高维泊松曲面的定量中心极限定理

Zakhar Kabluchko* Daniel Rosen† Christoph Th¨ale‡

摘要

考虑一个由曲面构成的平稳泊松过程，该过程位于一个 d 维双曲空间中。本文关注这些随机曲面在一系列半径不断增大的球 R中所形成的总表面积。主要结果是一个针对这些随机变量的定量非标准中心极限定理，其中球的半径 R 与空间维数 d同时趋于无穷。

关键词： 中心极限定理、曲面、双曲随机几何、泊松过程**MSC：** 52A55,60D05

arXiv:2303.17827v2 [math.PR] 7 Mar 2024

1 引言与主要结果

非欧几何中的随机几何系统研究，是随机几何中一个新近兴起且发展迅速的分支。关于双曲随机几何图、随机镶嵌和随机多胞体的代表性研究，请参见 [**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 17**] 。

本文探讨泊松超平面过程向双曲几何的一种有趣推广。欧几里得泊松超平面的研究如今已是经典课题 [**11, 16,18, 21**] ，并在 [**12**] 中推广至双曲空间，其中研究了全测地超曲面的泊松过程；平面情形下的均值也可参见 [**20**]。更近一些，在 [**13**] 中有人发现，该模型属于一个由单个参数构成的族，称为泊松 λ-测地超平面；文中还详细考察了此类过程在一列不断增大的球内的总双曲表面积的涨落。本文考虑的特殊情形是泊松曲面过程，对应于 [**13**] 中的选择 $\lambda = 1$ 。该文证明，与 $\lambda \in [0, 1)$ 的其他取值不同，这些涨落在所有空间维数下均服从高斯分布。本文旨在对这一结果作定量刻画，并将其推广至维数不断增大的情形。

我们先回顾一些定义；更多详情请参见 [**13**]及其中引用的文献。在 d维双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 中，*horosphere*（测地超球面）直观而言是一个半径无限大的球面。更严格地说，它是一个法曲率为 1 的完备全脐超曲面。具体来说，在双曲空间的庞加莱球模型中，horosphere（测地超球面）表现为与边界相切的欧几里得球面，见图 1。我们用 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathbb{H}^d$中所有 horosphere（测地超球面）构成的空间。该空间具有双曲等距变换群的传递作用，并存在该作用的不变测度；此测度在相差一个乘法常数的意义下唯一，记作 Λ，见 [**8, 23**]。

现在，设 η_d 是定义在 $\mathcal{H}$ 上、强度测度为 Λ 的泊松过程； $d = 2$ 情形下的模拟见图 1。对于 $R > 0$, 我们考虑总表面积

$$S_{R,d} := \sum_{H \in \eta_d} \mathcal{H}^{d-1}(H \cap B_R^d)$$

*德国明斯特大学。电子邮箱：zakhar.kabluchko@uni-muenster.de
†德国波鸿鲁尔大学。电子邮箱：daniel.rosen@rub.de
‡波鸿鲁尔大学，德国。电子邮箱：christoph.thaele@rub.de

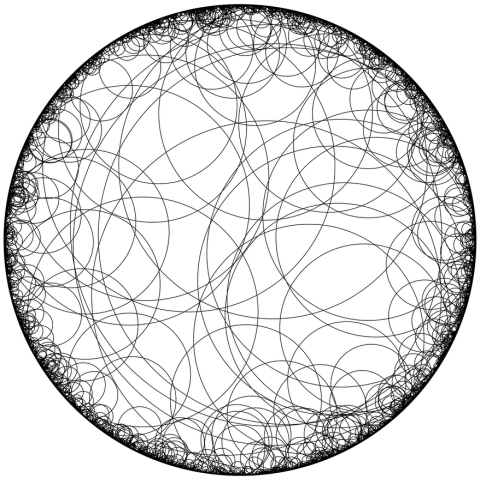

图 1：双曲平面的庞加莱圆盘模型中 horosphere（测地超球面）泊松过程的模拟。

η_d 在以 $\mathbb{H}^d$ 中任意但固定的点为中心、双曲半径为 $R>0$ 的双曲球 B_R^d 内的总表面积。此处，$\mathcal{H}^{d-1}$ 表示相对于双曲度量的（$d-1$）维豪斯多夫测度。在 [**13**] 中已经证明，对于固定的空间维数 d，中心化并标准化后的表面积满足一个非标准的中心极限定理。具体而言，当 $R\to\infty$ 时，在进行中心化并以标准差标准化后，它依分布收敛于方差为 $1/2$ 的高斯随机变量。本文的主要结果从两个方面推广了这一结论：首先，我们给出了收敛速度的估计。其次，我们的界显式依赖于维数，从而为不断增大的空间维数下的泊松曲面建立了中心极限定理。为了度量两个随机变量 X 和 Y 之间的距离，我们使用 Kolmogorov 度量和瓦瑟斯坦度量，它们分别定义为

$$d_{\mathrm{Kol}}(X,Y):=\sup_{t\in\mathbb{R}}|\mathbb{P}(X\le t)-\mathbb{P}(Y\le t)|$$

and

$$d_{\mathrm{Wass}}(X,Y):=\sup_{h}\big|\mathbb{E}[h(X)]-\mathbb{E}[h(Y)]\big|,$$

其中，后一个上确界取遍所有利普希茨函数 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，其利普希茨常数至多为 **1**。

我们的主要结果是以下非标准的定量中心极限定理。

定理 1. 设 $N_{\frac{1}{2}}$ 是方差为 $1/2$ 的中心高斯随机变量。考虑表面泛函 $S_{R,d}$，其中 $d\ge 2$ 且 $R\ge 1$。那么存在一个普适常数 $C>0$，使得对于任意选择 $\bullet\in\{\mathrm{Kol}、\mathrm{Wass}\}$，都有

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d}-\mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_{R,d}}},N_{\frac{1}{2}}\right)\le C\cdot\begin{cases}e^{-R/2} & :R-\log d\le 1,\\ \frac{1}{\sqrt{d\,(R-\log d)}}+\frac{1}{d\sqrt{R-\log d}} & :R-\log d>1.\end{cases}$$

注2. (i) 我们首先指出，在固定空间维数 $d\ge 2$ 下，定理 **1** 推出以下界：

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d}-\mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_{R,d}}},N_{\frac{1}{2}}\right)\le C_d\,R^{-1/2},$$

其中常数 C_d 仅取决于 d。
我们注意到 收敛速度 $R^{-1/2}$ 在所有维度中都相同。同样的

在欧几里得空间中，泊松超平面总表面积的中心极限定理也观察到了所有维度下相同的收敛速率（见 [16], ，但该结果也是下文 (1) 的一个特例）。值得注意的是，这种极限行为与带有 $\lambda < 1$ 的 λ-测地超平面的情形形成鲜明对比（我们回顾一下，horosphere（测地超球面）对应于 $\lambda = 1$）。如 [13], 所述，在这些情形中，表面泛函的波动在每个固定维度下都是非高斯的 ≥ 4。这两种情形的几何区别在于，horosphere（测地超球面）具有欧几里得内在几何，而其他λ-测地超平面的内在几何则是双曲的。

(ii) 定理 1 中区分两种情形的阈值在一定程度上是任意选取的。将常数 1 替换为任意正数，只需相应调整定理中的常数 C 。

(iii) 我们注意到，定理 1 第一种情形下的收敛速率始终比 $d^{-1/2}$ 更差（尤其比第二种情形更差）。事实上，根据假设， $e^R \leq e\, d$ ，因此 $e^{-R/2}$ 收敛到零的速度比 $d^{-1/2}$ 慢。

(iv) 在高维情形下，也就是说，若 $d \to \infty$ 且 $R = R_d$ 是一列半径，我们注意到，只要 $R_d \xrightarrow[d\to\infty]{} \infty$，定理 1 就意味着表面泛函满足一个非标准的中心极限定理。例如，对于 $\alpha > 0$, 取半径为 $R = R_d = \alpha \log\, d$，定理给出

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d}}}, N_{\frac{1}{2}}\right) \leq C \cdot \begin{cases} d^{-\alpha/2} & : \alpha \leq 1 \\ d^{-1/2}(\log d)^{-1} & : \alpha > 1. \end{cases}$$

同样自然的问题是，能否为 R_d 给出尖锐条件，以确保中心化并标准化后的总表面积渐近服从高斯分布。如上所述， $R_d \to \infty$ 是充分条件，但当 R 固定时，我们的界无法推出表面泛函满足中心极限定理。这个问题只能留待今后研究。

(v) 读者或许会对欧几里得情形下的情况感兴趣。在该情形中，我们考虑半径为 R 的以原点为中心的球内，定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的超平面空间中的平稳各向同性泊松过程的总表面积 $S_{R,\ d,\ e}$ 。此时有

$$d_\bullet\Big(\frac{S_{R,d,e} - \mathbb{E}S_{R,d,e}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d,e}}}, N\Big) \leq C\, d^{1/4} R^{-1/2} \tag{1}$$

其中， $C > 0$ 是某个绝对常数， N 表示一个标准高斯随机变量。由于我们未能在文献中找到这一结果，故在第 4 节给出一个证明。特别地，当 $d \to \infty$ 时，为了由 (1) 推导出中心极限定理，我们需要 R 的增长速度快于 $\sqrt{d}$ 。

2 主要结果的证明

在证明定理 1 之前，我们需要回顾一些预备知识。首先，我们需要明确描述 horosphere（测地超球面）空间 $\mathcal{H}$ 上的不变测度 Λ 。我们固定一个原点 $\mathbf{o} \in \mathbb{H}^d$，并用一对参数 $(s, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ 来表示一个元素 $H \in \mathcal{H}$ ，其中 $s \in \mathbb{R}$ 是 H 到 $\mathbf{o}$ 的有向距离（若 $\mathbf{o}$ 位于 H 的凸侧，则 $s > 0$ 为正，否则为负），而 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ 是单位向量，位于切空间 $T_{\mathbf{o}}\mathbb{H}^d$ 中，沿着经过 $\mathbf{o}$ 并与 H 正交相交的测地线方向，且指向凸侧之外。于是，不变测度由以下关系定义

$$\int_{\mathcal{H}} f(H)\, \Lambda(\mathrm{d}H) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(H(s,u))\, e^{-(d-1)s}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}s, \tag{2}$$

其中，$f\colon\ \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ 是一个非负可测函数，而 $H(s,u)$ 表示按上述方式由 (s,u) 参数化的 $\mathcal{H}$ 的唯一元素。这里，$\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}u$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度和 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的归一化球面勒贝格测度。

我们还需要以下关于交集体积的几何计算$H(s)\cap B_R^d$，其中 $H(s)\subset\mathbb{H}^d$是一个有向距离原点$\mathbf{o}$为 $s\in\mathbb{R}$ 的曲面。注意，旋转对称性表明，绕$\mathbf{o}$的这种记号是合理的。在 [**13**, 命题 **4.1**] 中证明了，当 $|s|\geq R$时该交集为空；否则满足

$$\mathcal{H}^{d-1}(H(s)\cap B_R^d)=\kappa_{d-1}\left[2e^s(\cosh R-\cosh s)\right]^{\frac{d-1}{2}}, \tag{3}$$

对于整数 $\ell\geq 1$，我们用 κ_ℓ 表示 ℓ维欧几里得单位球的体积。我们还提及柯尔莫哥洛夫度量和瓦瑟斯坦度量的一些基本性质，这些性质对我们会有用。首先，对于任意随机变量 X 和 Y以及标量 $\alpha>0$，有

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Wass}}(\alpha X,\alpha Y)&=\alpha\, d_{\mathrm{Wass}}(X,Y),\\ d_{\mathrm{Kol}}(\alpha X,\alpha Y)&=d_{\mathrm{Kol}}(X,Y). \end{aligned} \tag{4}$$

此外，给定相互独立的随机变量 X 和 Y，以及另一个密度有界于 1 的随机变量 Z，有

$$d_\bullet(X+Y,Z)\leq d_\bullet(X,Z)+\mathbb{E}|Y|. \tag{5}$$

对于瓦瑟斯坦度量，这可直接由三角不等式以及瓦瑟斯坦度量受 L^1度量所界这一事实推出（事实上，即使没有独立性和有界密度假设，这一结论也成立）。对于柯尔莫哥洛夫度量，这则是以下结果的推论。

引理 3. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，另设 Z 是一个具有有界密度 f_Z 的随机变量。则

$$d_{\mathrm{Kol}}(X+Y,Z)\leq d_{\mathrm{Kol}}(X,Z)+\|f_Z\|_\infty\cdot\mathbb{E}|Y|.$$

证明. 记 F_W 为随机变量 W 的累积分布函数。对于任意 $t\in\mathbb{R}$，利用第二步中的独立性，可得

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X+Y\leq t)-\mathbb{P}(Z\leq t)|&=|\mathbb{E}\left[\mathbb{P}(X\leq t-Y|Y)\right]-\mathbb{P}(Z\leq t)|\\ &\leq|\mathbb{E}\left[F_X(t-Y)-F_Z(t-Y)\right]|+|\mathbb{E}[F_Z(t)-F_Z(t-Y)]|\\ &\leq d_{\mathrm{Kol}}(X,Z)+\|f_Z\|_\infty\cdot\mathbb{E}|Y|. \end{aligned}$$

对 $t\in\mathbb{R}$ 取上确界即可得到所需结果。 □

注 4. 从证明中显然可见，可以去掉 Z 具有密度这一假设，此时结果变为

$$d_{\mathrm{Kol}}(X+Y,Z)\leq d_{\mathrm{Kol}}(X,Z)+\mathbb{E}[\omega_Z(|Y|)],$$

其中 ω_Z 表示 F_Z 的连续模，即 $\omega_Z(\varepsilon):=\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathbb{P}(t<Z\leq t+\varepsilon)$。

证明主要结果的第一步，是将正态近似界化简为以下积分估计。定义

$$J_{R,d}:=\int_0^R\left(1-\frac{\cosh s-1}{\cosh R-1}\right)^{d-1}\mathrm{d}s.$$

命题 **5.** 对于所有 $d \geq 2$ 和 $R > 0$，以及任意 $\bullet \in \{\text{Kol、Wass}\}$，以下界均成立：

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d}}}, N_{\frac{1}{2}}\right) \leq c \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{d}\, J_{R,d}} + \frac{1}{d\sqrt{J_{R,d}}}\right). \tag{6}$$

对于某个普适常数 $c \in (0, \infty)$。

证明。 根据不变测度 Λ 的表示式 (2) 以及交体积的表达式 (3)，可得

$$S_{R,d} = \sum_{s \in \xi} f_R(s), \tag{7}$$

其中 ξ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个密度为 $s \mapsto e^{-(d-1)s}$的非齐次泊松过程，函数f_R 定义为

$$f_R(s) = \begin{cases} \kappa_{d-1}\left[2e^s(\cosh R - \cosh s)\right]^{\frac{d-1}{2}} & : |s| \leq R, \\ 0 & : \text{else.} \end{cases} \tag{8}$$

我们将随机变量 $S_{R,d}$ 分解为“正”部分和“负”部分，如下所示 s:

$$S_{R,d} = S^+_{R,d} + S^-_{R,d},$$

其中

$$S^+_{R,d} := \sum_{\substack{s \in \xi \\ s > 0}} f_R(s) \qquad \text{and} \qquad S^-_{R,d} := \sum_{\substack{s \in \xi \\ s < 0}} f_R(s).$$

注意，由泊松过程的独立性可知，随机变量 $S^+_{R,d}$ 和 $S^-_{R,d}$ 相互独立。于是我们有

$$\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d}}} = \frac{S^+_{R,d} - \mathbb{E}S^+_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d}}} + \frac{S^-_{R,d} - \mathbb{E}S^-_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d}}}.$$

注意到

$$\operatorname{Var} S^+_{R,d} = \operatorname{Var} S^-_{R,d} = \frac{1}{2} \operatorname{Var} S_{R,d}, \tag{9}$$

这由方差表示中被积函数的偶性可得

$$\operatorname{Var} S_{R,d} = \int_{\mathbb{R}} f_R^2(s) e^{-(d-1)s}\, \mathrm{d}s = 2^{d-1}\kappa_{d-1}^2 \int_{-R}^{R} (\cosh R - \cosh s)^{d-1}\, \mathrm{d}s,$$

这又由泊松过程的多变量 Mecke 公式 [**15**, 定理 4。1]，可得，其中我们使用了 (2) 和 (3)。由此推出

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d}}}, N_{\frac{1}{2}}\right) \leq d_\bullet\left(\frac{S^-_{R,d} - \mathbb{E}S^-_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S^-_{R,d}}}, N\right) + 2^{-\frac{1}{2}}\, \mathbb{E}\left|\frac{S^+_{R,d} - \mathbb{E}S^+_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S^+_{R,d}}}\right|, \tag{10}$$

其中 N 是一个标准高斯随机变量，并且我们结合使用了 (4) 和 (5)，以及 $2^{-\frac{1}{2}}N$ 与我们的目标随机变量 $N_{\frac{1}{2}}$ 具有相同分布这一事实。

为了控制式（10）中的第一项，我们应用以下正态近似界；它是所谓的泊松 U-统计量一般界的一个特例，参见 [**14**, 定理 3.12 和公式 (3.9)] 以及 [**22**,第 112] 页。将其应用于 $S^-_{R,d}$，可得

$$d_\bullet\left(\frac{S^-_{R,d} - \mathbb{E}S^-_{R,d}}{\sqrt{\operatorname{Var} S^-_{R,d}}}, N\right) \leq c_\bullet \frac{\sqrt{\operatorname{cum}_4(S^-_{R,d})}}{\operatorname{Var} S^-_{R,d}},$$

其中某些常数 $c_\bullet \in (0,\infty)$、 $\bullet \in \{\mathrm{Kol},\mathrm{Wass}\}$ （具体而言，可以取 $c_{\mathrm{Kol}} = 19$ 和 $c_{\mathrm{Wass}} = 2$），这里 $\mathrm{cum}_4(W) = \mathbb{E}\left[(W - \mathbb{E}W)^4\right] - 3\,\mathrm{Var}(W)^2$ 表示随机变量 W 的四阶累积量。注意到 $S^+_{R,d} \geq 0$，式（10）中的第二项很容易被如下界定

$$\frac{\mathbb{E}|S^+_{R,d} - \mathbb{E}S^+_{R,d}|}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S^+_{R,d}}} \leq \frac{2\,\mathbb{E}S^+_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S^+_{R,d}}}.$$

由此得到

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_{R,d}}}, N_{\frac{1}{2}}\right) \leq c_\bullet \frac{\sqrt{\mathrm{cum}_4(S^-_{R,d})}}{\mathrm{Var}\, S^-_{R,d}} + 2^{1/2}\frac{\mathbb{E}S^+_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S^+_{R,d}}}. \tag{11}$$

进一步记 $C_d := 2^{(d-1)/2}\kappa_{d-1}$ 并定义

$$\begin{aligned}
I_1(R) &:= \int_0^R (\cosh R - \cosh s)^{\frac{d-1}{2}} e^{-\frac{d-1}{2}s}\,\mathrm{d}s,\\
I_2(R) &:= \int_0^R (\cosh R - \cosh s)^{d-1}\,\mathrm{d}s,\\
I_3(R) &:= \int_0^R (\cosh R - \cosh s)^{2(d-1)} e^{-(d-1)s}\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

那么利用 (7) 和 (8)，我们计算得

$$\mathbb{E}S^+_{R,d} = C_d I_1(R), \qquad \mathrm{Var}(S^\pm_{R,d}) = C_d^2 I_2(R), \qquad \mathrm{cum}_4(S^-_{R,d}) = C_d^4 I_3(R).$$

这里，期望和方差借助多元 Mecke 方程计算，而四阶累积量则利用 [**16**, 推论 1]计算。将其代入 (11)，最终得到

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_{R,d}}}, N_{\frac{1}{2}}\right) \leq c_\bullet\left[\frac{\sqrt{I_3(R)}}{I_2(R)} + \frac{I_1(R)}{\sqrt{I_2(R)}}\right] \tag{12}$$

（因为在这两种情况下， $c_\bullet > 2^{1/2}$。）现在我们使用关于 I_1 和 I_3的以下平凡估计：

$$\begin{aligned}
I_1(R) &\leq (\cosh R - 1)^{\frac{d-1}{2}} \cdot \frac{2}{d-1},\\
I_3(R) &\leq (\cosh R - 1)^{2(d-1)} \cdot \frac{1}{d-1}.
\end{aligned}$$

此外，对于 I_2，我们写作

$$\begin{aligned}
I_2(R) &= \int_0^R (\cosh R - \cosh s)^{d-1}\,\mathrm{d}s\\
&= (\cosh R - 1)^{d-1}\int_0^R \left(1 - \frac{\cosh s - 1}{\cosh R - 1}\right)^{d-1}\,\mathrm{d}s\\
&= (\cosh R - 1)^{d-1} J_{R,d}.
\end{aligned}$$

将上述结果全部代回式（12），得到估计

$$d_\bullet\left(\frac{S_{R,d} - \mathbb{E}S_{R,d}}{\sqrt{\mathrm{Var}\, S_{R,d}}}, N_{\frac{1}{2}}\right) \leq c_\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{d-1}\,J_{R,d}} + \frac{2}{(d-1)\sqrt{J_{R,d}}}\right),$$

这显然推出了界 (6)，并完成了证明。 □

因此，我们接下来的任务是估计 $J_{R,d}$。下面的结果给出了这一估计 lt.

引理6. 存在一个常数 $C>0$，使得对任意 $d\geq 2$ 和 $R\geq 1$，以下结论成立。

$$J_{R,d}\geq C\cdot\begin{cases}\frac{e^{R/2}}{\sqrt{d}} & :R-\log d\leq 1,\\ R-\log d & :R-\log d>1.\end{cases}$$

注7. 与定理 1（见注2）中一样，引理6两种情形之间的阈值1可以替换为任意正数，此时常数 C 也可能随之改变。

我们将引理6的证明推迟到第3节，先利用它推导主要结果。

定理 *1* 的证明. 将命题5与引理6给出的积分估计结合起来，即可得到该定理。事实上，在 $R-\log d>1$的情形下，我们立即得到定理所断言的界。在 $R-\log d\leq 1$的情形下，将命题5与引理6的第一种情形结合，得到

$$d_\bullet\left(\frac{S_R-\mathbb{E}S_R}{\sqrt{\operatorname{Var}S_R}},N_{\frac{1}{2}}\right)\leq C\left(e^{-R/2}+d^{-3/4}e^{-R/4}\right).$$

由于假设 $e^R\leq e\cdot d$成立，右侧的第一项占主导，从而得到定理相应情形中的界。

□

3 界定$J_{R,\ d}$

下面我们对积分 $J_{R,\ d}$ 进行界定。回忆其定义为

$$J_{R,d}=\int_0^R\left(1-\frac{\cosh s-1}{\cosh R-1}\right)^{d-1}\mathrm{d}s.$$

引理证明　　理 *6*。 首先，利用双曲恒等式 $\cosh\ x-1=2\sinh^2\frac{x}{2}$，我们写成 –

$$J_{R,d}=\int_0^R\left(1-\frac{\sinh^2(s/2)}{\sinh^2(R/2)}\right)^{d-1}\mathrm{d}s. \tag{13}$$

接下来我们定义

$$\rho=\rho(R,d):=\frac{\sinh(R/2)}{\sqrt{d}}.$$

现在我们分别讨论引理中的两种情形。

1. 首先假设 $R-\log d\leq 1$。在积分（13）中，我们作如下代换

$$s=2\operatorname{arcsinh}(\rho x);\quad \mathrm{d}s=\frac{2\rho}{\sqrt{1+\rho^2x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

从而

$$\frac{\sinh(s/2)}{\sinh(R/2)}=\frac{x}{\sqrt{d}}.$$

注意，假设 $R-\log d\leq 1$ 蕴含

$$\rho\leq\frac{e^{R/2}}{2\sqrt{d}}=\frac{1}{2}\exp\left(\frac{R-\log d}{2}\right)\leq 1,$$

综合起来可得

$$J_{R,d} = 2\rho \int_0^{\sqrt{d}} \left(1 - \frac{x^2}{d}\right)^{d-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\rho^2 x^2}}$$
$$\geq 2\rho \int_0^{\sqrt{d}} \left(1 - \frac{x^2}{d}\right)^{d-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

最后，注意到后一列积分在 $d \to \infty$ 处收敛

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} > 0,$$

我们推得 $J_{R,\ d} \geq \hat{C} \cdot \rho = \hat{C} \cdot \sinh(R/2)/\sqrt{d}$，其中某个常数为 $\hat{C} > 0$。由于 $R \geq 1$，这意味着 $J_{R,\ d} \geq C \cdot \frac{e^{R/2}}{\sqrt{d}}$ 其中某个 $C > 0$，如所述。

2. 现在考虑 $R - \log d > 1$ 的情形。注意，根据 ρ 的定义， $s \leq 2\operatorname{arcsinh}(\rho)$ 意味着 $\frac{\sinh(s/2)}{\sinh(R/2)} \leq \frac{1}{\sqrt{d}}$，我们用以下方式估计 (13)：

$$J_{R,d} \geq \int_0^{2\,\operatorname{arcsinh}(\rho)} \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{d-1} \mathrm{d}s \geq \frac{2}{e} \operatorname{arcsinh}(\rho).$$

现在，利用反双曲正弦的对数表示

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \geq \log(2x),$$

我们推得

$$\operatorname{arcsinh}(\rho) \geq \log\left(\frac{e^{R/2} - e^{-R/2}}{\sqrt{d}}\right) = \frac{R - \log d}{2} + \log(1 - e^{-R}).$$

最后，假设 $R - \log d \geq 1$，可得

$$\log(1 - e^{-R}) \geq \log\left(1 - \frac{1}{2e}\right) \geq -\frac{R - \log d}{4},$$

这意味着

$$\operatorname{arcsinh}(\rho) \geq \frac{R - \log d}{4}.$$

这表明 $J_{R,d} \geq C(R - \log d)$，并完成了证明。 □

4 欧几里得情形

设 η_d 为定义在 $\mathbb{R}^d$ 中仿射超平面空间 $\mathbb{A}(d, d-1)$ 上的平稳各向同性泊松过程，其强度为 1。其强度测度 Λ_e 于是为

$$\int_{\mathbb{A}(d,d-1)} f(H)\, \Lambda_e(\mathrm{d}H) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(H_e(s,u))\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}s,$$

对于非负可测函数 $f\colon\ \mathbb{A}(d,\ d-1) \to \mathbb{R}$，其中 $H_e(s,\ u)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 中唯一一个有向距离为 s、单位法向量为 u的超平面，该超平面距**o** 。如上所述，$\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}u$分别表示 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度和 $\mathbb{S}^{d-1}$上的归一化球面勒贝格测度。由

$$S_{R,d,e} := \sum_{H \in \eta_d} \mathcal{H}_e^{d-1}(H \cap B_{R,e}^d)$$

我们记为由 η_d 中的超平面在半径为 $R>0$的中心欧几里得球 $B^d_{R,\,e}$ 内诱导的总表面积，其中豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^{d-1}_e$取为相对于欧几里得度量的测度。利用上述 [**14**, 定理 3.12 和公式 (3.9)]以及 [**22**, 第 112] 页，我们得到

$$d_\bullet\Big(\frac{S_{R,d,e}-\mathbb{E}S_{R,d,e}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d,e}}},N\Big)\le c_\bullet\frac{\sqrt{\operatorname{cum}_4(S_{R,d,e})}}{\operatorname{Var} S_{R,d,e}} \tag{14}$$

其中 N 是标准高斯随机变量。$S_{R、\,d\,和e}$ 的方差和四阶累积量可明确表示为

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_{R,d,e}&=\int_{\mathcal{H}_e}\mathcal{H}^{d-1}_e(H\cap B^d_{R,e})^2\,\Lambda_e(\mathrm{d}H),\\ \operatorname{cum}_4(S_{R,d,e})&=\int_{\mathcal{H}_e}\mathcal{H}^{d-1}_e(H\cap B^d_{R,e})^4\,\Lambda_e(\mathrm{d}H).\end{aligned}$$

记 κ_{d-1}为（$d-1$）维欧几里得单位球的体积，则有

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_{R,d,e}&=2\kappa_{d-1}^2\int_0^R(R^2-s^2)^{d-1}\,\mathrm{d}s\\ &=2\kappa_{d-1}^2R^{2d-1}\int_0^1(1-t^2)^{d-1}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{\pi^{d-\frac12}\Gamma(d)R^{2d-1}}{\Gamma(\frac{d}{2}+\frac12)^2\Gamma(d+\frac12)},\end{aligned}$$

其中我们使用了代换 $s\mapsto Rt$。同样的计算还给出了 $\operatorname{cum}_4(S_{R、\,d\,和e})$ 的明确表达式：

$$\begin{aligned}\operatorname{cum}_4(S_{R,d,e})&=2\kappa_{d-1}^4\int_0^R(R^2-s^2)^{2(d-1)}\,\mathrm{d}s\\ &=2\kappa_{d-1}^4R^{4d-3}\int_0^1(1-t^2)^{2(d-1)}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{\pi^{2d-\frac32}\Gamma(2d-1)R^{4d-3}}{\Gamma(\frac{d}{2}+\frac12)^4\Gamma(2d-\frac12)}.\end{aligned}$$

结合（**14**）可得

$$d_\bullet\Big(\frac{S_{R,d,e}-\mathbb{E}S_{R,d,e}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d,e}}},N\Big)\le 2^{-1/4}c_\bullet\frac{\Gamma(d+\frac12)}{\Gamma(d)}\sqrt{\frac{\Gamma(2d-1)}{\Gamma(2d-\frac12)}}\,R^{-1/2}.$$

利用伽马函数商的著名渐近公式，当 $d\to\infty$ 时，我们得到

$$d_\bullet\Big(\frac{S_{R,d,e}-\mathbb{E}S_{R,d,e}}{\sqrt{\operatorname{Var} S_{R,d,e}}},N\Big)\le C\,d^{1/4}R^{-1/2}$$

对于某个绝对常数 $C>0$。

致谢

我们谨向 Matthias Schulte（汉堡）致谢，感谢他促使我们研究本文所讨论的问题。我们也感谢两位匿名审稿人提出的宝贵意见，这些意见帮助我们改进了本文。

DR 和 CT 获得德国研究联合会（DFG）通过 CRC/TRR 191 资助几何、代数与动力系统中的辛结构。ZK 和 CT 获得德国研究联合会（DFG）通过优先项目 SPP 2265 资助随机几何系统。ZK 还获得德国研究联合会（DFG）德国卓越战略 EXC 2044 – 390685587 项目资助数学 *Münster*：动力学 – 几何 – 结构。

参考文献

[1] I. Benjamini、J. Jonasson、O. Schramm 和 J. Tykesson，《尽管存在障碍，仍可见至无穷远处：双曲平面中的情形》，ALEA 拉丁美洲概率与数理统计杂志 6（2009年），323–342 页。[2] I. Benjamini、E. Paquette 和 J. Pfeffer，《对称空间中的锚定扩张、速度与泊松-沃罗诺伊镶嵌》，《概率年刊》46（2018年），1917–1956 页。[3] I. Benjamini 和 O. Schramm，《双曲平面中的渗流》，《美国数学会杂志》14（2001年），487–507 页。[4] F. Besau、D. Rosen 和 C. Th¨ale，《射影几何中的随机内接多胞体》，《数学年刊》381（2021年），1345–1372 页。[5] F. Besau、C. Th¨ale，《非欧几何中随机多胞体的渐近正态性》，《美国数学会汇刊》373（2020年），8911–8941 页。[6] N. Fountoulakis 和 T. M¨uller，《复杂网络双曲模型中最大连通分量的大数定律》，《应用概率年刊》28（2018年），607–650 页。[7] N. Fountoulakis 和 J. E. Yukich，《双曲随机几何图中孤立点与极值点数量的极限定理》，《电子概率杂志》25（2020年），第 141 号论文。[8] E. Gallego、A. M. Naveira 和 G. Solanes，《 n维双曲空间中的 horosphere（测地超球面）与凸体》，《几何奉献》103（2004年），103–114 页。[9] T. Godland、Z. Kabluchko 和 C. Th¨ale，《贝塔星多胞体与双曲随机几何》，《数学进展》404（2022年），文章编号 108382。[10] B. T. Hansen 和 T. M¨uller，《双曲平面中沃罗诺伊渗流的临界概率趋于 $1/2$》，《随机结构与算法》60（2022年），54–67 页。[11] L. Heinrich、H. Schmidt 和 V. Schmidt，《泊松超平面镶嵌的中心极限定理》，《应用概率年刊》16（2006年），919–950 页。[12] F. Herold、D. Hug 和 C. Th¨ale，《双曲空间中泊松超平面的 k-骨架是否满足中心极限定理？》，《概率论及相关领域》179（2021年），889–968 页。[13] Z. Kabluchko、D. Rosen 和 C. Th¨ale，《双曲空间中 λ-测地泊松超平面的涨落》，arXiv:2205.12820，即将在《以色列数学杂志》发表（2024+）。[14] R. Lachi`eze-Rey 和 G. Peccati，《泊松空间中的精细高斯涨落，I：收缩、累积量与几何随机图》，《电子概率杂志》18（2013年），第 32 号，1–32 页。[15] G. Last 和 M. D. Penrose，《泊松过程讲义》，数理统计学会教材第 7 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[16] G. Last、M. D. Penrose、M. Schulte 和 C. Th¨ale，《若干多元泊松泛函的矩与中心极限定理》，《应用概率进展》16（2014年），348–364 页。[17] T. Owada 和 D. Yogeshwaran，《双曲随机几何图中的子树计数》，《应用概率进展》54（2022年），1032–1069 页。[18] M. Reitzner 和 M. Schulte，《泊松点过程U统计量的中心极限定理》，《概率年刊》41（2013年），3879–3909 页。[19] N. Ross，《Stein方法基础》，《概率调查》8（2011年），210–293 页。[20] L. A. Santal´o 和 I. Ya˜nez，《欧几里得平面与双曲平面中由随机直线形成的多边形的平均值》，《应用概率杂志》9（1972年），140–157 页。[21] R. Schneider 和 W. Weil，《随机几何与积分几何》，施普林格（2008年）。[22] M. Schulte，《泊松泛函在柯尔莫哥洛夫距离下的正态逼近》，《理论概率杂志》29（2016年），96–117 页。[23] G. Solanes，《双曲空间中等距点集的积分几何》，《以色列数学杂志》145（2005年），271–284 页。