv c), \\ (a \dashv b) \vdash c = (a \vdash b) \vdash c = a \vdash (b \vdash c), \end{cases} \tag{2}$$

对于 a、b、$c \in D$。上述双结合代数可记为三元组（D、$\dashv$、$\vdash$），或简记为 D。

由上述定义可知，双结合代数中的两个双线性运算 $\dashv$ 和 $\vdash$ 都是结合乘积。此外，这两个结合乘积还满足三个类结合恒等式。因此，任意结合代数 A 都可视为一个双结合代数，其中两个运算 $\dashv$ 和 $\vdash$ 都是 A 上给定的结合乘法。

设 $(D, \dashv, \vdash)$ 是一个双结合代数。双结合代数的表示是一个向量空间M，配备四个双线性运算（称为作用映射）

$$\dashv : D \times M \to M, \quad \vdash : D \times M \to M, \quad \dashv : M \times D \to M \quad \text{and} \quad \vdash : M \times D \to M$$

它们满足十五个恒等式，其中每组五个恒等式对应于（2）中的恒等式，只需将 x、y 或 z 中的一个替换为 M 中的一个元素即可。因此，任意双结合代数（$D, \dashv, \vdash$）都是自身的一个表示，称为伴随表示。

在回顾双结合代数的上同调之前，我们需要介绍一些关于平面二叉树的记号。具有 n 个顶点的平面二叉树（通常称为 n-树）是一种平面树，有 $(n+1)$ 个叶子、一个根，且每个顶点都是三价的。令 Y_n 表示所有 n-树（对于 $n \geq 1$）构成的集合，令 Y_0 表示仅由一个根组成的集合，即

$$Y_0 = \left\{ \; | \; \right\}, \qquad Y_1 = \left\{ \; \curlyvee \; \right\}, \qquad Y_2 = \left\{ \; \curlyvee\curlyvee \; , \; \curlyvee\curlyvee \; \right\},$$

$$Y_3 = \left\{ \; \curlyvee\curlyvee\curlyvee \; , \; \curlyvee\curlyvee\curlyvee \; , \; \curlyvee\curlyvee\curlyvee \; , \; \curlyvee\curlyvee\curlyvee \; , \; \curlyvee\curlyvee\curlyvee \; \right\}, \quad \text{etc.}$$

注意，Y_n 的基数由第 n 个卡特兰数给出 $\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$。m-树$y_1 \in Y_m$ 与 n-树 $y_2 \in Y_n$ 的嫁接得到一棵 $(m+n+1)$- 树 $y_1 \vee y_2 \in Y_{m+n+1}$：将 y_1 和 y_2 的根连接到一个新顶点，并以该顶点为根。给定一棵 n-树 $y \in Y_n$，我们从左到右用 $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ 标记$n+1$ 叶子。对于每个 $n \geq 1$ 和 $0 \leq i \leq n$，都有一个映射（称为第 i 个面映射） $d_i : Y_n \to Y_{n-1}$, $y \mapsto d_i y$，它通过移除 y的第 i 个叶子得到。此外，还有映射 $\star_i : Y_n \to \{\dashv, \vdash\}$, $y \mapsto \star_i^y$ （对于 $0 \leq i \leq n$），定义如下：

$\star_0^y =$	$\dashv$ 如果对于某个 $(n-1)$ -树 y_1, $y = \mid \vee y_1$ $\vdash$ 否则 ,
$\star_i^y =$ （对于 $1 \le i \le n-1$）	$\dashv$ 如果 y 的第 i 个叶子定向为‘\’, $\vdash$ 如果 y 的第 i 个叶子定向为‘/’,
$\star_n^y =$	$\vdash$ 若 $y = y_1 \vee \mid$ 对于某个 $(n-1)$-树 y_1, $\dashv$ 否则。

设 $(D, \dashv, \vdash)$ 是一个双结合代数， M 是它的一个表示。对于每个 $n \ge 0$，我们将所有 n-余链构成的空间 $CY^n(D, M)$ 定义为 $CY^n(D, M) := \mathrm{Hom}(\Bbbk[Y_n] \otimes D^{\otimes n}, M)$。于是有一个映射 δ_{Diass}: $CY^n(D, M) \to CY^{n+1}(D, M)$，其定义为

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{Diass}}(f)(y; a_1, \dots, a_{n+1}) &= a_1 \star_0^y f(d_0 y; a_2, \dots, a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, f(d_i y; a_1, \dots, a_i \star_i^y a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) \; + \; (-1)^{n+1} \, f(d_{n+1} y; a_1, \dots, a_n) \star_{n+1}^y a_{n+1},\end{aligned}$$

对于 $f \in CY^n(D, M)$， $y \in Y_{n+1}$ 和 $a_1, \dots, a_{n+1} \in D$. Frabetti [11] 已证明 $(\delta_{\mathrm{Diass}})^2 = 0$。换言之，$\{CY^\bullet(D, M), \delta_{\mathrm{Diass}}\}$ 是一个上链复形。相应的上同调称为带有表示 M 的双结合代数 $(D, \dashv, \vdash)$ 的上同调。我们将第 n 个上同调群记为 $H^n_{\mathrm{Diass}}(D, M)$。

在 [28] Majumdar and Mukherjee 构造了一个分次李代数，其 Maurer-Cartan 元对应于给定向量空间上的双结合代数结构（另见 [42]）。为了以更简洁的形式描述他们的分次李括号，我们定义映射 $R^{m;i}_{\ 0}{}^{\ n}: Y_{m+n-1} \to Y_m$ 以及 $R^{m;i}_{\ i}{}^{\ n}: Y_{m+n-1} \to Y_n$（对于 $m, n \ge 1$ 和 $1 \le i \le m$）如下：

$$R_0^{m;i,n}(y) = \widehat{d_0} \circ \widehat{d_1} \circ \cdots \circ \widehat{d_{i-1}} \circ d_i \circ \cdots \circ d_{i+n-2} \circ \widehat{d_{i+n-1}} \circ \cdots \circ \widehat{d_{m+n-1}}(y), \tag{3}$$

$$R_i^{m;i,n}(y) = d_0 \circ d_1 \circ \cdots \circ d_{i-2} \circ \widehat{d_{i-1}} \circ \cdots \circ \widehat{d_{i+n-1}} \circ d_{i+n} \circ \cdots \circ d_{m+n-1}(y), \tag{4}$$

其中， $\widehat{\ }$ 表示该项在表达式中缺失。设 D 为一个向量空间（不一定是双结合代数）。他们证明，分次向量空间 $CY^\bullet(D, D) = \oplus_{n=1}^{\infty} CY^n(D, D) = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{Hom}(\Bbbk[Y_n] \otimes D^{\otimes n}, D)$具有一个次数为 -1 的分次李括号（我们称之为 Majumdar-Mukherjee 括号），其定义如下：

$$[f, g]_{\mathsf{MM}} := \Big(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)(n-1)} f \circ_i g\Big) - (-1)^{(m-1)(n-1)} \Big(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)} g \circ_i f\Big), \tag{5}$$

其中

$$(f \circ_i g)(y; a_1, \dots, a_{m+n-1}) = f\big(R_0^{m;i,n}(y); a_1, \dots, a_{i-1}, g(R_i^{m;i,n}(y); a_i, \dots, a_{i+n-1}), a_{i+n}, \dots, a_{m+n-1}\big), \tag{6}$$

对于 $f \in CY^m(D, D)$、 $g \in CY^n(D, D)$、 $y \in Y_{m+n-1}$ 和 $a_1, \dots\dots, a_{m+n-1} \in D$（另请参见 [10,42] 了解更多细节）。换言之， $\big(CY^{\bullet+1}(D, D) = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n+1}(D, D) \ [\ ,\ ]_{\mathsf{MM}}\big)$ 是一个分次李代数。元素 $\pi \in CY^2(D, D)$确定（反之亦然）两个双线性映射 $\dashv, \vdash$: $D \times D \to D$，定义如下：

$$a \dashv b = \pi\big(\curlyvee; a, b\big) \quad \text{and} \quad a \vdash b = \pi\big(\curlyvee; a, b\big), \ \text{for } a, b \in D. \tag{7}$$

随后在 [28] 中证明了： π 在上述分次李代数中定义一个 Maurer-Cartan 元，当且仅当（$\dashv$, $\vdash$）在 D上定义一个双结合代数结构。

2.2. 注。设 $(D, \dashv, \vdash)$ 是一个双结合代数。考虑分次李代数 $\big(CY^{\bullet+1}(D, D) = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n+1}(D, D) \ [\ ,\ ]_{\mathsf{MM}}\big)$ 中相应的 Maurer-Cartan 元素 π。那么，具有伴随表示系数的双结合代数 D 的余边界映射 δ_{Diass}: $CY^n(D, D) \to CY^{n+1}(D, D)$ 简单地表示为

$$\delta_{\mathrm{Diass}}(f) = (-1)^{n-1} [\pi, f]_{\mathsf{MM}}, \ \text{for } f \in CY^n(D, D).$$

3. Relative averaging operators and relative averaging algebras

本节中，我们首先介绍相对平均算子和相对平均代数，并给出各种例子。接下来，我们考察相对平均代数与双结合代数之间的密切关系。最后，我们定义并研究相对平均代数上的双模。

3.1. 定义. **(i)** 设 A 是一个结合代数， M 是一个 A-双模。代数 A 上的 M 相对平均算子是一个线性映射 $P\colon M \to A$，满足

$$P(u)\cdot P(v) = P\big(P(u)\cdot_M v\big) = P(u\cdot_M P(v)),\ \text{for } u,v\in M. \tag{8}$$

这里， $\cdot$ 表示 A 上的结合乘法，而 $\cdot_M$ 同时表示 M上的左、右 A-作用。

(ii) 相对平均代数是一个三元组(A, M, P)，由一个结合代数 A、一个A-双模 M 和一个相对平均算子 $P\colon M \to A$组成。

为方便起见，我们用记号 $M \xrightarrow{P} A$表示相对平均代数(A, M, P)。因此，(A, M, P)和 $M \xrightarrow{P} A$ 表示相同的数学结构。

3.2. 定义. 设 $M \xrightarrow{P} A$和 $M' \xrightarrow{P'} A'$是两个相对平均代数。从 $M \xrightarrow{P} A$到 $M' \xrightarrow{P'} A'$的相对平均代数态射由一对 (φ, ψ) 组成，其中 $\varphi\colon A \to A'$是一个代数同态， $\psi\colon M \to M'$ 是一个满足以下条件的线性映射

$$\psi(a\cdot_M u) = \varphi(a)\cdot^{A'}_{M'}\psi(u),\quad \psi(u\cdot_M a) = \psi(u)\cdot^{A'}_{M'}\varphi(a)\ \text{ and }\ \varphi\circ P = P'\circ\psi,\ \text{ for all } a\in A, u\in M.$$

这里 $\cdot^{A'}_{M'}$ 同时表示 M'上的左、右 A'-作用。如果 φ 和ψ 都是线性同构，则称其为同构。

3.3. 例. 任意平均代数 (A, P) 都可以视为一个相对平均代数 $A \xrightarrow{P} A$，其中A 配备了伴随 A-双模结构。因此，相对平均代数是平均代数的一种推广。

3.4. 例. 设 A 是一个结合代数。则张量积 $A\otimes A$ 可以赋予一个A-双模结构，其左、右 A-作用分别定义为

$$c\cdot_{A\otimes A}(a\otimes b) = c\cdot a\otimes b\ \text{ and }\ (a\otimes b)\cdot_{A\otimes A} c = a\otimes b\cdot c,\ \text{for } a\otimes b\in A\otimes A, c\in A.$$

考虑映射 $P\colon A\otimes A\to A$由 $P(a\otimes b) = a\cdot b$ 给出，其中 $a\otimes b\in A\otimes A$。对于任意 $a\otimes b$, $a'\otimes b'\in A\otimes A$, 我们有

$$P(a\otimes b)\cdot P(a'\otimes b') = a\cdot b\cdot a'\cdot b' = \begin{cases} = P\big(a\cdot b\cdot a'\otimes b'\big) = P\big(P(a\otimes b)\cdot_{A\otimes A}(a'\otimes b')\big),\\ = P\big(a\otimes b\cdot a'\cdot b'\big) = P\big((a\otimes b)\cdot_{A\otimes A} P(a'\otimes b')\big).\end{cases}$$

这表明 $P\colon A\otimes A\to A$ 是一个相对平均算子。因此， $A\otimes A \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。

3.5. 例子。设 A 是一个结合代数。那么空间 $\underbrace{A\oplus\cdots\oplus A}$是一个 A-双模，其中$_{n \text{ copies}}$左（分别为右） A-作用由逐分量左（分别为右）乘法映射给出。于是显然，映射

$$P : A\oplus\cdots\oplus A\to A,\ P\big((a_1,\ldots,a_n)\big) = a_1+\cdots+a_n,\ \text{for } (a_1,\ldots,a_n)\in A\oplus\cdots\oplus A$$

是一个相对平均算子。换句话说， $A\oplus\cdots\oplus A \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。

3.6. 例子。设 A 是一个结合代数。那么，对于任意 $1\le i\le n$，第 i 个投影映射 $P_i\colon A\oplus\cdots\oplus A\to A, (a_1,\ldots,a_n)\mapsto a_i$ 是一个相对平均算子。也就是说， $A\oplus\cdots\oplus A \xrightarrow{P_i} A$ 是一个相对平均代数。

3.7. 例子。设 A 是一个结合代数，且 M 是一个 A-双模。假设 G 是一个有限群，并且存在映射 $G\times A\to A, (g,a)\mapsto {}^{g}a$ 和 $G\times M\to A, (g,u)\mapsto {}^{g}u$，满足

$$ {}^{g}(a\cdot_M u)={}^{g}a\cdot {}^{g}u,\quad {}^{g}(u\cdot_M a)={}^{g}u\cdot {}^{g}a \ \text{ and } \ {}^{g}({}^{h}u)={}^{gh}u,$$

对于 $a\in A, u\in M$和 $g,h\in G$。我们定义映射 $P\colon M\to A$，使得 $P(u)=\sum_{g\in G}{}^{g}u$。对于任意 $u, v\in M$，我们注意到

$$\begin{aligned} P\big(P(u)\cdot_M v\big)&=\sum_{h\in G}{}^{h}\big((\sum_{g\in G}{}^{g}u)\cdot_M v\big)=\sum_{h\in G}\big(\sum_{g\in G}{}^{hg}u\big)\cdot {}^{h}v=\big(\sum_{g\in G}{}^{g}u\big)\cdot\big(\sum_{h\in G}{}^{h}v\big)=P(u)\cdot P(v),\\ P\big(u\cdot_M P(v)\big)&=\sum_{h\in G}{}^{h}\big(u\cdot_M(\sum_{g\in G}{}^{g}v)\big)=\sum_{h\in G}{}^{h}u\cdot\big(\sum_{h\in G}{}^{hg}v\big)=\big(\sum_{h\in G}{}^{h}u\big)\cdot\big(\sum_{g\in G}{}^{g}v\big)=P(u)\cdot P(v).\end{aligned}$$

这表明 $P\colon M\to A$ 是一个相对平均算子，等价地，$M\xrightarrow{P}A$ 是一个相对平均代数。

3.8. 例子。设 A 是一个结合代数，M 是一个 A-双模。设 $P\colon M\to A$ 是一个A-双模映射，即

$$P(a\cdot_M u)=a\cdot P(u)\ \text{ and }\ P(u\cdot_M a)=P(u)\cdot a,\quad \text{for } a\in A,\ u\in M.$$

于是很容易看出，$M\xrightarrow{P}A$ 是一个相对平均代数。

3.9. 例子。在 [26] Loday 和 Pirashvili 引入了范畴 $\mathcal{LM}$，其对象是向量空间之间的线性映射。换言之，$\mathcal{LM}$ 中的一个对象形如 $V\xrightarrow{f}W$，其中 V、W是向量空间，而 f 是一个线性映射。他们为 $\mathcal{LM}$ 赋予了一个张量积，使其成为一个张量范畴。人们发现，$\mathcal{LM}$ 中的一个结合对象由数据 $M\xrightarrow{f}A$给出，其中 A 是一个结合代数，M 是一个 A-双模，而 f 是一个 A-双模映射。因此，$\mathcal{LM}$ 中的一个结合对象是一个相对平均代数。

3.10. 例。（结合代数的交叉模 [40]）结合代数的交叉模是一个四元组 $(A,M,\cdot_M,d)$，其中 A、M 都是结合代数，且 M 还具有一个 A-双模结构（对 M 的左、右 A-作用均记为 $\cdot_M$），并且 $d\colon M\to A$ 是满足以下条件的代数同态

$$d(a\cdot_M u)=a\cdot du,\quad d(u\cdot_M a)=du\cdot a,\quad (du)\cdot_M v=u\cdot_M(dv)=u\diamond v,\ \text{for } a\in A, u,v\in M.$$

这里 $\diamond$ 表示 M 上的结合乘法。因此，由例 3.8 可知，$M\xrightarrow{d}A$ 是一个相对平均代数。

已有文献 [3,40] 指出，结合代数的交叉模等价于“严格”的结合 2-代数。因此，按照前面的例子，可以从严格的结合 2-代数构造相对平均代数。

下面，我们给出相对平均算子的一些刻画。我们从以下有用的结果开始。

3.11. 命题。设 A 是一个结合代数，且 M 是一个 A-双模。那么直和 $A\oplus M$ 继承了一个双结合代数结构，其运算为

$$(a,u)\dashv(b,v)=(a\cdot b,u\cdot_M b)\quad and\quad (a,u)\vdash(b,v)=(a\cdot b,a\cdot_M v),\ for\ (a,u),(b,v)\in A\oplus M.$$

我们将这个双结合代数简记为 $A\oplus_{\mathrm{Diass}}M$.

证明。对于任意的 (a,u)、(b,v)、$(c,w)\in A\oplus M$，我们有

$$\begin{aligned}\big((a,u)\dashv(b,v)\big)\dashv(c,w)&=\big(a\cdot b,u\cdot_M b\big)\dashv(c,w)=\big((a\cdot b)\cdot c,(u\cdot_M b)\cdot_M c\big),\\ (a,u)\dashv\big((b,v)\dashv(c,w)\big)&=(a,u)\dashv\big(b\cdot c,v\cdot_M c\big)=\big(a\cdot(b\cdot c),u\cdot_M(b\cdot c)\big),\\ (a,u)\dashv\big((b,v)\vdash(c,w)\big)&=(a,u)\dashv\big(b\cdot c,b\cdot_M w\big)=\big(a\cdot(b\cdot c),u\cdot_M(b\cdot c)\big).\end{aligned}$$

因此可得

$$\big((a,u)\dashv(b,v)\big)\dashv(c,w)=(a,u)\dashv\big((b,v)\dashv(c,w)\big)=(a,u)\dashv\big((b,v)\vdash(c,w)\big).$$

同样，可以证明

$$\big((a,u)\vdash(b,v)\big)\dashv(c,w)=(a,u)\vdash\big((b,v)\dashv(c,w)\big),$$

$$\big((a,u)\dashv(b,v)\big)\vdash(c,w)=\big((a,u)\vdash(b,v)\big)\vdash(c,w)=(a,u)\vdash\big((b,v)\vdash(c,w)\big).$$

证明至此完成。 □

3.12. 命题。设 A 是一个结合代数， M 是一个 A-双模。线性映射 $P\colon M\to A$ 是相对平均算子（在代数 A 上作用于 M），当且仅当图 $\mathbf{Gr}(P)=\{(P(u)\ u)|u\in M\}$ 是双结合代数 $A\oplus_{\mathrm{Diass}}M$ 的子代数。

证明。对于任意 u、$v\in M$，我们有 $(P(u)\ u)\dashv(P(v)\ v)=(P(u)\cdot P(v)\ u\cdot_M P(v))$。当且仅当 $P(u)\cdot P(v)=P\big(u\cdot_M P(v)\big)$ 时，该式属于 $\mathbf{Gr}(P)$。同样，乘积 $(P(u)\ u)\vdash(P(v)\ v)=(P(u)\cdot P(v)\ P(u)\cdot_M v)$ 属于 $\mathbf{Gr}(P)$，当且仅当 $P(u)\cdot P(v)=P\big(P(u)\cdot_M v\big)$。换言之，$\mathbf{Gr}(P)$ 是双结合代数 $A\oplus_{\mathrm{Diass}}M$ 的子代数，当且仅当 P 是相对平均算子。□

设 $(D,\dashv,\vdash)$ 是一个双结合代数。称线性映射 $\mathcal{N}\colon D\to D$ 是双结合代数 D 上的 Nijenhuis 算子，若对所有 $a,b\in D$，

$$\mathcal{N}(a)\dashv\mathcal{N}(b):=\mathcal{N}\big(\mathcal{N}(a)\dashv b\ +\ a\dashv\mathcal{N}(b)-\mathcal{N}(a\dashv b)\big),$$
$$\mathcal{N}(a)\vdash\mathcal{N}(b):=\mathcal{N}\big(\mathcal{N}(a)\vdash b\ +\ a\vdash\mathcal{N}(b)-\mathcal{N}(a\vdash b)\big).$$

3.13. 命题. 设 A 是一个结合代数， M 是一个 A-双模。线性映射 $P\colon M\to A$是一个相对平均算子（在代数 A上作用于 M），当且仅当映射 $\mathcal{N}_P\colon A\oplus M\to A\oplus M$,$\mathcal{N}_P((a,u))=(P(u),0)$ 对于 $(a,u)\in A\oplus M$是双结合代数 $A\oplus_{\mathrm{Diass}}M$上的 Nijenhuis 算子。

证明. 对任意 $(a,u),(b,v)\in A\oplus M$，我们有

$$\mathcal{N}_P(a,u)\dashv\mathcal{N}_P(b,v)=(P(u),0)\dashv(P(v),0)=\big(P(u)\cdot P(v),0\big).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_P\big(\mathcal{N}_P(a,u)\dashv(b,v)\ +\ (a,u)\dashv\mathcal{N}_P(b,v)-\mathcal{N}_P((a,u)\dashv(b,v))\big)\\&=\mathcal{N}_P\big((P(u)\cdot b,0)\ +\ (a\cdot P(v),u\cdot_M P(v))-(P(u\cdot_M b),0)\big)=\big(P(u\cdot_M P(v)),0\big).\end{aligned}$$

这表明， $\mathcal{N}_P(a,u)\dashv\mathcal{N}_P(b,v)=\mathcal{N}_P\big(\mathcal{N}_P(a,u)\dashv(b,v)\ +(a,u)\dashv\mathcal{N}_P(b,v)-\mathcal{N}_P((a,u)\dashv(b,v))\big)$成立，当且仅当 $P(u)\cdot P(v)=P(u\cdot_M P(v))$。类似地，可以证明

$$\mathcal{N}_P(a,u)\vdash\mathcal{N}_P(b,v)=\mathcal{N}_P\big(\mathcal{N}_P(a,u)\vdash(b,v)\ +\ (a,u)\vdash\mathcal{N}_P(b,v)-\mathcal{N}_P((a,u)\vdash(b,v))\big)$$

当且仅当 $P(u)\cdot P(v)=P(P(u)\cdot_M v)$，其中 $u,v\in M$。综合以上结果，我们得到： $\mathcal{N}_P$是双结合代数 $A\oplus_{\mathrm{Diass}}M$ 上的 Nijenhuis 算子，当且仅当 P是相对平均算子。□

自由相对平均代数。设 $V\xrightarrow{f}W$ 是一个二项链复形。考虑 W的张量代数，

$$T(W)=\mathbf{k}\oplus W\oplus W^{\otimes 2}\oplus\cdots\oplus W^{\otimes n}\oplus\cdots$$

对于连接乘积。于是，空间 $T(W)\otimes V\otimes T(W)$ 可以赋予一个 $T(W)$-双模结构，其左右作用分别为

$$(w_1'\cdots w_p')\cdot(w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n)=w_1'\cdots w_p'w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n,$$
$$(w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n)\cdot(w_1'\cdots w_p')=w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_nw_1'\cdots w_p',$$

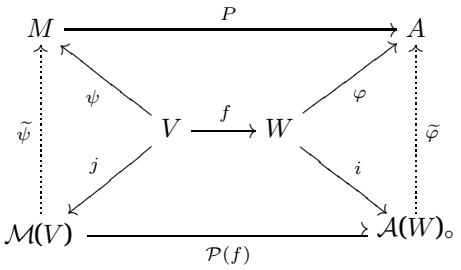
对于 $w'_1\cdots w'_p\in T(W)$ 和 $w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n\in T(W)\otimes V\otimes T(W)$。于是容易看出，$T(W)\otimes V\otimes T(W)\xrightarrow{\mathcal{P}(f)}T(W)$ 是一个相对平均代数，其中

$$\mathcal{P}(f)(w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n)=w_{-m}\cdots w_{-1}f(v_0)w_1\cdots w_n.$$

3.14. 注记。设 V 是任意向量空间。考虑二项链复形 $V\xrightarrow{\mathrm{id}}V$。则可知，$T(V)\otimes V\otimes T(V)\xrightarrow{\mathcal{P}(\mathrm{id}_V)}T(V)$ 是一个相对平均代数。

3.15. 定义。设 $V\xrightarrow{f}W$ 是一个二项链复形。其上的自由相对平均代数是一个相对平均代数 $\mathcal{M}(V)\xrightarrow{\mathcal{P}(f)}\mathcal{A}(W)$，并配备一个从 $V\xrightarrow{f}W$ 到 $\mathcal{M}(V)\xrightarrow{\mathcal{P}(f)}\mathcal{A}(W)$ 的复形态射 (i,j)，满足以下泛性质：

> 对于任意相对平均代数 $M\xrightarrow{P}A$ 以及从 $V\xrightarrow{f}W$ 到 $M\xrightarrow{P}A$ 的复形态射 (φ,ψ)，存在一个从 $\mathcal{M}(V)\xrightarrow{\mathcal{P}(f)}\mathcal{A}(W)$ 到 $M\xrightarrow{P}A$ 的相对平均代数态射 $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$，使下图交换



3.16。命题。设 $V\xrightarrow{f}W$ 是一个二项链复形。那么，相对平均代数

$$T(W)\otimes V\otimes T(W)\xrightarrow{\mathcal{P}(f)}T(W)\ \textit{is free over the chain complex}\ V\xrightarrow{f}W.$$

证明。我们定义映射 $i\colon W\to T(W)$ 和 $j\colon V\to T(W)\otimes V\otimes T(W)$ 如下：

$$i(w)=w\ \text{ and }\ j(v)=1\otimes v\otimes 1,\ \text{for } w\in W, v\in V.$$

设 $M\xrightarrow{P}A$ 是任意一个相对平均代数，且 (φ,ψ) 是从 $V\xrightarrow{f}W$ 到$M\xrightarrow{P}A$的复形态射。我们定义映射 $\widetilde{\varphi}\colon T(W)\to A$ 和 $\widetilde{\psi}\colon T(W)\otimes V\otimes T(W)\to M$ 如下：

$$\widetilde{\varphi}(w_1\cdots w_n)=\varphi(w_1)\cdots\varphi(w_n),$$
$$\widetilde{\psi}(w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n)=\big(\varphi(w_{-m})\cdots\varphi(w_{-1})\big)\cdot_M\psi(v_0)\cdot_M\big(\varphi(w_1)\cdots\varphi(w_n)\big),$$

对于 $w_1\cdots w_n\in T(W)$ 和 $w_{-m}\cdots w_{-1}\otimes v_0\otimes w_1\cdots w_n\in T(W)\otimes V\otimes T(W)$。那么容易看出，有序对 $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})$ 是从 $T(W)\otimes V\otimes T(W)\xrightarrow{\mathcal{P}(f)}T(W)$ 到 $M\xrightarrow{P}A$ 的相对平均代数态射，并满足泛性质。□

与双结合代数的函子关系。

3.17. 命题. (i) 设 $M\xrightarrow{P}A$ 是一个相对平均代数。那么，向量空间 M 带有一个双结合代数结构，其双线性运算为

$$u\dashv_P v:=u\cdot_M P(v)\ \ \textit{and}\ \ u\vdash_P v:=P(u)\cdot v,\ \textit{for } u,v\in M. \tag{9}$$

我们将这个双结合代数简记为 M_P。

(ii) 设 $M\xrightarrow{P}A$ 和 $M'\xrightarrow{P'}A'$ 是两个相对平均代数，且 (φ,ψ) 是它们之间的一个态射。那么，$\psi\colon M\to M'$ 是诱导的双结合代数之间的一个态射（从 M_P 到 $M'_{P'}$）。

证明。 (i) 由于 $P\colon M\to A$ 是一个相对平均算子，由命题 3.12 可知，$\mathrm{Gr}(P)$ 是双结合代数 $A\oplus_{\mathrm{Diass}}M$ 的子代数。$\mathrm{Gr}(P)$ 上继承的双结合结构为

由下式给出

$$(P(u),u)\dashv(P(v),v)=\big(P(u)\cdot P(v),\underset{\|}{u\cdot_M P(v)}\big)\ \text{ and }\ (P(u),u)\vdash(P(v),v)=\big(P(u)\cdot P(v),\underset{\|}{P(u)\cdot_M v}\big),$$
$$P(u\cdot_M P(v)) \qquad\qquad P(P(u)\cdot_M v)$$

对于 $u,\ v\in M$。由于向量空间 M通过 $u\rightsquigarrow(P(u)\ u)$ 与 $\mathbf{Gr}(P)$ 同构，对于 $u\in M$，我们在 M 上得到一个双结合代数结构，该结构恰由 (9) 给出。

(ii) 对于任意 $u,v\in M$，我们有

$$\psi(u\dashv_P v)=\psi(u\cdot_M P(v))=\psi(u)\cdot^{A'}_{M'}\varphi P(v)=\psi(u)\cdot^{A'}_{M'}P'(\psi(v))=\psi(u)\dashv_{P'}\psi(v),$$
$$\psi(u\vdash_P v)=\psi(P(u)\cdot_M v)=\varphi P(u)\cdot^{A'}_{M'}\psi(v)=P'(\psi(u))\cdot^{A'}_{M'}\psi(v)=\psi(u)\vdash_{P'}\psi(v).$$

这证明了 $\psi\colon M_P\to M'_{P'}$是一个二结合代数态射。 □

上述命题表明，存在一个函子 $\mathcal{F}:\mathbf{rAvg}\to\mathbf{Diass}$，从相对平均代数范畴到二结合代数范畴。下文将构造一个方向相反的函子。

设 $(D,\dashv,\vdash)$ 是一个双结合代数。令 D_{Ass} 为 D 除以由元素 $a\dashv b-a\vdash b$（其中 $a,b\in D$）生成的理想所得的商。则 D_{Ass} 是一个结合代数，其乘法由$[a]\cdot[b]:=[a\dashv b]=[a\vdash b]$给出，其中 $[a],[b]\in D_{\mathrm{Ass}}$。此外，向量空间 D 是一个 D_{Ass}-双模，其中 D 上的左、右 D_{Ass}-作用分别定义为

$$[a]\cdot_D b=a\vdash b\ \text{ and }\ b\cdot_D[a]=b\dashv a,\ \text{for } [a]\in D_{\mathrm{Ass}},b\in D.$$

在这些记号下，商映射 $q\colon D\to D_{\mathrm{Ass}}$ 是一个相对平均算子，因为

$$q(a)\cdot q(b)=[a]\cdot[b]=\begin{cases}=[a\vdash b]=[[a]\cdot_D b]=q\big(q(a)\cdot_D b\big),\\ =[a\dashv b]=[a\cdot_D[b]]=q\big(a\cdot_D q(b)\big),\end{cases}$$

对于 $a,b\in D$。因此， $D\xrightarrow{q}D_{\mathrm{Ass}}$ 是一个相对平均代数。此外， D 上的诱导的二结合代数结构与给定结构一致，因为

$$a\dashv_q b=a\cdot_D q(b)=a\dashv b\ \text{ and }\ a\vdash_q b=q(a)\cdot_D b=a\vdash b,\ \text{for } a,b\in D.$$

设 $(D,\dashv,\vdash)$ 和 $(D',\dashv',\vdash')$ 是两个双结合代数，且 $\psi\colon D\to D'$ 是它们之间的一个态射。容易验证，数对 (φ,ψ) 是从 $D\xrightarrow{q}D_{\mathrm{Ass}}$到 $D'\xrightarrow{q'}D'_{\mathrm{Ass}}$的相对平均代数同态，其中 $\varphi:\ D_{\mathrm{Ass}}\to D'_{\mathrm{Ass}}$ 由 $\varphi([a])=[\psi(a)]$, 定义，对任意 $[a]\in D_{\mathrm{Ass}}$成立。此构造给出一个函子 $\mathcal{G}:\mathbf{Diass}\to\mathbf{rAvg}$，它从双结合代数范畴映到相对平均代数范畴。

3.18. 命题。函子 $\mathcal{G}:\mathbf{Diass}\to\mathbf{rAvg}$ 是函子 $\mathcal{F}:\mathbf{rAvg}\to\mathbf{Diass}$ 的左伴随。更确切地说，对于任意双结合代数 $(D,\dashv,\vdash)$ 和相对平均代数 $M\xrightarrow{P}A$，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Diass}}(D,M_P)\ \cong\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{rAvg}}(D\xrightarrow{q}D_{\mathrm{Ass}},M\xrightarrow{P}A).$$

证明。设 $\psi\in\mathbf{Hom_{Diass}}(D,M_P)$。我们定义映射 $\varphi^\psi\colon D_{\mathrm{Ass}}\to A$，其定义为 $\varphi^\psi([a])=P(\psi(a))$，其中 $[a]\in D_{\mathrm{Ass}}$。容易看出， φ^ψ 是代数同态。此外，我们有

$$\psi([a]\cdot_D b)=\psi(a\vdash b)=\psi(a)\vdash_P\psi(b)=P\psi(a)\cdot_M\psi(b)=\varphi^\psi([a])\cdot_M\psi(b),$$
$$\psi(b\cdot_D[a])=\psi(b\dashv a)=\psi(b)\dashv_P\psi(a)=\psi(b)\cdot_M P\psi(a)=\psi(b)\cdot_M\varphi^\psi([a]),$$

对于 $[a]\in D_{\mathrm{Ass}},b\in D$。进一步， $\varphi^\psi\circ q=P\circ\psi$。因此，$(\varphi^\psi,\psi)\in\mathbf{Hom^{rAvg}}(D\xrightarrow{q}D_{\mathrm{Ass}},M\xrightarrow{P}A)$。

另一方面，如果 $(\varphi,\psi)\in\mathbf{Hom^{rAvg}}(D\xrightarrow{q}D_{\mathrm{Ass}},M\xrightarrow{P}A)$，那么 $\psi\in\mathbf{Hom_{Diass}}(D,M_P)$。最后，上述两个对应关系互为逆映射。□

相对平均代数上的双模。这里我们介绍相对平均代数上的双模。我们证明，相对平均代数上的双模给出诱导的二结合代数的两个表示。

3.19. 定义. 设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。其上的双模由一个三元组 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 构成，其中 $N \xrightarrow{Q} B$ 是一个二项链复形， B 和 N 都是 A-双模，并且 $l\colon M \times B \to N$ 和 $r\colon B \times M \to N$ 是满足下列条件的双线性映射（称为配对映射）：

$$l(a \cdot_M u, b) = a \cdot_N l(u, b), \quad l(u \cdot_M a, b) = l(u, a \cdot_B b), \quad l(u, b \cdot_B a) = l(u, b) \cdot_N a, \tag{10}$$

$$r(a \cdot_B b, u) = a \cdot_N r(b, u), \quad r(b \cdot_B a, u) = r(b, a \cdot_M u), \quad r(b, u \cdot_M a) = r(b, u) \cdot_N a, \tag{11}$$

and

$$P(u) \cdot_B Q(n) = Q\big(P(u) \cdot_N n\big) = Q\big(l(u, Q(n))\big), \tag{12}$$

$$Q(n) \cdot_B P(u) = Q\big(r(Q(n), u)\big) = Q\big(n \cdot_N P(u)\big), \tag{13}$$

对于 $a \in A$, $b \in B$, $u \in M$ 和 $n \in N$。有时，当双线性映射 l 和 r 根据上下文已明确时，我们将上述双模记为复形 $N \xrightarrow{Q} B$。

3.20. 例.（伴随双模）设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。容易看出，三元组 $(M \xrightarrow{P} A, l_{\mathrm{ad}}, r_{\mathrm{ad}})$ 是相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 上的一个双模，其中配对映射 $l_{\mathrm{ad}}\colon M \times A \to M$ 和 $r_{\mathrm{ad}}\colon A \times M \to M$ 分别是 M 上给定的右 A-作用和左 A-作用。这称为伴随双模。

3.21. 例子。(平均代数上的双模 [41]) 设 (A, P) 是一个平均代数。其上的双模由一对 (M, Q) 构成，其中 M 是一个 A-双模，且 $Q\colon M \to M$ 是满足以下条件的线性映射： $a \in A$, $u \in M$,

$$P(a) \cdot_M Q(u) = Q(P(a) \cdot_M u) = Q(a \cdot_M Q(u)),$$
$$Q(u) \cdot_M P(a) = Q(Q(u) \cdot_M a) = Q(u \cdot_M P(a)).$$

这等价于三元组 $(M \xrightarrow{Q} M, \cdot_M, \cdot_M)$ 是相对平均代数 $A \xrightarrow{P} A$. 上的双模这一事实

设 A 是一个结合代数。给定一个元素 $\mathbf{r} = \sum r_{(1)} \otimes r_{(2)} \in A \otimes A$，我们考虑以下三个元素

$$\mathbf{r}_{13}\mathbf{r}_{12} = \sum r_{(1)} \cdot \widetilde{r}_{(1)} \otimes \widetilde{r}_{(2)} \otimes r_{(2)}, \qquad \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{23} = \sum r_{(1)} \otimes r_{(2)} \cdot \widetilde{r}_{(1)} \otimes \widetilde{r}_{(2)}$$
$$\text{and} \quad \mathbf{r}_{23}\mathbf{r}_{13} = \sum r_{(1)} \otimes \widetilde{r}_{(1)} \otimes \widetilde{r}_{(2)} \cdot r_{(2)} \quad \text{of} \quad A \otimes A \otimes A.$$

这里 $\sum \widetilde{r}_{(1)} \otimes \widetilde{r}_{(2)}$ 是 $\mathbf{r}$ 的另一份副本。元素 $\mathbf{r} \in A \otimes A$ 称为平均元，当且仅当它满足

$$\mathbf{r}_{13}\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{23}\mathbf{r}_{13}. \tag{14}$$

设 $r = \sum r_{(1)} \otimes r_{(2)} \in A \otimes A$ 是一个平均元。则由 $P(a) = \sum r_{(1)} \cdot a \cdot r_{(2)}$（$a \in A$）定义的映射 $P\colon A \to A$ 是 A 上的平均算子。为此，我们注意到

$$P(a) \cdot P(a') = \sum r_{(1)} \cdot a \cdot r_{(2)} \cdot \widetilde{r}_{(1)} \cdot a' \cdot \widetilde{r}_{(2)}$$
$$= \begin{cases} = \sum r_{(1)} \cdot \widetilde{r}_{(1)} \cdot a \cdot \widetilde{r}_{(2)} \cdot a' \cdot r_{(2)} & (\text{since } \mathbf{r}_{13}\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{23}) \ = P(P(a) \cdot a'), \\ = \sum r_{(1)} \cdot a \cdot \widetilde{r}_{(1)} \cdot a' \cdot \widetilde{r}_{(2)} \cdot r_{(2)} & (\text{since } \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{23}\mathbf{r}_{13}) \ = P(a \cdot P(a')), \end{cases}$$

对于 a、$a' \in A$。换言之，(A, P) 是一个平均代数。如果 M 是任意一个 A-双模，我们通过 $Q(u) = \sum r_{(1)} \cdot_M u \cdot_M r_{(2)}$，对 $u \in M$ 定义线性映射 $Q\colon M \to M$。然后很容易验证，(M, Q) 是平均代数 (A, P) 上的一个双模。

3.22. 例。 设 $M \xrightarrow{P} A$ 和 $M' \xrightarrow{P'} A'$ 是两个相对平均代数，并且令（φ， ψ）为它们之间的一个态射（见定义 3.2）。则元组（$M' \xrightarrow{P'} A'$， l， r）是相对平均代数

$M \xrightarrow{P} A$上的双模，其中，A在A'上的双模结构由代数同态$\varphi: A \to A'$诱导，而M'上的A双模结构由$a \cdot_{M'} m' = \varphi(a) \cdot^{A'}_{M'} m'$和$m' \cdot_{M'} a = m' \cdot^{A'}_{M'} \varphi(a)$给出，其中$a \in A$、$m' \in M'$。此外，配对映射$l: M \times A' \to M'$和$r: A' \times M \to M'$分别定义为

$$l(u, a') = \psi(u) \cdot^{A'}_{M'} a' \quad \text{and} \quad r(a', u) = a' \cdot^{A'}_{M'} \psi(u), \text{ for } u \in M, a' \in A'.$$

注意，任意结合代数上的双模都可以对偶化。更一般地，若A是一个结合代数，且M是一个A-双模，则对偶空间M^*可赋予一个A-双模结构，其左右A-作用定义如下：

$$(a \cdot_{M^*} f)(u) = f(u \cdot_M a) \text{ and } (f \cdot_{M^*} a)(u) = f(a \cdot_M u), \text{ for } a \in A, f \in M^*, u \in M.$$

在下面的结果中，我们给出相对平均代数上双模的对偶构造。

3.23. 命题. 设$M \xrightarrow{P} A$是一个相对平均代数，且$(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$是其上的一个双模。那么$(B^* \xrightarrow{Q^*} N^*, l^*, r^*)$也是一个双模，其中$B^*, N^*$赋有对偶的$A$-双模结构，配对$l^*: M \times N^* \to B^*$和$r^*: N^* \times M \to B^*$分别定义如下：

$$l^*(u, f_N)(b) = f_N(r(b, u)) \text{ and } r^*(f_N, u)(b) = f_N(l(u, b)), \text{ for } u \in M, f_N \in N^*, b \in B.$$

证明. 对任意$a \in A, u \in M, f_N \in N^*$和$b \in B$，我们首先注意到：

$$l^*(a \cdot_M u, f_N)(b) = f_N(r(b, a \cdot_M u)) \overset{(11)}{=} f_N(r(b \cdot_B a, u)) = l^*(u, f_N)(b \cdot_B a) = (a \cdot_{B^*} l^*(u, f_N))(b),$$

$$l^*(u \cdot_M a, f_N)(b) = f_N(r(b, u \cdot_M a)) \overset{(11)}{=} f_N(r(b, u) \cdot_N a) = (a \cdot_{N^*} f_N)(r(b, u)) = l^*(u, a \cdot_{N^*} f_N)(b),$$

$$l^*(u, f_N \cdot_{N^*} a)(b) = f_N(a \cdot_N r(b, u)) \overset{(11)}{=} f_N(r(a \cdot_B b, u)) = l^*(u, f_N)(a \cdot_B b) = (l^*(u, f_N) \cdot_{B^*} a)(b).$$

这表明（10）中的恒等式对于对偶结构成立。类似地，可以验证（11）中的恒等式对于对偶结构成立。最后，对于任意$u \in M$、$f_B \in B^*$和$n \in N$，我们有

$$\begin{aligned}
\big(P(u) \cdot_{N^*} Q^*(f_B)\big)(n) &= Q^*(f_B)\big(n \cdot_N P(u)\big) \\
&= f_B\big(Q(n \cdot_N P(u))\big) \\
&= \begin{cases} = f_B\big(Q(n) \cdot_B P(u)\big) = \big(P(u) \cdot_{B^*} f_B\big)(Q(n)) = Q^*\big(P(u) \cdot_{B^*} f_B\big)(n), \\ = f_B\big(Q \circ r(Q(n), u)\big) = l^*\big(u, Q^*(f_B)\big)(Q(n)) = Q^*\big(l^*(u, Q^*(f_B))\big)(n). \end{cases}
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
\big(Q^*(f_B) \cdot_{N^*} P(u)\big)(n) &= Q^*(f_B)\big(P(u) \cdot_N n\big) \\
&= f_B\big(Q(P(u) \cdot_N n)\big) \\
&= \begin{cases} = f_B\big(Q \circ l(u, Q(n))\big) = r^*\big(Q^*(f_B), u\big)(Q(n)) = Q^*\big(r^*(Q^*(f_B), u)\big)(n), \\ = f_B\big(P(u) \cdot_B Q(n)\big) = \big(f_B \cdot_{B^*} P(u)\big)(Q(n)) = Q^*\big(f_B \cdot_{B^*} P(u)\big)(n). \end{cases}
\end{aligned}$$

这表明（12）和（13）中的恒等式对于对偶结构也成立。因此，$(B^* \xrightarrow{Q^*} N^*$、$l^*$、$r^*)$是相对平均代数$M \xrightarrow{P} A$上的双模。□

设$M \xrightarrow{P} A$为相对平均代数。则$(A^* \xrightarrow{P^*} M^*$、$l^*$、$r^*)$是一个双模，其中配对$l^*: M \times M^* \to A^*$和$r^*: M^* \times M \to A^*$分别定义为

$$l^*(u, f_M)(a) = f_M(a \cdot_M u) \text{ and } r^*(f_M, u)(a) = f_M(u \cdot_M a), \text{ for } u \in M, f_M \in M^*, a \in A.$$

注意，该双模与示例3.20中给出的伴随双模对偶。

设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，且 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 是其上的一个双模。由于 B 是一个A-双模，因此可以考虑带有如下乘法的半直积代数 $A \oplus B$

$$(a,b)\cdot_{\ltimes}(a',b') = \big(a\cdot a', a\cdot_B b' + b\cdot_B a'\big), \text{ for } (a,b),(a',b') \in A\oplus B.$$

已证明[9] 向量空间 $M\oplus N$ 在半直积代数 $A\oplus B$ 上具有双模结构，其左、右（$A\oplus B$）作用分别定义为

$$(a,b)\triangleright(u,n) = (a\cdot_M u, a\cdot_N n + r(b,u)) \quad \text{and} \quad (u,n)\triangleleft(a,b) = (u\cdot_M a, l(u,b) + n\cdot_N a), \tag{15}$$

f或 $(a,b)\in A\oplus B$和 $(u,n)\in M\oplus N$。采用这些记号，我们有如下结果。

3.24. 定理。（半直积）设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，且 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 是其上的双模。则 $M\oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A\oplus B$ 是一个相对平均代数。

证明。我们已经看到，$A\oplus B$ 是一个结合代数（具有半直积结构），并且$M\oplus N$是一个（$A\oplus B$）-双模，其左右作用由（15）给出。接下来，对于任意（u，n），（u'，n'）$\in M\oplus N$，我们注意到

$$\begin{aligned}
(P\oplus Q)(u,n)\cdot_{\ltimes}(P\oplus Q)(u',n') &= (P(u),Q(n))\cdot_{\ltimes}(P(u'),Q(n')) \\
&= \big(P(u)\cdot P(u'), P(u)\cdot_B Q(n') + Q(n)\cdot_B P(u')\big) \\
&= \big(P(P(u)\cdot_M u'), Q(P(u)\cdot_N n') + Q(r(Q(n),u'))\big) \\
&= (P\oplus Q)\big(P(u)\cdot_M u', P(u)\cdot_N n' + r(Q(n),u')\big) \\
&= (P\oplus Q)\big(((P\oplus Q)(u,n))\triangleright(u',n')\big).
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
(P\oplus Q)(u,n)\cdot_{\ltimes}(P\oplus Q)(u',n') &= \big(P(u)\cdot P(u'), P(u)\cdot_B Q(n') + Q(n)\cdot_B P(u')\big) \\
&= \big(P(u\cdot_M P(u')), Q(l(u,Q(n'))) + Q(n\cdot_N P(u'))\big) \\
&= (P\oplus Q)\big(u\cdot_M P(u'), l(u,Q(n')) + n\cdot_N P(u')\big) \\
&= (P\oplus Q)\big((u,n)\triangleleft((P\oplus Q)(u',n'))\big).
\end{aligned}$$

这证明了 $P\oplus Q$： $M\oplus N\to A\oplus B$是一个相对平均算子。换言之，$M\oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A\oplus B$是一个相对平均代数。□

3.25. 命题。设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，且 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 是其上的一个双模。那么，向量空间 N 上带有诱导的二结合代数 M_P 的一个表示，其作用映射如下：

$$\begin{cases}
\dashv\colon M_P\otimes N\to N, & u\dashv n = l(u,Q(n)),\\
\vdash\colon M_P\otimes N\to N, & u\vdash n = P(u)\cdot_N n,\\
\dashv\colon N\otimes M_P\to N, & n\dashv u = n\cdot_N P(u),\\
\vdash\colon N\otimes M_P\to N, & n\vdash u = r(Q(n),u).
\end{cases} \tag{16}$$

证明。 为证明该结果，我们考虑定理 $M\oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A\oplus B$中给出的相对平均代数的半直积 3.24。于是，向量空间 $M\oplus N$ 上带有一个双结合代数结构（记为 $(M\oplus N)^{P\oplus Q}$），其运算为

$$\begin{aligned}
(u,n)\dashv_{P\oplus Q}(u',n') &= (u,n)\triangleleft\big(P(u'),Q(n')\big) = \big(u\dashv_P u', l(u,Q(n')) + n\cdot_N P(u')\big),\\
(u,n)\vdash_{P\oplus Q}(u',n') &= \big(P(u),Q(n)\big)\triangleright(u',n') = \big(u\vdash_P u', P(u)\cdot_N n' + r(Q(n),u')\big),
\end{aligned}$$

对于（u,n），（u',n'）$\in M\oplus N$。这表明，双结合代数 M_P在 N上有一个表示，其结构映射为（16），而双结合代数（$M\oplus N$）$^{P\oplus Q}$就是双结合代数 M_P 与表示 N的半直积。□

3.26. 命题. 设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，且 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 是其上的一个双模。那么，向量空间 B 可赋予一个诱导的二结合代数 M_P 的表示，其作用映射定义为

$$\begin{cases} \dashv\colon M_P \otimes B \to B, & u \dashv b = P(u) \cdot_B b - Q(l(u,b)), \\ \vdash\colon M_P \otimes B \to B, & u \vdash b = P(u) \cdot_B b, \\ \dashv\colon B \otimes M_P \to B, & b \dashv u = b \cdot_B P(u), \\ \vdash\colon B \otimes M_P \to B, & b \vdash u = b \cdot_B P(u) - Q(r(b,u)). \end{cases} \tag{17}$$

证明。 我们首先考虑半直积相对平均代数 $M \oplus N \xrightarrow{P \oplus Q} A \oplus B$。由命题3.13 可知，映射

$$\mathcal{N}_{P\oplus Q} : (A \oplus B) \oplus (M \oplus N) \to (A \oplus B) \oplus (M \oplus N),\ (a,b,u,n) \mapsto (P(u), Q(v), 0, 0)$$

是双结合代数 $(A \oplus B)$ $\oplus_{\mathrm{Diass}}$ $(M \oplus N)$ 上的 Nijenhuis 算子。因此，向量空间 $A \oplus B \oplus M \oplus N$ 上存在一个新的双结合结构（由 Nijenhuis 算子 $\mathcal{N}_{P\oplus Q}$ 变形而来）。可以验证， $A \oplus B \oplus M \oplus N$ 上的这个双结合结构将向量空间 $B \oplus M$ 限制为一个双结合代数结构。该结构恰由下式给出

$$\begin{aligned} (b,u) \dashv (b',v) &= (\underbrace{b \cdot_B P(v)}_{:=\ b \dashv v} + \underbrace{P(u) \cdot_B b' - Q(l(u,b'))}_{:=\ u \dashv b'}, u \dashv_P v), \\ (b,u) \vdash (b',v) &= (\underbrace{b \cdot_B P(v) - Q(r(b,v))}_{:=\ b \vdash v} + \underbrace{P(u) \cdot_B b'}_{:=\ u \vdash b'}, u \vdash_P v), \end{aligned}$$

对于 $(b,\ u)$，$(b',\ v) \in B \oplus M$. 这个表达式表明，双结合代数 M_P 在 B 上有一个表示，其作用映射为（17）。 □

4. The controlling algebra and cohomology for relative averaging operators

给定一个结合代数 A 和一个 A-双模 M，我们在此构造一个分次李代数，其 Maurer-Cartan 元恰好是相对平均算子。该刻画使我们能够定义相对平均算子的上同调。随后，我们证明，相对平均算子的这一上同调可以视为诱导的双结合代数在某个适当表示下的上同调。

设 A 是一个结合代数，且 M 是一个 A-双模。考虑向量空间 $D = A \oplus M$ 及 Majumdar-Mukherjee分次李代数

$$\mathfrak{g} = \big(\oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n+1}(D,D) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{n+1}] \otimes D^{\otimes n+1}, D), [\ ,\ ]_{\mathsf{MM}} \big)$$

与向量空间 D相关。注意， D 上的双结合代数结构（见命题3.11）产生分次李代数 $\mathfrak{g}$ 中的一个 Maurer-Cartan 元 $\Delta \in \mathfrak{g}_1$ （即，我们有 $[\Delta, \Delta]_{\mathsf{MM}} = 0$），其中 Δ 定义如下

$$\begin{cases} \Delta\big(\curlyvee; (a,u),(b,v)\big) = (a,u) \dashv (b,v) = (a \cdot b, u \cdot_M b), \\ \Delta\big(\curlyvee; (a,u),(b,v)\big) = (a,u) \vdash (b,v) = (a \cdot b, a \cdot_M v), \end{cases} \tag{18}$$

对于 (a,u)、$(b,v) \in D$。此外，很容易看出，分次子空间

$$\mathfrak{a} = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n+1}(M,A) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{n+1}] \otimes M^{\otimes n+1}, A)$$

是一个阿贝尔李子代数。设 $p :\ \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为到子空间 $\mathfrak{a}$ 的投影。那么 $\ker(p) \subset \mathfrak{g}$ 是一个分次李子代数，且 $\mathrm{im}(p) = \mathfrak{a}$。此外， $\Delta \in \ker(p)_1$。因此，根据 Kosmann-Schwarzbach 导出括号构造，[19], 移位分次向量空间 $s\mathfrak{a} = \oplus_{n=1}^{\infty} CY^n(M,A) = \oplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_n] \otimes M^{\otimes n}, A)$ 具有分次李代数结构，其括号为

$$[\![f,g]\!] := (-1)^m\ [[\Delta, f]_{\mathsf{MM}}, g]_{\mathsf{MM}},$$

对 $f \in CY^m(M,A)$ 和 $g \in CY^n(M,A)$。用 $\circ_i$ 运算（见（6））表示，上述括号为

$$\begin{aligned}\llbracket f,g\rrbracket =& \sum_{i=1}^{m}(-1)^{(i-1)n} f\circ_i(\Delta\circ_1 g)-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{in} f\circ_i(\Delta\circ_2 g)\\ &-(-1)^{mn}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(i-1)m} g\circ_i(\Delta\circ_1 f)-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{im} g\circ_i(\Delta\circ_2 f)\Big\}\\ &+(-1)^{mn}(\Delta\circ_1 f)\circ_{m+1} g-(\Delta\circ_1 g)\circ_{n+1} f.\end{aligned}$$

具体而言，括号定义如下

(19)

$$\begin{aligned}&\llbracket f,g\rrbracket(y;u_1,\dots,u_{m+n})\\ &=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{(i-1)n} f\Big(R_0^{m;i,n+1}(y);u_1,\dots,u_{i-1},\\ &\qquad\Delta\big(R_0^{2;1,n}R_i^{m;i,n+1}(y);g\big(R_1^{2;1,n}R_i^{m;i,n+1}(y);u_i,\dots,u_{i+n-1}\big),u_{i+n}\big),u_{i+n+1},\dots,u_{m+n}\Big)\\ &-\sum_{i=1}^{m}(-1)^{in} f\Big(R_0^{m;i,n+1}(y);u_1,\dots,u_{i-1},\\ &\qquad\Delta\big(R_0^{2;2,n}R_i^{m;i,n+1}(y);u_i,g\big(R_2^{2;2,n}R_i^{m;i,n+1}(y);u_{i+1},\dots,u_{i+n}\big)\big),u_{i+n+1},\dots,u_{m+n}\Big)\\ &-(-1)^{mn}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(i-1)m} g\Big(R_0^{n;i,m+1}(y);u_1,\dots,u_{i-1},\\ &\qquad\Delta\big(R_0^{2;1,m}R_i^{n;i,m+1}(y);f\big(R_1^{2;1,m}R_i^{n;i,m+1}(y);u_i,\dots,u_{i+m-1}\big),u_{i+m}\big),u_{i+m+1},\dots,u_{m+n}\Big)\\ &+(-1)^{mn}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{im} g\Big(R_0^{n;i,m+1}(y);u_1,\dots,u_{i-1},\\ &\qquad\Delta\big(R_0^{2;2,m}R_i^{n;i,m+1}(y);u_i,f\big(R_1^{2;2,m}R_i^{n;i,m+1}(y);u_{i+1},\dots,u_{i+m}\big)\big),u_{i+m+1},\dots,u_{m+n}\Big)\\ &+(-1)^{mn}\Delta\Big(R_0^{2;1,m}R_0^{m+1;m+1,n}(y);f\big(R_1^{2;1,m}R_0^{m+1;m+1,n}(y);u_1,\dots,u_m\big),g\big(R_{m+1}^{m+1;m+1,n}(y);u_{m+1},\dots,u_{m+n}\big)\Big)\\ &-\Delta\Big(R_0^{2;1,n}R_0^{n+1;n+1,m}(y);g\big(R_1^{2;1,n}R_0^{n+1;n+1,m}(y);u_1,\dots,u_n\big),f\big(R_{n+1}^{n+1;n+1,m}(y);u_{n+1},\dots,u_{m+n}\big)\Big),\end{aligned}$$

对于 $y\in Y_{m+n}$ 和 u_1, ..., $u_{m+n}\in M$. 这个分次李括号可以按照以下规则扩展到分次空间$CY^\bullet(M,A)$ $=\oplus_{n=0}^{\infty}CY^n(M,A)$ $=\oplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{Hom}(\Bbbk[Y_n]\otimes M^{\otimes n},A)$

$$\begin{aligned}\llbracket f,a\rrbracket(y;u_1,\dots,u_m)=&\sum_{i=1}^{m} f\big(y;u_1,\dots,u_{i-1},a\cdot_M u_i-u_i\cdot_M a,u_{i+1},\dots,u_m\big)\\ &+f(y;u_1,\dots,u_m)\cdot a-a\cdot f(y;u_1,\dots,u_m),\\ \llbracket a,b\rrbracket=a\cdot b-b\cdot a,&\ \text{for } f\in CY^m(M,A),\ y\in Y_m \text{ and } a,b\in A=CY^0(M,A).\end{aligned}$$

采用上述所有记号，我们有以下有趣的结果。

4.1. 定理。设 A 是一个结合代数， M 是一个 A-双模。那么，数对 $\big(CY^\bullet(M,A)\ \llbracket,\rrbracket\big)$是一个分次李代数。此外，线性映射 $P\colon M\to A$ 是相对平均算子，当且仅当$P\in CY^1(M,A)$是分次李代数 $\big(CY^\bullet(M,A)\ \llbracket,\rrbracket\big)$ 中的一个 Maurer-Cartan 元。

证明。 第一部分由前面的讨论可得。为证明第二部分，我们首先注意到，任意线性映射 $P\colon M\to A$ 都可与一个元素（用相同的记号表示）$P\in CY^1(M,A)$ 相对应，其中 $P(;u)=P(u)$，对于 $u\in M$ 以及唯一的树 $\in Y_1$。在此对应下，

由（19）可得

$$[\![P,P]\!](\curlyvee;u,v)=2\Big(P(\underbrace{\Delta(\curlyvee;P(u),v)}_{=0})+P(\underbrace{\Delta(\curlyvee;u,P(v))}_{=u\cdot_M P(v)})-\underbrace{\Delta(\curlyvee;P(u),P(v))}_{P(u)\cdot P(v)}\Big),$$

$$[\![P,P]\!](\curlyvee;u,v)=2\Big(P(\underbrace{\Delta(\curlyvee;P(u),v)}_{=P(u)\cdot_M v})+P(\underbrace{\Delta(\curlyvee;u,P(v))}_{=0})-\underbrace{\Delta(\curlyvee;P(u),P(v))}_{P(u)\cdot P(v)}\Big),$$

对于 $u,v\in M$。因此， P 是 Maurer-Cartan 元（即 $[\![P,P]\!]=0$）当且仅当 P 是相对平均算子。

□

设 A 是一个结合代数， M 是一个 A-双模。在前一个定理中，我们已经看到，任意相对平均算子 $P\colon M\to A$ 都可以视为分次李代数 $(CY^\bullet(M,A)\ [\![,]\!])$ 中的 Maurer-Cartan 元。因此，相对平均算子 P 诱导出一个微分

$$d_P:=[\![P,-]\!]:CY^n(M,A)\to CY^{n+1}(M,A),\ \text{for } n\geq 0,$$

它使 $\{CY^\bullet(M,A)\ d_P\}$ 成为一个上链复形。相应的上同调称为相对平均算子 P 的上同调，第 n 阶上同调群记为 $H^n_P(M,A)$。此外，微分 d_P 使三元组 $(CY^\bullet(M,A)\ d_P,[\![,]\!])$ 成为一个微分分次李代数。这个微分分次李代数控制相对平均算子 P 的变形（见下文定理）。因此，我们称微分分次李代数 $\{CY^\bullet(M,A)\ d_P\}$ 为算子 P 的控制代数。

4.2. 定理。设 $P\colon M\to A$ 是一个相对平均算子。对于任意线性映射 $P'\colon M\to A$，当且仅当 P' 是微分分次李代数 $(CY^\bullet(M,A)\ d_P,[\![,]\!])$ 中的 Maurer-Cartan 元时，和 $P+P'$ 也是一个相对平均算子。

证明。注意，和 $P+P'$ 是一个相对平均算子，当且仅当 $[\![P+P',P+P']\!]=0$，等价地，

$$[\![P,P']\!]+[\![P',P]\!]+[\![P',P']\!]=0.$$

当且仅当 $d_P(P')+\frac{1}{2}[\![P',P']\!]=0$，这等价于 P' 是微分分次李代数 $(CY^\bullet(M,A)\ d_P,[\![,]\!])$ 中的 Maurer-Cartan 元。□

接下来，我们将说明，相对平均算子 $P\colon M\to A$ 的上同调可以视为诱导的双结合代数 M_P 在某个适当表示上的系数上同调A。我们从以下结果开始，它是命题3.26的一个特例。

4.3. 命题。设 $P\colon M\to A$ 是一个相对平均算子。那么，诱导的二结合代数 M_P 在向量空间 A 上有一个表示，其作用映射为

$$\begin{aligned}
&\dashv\colon M_P\times A\to A,\quad u\dashv a=P(u)\cdot a-P(u\cdot_M a),\\
&\vdash\colon M_P\times A\to A,\quad u\vdash a=P(u)\cdot a,\\
&\dashv\colon A\times M_P\to A,\quad a\dashv u=a\cdot P(u),\\
&\vdash\colon A\times M_P\to A,\quad a\vdash u=a\cdot P(u)-P(a\cdot_M u).
\end{aligned}$$

由上述命题可知，可以定义诱导的二结合代数 M_P 关于上述在 A 上的表示的上同调。更确切地说，我们考虑上链复形 $\{CY^\bullet(M_P,A)\ \delta^P_{\mathrm{Diass}}\}$，其中 $CY^n(M_P,A):=\mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_n]\otimes M^{\otimes n},A)$，对 $n\geq 0$ 成立；余边界映射 $\delta^P_{\mathrm{Diass}}\colon CY^n(M_P,A)\to CY^{n+1}(M_P,A)$ 定义为

$$\begin{aligned}
\delta^P_{\mathrm{Diass}}(f)(y;u_1,\dots,u_{n+1})&=u_1\star^y_0 f(d_0y;u_2,\dots,u_{n+1})\\
&+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\ f(d_iy;u_1,\dots,u_i(\star^y_i)_Pu_{i+1},\dots,u_{n+1})+(-1)^{n+1}\ f(d_{n+1}y;u_1,\dots u_n)\star^y_{n+1}u_{n+1},
\end{aligned}$$

对于 $f \in CY^n(M_P, A)$, $y \in Y_{n+1}$ 和 $u_1, \ldots, u_{n+1} \in M$。这里 $(\star_i^y)_P$ 根据 $\star_i^y$ 由 $\dashv$ 或 $\vdash$ 给出，分别表示乘积 $\dashv_P$ 或 $\vdash_P$。我们将上链复形$\{CY^\bullet(M_P, A)\ \delta^P_{\mathrm{Diass}}\}$的第 n 个上同调群记为 $H^n_{\mathrm{Diass}}(M_P, A)$。

4.4. 命题. 设 $P\colon M \to A$ 是一个相对平均算子。那么余边界算子 d_P和 $\delta^P_{\mathrm{Diass}}$ 之间满足

$$d_P(f) = (-1)^n\ \delta^P_{\mathrm{Diass}}(f),\ \textit{for}\ f \in CY^n(M, A).$$

证明. 对任意 $y \in Y_{n+1}$和 $u_1, \ldots, u_{n+1} \in M$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\big(d_P(f)\big)(y; u_1, \ldots, u_{n+1})\\
&= [\![P, f]\!](y; u_1, \ldots, u_{n+1})\\
&= P\big(\Delta\big(R_0^{2;1,n}(y); f\big(R_1^{2;1,n}(y); u_1, \ldots, u_n\big), u_{n+1}\big)\big)\\
&\quad - (-1)^n P\big(\Delta\big(R_0^{2;2,n}(y); u_1, f\big(R_2^{2;2,n}(y); u_2, \ldots, u_{n+1}\big)\big)\big)\\
&\quad - (-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f\big(R_0^{n;i,2}(y); u_1, \ldots, u_{i-1}, \Delta\big(R_i^{n;i,2}(y); P(u_i), u_{i+1}\big), u_{i+2}, \ldots, u_{n+1}\big)\\
&\quad + (-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} f\big(R_0^{n;i,2}(y); u_1, \ldots, u_{i-1}, \Delta\big(R_i^{n;i,2}(y); u_i, P(u_{i+1})\big), u_{i+2}, \ldots, u_{n+1}\big)\\
&\quad + (-1)^n \Delta\big(R_0^{2;2,n}(y); P(u_1), f\big(R_2^{2;2,n}(y), u_2, \ldots, u_{n+1}\big)\big)\\
&\quad - \Delta\big(R_0^{2;1,n}(y); f\big(R_1^{2;1,n}(y); u_1, \ldots, u_n\big), P(u_{n+1})\big)\\
&= (-1)^n \Big\{ \Delta\big(R_0^{2;2,n}(y); P(u_1), f\big(R_2^{2;2,n}(y), u_2, \ldots, u_{n+1}\big)\big)\\
&\qquad - P\big(\Delta\big(R_0^{2;2,n}(y); u_1, f\big(R_2^{2;2,n}(y); u_2, \ldots, u_{n+1}\big)\big)\big)\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f\big(R_0^{n;i,2}(y); u_1, \ldots, u_{i-1}, \underbrace{\Delta\big(R_i^{n;i,2}(y); P(u_i), u_{i+1}\big) + \Delta\big(R_i^{n;i,2}(y); u_i, P(u_{i+1})\big)}_{=u_i(\star_i^y)_P u_{i+1}}, u_{i+2}, \ldots, u_{n+1}\big)\\
&\qquad + (-1)^{n+1} \Delta\big(R_0^{2;1,n}(y); f\big(R_1^{2;1,n}(y); u_1, \ldots, u_n\big), P(u_{n+1})\big)\\
&\qquad - (-1)^{n+1} P\big(\Delta\big(R_0^{2;1,n}(y); f\big(R_1^{2;1,n}(y); u_1, \ldots, u_n\big), u_{n+1}\big)\big) \Big\}\\
&= (-1)^n \Big\{ u_1 \star_0^y f(d_0(y); u_2, \ldots, u_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(R_0^{n;i,2}(y); u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i(\star_i^y)_P u_{i+1}, \ldots, u_{n+1})\\
&\qquad + (-1)^{n+1} f(d_{n+1}(y); u_1, \ldots, u_n) \star_{n+1}^y u_{n+1} \Big\} \quad (\text{as } R_2^{2;2,n}(y) = d_0(y) \text{ and } R_1^{2;1,n}(y) = d_{n+1}(y))\\
&= (-1)^n (\delta^P_{\mathrm{Diass}}(f))(u_1, \ldots, u_{n+1}).
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

由上述命题可知，相对平均算子 P的上同调与双结合代数 M_P 在表示 A. 中的上同调同构。也就是说，

$$H^\bullet_P(M, A) \cong H^\bullet_{\mathrm{Diass}}(M_P, A).$$

4.5. 注记. 相对平均算子的上同调 P 有助于研究算子 P 的变形，同时保持底层代数和双模不变。关于相对 Rota-Baxter 算子的类似变形理论，参见 [8] 。

与双结合代数的上同调关系。设 $P\colon M \to A$ 是一个相对平均算子。接下来，我们将探讨相对平均算子 P的上同调与

诱导的二结合代数 M_P 在伴随表示下的上同调之间的关系。为此，我们定义一组 $\{\Theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 映射

$$\Theta_n : CY^n(M,A) \to CY^{n+1}(M_P, M_p)$$

by

$$\Theta_n(f)(y;u_1,\dots,u_{n+1}) = \begin{cases} (-1)^{n+1}\ u_1 \cdot_M f(y_1;u_2,\dots,u_{n+1}) & \text{if } y = \mid \vee y_1 \text{ for some } n\text{-tree } y_1, \\ f(y_1;u_1,\dots,u_n)\cdot_M u_{n+1} & \text{if } y = y_1 \vee \mid \text{ for some } n\text{-tree } y_1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对于 $u_1,\dots,u_{n+1} \in M.$，我们有如下结论。

4.6. 引理。对于 $f \in CY^m(M,A)$ 和 $g \in CY^n(M,A)$，我们有

$$[\Theta_m(f), \Theta_n(g)]_{\mathsf{MM}} = \Theta_{m+n}\big([\![f,g]\!]\big).$$

换言之，集合 $\{\Theta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 定义了一个从 $(CY^\bullet(M,A)\ [\![\ ,\ ]\!])$ 到 $(CY^{\bullet+1}(M_P,M_P)\ [\ ,\ ]_{\mathsf{MM}})$ 的分次李代数态射。

证明。设 $y \in Y_{m+n+1}$ 是一个 $(m+n+1)$-树，且 $u_0,u_1,\dots,\dots,u_{m+n}$ 是 M 中的元素。若对于某个 $(m+n)$-树 y_1，有 $y = \mid \vee y_1$，则

$$\begin{aligned}
&[\Theta_m(P),\Theta_n(Q)]_{\mathsf{MM}}\big(y;u_0,u_1,\dots,u_{m+n}\big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{(i-1)n}\ \Theta_m(P)\circ_i\Theta_n(Q) - (-1)^{mn}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{(i-1)m}\ \Theta_n(Q)\circ_i\Theta_m(P)\Big)\big(y;u_0,u_1,\dots,u_{m+n}\big) \\
&= \Theta_m(P)\big(R_0^{m+1;1,n+1}(y);\Theta_n(Q)\big(R_1^{m+1;1,n+1}(y);u_0,\dots,u_n\big),u_{n+1},\dots,u_{m+n}\big) \\
&+\textstyle\sum_{i=1}^{m}(-1)^{in}\ \Theta_m(P)\big(R_0^{m+1;i+1,n+1}(y);u_0,\dots,u_{i-1},\Theta_n(Q)\big(R_{i+1}^{m+1;i+1,n+1}(y);u_i,\dots,u_{i+n}\big),u_{i+n+1},\dots,u_{m+n}\big) \\
&-(-1)^{mn}\Big\{\Theta_n(Q)\big(R_0^{n+1;1,m+1}(y);\Theta_m(P)\big(R_1^{n+1;1,m+1}(y);u_0,\dots,u_m\big),u_{m+1},\dots,u_{m+n}\big) \\
&+\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{im}\ \Theta_n(Q)\big(R_0^{n+1;i+1,m+1}(y);u_o,\dots,u_{i-1},\Theta_m(P)\big(R_{i+1}^{n+1;i+1,m+1}(y);u_i,\dots,u_{i+m}\big),u_{i+m+1},\dots,u_{m+n}\big)\Big\} \\
&= (-1)^{m+n+1}\ u_0\cdot_M\big([\![P,Q]\!](y_1;u_1,\dots,u_{m+n})\big) = \big(\Theta_{m+n}[\![P,Q]\!]\big)(y;u_0,u_1,\dots,u_{m+n}).
\end{aligned}$$

另一方面，若对于某个 $(m+n)$-树 y_1，有 $y = y_1 \vee \mid$，且 $u_1,\dots,u_{m+n+1}$ 是 M 中的元素，则

$$\begin{aligned}
&[\Theta_m(P)\ \Theta_n(Q)]_{\mathsf{MM}}(y;\ u_1,u_2,\dots,u_{m+n+1}) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{(i-1)n}\ \Theta_m(P)\circ_i\Theta_n(Q) - (-1)^{mn}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{(i-1)m}\ \Theta_n(Q)\circ_i\Theta_m(P)\Big)\big(y;u_0,u_1,\dots,u_{m+n}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(-1)^{(i-1)n}\ \Theta_m(P)\big(R_0^{m+1;i,n+1}(y);u_1,\dots,u_{i-1},\Theta_n(Q)\big(R_i^{m+1;i,n+1}(y);u_i,\dots,u_{i+n}\big),\dots,u_{m+n+1}\big) \\
&+(-1)^{mn}\Theta_m(P)\big(R_0^{m+1;m+1,n+1}(y);u_1,\dots,u_m,\Theta_n(Q)\big(R_{m+1}^{m+1;m+1,n+1}(y);u_{m+1},\dots,u_{m+n+1}\big)\big) \\
&-(-1)^{mn}\Big\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(i-1)m}\ \Theta_n(Q)\big(R_0^{n+1;i,m+1}(y);u_1,\dots,u_{i-1},\Theta_m(P)\big(R_i^{n+1;i,m+1}(y);u_i,\dots,u_{i+m}\big),\dots,u_{m+n+1}\big) \\
&+(-1)^{mn}\Theta_n(Q)\big(R_0^{n+1;n+1,m+1}(y);u_1,\dots,u_n,\Theta_m(P)\big(R_{n+1}^{n+1;n+1,m+1}(y);u_{n+1},\dots,u_{m+n+1}\big)\big)\Big\} \\
&= \big([\![P,Q]\!](y;u_1,\dots,u_{m+n})\big)\cdot_M u_{m+n+1} = \big(\Theta_{m+n}[\![P,Q]\!]\big)(y;u_1,\dots,u_{m+n+1}).
\end{aligned}$$

最后，对于 y中任何其他的 Y_{m+n+1} （不属于 $\mid \vee y_1$ 或 $y_1 \vee \mid$这两种形式的），都可以根据部分复合（6）轻易验证

$$[\Theta_m(P),\Theta_n(Q)](y;u_0,u_1,\dots,u_{m+n}) = 0 = (\Theta_{m+n}[\![P,Q]\!])(y;u_0,u_1,\dots,u_{m+n}).$$

证明到此结束。 □

令 $\pi_P \in CY^2(M_P, M_P)$ 为与诱导的二结合代数 M_P 对应的 Maurer-Cartan 元。换言之， π_P 由下式给出

$$\pi_P\big(\curlyvee\ ;\ u, v\big) = u \dashv_P v \quad \text{and} \quad \pi_P\big(\curlyvee\ ;\ u, v\big) = u \vdash_P v, \text{ for } u, v \in M.$$

由上述引理可知， 下图交换。

$$\begin{array}{ccc} CY^n(M, A) & \xrightarrow{\Theta_n} & CY^{n+1}(M_P, M_P) \\ {\scriptstyle \delta^P_{\mathrm{Diass}}=(-1)^n\, d_P}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathrm{Diass}}=(-1)^n\, [\pi_P,\ ]_{\mathsf{MM}}} \\ CY^{n+1}(M, A) & \xrightarrow[\Theta_{n+1}]{} & CY^{n+2}(M_P, M_P). \end{array}$$

因此，我们得到以下结果。

4.7. 定理。设 $P\colon M \to A$ 是一个相对平均算子。则存在一个态射

$$\Theta_\bullet : H^\bullet_P(M, A) \to H^{\bullet+1}_{\mathrm{Diass}}(M_P, M_P)$$

从相对平均算子 P 的上同调到诱导的二结合代数 M_P 在伴随表示下的上同调。

5. The controlling algebra and cohomology for relative averaging algebras

在本节中，我们首先构造一个 L_∞-代数，其 Maurer-Cartan 元恰好是相对平均代数。接着，给定一个相对平均代数，我们构造相应的控制L_∞-代数。最后，我们定义给定双模系数下相对平均代数的上同调。

L_∞-代数。 L_∞-代数（也称为强同伦李代数）最早出现于 Lada 和 Stasheff 的工作中 [22]。本文采用通过次数平移给出的等价定义[21]。

5.1. 定义。 L_∞-代数是一个二元组 $(L, \{l_k\}_{k=1}^\infty)$，由一个分次向量空间 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$以及一组 $\{l_k : L^{\otimes k} \to L\}_{k=1}^\infty$ 次数为 1 的分次线性映射构成，这些映射按如下意义分次对称：

$$l_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon(\sigma) l_k(x_1, \ldots, x_k), \text{ for } k \geq 1 \text{ and } \sigma \in \mathbb{S}_k,$$

并满足以下高阶雅可比恒等式：

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{(i,n-i)}} \epsilon(\sigma)\ l_j\big(l_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) = 0,$$

对于所有 $n \geq 1$ 和齐次元素 $x_1, \ldots, x_n \in L$。这里 $\epsilon(\sigma)$ 是分次情形中出现的 Koszul符号。

在本文中，我们假设所有 L_∞-代数都是弱滤过的 [15] （另见 [24]）。因此， L 中的某些无穷级数总是收敛的。

5.2. 定义。设 $(L, \{l_k\}_{k=1}^\infty)$ 是一个 L_∞-代数。如果元素 $\alpha \in L_0$ 满足下式，则称其为 L_∞-代数的 Maurer-Cartan 元： α

$$l_1(\alpha) + \frac{1}{2!} l_2(\alpha, \alpha) + \cdots + \frac{1}{n!}\ l_n(\alpha, \ldots, \alpha) + \cdots = 0 \quad \big(\text{i.e. } \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} l_k(\alpha, \ldots, \alpha) = 0\big).$$

如果 $(L, \{l_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是一个 L_∞-代数，且 $\alpha \in L_0$ 是其中的 Maurer-Cartan 元，那么可以在同一个分次向量空间 L 上构造一个新的 L_∞-代数 $(L, \{l_k^\alpha\}_{k=1}^{\infty})$，其结构映射由下式给出：

$$l_k^\alpha(x_1,\dots,x_k) = l_k(x_1,\dots,x_k) + l_{1+k}(\alpha,x_1,\dots,x_k) + \cdots + \frac{1}{n!}\, l_{n+k}(\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{n \text{ copies}},x_1,\dots,x_k) + \cdots, \text{ for } k \geq 1.$$

这称为由 Maurer-Cartan 元 α 扭曲的 $(L, \{l_k\}_{k=1}^{\infty})$ 所得到的 L_∞-代数 .

5.3. 注。 ([15]) 设 α 是 L_∞-代数 $(L, \{l_k\}_{k=1}^{\infty})$ 的一个 Maurer-Cartan 元。那么对任意$\alpha' \in L_0$，和 $\alpha + \alpha'$ 是 L_∞-代数 $(L, \{l_k\}_{k=1}^{\infty})$ 的一个 Maurer-Cartan 元，当且仅当 α' 是扭曲后的 L_∞-代数 $(L, \{l_k^\alpha\}_{k=1}^{\infty})$ 的一个 Maurer-Cartan 元。

Voronov [39] 给出了一种广为人知的 L_∞-代数构造。设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, p, \Delta)$ 是一个四元组，由分次李代数 $\mathfrak{g}$（其分次李括号为 $[\ ,\ ]$）、阿贝尔分次李子代数$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$、投影映射 $p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$（其像 $\mathrm{im}(p) = \mathfrak{a}$，核 $\ker(p) \subset \mathfrak{g}$ 是一个分次李子代数）以及一个元素$\Delta \in \ker(p)_1$ 组成，并满足 $[\Delta, \Delta] = 0$。这样的四元组称为 V-数据。

5.4. 定理。设 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, p, \Delta)$ 是一个 V-数据。

(i) 则分次向量空间 $\mathfrak{a}$ 可赋予一个 L_∞-代数，其结构映射为 s

$$l_k(a_1,\dots,a_k) = p[\cdots[[\Delta,a_1],a_2],\dots,a_k], \ \textit{for } k \geq 1.$$

(ii) 设 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是满足 $[\Delta, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ 的分次李子代数。则分次向量空间 $s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ 可赋予一个 L_∞-代数，其结构映射为

$$\begin{aligned}
l_1\big((s^{-1}x,a)\big) &= \big(-s^{-1}[\Delta,x], p(x+[\Delta,a])\big),\\
l_2\big((s^{-1}x,0),(s^{-1}y,0)\big) &= \big((-1)^{|x|}s^{-1}[x,y],0\big),\\
l_k\big((s^{-1}x,0),(0,a_1),\dots,(0,a_{k-1})\big) &= \big(0, p[\cdots[[x,a_1],a_2],\dots,a_{k-1}]\big),\ k\geq 2,\\
l_k\big((0,a_1),\dots,(0,a_k)\big) &= \big(0, p[\cdots[[\Delta,a_1],a_2],\dots,a_k]\big),\ k\geq 2,
\end{aligned}$$

对于齐次元素 $x, y \in \mathfrak{h}$（经次数平移后，它们分别视为元素 $s^{-1}x, s^{-1}y \in s^{-1}\mathfrak{h}$）以及齐次元素 $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{a}$。对上述输入进行置换后，其余所有映射均为零。

相对平均代数的 Maurer-Cartan 刻画。设 A 和 M 是两个向量空间。考虑与向量空间 A 相关联的分次李代数

$$\mathfrak{g} = \big(\oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n+1}(A\oplus M, A\oplus M), [\ ,\ ]_{\mathsf{MM}}\big)$$

与向量空间 $A \oplus M$ 相关联。对于任意 $k, l \geq 0$，令 $\mathcal{A}^{k,l}$ 为所有可能的 $(k+l)$ 阶 A 和 M 的张量幂的直和，其中 A 出现 k 次，而 M 出现 l 次。例如，

$$\mathcal{A}^{2,0} = A\otimes A, \quad \mathcal{A}^{0,2} = M\otimes M \ \text{ and } \ \mathcal{A}^{1,1} = (A\otimes M)\oplus(M\otimes A).$$

于是，对于任意 $n \geq 1$，都有一个向量空间的同构 $(A\oplus M)^{\otimes n} \cong \oplus_{k+l=n}\mathcal{A}^{k,\ l}$。若线性映射$f \in CY^{n+1}(A\oplus M, A\oplus M)$ 具有双次数 $k|l$，且满足 $k+l=n$，则称其具有该双次数

$$f(\mathbf{k}[Y_{n+1}]\otimes\mathcal{A}^{k+1,l}) \subset A, \quad f(\mathbf{k}[Y_{n+1}]\otimes\mathcal{A}^{k,l+1}) \subset M \ \text{ and } \ f = 0 \text{ otherwise.}$$

我们将所有双次数为 $k|l$ 的线性映射的集合记为 $CY^{k|l}(A\oplus M, A\oplus M)$。注意到存在自然同构

$$\begin{aligned}
CY^{k|0}(A\oplus M, A\oplus M) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{k+1}]\otimes A^{\otimes k+1}, A)\oplus \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{k+1}]\otimes\mathcal{A}^{k,1}, M),\\
CY^{-1|l}(A\oplus M, A\oplus M) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_l]\otimes M^{\otimes l}, A).
\end{aligned}$$

此外，我们有如下有趣的结果。

5.5. 命题。对于 $f \in CY^{k_f|l_f}(A\oplus M, A\oplus M)$ 和 $g \in CY^{k_g|l_g}(A\oplus M, A\oplus M)$，我们有 e

$$[f,g]_{\mathsf{MM}} \in CY^{k_f+k_g|l_f+l_g}(A\oplus M, A\oplus M).$$

证明。设 $f \in CY^{m+1}(A\oplus M, A\oplus M)$ 和 $g \in CY^{n+1}(A\oplus M, A\oplus M)$。则有 $k_f + l_f = m$ and $k_g + l_g = n$。对于任意 $y \in Y_{m+n+1}$、$1 \le i \le m+1$ 和 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_{m+n+1} \in \mathcal{A}^{k_f+k_g+1, l_f+l_g}$，我们有

(20)
$$(f \circ_i g)\big(y; x_1, \ldots, x_{m+n+1}\big) = f\big(R_0^{m+1;i,n+1}(y); x_1, \ldots, x_{i-1}, g\big(R_i^{m+1;i,n+1}(y); x_i, \ldots, x_{i+n}\big), \ldots, x_{m+n+1}\big).$$

注意，项 $g\big(R^{m+1;i}_{\quad,\ i}{}^{n+1}(y);\ x_i, \ldots, x_{i+n}\big)$ 仅当张量积 $x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+n}$ 属于 $\mathcal{A}^{k_g+1,\ l_g}$ 或属于 $\mathcal{A}^{k_g,\ l_g+1}$。

情形 1。（设 $x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+n} \in \mathcal{A}^{k_g+1,\ l_g}$。）在此情形下，$g\big(R^{m+1;i}_{\quad,\ i}{}^{n+1}(y);\ x_i, \ldots, x_{i+n}\big) \in A$。因此，张量积

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes g\big(R_i^{m+1;i,n+1}(y); x_i, \ldots, x_{i+n}\big) \otimes x_{i+n+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n+1} \ \in \mathcal{A}^{k_f+1, l_f}.$$

因此，项（20）属于 A。

情形 2。（设 $x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+n} \in \mathcal{A}^{k_g,\ l_g+1}$。）在此情形下，$g\big(R^{m+1;i}_{\quad,\ i}{}^{n+1}(y);\ x_i, \ldots, x_{i+n}\big) \in M$。因此，张量积

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes g\big(R_i^{m+1;i,n+1}(y); x_i, \ldots, x_{i+n}\big) \otimes x_{i+n+1} \otimes \cdots \otimes x_{m+n+1} \ \in \mathcal{A}^{k_f+1, l_f}.$$

因此，项（20）也属于 A。所以，我们总有 $(f \circ_i g)\ (\mathcal{A}^{k_f+k_g+1,\ l_f+l_g}) \subset A$。类似地，我们可以证明

$$(f \circ_i g)(\mathcal{A}^{k_f+k_g, l_f+l_g+1}) \subset M \quad \text{and} \quad f \circ_i g = 0 \ \text{ otherwise.}$$

交换 f 和 g的角色，可得到关于 $g \circ_i f$的类似结果。因此，由（5）可得

$$[f,g]_{\mathsf{MM}}(\mathcal{A}^{k_f+k_g+1, l_f+l_g}) \subset A, \quad [f,g]_{\mathsf{MM}}(\mathcal{A}^{k_f+k_g, l_f+l_g+1}) \subset M \ \text{ and } \ [f,g]_{\mathsf{MM}} = 0 \ \text{ otherwise.}$$

因此我们得到 $[f,g]_{\mathsf{MM}} \in CY^{k_f+k_g|l_f+l_g}(A\oplus M, A\oplus M)$。 □

由前一个命题可得如下结论。

5.6. 命题。设 A 和 M 是两个向量空间。则

(i) $\mathfrak{h} = CY^{\bullet|0}(A\oplus M, A\oplus M) = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n|0}(A\oplus M, A\oplus M) \subset \mathfrak{g}$ *is a graded Lie subalgebra;*

(ii) $\mathfrak{a} = CY^{-1|\bullet+1}(A\oplus M, A\oplus M) = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{-1|n+1}(A\oplus M, A\oplus M) \subset \mathfrak{g}$ *is an abelian subalgebra.*

接下来，我们按如下方式构造一个 V-数据。令 $\mathfrak{g} = \big(\oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n+1}(A\oplus M, A\oplus M)\ [\ ,\ ]_{\mathsf{MM}}\big)$ 为与向量空间 $A\oplus M$相关联的分次李代数。考虑阿贝尔李子代数 $\mathfrak{a} = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{-1|n+1}(A\oplus M, A\oplus M)$，并令 $p\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为到子空间 $\mathfrak{a}$上的投影。则四元组 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, p, \overline{\Delta} = 0)$ 是一个 V-数据。此外，由命题 5.6 可知，$\mathfrak{h} = \oplus_{n=0}^{\infty} CY^{n|0}(A\oplus M, A\oplus M)$是 $\mathfrak{g}$ 的分次李子代数，显然满足 $[\overline{\Delta}, \mathfrak{h}]_{\mathsf{MM}} \subset \mathfrak{h}$。因此，应用定理 5.4 可得如下结论。

5.7. 定理。设 A 和 M 为两个向量空间。则在分次向量空间 $s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}$ 上存在一个 L_∞-代数结构，其结构映射 $\{l_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为

$$l_2((s^{-1}f, 0), (s^{-1}g, 0)) = ((-1)^{|f|}\ s^{-1}[f,g]_{\mathsf{MM}}, 0),$$
$$l_k((s^{-1}f, 0), (0, h_1), \ldots, (0, h_{k-1})) = (0, p[\cdots[[f, h_1]_{\mathsf{MM}}, h_2]_{\mathsf{MM}}, \ldots, h_{k-1}]_{\mathsf{MM}}),\ k \ge 2,$$

对于齐次元素 f、$g \in \mathfrak{h}$（视为元素 $s^{-1}f$、$s^{-1}g \in s^{-1}\mathfrak{h}$）以及齐次元素 h_1、.....、$h_{k-1} \in \mathfrak{a}$。除上述条目的排列外，所有其他映射均为零。

设 A 和 M 为两个向量空间。假设存在映射

$$\mu \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, A),\ l_M \in \mathrm{Hom}(A\otimes M, M),\ r_M \in \mathrm{Hom}(M\otimes A, M) \ \text{ and } \ P \in \mathrm{Hom}(M, A).$$

我们定义元素 $\Delta \in \mathfrak{h}_1 = CY^{1|0}(A\oplus M, A\oplus M) = \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_2]\otimes A^{\otimes 2}, A) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_2]\otimes \mathcal{A}^{1,\ \ 1}, M)$ by

(21) $$\Delta\big(\curlyvee; (a,u), (b,v)\big) = (\mu(a,b), r_M(u,b)) \ \text{ and } \ \Delta\big(\curlyvee; (a,u), (b,v)\big) = (\mu(a,b), l_M(a,v)),$$

对于 (a,u)、$(b,v) \in A \oplus M$。注意， Δ 可以视为一个元素 $s^{-1}\Delta \in (s^{-1}\mathfrak{h})_0$。

5.8. 定理。使用上述记号， $A_\mu := (A,\mu)$ 是一个结合代数，$M_{l_M,r_M} := (M, l_M, r_M)$ 是一个 A_μ-双模，且 $P: M \to A$ 是一个相对平均算子（简称，$M_{l_M,r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$ 是一个相对平均代数），当且仅当 $\alpha = (s^{-1}\Delta, P) \in (s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})_0$ 是 L_∞-代数 $(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l_k\}_{k=1}^\infty)$ 的一个 Maurer-Cartan 元。

Proof. 首先注意到 $l_1((s^{-1}\Delta, P)) = 0$。此外，由命题 5.5 可知

$$[\Delta, P]_{\mathsf{MM}} \in CY^{0|1}(A \oplus M, A \oplus M), \quad [[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}} \in CY^{-1|2}(A \oplus M, A \oplus M)$$
$$\text{and} \quad [[[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}} \in CY^{-2|3}(A \oplus M, A \oplus M).$$

由于空间 $CY^{-2|3}(A \oplus M, A \oplus M)$ 是平凡的，我们有 $[[[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}} = 0$. 因此，我们有 $l_k\big((s^{-1}\Delta, P) \ldots, (s^{-1}\Delta, P)\big) = 0$ 对于 $k \geq 4$. 因此

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\, l_k\big((s^{-1}\Delta, P), \ldots, (s^{-1}\Delta, P)\big) \\ &= \frac{1}{2!} l_2\big((s^{-1}\Delta, P), (s^{-1}\Delta, P)\big) \;+\; \frac{1}{3!} l_3\big((s^{-1}\Delta, P), (s^{-1}\Delta, P), (s^{-1}\Delta, P)\big) \\ &= \big(-\frac{1}{2} s^{-1}[\Delta, \Delta]_{\mathsf{MM}},\; \frac{1}{2}[[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}}\big). \end{aligned} \tag{22}$$

注意到

$$[\Delta, \Delta]_{\mathsf{MM}} = 0 \text{ 当且仅当 } A_\mu \text{ 是一个结合代数，且 } M_{l_M,\ r_M} \text{ 是一个 } A_\mu\text{-双模，}$$
$$[[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}} = 0 \text{ 当且仅当 } P \text{是一个相对平均算子（参见。 定理 4。1）。}$$

因此，由（22）可知， $\alpha = (s^{-1}\Delta, P)$ 是 L_∞-代数 $(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l_k\}_{k=1}^\infty)$ 的一个 Maurer-Cartan 元，当且仅当 $M_{l_M,\ r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$ 是一个相对平均代数。□

设 $M_{l_M,r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$ 为给定的相对平均代数。这里， μ 表示 A上的结合乘法，而 l_M, r_M分别表示 M上的左、右 A-作用。我们在前一个定理中已经看到， $\alpha = (s^{-1}\Delta, P) \in (s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})_0$是 L_∞-代数 $(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l_k\}_{k=1}^\infty)$ 的一个 Maurer-Cartan 元，其中Δ 由（21）或（18）给出。因此，我们可以考虑由 Maurer-Cartan 元 $\alpha = (s^{-1}\Delta, P)$ 扭曲的 L_∞-代数 $\big(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l^{(s^{-1}\Delta, P)}{}_k \}_{k=1}^\infty\big)$。然后，根据注记 5.3，我们得到下一个结果。

5.9. 定理。设 $M_{l_M,r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$ 为给定的相对平均代数，其对应的 Maurer- Cartan 元为 $\alpha = (s^{-1}\Delta, P) \in (s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})_0$。假设存在映射

$$\mu' \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, A),\ l'_M \in \mathrm{Hom}(A \otimes M, M),\ r'_M \in \mathrm{Hom}(M \otimes A, M) \quad and \quad P' \in \mathrm{Hom}(M, A).$$

那么 $M_{l_M + l'_M, r_M + r'_M} \xrightarrow{P+P'} A_{\mu+\mu'}$是相对平均代数，当且仅当 $\alpha' = (s^{-1}\Delta', P')$是 L_∞-代数 $\big(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l^{(s^{-1}\Delta, P)}{}_k \}_{k=1}^\infty\big)$的一个 Maurer-Cartan 元，其中 Δ'的定义方式类似于（*21*）。

上述定理表明， L_∞-代数 $\big(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l^{(s^{-1}\Delta, P)}{}_k \}_{k=1}^\infty\big)$ 控制相对平均代数 $M_{l_M,r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$的变形。因此， L_∞-代数 $\big(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l^{(s^{-1}\Delta, P)}{}_k \}_{k=1}^\infty\big)$称为给定相对平均代数 $M_{l_M,r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$的控制代数。

5.10. 注。设 $M \xrightarrow{P} A$ 为一个相对平均代数。由于相应的控制代数$\big(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}, \{l^{(s^{-1}\Delta, P)}{}_k \}_{k=1}^\infty\big)$ 是一个 L_∞-代数，因此可得 $(l^{(s^{-1}\Delta, P)}{}_1)^2 = 0$。在构造相对平均代数的上链复形时，我们将用到这一事实 $M \xrightarrow{P} A$.

相对平均代数的上同调（取伴随双模）。这里我们将定义相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的上同调（系数取伴随双模）。对于每个$n \geq 0$，我们定义阿贝尔群 $C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 如下：

$$C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ \mathrm{Hom}(A, A) \oplus \mathrm{Hom}(M, M) & \text{if } n = 1, \\ \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n-1,1}, M) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{n-1}] \otimes M^{\otimes n-1}, A) & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

在定义余边界映射 $\delta_{\mathrm{rAvg}}\colon C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A) \to C^{n+1}{}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 之前，我们先注意以下几点。~首先，存在一个嵌入 $\mathsf{Hom}((A \oplus M)^{\otimes n}, A \oplus M) \hookrightarrow \mathsf{Hom}(\mathbf{k}[Y_n] \otimes (A \oplus M)^{\otimes n}, A \oplus M)$ $f \mapsto \widetilde{f}$，其中$\widetilde{f}$ 定义为

$$\widetilde{f}(y; x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n), \text{ for all } y \in Y_n \text{ and } x_1, \ldots, x_n \in A \oplus M.$$

由此，分次空间 $\oplus_{n=1}^{\infty}\mathsf{Hom}((A \oplus M)^{\otimes n}, A \oplus M)$ 上的经典 Gerstenhaber 括号 $[\ ,\ ]_{\mathsf{G}}$ 嵌入 Majumdar-Mukherjee 括号 $[\ ,\ ]_{\mathsf{MM}}$. 中。当我们限制上述嵌入时，可得到嵌入

$$\mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_n] \otimes A^{\otimes n}, A),\ f \mapsto \widetilde{f},$$
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n-1,1}, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_n] \otimes \mathcal{A}^{n-1,1}, M),\ g \mapsto \widetilde{g}.$$

注意，元素 $(f, g) \in C^1_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A) = \mathsf{Hom}(A, A) \oplus \mathsf{Hom}(A, A)$ 可与元素 $\widetilde{(s^{-1}(f + \widetilde{g}), 0)} \in (s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})_{-1}$对应。这里我们假设 $\mathfrak{a}_{-1} = 0$。类似地，元素 $(f, g, \gamma) \in C^{n\geq 2}{}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 可与元素 $(s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g})\ \gamma) \in (s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})_{n-2}$对应。利用上述对应关系，我们现在定义映射 $\delta_{\mathrm{rAvg}}\colon C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A) \to C^{n+1}{}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 如下：

$$\delta_{\mathrm{rAvg}}((f, g)) = -l_1^{(s^{-1}\Delta, P)}(s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g}), 0), \text{ for } (f, g) \in C^1_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A),$$
$$\delta_{\mathrm{rAvg}}((f, g, \gamma)) = (-1)^{n-2} l_1^{(s^{-1}\Delta, P)}(s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g}), \gamma), \text{ for } (f, g, h) \in C^{n\geq 2}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A).$$

由注5.10 可知 $(\delta_{\mathrm{rAvg}})^2 = 0$。换言之，$\{C^{\bullet}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)\ \delta_{\mathrm{rAvg}}\}$ 是一个上链复形。相应的上同调称为相对平均代数$M \xrightarrow{P} A$的 n阶上同调群，记相应的 $H^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$。

注意到

$$\begin{aligned}
&\delta_{\mathrm{rAvg}}((f, g, \gamma)) \\
&= (-1)^{n-2} l_1^{(s^{-1}\Delta, P)}(s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g}), \gamma) \\
&= (-1)^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} l_{k+1}\big(\underbrace{(s^{-1}\Delta, P), \ldots, (s^{-1}\Delta, P)}_{k \text{ times}}, (s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g}), \gamma)\big) \\
&= (-1)^{n-2} \Big\{ l_2\big((s^{-1}\Delta, 0), (s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g}), 0)\big) + l_3\big((s^{-1}\Delta, 0), (0, P), (0, \gamma)\big) \\
&\qquad + \frac{1}{n!} l_{n+1}((s^{-1}(\widetilde{f} + \widetilde{g}), 0), \underbrace{(0, P), \ldots, (0, P)}_{n \text{ times}}) \Big\} \quad \text{(as the other terms get vanished)} \\
&= (-1)^{n-2} \Big(-s^{-1}[\Delta, \widetilde{f} + \widetilde{g}]_{\mathsf{MM}}\ ,\ [[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, \gamma]_{\mathsf{MM}} + \frac{1}{n!} \underbrace{[\cdots[[}_{n \text{ times}} \widetilde{f} + \widetilde{g}, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}}, \ldots, P]_{\mathsf{MM}} \Big) \\
&= \Big((-1)^{n-1} s^{-1}[\Delta, \widetilde{f} + \widetilde{g}]_{\mathsf{MM}}\ ,\ \underbrace{(-1)^n [[\Delta, P]_{\mathsf{MM}}, \gamma]_{\mathsf{MM}}}_{=\delta^P_{\mathrm{Diass}}(\gamma)} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!} [\cdots[[\widetilde{f} + \widetilde{g}, P]_{\mathsf{MM}}, P]_{\mathsf{MM}}, \ldots, P]_{\mathsf{MM}}}_{=h_P(f,g) \text{ (say)}} \Big). \qquad (23)
\end{aligned}$$

利用上述对应关系，项（23）（它属于 $(s^{-1}\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a})_{n-1}$）可识别为元素

$$\big((-1)^{n-1}[\mu, f]_{\mathsf{G}}\ ,\ (-1)^{n-1}[\mu + l_M + r_M, f + g]_{\mathsf{G}}\ ,\ \delta^P_{\mathrm{Diass}}(\gamma) + h_P(f, g)\big) \in C^{n+1}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A).$$

这里，第一个分量 $(-1)^{n-1}[\mu, f]_{\mathsf{G}}$不过是 $\delta_{\mathrm{Hoch}}(f)$，其中 δ_{Hoch}是结合代数 A 在以伴随 A-双模为系数的情形下的 Hochschild余边界算子。我们用记号 $\delta^f{}_{\mathrm{Hoch}}(g)$ 表示第二个分量 $(-1)^{n-1}[\mu + l_M + r_M, f + g]_{\mathsf{G}} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n,1}, M)$，它由下式给出

$$\begin{aligned}\big(\delta^f_{\mathrm{Hoch}}(g)\big)(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= a_1 \cdot_M (f + g)(a_2, \ldots, a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i g(a_1, \ldots, a_{i-1}, (\mu + \cdot_M)(a_i, a_{i+1}), \ldots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1}(f + g)(a_1, \ldots, a_n) \cdot_M a_{n+1},\end{aligned}$$

对于 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \in \mathcal{A}^{n,1}$（即所有 a_i 都来自 A，只有一个例外，它来自 M）。最后，为了更好地理解项 $h_P(f, g)$，我们首先将 $\mathrm{Hom}(\mathsf{k}[Y_l] \otimes (A \oplus M)^{\otimes l}, A \oplus M)$ 中的一个元素视为自由 dendriform 余代数 $\oplus_{n=1}^{\infty}\mathsf{k}[Y_n] \otimes (s^{-1}A \oplus s^{-1}M)^{\otimes n}$ 上次数为 $(l-1)$ 的余导子。详情见 [38]。在这一对应下，Majumdar-Mukherjee 括号可视为 dendriform 余代数 $\oplus_{n=1}^{\infty}\mathsf{k}[Y_n] \otimes (s^{-1}A \oplus s^{-1}M)^{\otimes n}$ 上余导子的交换子括号。因此，对于任意 $y \in Y_n$（即$y = y_1 \vee y_2$对应某个唯一的 $(i-1)$-树 $y_1 \in Y_{i-1}$ 和 $(n-i)$-树 $y_2 \in Y_{n-i}$）以及 $u_1, \ldots, u_n \in M$，

$$\begin{aligned}&(h_P(f, g))(y; u_1, \ldots, u_n) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \big(\underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{j \text{ times}} \circ (\widetilde{f} + \widetilde{g}) \circ \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{(n-j) \text{ times}} \big)(y; u_1, \ldots, u_n) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \Big\{ n! f\big(P(u_1), \ldots, P(u_n)\big) - n(n-1)! P g\big(P(u_1), \ldots, u_i, \ldots, P(u_n)\big) \Big\} \\ &= (-1)^n \Big\{ f\big(P(u_1), \ldots, P(u_n)\big) - P g\big(P(u_1), \ldots, P(u_{i-1}), u_i, P(u_{i+1}), \ldots, P(u_n)\big) \Big\}.\end{aligned}$$

因此，余边界映射 δ_{rAvg}由 $\delta_{\mathrm{rAvg}}((f, g, \gamma)) = \big(\delta_{\mathrm{Hoch}}(f)\ \delta^f{}_{\mathrm{Hoch}}(g)\ \delta^P_{\mathrm{Diass}}(\gamma) + h_P(f, g)\big)$给出，其中 $(f, g, \gamma) \in C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$。

设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。下面，我们构造一个长正合列，将算子 P 的上同调与整个相对平均代数$M \xrightarrow{P} A$. 的上同调联系起来。我们首先考虑一个新的上链复形 $\{C^\bullet_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A)\ \delta_{\mathrm{AssBimod}}\}$，其中

$$C^0_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A) = 0 \quad \text{and} \quad C^{n \geq 1}_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n-1,1}, M).$$

余边界映射 $\delta_{\mathrm{AssBimod}}$ 由下式给出：

$$\delta_{\mathrm{AssBimod}}((f, g)) = (\delta_{\mathrm{Hoch}}(f), \delta^f_{\mathrm{Hoch}}(g)), \text{ for } (f, g) \in C^{n \geq 1}_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A).$$

我们将此复形的 n次上同调记为 $H^n_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A)$。由于该上同调恰好刻画了结合代数 A 和 A-双模 M的信息，我们称此上同调为结合双模 ${}^A M^A$ 的上同调（即结合代数 A 与 A-双模M）。

5.11. 定理。设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。则存在一个长正合列

$$\cdots \to H^{n-1}_P(M, A) \to H^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A) \to H^n_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A) \to H^n_P(M, A) \to \cdots \tag{24}$$

证明。注意到存在一个上链复形的短正合列

$$0 \to \{CY^{\bullet-1}(M_P, A), \delta^P_{\mathrm{Diass}}\} \to \{C^\bullet_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A), \delta_{\mathrm{rAvg}}\} \to \{C^\bullet_{\mathrm{AssBimod}}({}^A M^A, {}^A M^A), \delta_{\mathrm{AssBimod}}\} \to 0$$

复形之间具有显然的映射。该短正合列在上同调群上诱导出长正合列（24）。□

平均代数的上同调（系数取伴随双模）。设 $A \xrightarrow{P} A$ 是一个平均代数。对于每个 $n \geq 0$，我们定义 $C^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A)$ 为由 n-余链组成的空间：

$$C^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ \mathrm{Hom}(A, A) & \text{if } n = 1, \\ \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{n-1}] \otimes A^{\otimes n-1}, A) & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

于是存在一个嵌入 $i\colon C^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A) \hookrightarrow C^n_{\mathrm{rAvg}}(A \xrightarrow{P} A)$，其定义如下：

$$i(f) = (f, f), \text{ for } f \in C^1_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A),$$
$$i(f, \gamma) = (f, f, \gamma), \text{ for } (f, \gamma) \in C^{n\geq 2}_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A).$$

设 $(f, \gamma) \in C^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A)$。这里我们假设，当 $n = 1$ 时，$\gamma = 0$。于是

$$\delta_{\mathrm{rAvg}}\big(i(f,\gamma)\big) = \delta_{\mathrm{rAvg}}\big((f,f,\gamma)\big) = \big(\delta_{\mathrm{Hoch}}(f), \underbrace{\delta^f_{\mathrm{Hoch}}(f)}_{=\delta_{\mathrm{Hoch}}(f)}, \delta^P_{\mathrm{Diass}}(\gamma) + h_P(f,f)\big) \in \mathrm{im}(i).$$

这表明映射 $\delta_{\mathrm{rAvg}}\colon C^n_{\mathrm{rAvg}}(A \xrightarrow{P} A) \to C^{n+1}$ 平均映射$(A \xrightarrow{P} A)$ 限制为一个映射

$$\delta_{\mathrm{Avg}} : C^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A) \to C^{n+1}_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A)$$

它满足 $\delta_{\mathrm{rAvg}} \circ i = i \circ \delta_{\mathrm{Avg}}$。具体而言，映射 δ_{Avg} 定义如下：

$$\delta_{\mathrm{Avg}}((f,\gamma)) = (\delta_{\mathrm{Hoch}}(f), \delta^P_{\mathrm{Diass}}(\gamma) + h_P(f,f)), \text{ for } (f,\gamma) \in C^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A).$$

由条件 $(\delta_{\mathrm{rAvg}})^2 = 0$ 可知，映射 δ_{Avg} 也是一个微分（即 $(\delta_{\mathrm{Avg}})^2 = 0$）。因此，$\{C^\bullet_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A)\ \delta_{\mathrm{Avg}}\}$ 是一个上链复形。相应的上同调称为平均代数 $A \xrightarrow{P} A$ 的上同调。我们用 $H^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A)$ 表示第 n 个上同调群。

下面的结果表明，平均代数的上同调构成一个长正合列。这是定理 5.11 的一个特例。

5.12. 定理。设 $A \xrightarrow{P} A$ 是一个平均代数。则存在一个长正合列

$$\ldots \to H^{n-1}_P(A, A) \to H^n_{\mathrm{Avg}}(A \xrightarrow{P} A) \to H^n_{\mathrm{Hoch}}(A, A) \to H^n_P(A, A) \to \cdots.$$

这里，$H^n_P(A, A)$ 是平均算子 P的 n 阶上同调群，而 $H^n_{\mathrm{Hoch}}(A, A)$ 是结合代数 A的 n 阶霍赫希尔德上同调群。

相对平均代数的上同调（取任意双模）。这里我们将介绍取双模为系数的相对平均代数上同调。我们将在第 7 节利用这种上同调研究阿贝尔扩张。

设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，且 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 是其上的一个双模。对于每个 $n \geq 0$，我们定义 n余链空间 $C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$ 如下：

$$C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0, \\ \mathrm{Hom}(A, B) \oplus \mathrm{Hom}(M, N) & \text{if } n = 1, \\ \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, B) \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n-1,1}, N) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbf{k}[Y_{n-1}] \otimes M^{\otimes n-1}, B) & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

为定义余边界映射，我们首先考虑半直积相对平均代数 $\{C^\bullet_{\mathrm{rAvg}}(M \oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A \oplus B)\ \delta_{\mathrm{rAvg}}\}$的上链复形 $M \oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A \oplus B$（见定理3.24），其系数取为伴随双模。然后，对每个 $n \geq 0$，都有一个显然的嵌入

$$C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B) \hookrightarrow C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A \oplus B).$$

此外，映射 $\delta_{\mathrm{rAvg}}\colon C^n_{\mathrm{rAvg}}(M\oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A\oplus B) \to C^{n+1}{}_{\mathrm{rAvg}}(M\oplus N \xrightarrow{P\oplus Q} A\oplus B)$ 限制为映射（仍以相同符号表示） $\delta_{\mathrm{rAvg}}: C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B) \to C^{n+1}{}_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$。因此$\{C^\bullet_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)\ \delta_{\mathrm{rAvg}}\}$成为一个上链复形。注意，受限映射 δ_{rAvg}的显式表达式为

$$\delta_{\mathrm{rAvg}}((f,g,\gamma)) = \big(\delta_{\mathrm{Hoch}}(f), \delta^f_{\mathrm{Hoch}}(g), \delta^P_{\mathrm{Diass}}(\gamma) + h_{P,Q}(f,g)\big),$$

对于 $(f,g,\gamma) \in C^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$。这里， δ_{Hoch}是结合代数 A 上取值于 A-双模 B的Hochschild余边界算子；对于任意的 $f \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, B)$，映射$\delta^f{}_{\mathrm{Hoch}}\colon \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n-1,1}, N) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n,1}, N)$定义为

$$\begin{aligned}\big(\delta^f_{\mathrm{Hoch}}(g)\big)(a_1,\dots,a_{n+1}) &= (l + \cdot_N)(a_1, (f+g)(a_2,\dots,a_{n+1}))\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i g\big(a_1,\dots,a_{i-1},(\mu + l_M + r_M)(a_i,a_{i+1}),\dots,a_{n+1}\big)\\ &\quad + (-1)^{n+1}(r + \cdot_N)((f+g)(a_1,\dots,a_n),a_{n+1}),\end{aligned}$$

对于 $g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{n,1}, N)$以及 $a_1\otimes\cdots\otimes a_{n+1} \in \mathcal{A}^{n,1}$。映射$\delta^P_{\mathrm{Diass}}$是诱导的双结合代数的余边界算子 M_P，其系数取自表示 B （见命题3.26）。最后，映射$h_{P,Q}(f,g)$定义为

$$(h_{P,Q}(f,g))(y;u_1,\dots,u_n) = (-1)^n\big(f(P(u_1),\dots,P(u_n)) - Qg(P(u_1),\dots,u_i,\dots,P(u_n))\big),$$

对于 $y \in Y_n$ （它可以唯一地写成 $y = y_1 \vee y_2$，其中某个$(i-1)$-树为 y_1 且某个$(n-i)$-树为 y_2）以及$u_1, \dots, u_n \in M$。

复形 $\{C^\bullet_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)\ \delta_{\mathrm{rAvg}}\}$的上同调称为相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$关于双模 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 的上同调。我们将第 n 上同调群记为 $H^n_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$。

5.13. 注。 在例 3.21 中，我们看到，平均代数上的双模可以视为相应相对平均代数上的双模。基于这一观点，可以定义平均代数关于其上双模的上同调。

6. Deformations of relative averaging algebras

本节中，我们将借助上同调理论研究相对平均代数的形式变形和无穷小变形。特别地，我们证明，相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的所有无穷小变形的等价类集合与第二上同调群$H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$之间存在双射。

设 R 是一个带单位元 1_{R} 的交换含幺环。R 的一个增广是一个同态 $\varepsilon : \mathsf{R} \to \mathbf{k}$，满足 $\varepsilon(1_{\mathsf{R}}) = 1_{\mathbf{k}}$. 在本节中，我们假设 R 是一个带增广 ε 的交换含幺环。对于这样的 R，我们可以仿照定义 3.1(ii)，将向量空间和线性映射替换为 R-模和 R-线性映射，从而定义 R-相对平均代数的概念。换言之，R-相对平均代数就是 R-模范畴中的相对平均代数。R-相对平均代数之间的态射也可以类似地定义。注意，任何相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 都可以视为一个 R-相对平均代数，其中 A和 M 上的 R-模结构分别由 $r\cdot a = \varepsilon(r)a$ 和 $r\cdot u = \varepsilon(r)u$ 给出，其中 $r \in \mathsf{R}$， $a \in A$， $u \in M$。

6.1. 定义。相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的一个 R-变形由一个四元组 $(\mu_{\mathsf{R}}, l_{\mathsf{R}}, r_{\mathsf{R}}, P_{\mathsf{R}})$ 组成，其中各项均为 R-双线性映射

$$\mu_{\mathsf{R}} : (\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} A)\times(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} A) \to \mathsf{R}\times_{\mathbf{k}} A, \qquad l_{\mathsf{R}} : (\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} A)\times(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} M) \to \mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} M,$$

$$r_{\mathsf{R}}\colon\ (\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} M)\times(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} A) \to \mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} M \text{ 以及一个 } \mathsf{R}\text{-线性映射 } P_{\mathsf{R}}\colon\ \mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} M \to \mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}} A$$

使得以下条件成立:

(i) $(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A,\mu_{\mathsf{R}})$ 是一个 R-结合代数，$(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M,l_{\mathsf{R}},r_{\mathsf{R}})$ 是其上的双模，且 R-线性映射$P_R:\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M\to\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A$ 是一个相对平均算子。换言之，将上述结构分别置于 $\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A$ 和 $\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M$上，可得一个 R-相对平均代数 $\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M\xrightarrow{P_{\mathsf{R}}}\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A$。

(ii) 有序对 $(\varepsilon\otimes_{\mathbf{k}}\mathrm{id}_A,\varepsilon\otimes_{\mathbf{k}}\mathrm{id}_M):(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M\xrightarrow{P_{\mathsf{R}}}\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A)\ (M\xrightarrow{P}A)$ 是 R-相对平均代数的一个态射。

6.2. 定义. 设 $M\xrightarrow{P}A$ 是一个相对平均代数。若存在一个 R-相对平均代数的同构，使得两个 R-变形 $(\mu_{\mathsf{R}},l_{\mathsf{R}},r_{\mathsf{R}},P_{\mathsf{R}})$ 和 $(\mu'_{\mathsf{R}},l'_{\mathsf{R}},r'_{\mathsf{R}},P'_{\mathsf{R}})$

$$(\Phi,\Psi):(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M\xrightarrow{P_{\mathsf{R}}}\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A)\rightsquigarrow(\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}M\xrightarrow{P'_{\mathsf{R}}}\mathsf{R}\otimes_{\mathbf{k}}A)$$

满足 $(\varepsilon\otimes_{\mathbf{k}}\mathrm{id}_A)\circ\Phi=(\varepsilon\otimes_{\mathbf{k}}\mathrm{id}_A)$ 和 $(\varepsilon\otimes_{\mathbf{k}}\mathrm{id}_M)\circ\Psi=(\varepsilon\otimes_{\mathbf{k}}\mathrm{id}_M)$。

现在我们来考虑两种情形：$\mathsf{R}=\mathbf{k}[[t]]$（形式幂级数环）以及 $\mathsf{R}=\mathbf{k}[[t]]/(t^2)$（对偶数的局部阿廷环）。在第一种情形下，R-变形称为形式变形；在第二种情形下，R-变形称为无穷小变形。下面给出形式变形更精确的描述。

6.3. 定义。(i) 设 $M_{l_M,r_M}\xrightarrow{P}A_\mu$ 是给定的相对平均代数。它的形式变形由一个形式和四元组 (μ_t,l_t,r_t,P_t) 组成,

$$\mu_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\mu_i,\qquad l_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^il_i,\qquad r_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^ir_i\ \text{ and }\ P_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^iP_i \tag{25}$$

（其中 $\mu_i:A\times A\to A$, $l_i:A\times M\to M$, $r_i:M\times A\to M$ 和 $P_i:M\to A$ 是双线性/线性映射, $i\geq 0$ 满足 $\mu_0=\mu$, $l_0=l_M$, $r_0=r_M$和 $P_0=P$），使得 $A[[t]]=(A[[t]],\mu_t)$ 是 $\mathbf{k}[[t]]$ 上的结合代数，且 $M[[t]]=(M[[t]],l_t,r_t)$ 是代数 $A[[t]]$ 上的双模，并且 $\mathbf{k}[[t]]$-线性映射 $P_t:M[[t]]\to A[[t]]$ 是相对平均算子。换言之，$M[[t]]\xrightarrow{P_t}A[[t]]$ 是 $\mathbf{k}[[t]]$ 上的相对平均代数。

（ii）如果存在一对形式和（φ_t, ψ_t），则形式变形（μ_t, l_t, r_t, P_t）和（μ'_t, l'_t, r'_t, P'_t）是等价的

$$\varphi_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\varphi_i\quad\text{ and }\quad\psi_t=\sum_{i=0}^{\infty}t^i\psi_i$$

（其中 $\varphi_i:A\to A$ 和 $\psi_i:M\to M$ 是线性映射，对于 $i\geq 0$，满足 $\varphi_0=\mathrm{id}_A$ 和 $\psi_0=\mathrm{id}_M$），使得

$$(\varphi_t,\psi_t):(M[[t]]\xrightarrow{P_t}A[[t]])\rightsquigarrow(M[[t]]\xrightarrow{P'_t}A[[t]])$$

是一个相对平均代数的同构在 $\mathbf{k}[[t]]$ 上。因此记作（μ_t, l_t, r_t, P_t）$\sim$（μ'_t, l'_t, r'_t, P'_t）.

由上述定义可知，由 (μ_t,l_t,r_t,P_t) 给出的四元组 25) 是相对平均代数 $M\xrightarrow{P}A$ 的形式变形，当且仅当满足以下方程组:

$$\sum_{i+j=n}\mu_i(\mu_j(a,b),c)=\sum_{i+j=n}\mu_i(a,\mu_j(b,c)), \tag{26}$$

$$\sum_{i+j=n}l_i(\mu_j(a,b),u)=\sum_{i+j=n}l_i(a,l_j(b,u)), \tag{27}$$

$$\sum_{i+j=n}r_i(l_j(a,u),b)=\sum_{i+j=n}l_i(a,r_j(u,b)), \tag{28}$$

$$\sum_{i+j=n}r_i(r_j(u,a),b)=\sum_{i+j=n}r_i(u,\mu_j(a,b)), \tag{29}$$

$$\sum_{i+j+k=n}\mu_i\big(P_j(u),P_k(v)\big)=\sum_{i+j+k=n}P_i\big(l_j(P_k(u),v)\big)=\sum_{i+j+k=n}P_i\big(r_j(u,P_k(v))\big), \tag{30}$$

对所有的 a、b、$c \in A$、u、$v \in M$ 和 $n \geq 0$ 均成立。这些方程称为变形方程。注意，对于 $n = 0$，变形方程成立，因为 $M_{l_M,\ r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$ 是相对平均代数。

对于 $n = 1$。由（26）可得

$$\mu_1(a \cdot b, c) + \mu_1(a, b) \cdot c = \mu_1(a, b \cdot c) + a \cdot \mu_1(b, c), \text{ for } a, b, c \in A,$$

这等价于 $\delta_{\mathrm{Hoch}}(\mu_1) = 0$。为总结关于 $n = 1$ 的恒等式（27）、（28）、（29），我们定义一个元素 $\beta_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{1,1}, M)$，使其满足

$$\beta_1(a, u) = l_1(a, u) \text{ and } \beta_1(u, a) = r_1(u, a), \text{ for } a \in A, u \in M. \tag{31}$$

于是可得 $\delta^{\mu_1}_{\mathrm{Hoch}}(\beta_1) = 0$。最后，关于 $n = 1$ 的恒等式（30）等价于

$$\big(\delta^P_{\mathrm{Diass}}(P_1) + h_P(\mu_1, \beta_1)\big)(y; u, v) = 0, \text{ for } y = \curlyvee, \ \curlyvee \text{ and } u, v \in M.$$

综合以上结果，可得 $\delta_{\mathrm{rAvg}}(\mu_1, \beta_1, P_1) = 0$. 换言之，$(\mu_1, \beta_1, P_1) \in Z^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 是相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的上链复形中、取值于伴随双模系数的一个 2-余循环。

接下来，设 (μ_t, l_t, r_t, P_t) 和 $(\mu'_t, l'_t, r'_t, P'_t)$ 是相对平均代数 $M_{l_M, r_M} \xrightarrow{P} A_\mu$的两个等价形式变形。由定义 6.3（ii）可知，存在一对 (φ_t, ψ_t) 形式和，使得以下条件成立：

$$\begin{aligned}
\sum_{i+j=n} \varphi_i(\mu_j(a, b)) &= \sum_{i+j+k=n} \mu'_i\big(\varphi_j(a), \varphi_k(b)\big),\\
\sum_{i+j=n} \psi_i(l_j(a, u)) &= \sum_{i+j+k=n} l'_i\big(\varphi_j(a), \psi_k(u)\big),\\
\sum_{i+j=n} \psi_i(r_j(u, a)) &= \sum_{i+j+k=n} r'_i\big(\psi_j(u), \varphi_k(a)\big),\\
\sum_{i+j=n} \varphi_i \circ P_j &= \sum_{i+j=n} P'_i \circ \psi_j,
\end{aligned}$$

对于 a、$b \in A$ 和 $u \in M$。如前所述，所有这些关系对于 $n = 0$ 作为 $\varphi_0 = \mathrm{id}_A$ 和 $\psi_0 = \mathrm{id}_M$ 都成立。然而，对于 $n = 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
\mu_1(a, b) - \mu'_1(a, b) &= a \cdot \varphi_1(b) + \varphi_1(a) \cdot b - \varphi_1(a \cdot b),\\
\beta_1(a, u) - \beta'_1(a, u) &= a \cdot_M \psi_1(u) + \varphi_1(a) \cdot_M u - \psi_1(a \cdot_M u),\\
\beta_1(u, a) - \beta'_1(u, a) &= u \cdot_M \varphi_1(a) + \psi_1(u) \cdot_M a - \psi_1(u \cdot_M a),\\
P_1 - P'_1 &= P \circ \psi_1 - \varphi_1 \circ P.
\end{aligned}$$

结合这些关系，我们得到

$$(\mu_1, \beta_1, P_1) - (\mu'_1, \beta'_1, P_1) = \big(\delta_{\mathrm{Hoch}}(\varphi_1), \delta^{\varphi_1}_{\mathrm{Hoch}}(\psi_1), h_P(\varphi_1, \psi_1)\big) = \delta_{\mathrm{rAvg}}((\varphi_1, \psi_1)).$$

因此，等价的形式变形产生上同调的2-余循环。

如前所述，相对平均代数的无穷小变形是一个 R-变形，其中 $\mathrm{R} = \mathbf{k}[[t]]/(t^2)$。因此，无穷小变形可以被视为形式变形的截断版本（模 t^2）。无穷小变形之间的等价关系可以类似地定义。

6.4. 定理。设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数。则存在一个双射

$$(\textit{infinitesimal deformations of } M \xrightarrow{P} A)/\sim \quad \leftrightsquigarrow \quad H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A).$$

证明。 设 $(\mu_t = \mu + t\mu_1, l_t = l + tl_1, r_t = r + tr_1, P_t = P + tP_1)$ 是相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的一个无穷小变形。那么可以证明（与形式变形类似），三元组 $(\mu_1, \beta_1, P_1) \in Z^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$ 是一个 2-余循环，其中 $\beta_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{1,1}, M)$ 由式 (31) 给出。此外，

等价的无穷小变形产生上同调的2-余循环。因此，存在一个良定义映射

$$\Gamma : (\text{infinitesimal deformations of } M \xrightarrow{P} A)/\sim \to \ H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A).$$

为得到另一个方向上的映射，我们首先考虑一个 2-余循环 $(\mu_1, \beta_1, P_1) \in Z^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$。于是容易看出，2-余循环 (μ_1, β_1, P_1) 诱导出一个无穷小变形

$$(\mu_t = \mu + t\mu_1, l_t = l + tl_1, r_t = r + tr_1, P_t = P + tP_1)$$

相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$，其中映射 l_1, r_1 由 β_1 通过 (31) 定义。设 (μ_1', β_1', P_1') 是另一个与 (μ_1, β_1, P_1) 上同调的 2-余循环，即 $(\mu_1, \beta_1, P_1) - (\mu_1', \beta_1', P_1') = \delta_{\mathrm{rAvg}}((\varphi_1, \psi_1))$，其中 $(\varphi_1, \psi_1) \in C^1_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A)$。于是容易验证，相应的无穷小变形 (μ_t, l_t, r_t, P_t) 和 $(\mu_t', l_t', r_t', P_t')$ 通过这一对 $(\varphi_t = \mathrm{id}_A + t\varphi_1, \psi_t = \mathrm{id}_M + t\psi_1)$ 等价。因此，我们得到一个映射

$$\Theta : H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A) \ \to \ (\text{infinitesimal deformations of } M \xrightarrow{P} A)/\sim .$$

最后，验证映射 Γ 和 Θ 互为逆映射是显然的。这就完成了证明。□

7. Abelian extensions of relative averaging algebras

本节旨在研究由其双模 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 对相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 进行的阿贝尔扩张。我们证明，这类阿贝尔扩张的同构类与第二上同调群 $H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$ 存在双射对应。

设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，$N \xrightarrow{Q} B$ 是一个二项链复形（不一定是双模）。注意，$N \xrightarrow{Q} B$ 可视为一个相对平均代数，其中 B 上的结合乘法为平凡乘法，且 N 上的 B- 双模结构为平凡结构。由此，我们有如下定义。

7.1. 定义. 相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 由二项链复形 $N \xrightarrow{Q} B$ 进行的阿贝尔扩张，是指一个相对平均代数 $\widehat{M} \xrightarrow{\widehat{P}} \widehat{A}$，并带有如下形式的相对平均代数短正合列

(32)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\overline{i}} & \widehat{M} & \xrightarrow{\overline{p}} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle Q} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{P}} & & \downarrow{\scriptstyle P} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow[i]{} & \widehat{A} & \xrightarrow[p]{} & A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

有时，在理解确切序列的情况下，我们将上述阿贝尔扩张记作相对平均代数 $\widehat{M} \xrightarrow{P} \widehat{A}$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$阿贝尔扩张（32）的一个截面由一对（s，$\overline{s}$）线性映射 $s: A \to A$ 和 $\overline{s}: M \to M$ 给出，它们满足 $p \circ s = \mathrm{id}_A$ 以及 $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}_M$。给定任意截面（$s$，$\overline{s}$），我们定义两个双线性映射（均使用相同的记号）$\cdot_B: A \times B \to B$ 和 $\cdot_B: B \times A \to B$ 如下：

$$a \cdot_B b = s(a) \cdot_{\widehat{A}} i(b) \ \text{ and } \ b \cdot_B a = i(b) \cdot_{\widehat{A}} s(a), \ \text{for } a \in A, b \in B.$$

这两个映射使 B 成为一个 A-双模。类似地，有两个双线性映射（均用相同的符号表示）$\cdot_N$: $A \times N \to N$ 和 $\cdot_N$: $N \times A \to N$，定义如下：

$$a \cdot_N n = s(a) \cdot_{\widehat{M}} \overline{i}(n) \ \text{ and } \ n \cdot_N a = \overline{i}(n) \cdot_{\widehat{M}} s(a), \ \text{for } a \in A, n \in N.$$

这里，$\cdot_{\widehat{M}}$ 同时表示 M上的左、右 A-作用。这两个映射使 N 成为一个 A-双模。最后，我们定义双线性映射 $l\colon M\times B\to N$和 $r\colon B\times M\to N$如下：

$$l(u,b)=\overline{s}(u)\cdot_{\widehat{M}} i(b)\quad\text{and}\quad r(b,u)=i(b)\cdot_{\widehat{M}}\overline{s}(u),\ \text{for } u\in M, b\in B.$$

显然，映射 l、 r 满足恒等式（10）和（11）。最后，对于任意 $u\in M$和 $n\in N$，

$$P(u)\cdot_B Q(n)=sP(u)\cdot_{\widehat{A}} iQ(n)=\widehat{P}\overline{s}(u)\cdot_{\widehat{A}}\widehat{P}\overline{i}(n)=\begin{cases}=\widehat{P}\big(\widehat{P}(\overline{s}(u))\cdot_{\widehat{M}}\overline{i}(n)\big)\\ =\widehat{P}\big(\overline{s}(u)\cdot_{\widehat{M}}\widehat{P}\overline{i}(n)\big)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}=\widehat{P}\big(sP(u)\cdot_{\widehat{M}}\overline{i}(n)\big) &= Q\big(P(u)\cdot_N n\big),\\ =\widehat{P}\big(\overline{s}(u)\cdot_{\widehat{M}} iQ(n)\big) &= Q\big(l(u,Q(n))\big).\end{cases}$$

类似地，可以证明

$$Q(n)\cdot_B P(u)=iQ(n)\cdot_{\widehat{A}} sP(u)=\widehat{P}\overline{i}(n)\cdot_{\widehat{A}}\widehat{P}\overline{s}(u)=\begin{cases}=\widehat{P}\big(\widehat{P}\overline{i}(n)\cdot_{\widehat{M}}\overline{s}(u)\big)\\ =\widehat{P}\big(\overline{i}(n)\cdot_{\widehat{M}}\widehat{P}\overline{s}(u)\big)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}=\widehat{P}\big(iQ(n)\cdot_{\widehat{M}}\overline{s}(u)\big) &= Q\big(r(Q(n),u)\big),\\ =\widehat{P}\big(\overline{i}(n)\cdot_{\widehat{M}} sP(u)\big) &= Q(n\cdot_N P(u)).\end{cases}$$

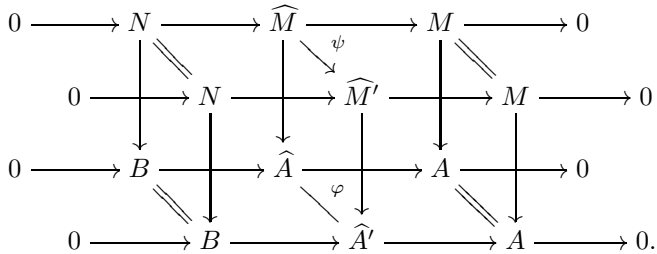
综合以上结果可得，$(N\xrightarrow{Q}B,l,r)$ 是相对平均代数 $M\xrightarrow{P}A$ 上的双模。这称为由阿贝尔扩张 (32) 导出的双模结构。注意，这个双模结构与截面的选取无关。为此，设 $(s',\overline{s}')$ 是 (32) 的另一个截面。于是我们注意到，对于 $a\in A$ 和 $u\in M$， $s(a)-s'(a)\in\ker(p)=\mathrm{im}(i)$，且 $\overline{s}(u)-\overline{s}'(u)\in\ker(\overline{p})=\mathrm{im}(\overline{i})$。设 $\cdot'_B$, $\cdot'_N$ 和 l',r' 是由截面 $(s',\overline{s}')$ 诱导的映射。则有

$$a\cdot_B b-a\cdot'_B b=\big(s(a)-s'(a)\big)\cdot_{\widehat{A}} i(b)=0\quad\text{and}\quad b\cdot_B a-b\cdot'_B a=i(b)\cdot_{\widehat{A}}\big(s(a)-s'(a)\big)=0,$$
$$a\cdot_N n-a\cdot'_N n=\big(s(a)-s'(a)\big)\cdot_{\widehat{M}}\overline{i}(n)=0\quad\text{and}\quad n\cdot_N a-n\cdot'_N a=\overline{i}(n)\cdot_{\widehat{M}}\big(s(a)-s'(a)\big)=0,$$
$$l(u,b)-l'(u,b)=\big(\overline{s}(u)-\overline{s}'(u)\big)\cdot_{\widehat{M}} i(b)=0\quad\text{and}\quad r(b,u)-r'(b,u)=i(b)\cdot_{\widehat{M}}\big(\overline{s}(u)-\overline{s}'(u)\big)=0.$$

因此，我们的断言得证。

7.2. 定义. 设 $M\xrightarrow{P}A$ 是一个相对平均代数， $N\xrightarrow{Q}B$ 是一个二项链复形。若存在一个相对平均代数的同构 $(\varphi,\psi):(\widehat{M}\xrightarrow{\widehat{P}}\widehat{A})\,(\widehat{M}'\xrightarrow{\widehat{P}'}\widehat{A}')$，使得下图交换，则称两个阿贝尔扩张 $\widehat{M}\xrightarrow{\widehat{P}}\widehat{A}$ 和 $\widehat{M}'\xrightarrow{\widehat{P}'}\widehat{A}'$ 同构

(33)



设 $\widehat{M}\xrightarrow{\widehat{p}}\widehat{A}$ 和 $\widehat{M}'\xrightarrow{\widehat{p}'}\widehat{A}'$ 是上述定义中的两个同构的阿贝尔扩张。容易看出，它们在二项链复形 $N\xrightarrow{Q}B$ 上诱导的相应双模相同。**7.3.** 记号. 设 $M\xrightarrow{P}A$ 是一个相对平均代数，$(N\xrightarrow{Q}B.l,r)$ 是其上的给定双模。我们用 $\mathrm{Ext}(M\xrightarrow{P}A;N\xrightarrow{Q}B)$ 表示所有这样的阿贝尔扩张的同构类集合：它们是由二项复形 $N\xrightarrow{Q}B$ 对 $M\xrightarrow{P}A$ 作出的，且诱导的双模与给定双模相同。

在下面的结果中，我们用相对平均代数的第二上同调群来参数化 $\mathrm{Ext}(M\xrightarrow{P}A;N\xrightarrow{Q}B)$ 的空间。

7.4. 定理。设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个相对平均代数，且 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 是其上的一个给定双模。那么，$\mathbf{Ext}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$ 与第二上同调群 $H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$ 之间存在双射对应。

证明。设 $\widehat{M} \xrightarrow{P} \widehat{A}$ 是相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的一个阿贝尔扩张，由二项复形 $N \xrightarrow{Q} B$ 表示，对应 $\mathbf{Ext}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B)$ 中的一个元素。设 $(s, \overline{s})$ 是一个截面。于是我们定义一个映射三元组 (α, β, γ)

$$
\begin{aligned}
&\alpha \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes 2}, B), \quad \alpha(a,b) = s(a) \cdot_{\widehat{A}} s(b) - s(a \cdot b),\\
&\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}^{1,1}, N), \quad \begin{cases} \beta(a,u) = s(a) \cdot_{\widehat{M}} \overline{s}(u) - \overline{s}(a \cdot_M u),\\ \beta(u,a) = \overline{s}(u) \cdot_{\widehat{M}} s(a) - \overline{s}(u \cdot_M a), \end{cases}\\
&\gamma \in \mathrm{Hom}(M, B), \quad \gamma(u) = (\widehat{P} \circ \widehat{s} - s \circ P)(u),
\end{aligned}
$$

分别对应 a、$b \in A$ 和 $u \in M$。容易验证，$(\alpha, \beta, \gamma) \in Z^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$ 是相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 的上同调复形中、取值于双模 $(N \xrightarrow{Q} B, l, r)$ 的一个 2-余循环。此外，$H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$ 中对应的上同调类不依赖于截面的选择。

令 $M \xrightarrow{P} \widehat{A}$ 且 $\widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{P}'} A'$ 是两个同构的阿贝尔扩张。对于第一个阿贝尔扩张的任意截面 $(s, \overline{s})$，有

$$
p' \circ (\varphi \circ s) = p \circ s = \mathrm{id}_A \quad \text{and} \quad \overline{p}' \circ (\psi \circ \overline{s}) = \overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}_M.
$$

因此，$(\varphi \circ s, \psi \circ \overline{s})$ 是第二个阿贝尔扩张的一个截面。若 $(\alpha', \beta', \gamma') \in Z^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$ 是与第二个阿贝尔扩张及其截面 $(\varphi \circ s, \psi \circ \overline{s})$ 对应的 2-余循环，则

$$
\begin{aligned}
\alpha'(a,b) &= (\varphi \circ s)(a) \cdot_{\widehat{A}'} (\varphi \circ s)(b) - (\varphi \circ s)(a \cdot b)\\
&= \varphi\big(s(a) \cdot_{\widehat{A}} s(b) - s(a \cdot b)\big) = \varphi(\alpha(a,b)) = \alpha(a,b) \quad (\because \varphi|_B = \mathrm{id}_B).
\end{aligned}
$$

类似地，可以证明 $\beta' = \beta$ 且 $\gamma' = \gamma$。因此，我们得到 $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha', \beta', \gamma')$。由此可得到一个良定义映射

$$
\Lambda : \mathrm{Ext}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B) \ \to\ H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B).
$$

为构造反方向的映射，我们取一个 2-余循环 $(\alpha, \beta, \gamma) \in Z^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$。取 $\widehat{A} = A \oplus B$ 和 $\widehat{M} = M \oplus N$，并考虑双线性映射

$$
\begin{aligned}
&\mu_{\widehat{A}} : \widehat{A} \times \widehat{A} \to \widehat{A}, \quad \mu_{\widehat{A}}\big((a,b),(a',b')\big) = \big(a \cdot a', a \cdot_B b' + b \cdot_B a' + \alpha(a,a')\big),\\
&l_{\widehat{M}} : \widehat{A} \times \widehat{M} \to \widehat{M}, \quad l_{\widehat{M}}\big((a,b),(u,n)\big) = \big(a \cdot_M u, a \cdot_N n + r(b,u) + \beta(a,u)\big),\\
&r_{\widehat{M}} : \widehat{M} \times \widehat{A} \to \widehat{M}, \quad r_{\widehat{M}}\big((u,n),(a,b)\big) = \big(u \cdot_M a, l(u,b) + n \cdot_N a + \beta(u,a)\big),
\end{aligned}
$$

对于 $(a,\ b)$、$(a',\ b') \in A$ 以及 $(u,\ n) \in M$。于是容易看出，$(A,\ \mu_{\widehat{A}})$ 是一个结合代数，并且 $(M,\ l_{\widehat{M}},\ r_{\widehat{M}})$ 是其上的双模。最后，我们定义映射 $P\colon\ M \to A$，如下：

$$
\widehat{P}((u,n)) = \big(P(u), Q(n) + \gamma(u)\big), \ \text{for } (u,n) \in \widehat{M}.
$$

那么，$\widehat{P}$ 是一个相对平均算子。换言之，$\widehat{M} \xrightarrow{P} \widehat{A}$ 是一个相对平均代数。这是由二项链复形 $N \xrightarrow{Q} B$ 对相对平均代数 $M \xrightarrow{P} A$ 作出的阿贝尔扩张，并在 $\mathbf{Ext}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$ 中定义了一个元素。最后，设 (α, β, γ) 和 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 是两个上同调等价的 2-余循环，即 $(\alpha, \beta, \gamma) - (\alpha', \beta', \gamma') = \delta_{\mathrm{rAvg}}((\kappa, \eta))$，其中某个 $(\kappa, \eta) \in C^1_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A;\ N \xrightarrow{Q} B)$。若 $\widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{P}'} \widehat{A}'$ 是由 2-余循环 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 诱导的相对平均代数，则这对映射

$$
(\varphi, \psi) : (\widehat{M} \xrightarrow{\widehat{P}} \widehat{A}) \rightsquigarrow (\widehat{M}' \xrightarrow{\widehat{P}'} \widehat{A}')
$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$是阿贝尔扩张的一个同构，其中 $\varphi\colon A \to A'$, $\varphi(a,b) = (a, b+\kappa(a))$ 且 $\psi\colon M \to M'$,$\psi(u,n) = (u, n+\eta(u))$。这表明存在一个良定义映射

$$\Upsilon : H^2_{\mathrm{rAvg}}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B) \to \mathrm{Ext}(M \xrightarrow{P} A; N \xrightarrow{Q} B).$$

最后，映射 Λ 和 Υ 互为逆映射。这表明所需的双射成立。 □

8. Homotopy relative averaging algebras and homotopy diassociative algebras

在本节中，我们首先考察由 Loday 引入的 $Diass_\infty$-代数。不过，我们的定义使用起来更加简单。接下来，我们介绍同伦相对平均算子和同伦相对平均代数。我们证明，同伦相对平均代数自然地诱导出一个 $Diass_\infty$- 代数结构。我们首先回顾与 A_∞- 代数 [17] 相关的一些基本定义。

8.1. 定义。一个 A_∞-代数是一个二元组 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$，由一个分次向量空间 $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$以及一族次数为 1 的分次线性映射 $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty : \mu_k : A^{\otimes k} \to A$组成，其中 $k \geq 1$，并满足以下恒等式（称为高阶结合律）：

$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{i=1}^{n-l+1} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|}\ \mu_k\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, \mu_l(a_i, \ldots, a_{i+l-1}), a_{i+l}, \ldots, a_n\big) = 0, \tag{34}$$

对于所有 $n \geq 1$ 以及齐次元素 $a_1, \ldots, a_n \in A$.

设 $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ 是一个分次向量空间。设 $\overline{T}(A) = \oplus_{n=1}^\infty A^{\otimes n}$ 是分次向量空间 A上的自由张量代数。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，令 $C^n(A, A) := \mathrm{Hom}_n(\overline{T}(A)\ A)$ 为从分次向量空间 $\overline{T}(A)$ 到 A 的所有次数为 n 的分次线性映射所构成的空间。因此，元素 $\mu \in C^n(A, A)$ 可表示为和$\mu = \sum_{k=1}^\infty \mu_k$，其中 $\mu_k\colon A^{\otimes k} \to A$ 是次数为 n 的线性映射，对每个 $k \geq 1$ 均如此。对于 $\mu = \sum_{k=1}^\infty \mu_k \in C^m(A, A)$ 和$\nu = \sum_{l=1}^\infty \nu_l \in C^n(A, A)$，我们定义括号 $[\mu, \nu] \in C^{m+n}(A, A)$ 如下

$$[\mu, \nu] := \sum_{s=1}^\infty \sum_{k+l=s+1} \big(\mu_k \circ \nu_l - (-1)^{mn}\ \nu_l \circ \mu_k\big), \text{ where}$$

$$(\mu_k \circ \nu_l)(a_1, \ldots, a_s) = \sum_{i=1}^{s-l+1} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|}\ \mu_k\big(a_1, \ldots, a_{i-1}, \nu_l(a_i, \ldots, a_{i+l-1}), a_{i+l}, \ldots, a_s\big).$$

带有上述括号的分次向量空间 $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n(A, A)$ 是一个分次李代数。当且仅当这一对 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$ 是一个 A_∞-代数时，元素 $\mu = \sum_{k=1}^\infty \mu_k \in C^1(A, A)$ 才是分次李代数 $(\oplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n(A, A), [\ ,\ ])$ 的 Maurer-Cartan 元。

设 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$ 是一个 A_∞-代数。这个 A_∞-代数的表示由一对 $(M, \{\eta_k\}_{k=1}^\infty)$ 给出，其中包含一个分次向量空间 $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$，以及一族 $\{\eta_k\colon \mathcal{A}^{k-1,\ 1} \to M\}_{k=1}^\infty$ 的 1 次线性映射，它们满足恒等式（34），其中变量 a_1、.....、a_n 中恰有一个来自 M，并且相应的线性运算 μ_i 或 μ_j 被 η_i 或 η_j 替换。与非分次情形类似，此处 $\mathcal{A}^{k-1,\ 1}$ 表示 A 和 M 的所有可能张量幂的直和，其中 A 出现 $k-1$ 次（因此 M 恰好出现一次）。注意，任意 A_∞-代数 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$ 都可以实现为自身的一个表示，其中 $\eta_k = \mu_k$，对于 $k \geq 1$。

8.2. 定义。 $Diass_\infty$-代数（也称为强同伦二结合代数）是一个二元组 $(D, \{\pi_k\}_{k=1}^\infty)$，由一个分次向量空间 $D = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} D_i$ 以及一组次数为 1 的分次线性映射 $\{\pi_k : \mathsf{k}[Y_k] \otimes D^{\otimes k} \to D\}_{k=1}^\infty$ 构成，并满足以下恒等式

$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{i=1}^{n-l+1} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|} \pi_k\big(R_0^{k;i,l}(y); a_1, \ldots, a_{i-1}, \pi_l\big(R_i^{k;i,l}(y); a_i, \ldots, a_{i+l-1}\big), a_{i+l}, \ldots, a_n\big) = 0, \tag{35}$$

对所有 $n \geq 1$， $y \in Y_n$ 以及齐次元素 a_1，……， $a_n \in D$。映射 $R^{k;i,\ l}_{\ 0}$ 和 $R^{k;i,\ l}_{\ i}$ 见（3）、（4）。

注意，任何双结合代数都可以实现为一个集中在度数 -1 的 $Diass_\infty$-代数。更确切地说，若 $(D, \dashv, \vdash)$ 是一个双结合代数，则 $s^{-1}D$ （视为一个分次向量空间，其中 $(s^{-1}D)_{-1} = D$ 且 $(s^{-1}D)_i = 0$，对于 $i \neq -1$）可以赋予一个 $Diass_\infty$-代数结构，其运算$\{\pi_k : \mathbf{k}[Y_k] \otimes (s^{-1}D)^{\otimes k} \to s^{-1}D\}_{k=1}^{\infty}$ 定义如下：

$$\pi_2(\ \curlyvee\ ; s^{-1}a, s^{-1}b) = s^{-1}(a \dashv b), \quad \pi_2(\ \curlyvee\ ; s^{-1}a, s^{-1}b) = s^{-1}(a \dashv b) \ \text{ and } \pi_k = 0 \text{ for } k \neq 2.$$

8.3. 注。 设 $(D, \{\pi_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是任意一个 $Diass_\infty$-代数。利用高阶双结合恒等式 (35) 以及对 k的数学归纳法，可以证明

$$\pi_k(y; a_1, \ldots, a_k) = \pi_k(y'; a_1, \ldots, a_k), \text{ for } a_1, \ldots, a_k \in D,$$

当 y、 $y' \in Y_k$ 都可以写成一个 $(i-1)$-树与一个 $(k-i)$-树的嫁接时。

8.4. 命题。设 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是一个 A_∞-代数，$(M, \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是它的一个表示。那么，分次向量空间 $A \oplus M$ 可以赋予一个 $Diass_\infty$-代数结构，其运算 $\{\pi_k : \mathbf{k}[Y_k] \otimes (A \oplus M)^{\otimes k} \to A \oplus M\}_{k=1}^{\infty}$ 定义为

$$\pi_k\big(y; (a_1, u_1), \ldots, (a_k, u_k)\big) = \big(\mu_k(a_1, \ldots, a_k), \eta_k(a_1, \ldots, a_{i-1}, u_i, a_{i+1}, \ldots, a_k)\big), \tag{36}$$

对于 $k \geq 1$, $y \in Y_k$ （它们可以唯一地写成 $y = y_1 \vee y_2$，其中 $y_1 \in Y_{i-1}$ 是一棵 $(i-1)$-树，$y_2 \in Y_{k-i}$ 是一棵 $(k-i)$-树）以及 $(a_1, u_1) \ldots, (a_k, u_k) \in A \oplus M$.

我们将上述 $Diass_\infty$-代数简称为 $A \oplus_{Diass_\infty} M$。注意， $A \oplus_{Diass_\infty} M$将命题 3.11 中的双结合代数推广到了同伦情形。需要指出的是，上述命题的逆命题也成立。更确切地说，设 $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ 和 $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ 是两个分次向量空间，分别配备两族次数为 1 的分次线性映射 $\{\mu_k : A^{\otimes k} \to A\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{\eta_k : \mathcal{A}^{k-1,1} \to M\}_{k=1}^{\infty}$。那么，$(A, \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是一个 A_∞-代数且 $(M, \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是一个表示，当且仅当 $(A \oplus M, \{\pi_k\}_{k=1}^{\infty})$ 是一个 $Diass_\infty$-代数，其中映射 π_k'由式 (36) 给出。

下面，我们构造一个分次李代数，其 Maurer-Cartan 元与给定分次向量空间上的$Diass_\infty$-代数结构相对应。设 $D = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D_i$ 为一个分次向量空间。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，我们定义空间 $CY^n(D, D) := \mathrm{Hom}_n(\mathbf{k}[\overline{Y}] \otimes \overline{T}(D)\ D)$，其元素具有$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k$的形式，其中 $\pi_k : \mathbf{k}[Y_k] \otimes D^{\otimes k} \to D$ 是一个次数为 n 的线性映射。对于 $\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \in CY^m(D, D)$ 和$\varpi = \sum_{l=1}^{\infty} \varpi_l \in CY^l(D, D)$，我们定义一个元素 $\{\!\{\pi, \varpi\}\!\} \in CY^{m+n}(D, D)$，如下所示：

$$\{\!\{\pi, \varpi\}\!\} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k+l=s+1} (\pi_k \diamond \varpi_l - (-1)^{mn} \varpi_l \diamond \pi_k), \quad \text{where} \tag{37}$$

$$(\pi_k \diamond \varpi_l)(y; a_1, \ldots, a_s) = \sum_{i=1}^{s-l+1} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|} \pi_k\big(R_0^{k;i,l}(y); a_1, \ldots, \varpi_l(R_i^{k;i,l}(y); a_i, \ldots, a_{i+l-1}), \ldots, a_s\big),$$

对于 $y \in Y_s = Y_{k+l-1}$和齐次元素 $a_1, .., a_s \in D$。括号 $\{\!\{\ ,\ \}\!\}$ 是式（5）中给出的 Majumdar-Mukherjee 括号的分次版本。特别地，括号 $\{\!\{\ ,\ \}\!\}$ 使分次空间$\oplus_{n \in \mathbb{Z}} CY^n(D, D) = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_n(\mathbf{k}[\overline{Y}] \otimes \overline{T}(D)\ D)$成为一个分次李代数。

8.5. 命题。设 D 是一个分次向量空间。则分次向量空间 D 上的 $Diass_\infty$-代数结构与分次李代数（$\oplus_{n \in \mathbb{Z}} CY^n(D, D)$ $\{\!\{\ ,\ \}\!\}$）中的 Maurer-Cartan 元之间存在一一对应关系。

证明。 注意，元素 $\pi \in CY^1(D, D) = \mathrm{Hom}_1(\mathbf{k}[\overline{Y}] \otimes \overline{T}(D)\ D)$ 等价于一族$\{\pi_k : \mathbf{k}[Y_k] \otimes D^{\otimes k} \to D\}_{k=1}^{\infty}$ 个 1 次分次线性映射。由（37）可得， $\{\!\{\pi, \pi\}\!\} = 0$ 当且仅当这族 $\{\pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 定义了一个 $Diass_\infty$-代数结构于 D 上。 □

给定一个 A_∞-代数及其一个表示，下面我们将引入同伦相对平均算子的概念。设 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$ 是一个 A_∞-代数，$(M, \{\eta_k\}_{k=1}^\infty)$ 是它的一个表示。考虑分次李代数

$$\mathfrak{g} = \big(\oplus_{n\in\mathbb{Z}} CY^n(A\oplus M, A\oplus M) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_n(\mathbf{k}[\overline{Y}]\otimes \overline{T}(A\oplus M), A\oplus M), \{[\![\ ,\ ]\!]\big)$$

与分次向量空间 $A\oplus M$. 相关联。容易看出，分次子空间 $\mathfrak{a} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} CY^n(M, A) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_n(\mathbf{k}[\overline{Y}]\otimes \overline{T}(M)\ A)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔李子代数。令 $p\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为到子空间 $\mathfrak{a}$ 上的投影映射。另一方面，由于 $A\oplus_{Diass_\infty} M = (A\oplus M, \{\pi_k\}_{k=1}^\infty)$ 是一个 $Diass_\infty$-代数，它定义了分次李代数 $\mathfrak{g}$（即 $\{[\pi,\pi]\} = 0$）中的一个 Maurer-Cartan 元 $\pi = \sum_{k=1}^\infty \pi_k \in CY^1(A\oplus M, A\oplus M)$。此外，元素 $\pi\in \ker(p)_1$。因此，我们得到一个 V-数据 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, p, \pi)$。于是，根据定理 5.4 (i)，分次向量空间 $\mathfrak{a}$ 继承了一个 L_∞-代数结构，其运算 $\{l_k\colon \mathfrak{a}^{\otimes k}\to\mathfrak{a}\}_{k=1}^\infty$ 定义如下：

$$l_k(\gamma_1,\dots,\gamma_k) = p\{[\cdots\{[\{[\pi,\gamma_1]\},\gamma_2]\},\dots,a_k]\},$$

对于齐次元 $\gamma_1,\dots,\gamma_k\in\mathfrak{a}$，该 L_∞-代数可视为定理 4.1中给出的分次李代数的同伦类比。接下来的定义受到定理 4.1中相对平均算子的 Maurer-Cartan 刻画的启发。

8.6. 定义。在 A_∞-代数 $(A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$ 上，$(M, \{\eta_k\}_{k=1}^\infty)$ 的同伦相对平均算子是 L_∞-代数 $(\mathfrak{a}, \{l_k\}_{k=1}^\infty)$ 的一个 Maurer-Cartan 元。

由上述定义可知，同伦相对平均算子是一个元素 $P = \sum_{k=1}^\infty P_k \in \mathrm{Hom}_0(\mathbf{k}[\overline{Y}]\otimes\overline{T}(M)\ A)$，满足

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} l_k(P,\dots,P) = 0. \tag{38}$$

换言之，P必须满足 $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!} p\{[\cdots\{[\{[\pi,P]\},P]\},\dots,P]\} = 0$，这等价于条件 $p(e^{\{[-,P]\}}\pi) = 0$。注意，同伦相对平均算子也可等价地由一族 $P = \{P_k\colon \mathbf{k}[Y_k]\otimes M^{\otimes k}\to A\}_{k=1}^\infty$ 零次线性映射描述，它们满足 $p(e^{\{[-,P]\}}\pi) = 0$。

8.7. 定义。一个同伦相对平均代数是一个三元组 (A, M, P)，由一个 A_∞-代数 $A = (A, \{\mu_k\}_{k=1}^\infty)$、一个表示 $M = (M, \{\eta_k\}_{k=1}^\infty)$ 和一个同伦相对平均算子$P = \{P_k\}_{k=1}^\infty$组成。我们通常将上述同伦相对平均代数记作 $M \xrightarrow{\{P_k\}_{k=1}^\infty} A$。

8.8. 命题。设 $M \xrightarrow{\{P_k\}_{k=1}^\infty} A$ 是一个同伦相对平均代数。则 $(M, \{\pi_k^P\}_{k=1}^\infty)$ 是一个$Diass_\infty$-代数，其中

$$\pi_k^P(y; u_1,\dots,u_k) = (e^{\{[-,P]\}}\pi)(y; u_1,\dots,u_k),\ \textit{for } k\geq 1, y\in Y_k \textit{ and } u_1,\dots,u_k\in M.$$

证明。注意到

$$\{[e^{\{[-,P]\}}\pi, e^{\{[-,P]\}}\pi]\} = e^{\{[-,P]\}}\{[\pi,\pi]\} = 0 \ (\text{as } \{[\pi,\pi]\} = 0).$$

这表明 $e^{\{[-,P]\}}\pi$ 是分次李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 Maurer-Cartan 元。因此，映射的集合 $\{\pi_k\}_{k=1}^\infty$ 在 M 上定义了一个 $Diass_\infty$-代数结构，其中 $\pi_k = (e^{\{[-,P]\}}\pi)|_{\mathbf{k}[Y_k]\otimes M^{\otimes k}}$，对任意 $k\geq 1$ 成立。证毕。□

同伦相对平均算子 $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ 称为严格的，如果 $P_k = 0$ 对于 $k\neq 1$。由（38）可知，严格同伦相对平均算子是一个零次线性映射 $P\colon M\to A$ 满足

$$\mu_k\big(P(u_1),\dots,P(u_k)\big) = P\big(\eta_k(P(u_1),\dots,u_i,\dots,P(u_k))\big),\ \text{for } k\geq 1 \text{ and } 1\leq i\leq k.$$

严格同伦相对平均代数是由一个 A_∞-代数、一个表示和一个严格同伦相对平均算子组成的三元组。在这种情况下，定理 8.8 表述如下。

8.9. 定理。设 $M \xrightarrow{P} A$ 是一个严格同伦相对平均代数。那么 $(M, \{\pi_k^P\}_{k=1}^{\infty})$ 是一个$Diass_{\infty}$-代数，其中

$$\pi_k^P(y; u_1, \dots, u_k) := \eta_k(P(u_1), \dots, u_i, \dots, P(u_k)),$$

对于 $k \geq 1$、 $y \in Y_k$ （它们可以唯一地表示为：对某个（$i-1$）-树 $y_1 \in Y_{i-1}$ 和（$k-i$）-树 $y_2 \in Y_{k-i}$， $y = y_1 \vee y_2$ ），以及 u_1、.....、 $u_k \in M$。

下面我们证明，任意 $Diass_{\infty}$-代数总是由一个严格的严格同伦相对平均代数诱导得到的。设（D, $\{\pi_k\}_{k=1}^{\infty}$）是给定的 $Diass_{\infty}$-代数。考虑分次向量空间D/I，它由 D 商去由集合 I 生成的齐次理想得到

$$\{\pi_k(y; a_1, \dots, a_k) - \pi_k(y'; a_1, \dots, a_k) \mid k \geq 1,\ y, y' \in Y_k \text{ and } a_1, \dots, a_k \in D\}.$$

容易看出，分次向量空间 D/I 带有一个 A_{∞}-代数结构，其运算$\{\mu_k : (D/I)^{\otimes k} \to D/I\}_{k=1}^{\infty}$ 定义为

$$\mu_k([a_1], \dots, [a_k]) = [\pi_k(y; a_1, \dots, a_k)], \text{ for } k \geq 1 \text{ and } [a_1], \dots, [a_k] \in D/I.$$

我们将这种 A_{∞}-代数结构简单地记为 $D_{\mathrm{Ass}_{\infty}}$。也容易验证， A_{∞}-代数 $D_{\mathrm{Ass}_{\infty}}$在分次向量空间 D 上有一个表示，其作用映射为

$$\eta_k([a_1], \dots, [a_{i-1}], a_i, [a_{i+1}], \dots, [a_k]) = \pi_k(y; a_1, \dots, a_k),$$

对于 $k \geq 1$、 $[a_1]$、.....、 $[a_{i-1}]$、 $[a_{i+1}]$、.....、 $[a_k] \in D_{\mathrm{Ass}_{\infty}}$和 $a_i \in D$。这里， $y \in Y_k$是任意一棵 k-树，它由某棵 $(i-1)$-树和某棵 $(k-i)$-树嫁接而成。此外， $D \xrightarrow{q} D_{\mathrm{Ass}_{\infty}}$是一个严格同伦相对平均代数，其中 q 是商映射。进一步地， D 上诱导的 $Diass_{\infty}$-代数结构与给定结构一致。

数据可用性声明。本文不适用数据共享，因为本研究过程中未生成或分析任何数据集。

致谢。作者谨此感谢印度理工学院卡拉格布尔分校提供了开展本研究所需的良好学术环境。

References

[1] M. Aguiar, 《预泊松代数》， *Lett. Math. Phys.* 54，第4期（2000年），263-277页。[2] C. Bai、O. Bellier、L. Guo和X. Ni, 《运算的分裂、Manin乘积与Rota-Baxter算子》， *Int.Math. Res. Not.* 2013，第3期（2013年），485-524页。[3] J. C. Baez和A. S. Crans, 《高维代数 VI：Lie 2-代数》， *Theor. Appl. Cat.* 12 （2004年），492-538页。[4] G. Birkhoff, 《有界函数的平均值》， Coil. Internat. Centre Nat. Recherthe Sci.（巴黎）， *Algébre Théforie Nombres* 24（1949年），149-153页。[5] R. Bonezzi和O. Hohm, 《Leibniz规范理论与无穷结构》， *Commun. Math. Phys.* 377 （2020年），2027-2077页。[6] B. Brainerd, 《平均算子的结构》， *J. Math. Anal.* 5（1962年），347-377页。[7] W. Cao, 《平均算子的代数研究》，博士论文，罗格斯大学纽瓦克分校，2000年。[8] A. Das, 《结合Rota-Baxter算子的变形》， *J. Algebra* 560 （2020年），144-180页。[9] A. Das和S. K. Mishra, 《相对Rota-Baxter代数上的双模及其上同调》， *Algebr. Represent.Theory* 即将发表。https://doi.org/10.1007/s10468-022-10161-2[10] A. Das, 《Loday型代数及其态射的变形》， *J. Pure Appl. Algebra* 第225卷，第6期（2021年），106599。[11] A. Frabetti, 《带系数的二代数（上）同调》， *Dialgebras and related operads*, 67–103页, 《数学讲义》，1763， *Springer Berlin*，2001年。[12] M. Gerstenhaber, 《结合环的上同调结构》， *Ann. of Math.* （第2辑）78（1963年），267-288页。[13] J. L. B. Gamlen和J. B. Miller, 《巴拿赫代数上的平均算子与Reynolds算子 II：平均算子的谱性质》，数学分析杂志 Appl 23（1968年），183-197页。[14] M. Gerstenhaber, 《环与代数的变形》， *Ann. of Math.* （第2辑）79（1964年），59-103页。[15] E. Getzler, 《幂零 L_{∞}-代数的李理论》， *Ann. of Math. (2)* 170 （2009年），第1期，271-301页。[16] J. Kamp´e de F´eriet, 《湍流问题的当前状况（I和II）》， *La Sci. Aérienne* 3 （1934年），9-34页；第4卷（1935年），12-52页。

[17] B. Keller, 《 A-无穷代数与模导论》， *Homology Homotopy Appl.* 3（第1辑）（2001年），1-35页。[18] J. L. Kelly, 《 C_∞（X）上的平均算子》， *Illinois J. Math.* 2 （1958年），214-223页。[19] Y. Kosmann-Schwarzbach, 《从泊松代数到Gerstenhaber代数》， *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 第46卷（1996年）第5期，1243-1274页。[20] A. Kotov和T. Strobl, 《嵌入张量、Leibniz–Loday代数及其高阶规范理论》， *Commun.Math. Phys.* 376（2020年），235-258页。[21] T. Lada和M. Markl, 《强同伦李代数》， *Comm. Algebra* 23 （1995年），第6期，2147-2161页。[22] T. Lada和J. Stasheff, 《面向物理学家的SH李代数导论》， *Internat. J. Theoret. Phys.* 32 （1993年），第7期，1087-1103页。[23] S. Lavau, 《张量层级与莱布尼茨代数》， *J. Geom. Phys.* 144 （2019年），147-189页。[24] A. Lazarev、Y. Sheng和R. Tang, 《相对Rota-Baxter李代数的变形与同伦理论》，*Comm. Math. Phys.* 383 （2021年），595-631页。[25] J.-L. Loday, 《二代数》， *Dialgebras and related operads*, 7-66页, 《数学讲义》，1763， *Springer Berlin*，2001年。[26] J.-L. Loday和T. Pirashvili, 《线性映射与莱布尼茨代数的张量范畴》， *Georgian Mathematical Journal* 5（1998年），263-276页。[27] J.-L. Loday和B. Vallette, 《代数歌剧》，《数学科学基础丛书》第346卷（2012年）。[28] A. Majumdar和G. Mukherjee, 《作为 G-代数的双代数上同调》， *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 （2004年），第6期，2443-2457页。[29] J. B. Miller, 《巴拿赫代数上的平均算子与Reynolds算子 I：通过导子与反导子的表示》，*J. Math. Anal. Appl.* 14（1966年），527-548页。[30] S.-T. C. Moy, 《条件期望作为函数空间上的变换的刻画》，*Pacific J.Math.* 4（1954年），47-63页。[31] J. Pei、C. Bai、L. Guo和X. Ni, 《复制子、二元歌剧的Manin白乘积与平均算子》， *NewTrends in Algebras and Combinatorics*，317-353页（2020年）。[32] J. Pei、C. Bai、L. Guo和X. Ni, 《歌剧的双后继与复制子、Manin乘积及算子》，载于《当代物理学中的对称性与群》， *Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and TheoreticalPhysics* 11（2013年），191-196页。[33] J. Pei和L. Guo, 《平均代数、Schr¨oder数、有根树与歌剧》， *J. Algebr. Comb.* 42 （2015年），73-109页。[34] O. Reynolds, 《不可压缩黏性流体的动力学理论》， *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 136 （1895年），123-164页。[35] Y. Sheng、R. Tang和C. Zhu, 《嵌入张量与李–Leibniz三元组的控制 L_∞-代数、上同调与同伦》， *Commun. Math. Phys.* 386 （2021年），269-304页。[36] T. Strobl, 《Leibniz–杨–米尔斯规范理论与双希格斯机制》， *Phys. Rev. D* 99 （2019年），115026。[37] R. Tang、C. Bai、L. Guo和Y. Sheng, 《 $\mathcal{O}$-算子的变形及其控制上同调》， *Comm.Math. Phys.* 368 （2019年），第2期，665-700页。[38] B. Vallette, 《Manin乘积、Koszul对偶、Loday代数与Deligne猜想》， *J. Reine Angew. Math.* 620（2008年），105-164页。[39] Th. Voronov, 《高阶导出括号与同伦代数》， *J. Pure Appl. Algebra* 202 （2005年），133-153页。[40] F. Wagemann, 《交叉模》，柏林、波士顿：德格鲁伊特，2021年。https://doi.org/10.1515/9783110750959[41] K. Wang和G. Zhou, 《平均代数、 L_∞-结构与同伦平均代数的上同调理论》，arXiv预印本，arXiv:2009.11618[42] D. Yau, 《Loday代数的Gerstenhaber结构与Deligne猜想》， *J. Pure Appl. Algebra* 209 （2007年），739-752页。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kharagpur 721302, West Bengal, India.
Email address: apurbadas348@gmail.com, apurbadas348@maths.iitkgp.ac.in