arXiv:2303.17854v1 [math.CV] 31 Mar 2023

三维李群上左不变 CR 结构的链

DAIKI MAEDA

Abstract. 设 G 是一个带有左不变非退化 CR 结构的三维连通李群。我们证明，G 上的所有链都是闭合的，当且仅当 G 与 SU(2)、SO(3) 和 $\mathrm{H}_3^* = \mathrm{H}_3/\mathbb{Z}$ 上的一种左不变球面 CR 结构 CR 等价；后者是海森堡群的一个商群。

1. Introduction

非退化 CR流形 M 上的链是一族曲线，它们由 M的 CR结构不变地构造而成。嘉当（E. Cartan）最初为 $\mathbb{C}^2$ 中的超曲面引入了链 [4] ，随后 Chern– Moser [6] 和 Fefferman [8]将其推广到更高维；关于这些推广之间的关系，见 [3] 。Fefferman 的定义基于定义在圆丛 $C(M)$上的一个伪黎曼度量共形类 $[g]$ ，该圆丛位于 M上方；如今这个圆丛称为 Fefferman空间。于是，链被定义为该共形类 $[g]$中度量 g 的零测地线在 M 上的投影。

链已在各种CR流形上得到研究。例如，Reinhardt超曲面 [10], 、格劳尔特管的边界 [12], 以及SU(2)上的左不变CR结构 [5]。Castro和Montgomery [5] 证明，SU(2)上所有左不变CR结构的模空间可由一个实参数 $a \geq 1$参数化，并写出了描述这些链的动力系统。对于 $a = 1$，该CR结构可实现为 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$上的标准CR结构。在这种情形下，任意一条链都是 S^3 与一条复直线的交集；因此所有链都是闭合的。对于 $a > 1$，情况则有所不同：他们证明，除有限个 $a > 1$值外，闭合链和拟周期链都存在。本文通过证明这两种类型的链对所有 $a > 1$均存在，完善了他们的结果。

此外，我们研究三维李群上所有左不变CR结构的链。 E. Cartan 在 [4] 中对三维齐性CR流形进行了分类。Bor 和 Jacobowitz [2] 重新审视了 Catran 的论文，并以现代语言详细给出了四种三维李群的分类结果。本文沿用他们的方法，完整分类三维李群上的左不变CR结构。随后，我们研究非闭链的存在性。

为陈述我们的结果，我们先回顾李群上 3 个所有链均为闭链的 CR 结构实例。第一个是球面 $SU(2) \cong S^3$，如上所述。第二个是作为 CR 流形的其万有覆盖 SO(3)。第三个是海森堡群 H_3 的一个商。由于 S^3 作为 CR 流形是 H_3 的一点紧化，H_3 的链会趋于无穷远。然而，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32V05, 70G65, 70G45.*Key words and phrases.* 链、CR几何、费弗曼度量、李-泊松方程、左不变CR结构。

通过取商 $\mathrm{H}_3^* = \mathrm{H}_3/\mathbb{Z}$（见第 3.1 节），我们得到一个非紧致 CR 流形，其所有链均为闭链。请注意，在每种情形下，CR 结构都局部等价于球面上的 CR 结构，因此称为球面 CR 结构。我们的主要结果指出，这些构成了所有链均为闭链的左不变 CR 流形的完整列表。

定理 1.1. 设 G 是一个带有左不变非退化 CR 结构的三维连通李群。那么，当且仅当 G 等价于带有球面 CR 结构的 SU(2) 、 SO(3) 或 H_3^* 时， G 上的所有链都是闭合的。

我们对基于 [5] 的链进行分析。对于李群 G 上的左不变 CR 结构，Fefferman 空间是 $G \times S^1$ ，度量 g 可以选为 $G \times S^1$ 上的左不变度量。因此，对链的研究可以归结为对李群上左不变度量所对应的哈密顿系统的研究。这种哈密顿系统有一个定义在李代数对偶空间上的约化系统，称为李–泊松方程。如果李–泊松方程存在不闭合解，那么就存在不闭合的链。如果李–泊松方程存在平稳解，那么该链的 OED 有不闭合的显式解。除 SU(2) 的情形外，定理 1.1 可利用这一判据证明。

对于 SU(2)，存在这样的情形：Lie–Poisson 方程的每个解 C 都是闭合的；这些链是实数域 S^1上一个 C丛中的曲线。链的贝里相位定义为沿链行进一个 C周期时，纤维 S^1 中的角度之差。当且仅当贝里相位是 π的有理倍数时，链才是闭合的。因此，定理证明的主要部分是计算贝里相位，相关结果见第 5 节。

本文结构如下。第 2 节回顾 Fefferman 关于左不变度量的链和哈密顿系统的定义。第 3 节对三维连通李群上的左不变非退化 CR 结构进行分类，并计算费弗曼度量。第 4 节通过求解 Lie–Poisson 方程，证明主定理中除 SU(2) 情形外的部分。第 5 节研究 SU(2) 情形，并完成定理的证明。

2. Preliminaries

2.1. CR 流形。设 M 是一个维数为 3 的 C^∞-流形。在 M 上的 CR结构是一个复线丛 $T^{1,0} \subset \mathbb{C}TM$，满足 $T^{1,0} \cap T^{1,0} = \{0\}$。我们假设存在一个实 1-形式 θ，使得 $\ker \theta = T^{1,0} \oplus T^{1,0} \subset \mathbb{C}TM$ 且 $\theta \wedge d\theta \neq 0$。在这种情况下， $T^{1,0}M$ 称为非退化的，而 θ 称为接触形式。

θ 的 Reeb向量场 T 是一个由下式刻画的向量场

$$\theta(T) = 1, \quad T \lrcorner d\theta = 0. \tag{2.1}$$

对于 $T^{1,0}$ 的局部标架 T_1，我们可以通过 $\{T, T_1, T_{\bar{1}} := \overline{T_1}\} = \{\theta, \theta^1, \theta^{\bar{1}}\}$ 为 $\mathbb{C}TM$ 定义一个局部标架。这样的标架称为容许标架，其对偶余标架称为容许余标架。在此余标架下，我们有

$$d\theta = ih_{1\bar{1}}\theta^1 \wedge \theta^{\bar{1}}$$

对于实函数 $h_{1\bar{1}}$，可将其视为 $T^{1,0}$ 上的厄米度量。

$(T^{1,\ 0}, h_{1\bar{1}})$ 的田中–韦伯斯特联络 ∇（参见 [13, 15]）是满足结构方程的度量联络

$$d\theta^1 = \theta^1 \wedge \omega_1{}^1 + A_{\bar{1}}{}^1 \theta^{\bar{1}} \wedge \theta,$$

其中，联络由 $\nabla T_1 = \omega_1{}^1 T_1$定义。张量 $A_{\bar{1}}{}^1$ 称为田中–韦伯斯特挠率。田中–韦伯斯特数量曲率 S 定义为

$$d\omega_1{}^1 \equiv -iS d\theta \mod \theta.$$

现在我们遵循 Lee [11]的做法，回顾费弗曼度量的构造。令

$$K^*(M) := \{\zeta \in \wedge^2 \mathbb{C}T^*M \mid \zeta \neq 0, \bar{V} \lrcorner \zeta = 0, \forall V \in T^{1,0}\},$$

去掉零截面后的典范丛。Fefferman空间是圆丛 $C(M) = K^*(M)/\mathbb{R}^+$，即自然 $\mathbb{R}^+$ 作用 $\zeta \mapsto \lambda\zeta$下的商。选取一个容许余标架 $\{\theta, \theta^1, \theta^{\bar{1}}\}$，可得到丛 π的局部截面 $\zeta_0 = [\theta \wedge \theta^1]$： $C(M) \to M$，它也给出纤维坐标 $s \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，其定义为 $[\zeta] = e^{is}\zeta_0$。于是我们可以在 $C(M)$上定义一个1-形式，定义如下：

$$\sigma := \frac{1}{3}\Big(ds - \operatorname{Im} \pi^* \omega_1{}^1 - \frac{S}{4}\pi^*\theta\Big). \tag{2.2}$$

事实证明， σ 与容许余标架的选择无关，因此 σ在 $C(M)$上全局定义。与 θ 相对应的 Fefferman 度量 g_θ 是 $C(M)$上的洛伦兹度量，其定义为

$$g_\theta := 2\pi^*(h_{1\bar{1}}\theta^1 \odot \theta^{\bar{1}}) + 4\pi^*\theta \odot \sigma, \tag{2.3}$$

其中 $\theta \odot \sigma := \frac{1}{2}(\theta \otimes \sigma + \sigma \otimes \theta)$。文献 [11] 证明了

$$g_{\hat{\theta}} = e^{\Upsilon} g_\theta \quad \text{if } \hat{\theta} = e^{\Upsilon}\theta \text{ with } \Upsilon \in C^\infty(M).$$

因此，共形类 $[g_\theta]$ 由 M的 CR结构确定。

定义 2.1. 链是 M 上的一条曲线 γ，它是$(C(M), [g_\theta])$中零测地线 $\tilde{\gamma}$在 M 上的投影，并且 $\theta(\dot{\gamma}) \neq 0$。

2.2. 具有左不变度量的李群上的测地线。设 G是一个维数为 n 的李群， g 是 G上的左不变伪黎曼度量。设$\{e_i\}$ 是李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基， $\{\omega^i\}$ 是其对偶基。于是我们可以将 T^*G 平凡化为

$$G \times \mathbb{R}^n \to T^*G,\ (p, M_i) \mapsto M_i \omega^i(p).$$

我们可以将 M_i 看作定义在 T^*G上的函数；通过这一平凡化，我们还可以将 e_i 和 ω^i看作 T^*G上的向量和 1-形式。按照这些约定，典范1-形式Θ 可以写成

$$\Theta = M_i \omega^i.$$

因此，典范 2-形式为

$$\omega := -d\Theta = -(dM_i \wedge \omega^i + M_i d\omega^i).$$

因此，由 ω诱导的同构 $\omega^\sharp$： $T^*(TG) \to T(TG)$ 满足

$$\omega^\#(\omega^i) = -\frac{\partial}{\partial M_i}, \quad \omega^\#\left(dM_i - M_j(e_i \lrcorner d\omega^j)\right) = e_i. \tag{2.4}$$

我们还有

$$M_j(e_i \lrcorner d\omega^j) = \{M_i, M_k\}\omega^k, \tag{2.5}$$

其中， $\{\cdot,\cdot\}$ 是(T^*G,ω)上的泊松括号。由于 g 是左不变的， $g_{ij}:=g(e_i,e_j)$是一个常数矩阵。利用 $\{g_{ij}\}$的逆矩阵 $\{g^{ij}\}$ ，我们将 g 的哈密顿量定义为

$$H(M_i\omega^i)=\frac{1}{2}g^{ij}M_iM_j=\frac{1}{2}M_iM^i, \tag{2.6}$$

其中我们令 $M^i=g^{ij}M_j$。由此可得 $dH=M^jdM_j$。因此，利用 (2.4) 和 (2.5)，我们可以将哈密顿向量场写成

$$X_H:=\omega^\#dH=-M^j\{M_j,M_k\}\frac{\partial}{\partial M_k}+M^je_j.$$

因此， X_H 的一条积分曲线 $\gamma(t)=M_i(t)\omega^i(p(t))$ 满足

$$\begin{cases}\dot{M}_i &= -M^j\{M_j,M_i\},\\ \dot{p} &= M^je_j.\end{cases} \tag{2.7}$$

方程组中的第一个方程称为李–泊松方程。

设 R 为 G 的右变换。则映射

$$J:T^*G\to\mathfrak{g}^*,\quad \alpha_p\mapsto R_p^*\alpha_p,$$

称为动量映射。可以证明， X_H 的任意积分曲线都位于 J 的某个水平集上；例如参见 [1]。

3. The Left-invariant CR structures on the 3-dimensional connectedLie groups

3.1. CR结构的分类。我们回顾以下众所周知的事实；例如参见 [14]。任意 3 维连通实非阿贝尔李群都同构于下列两两不同构的李群之一：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R},\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times S^1,\mathrm{H}_3,\mathrm{H}_3^*,\\ &\mathrm{G}_{3.2},\mathrm{G}_{3.3},\mathrm{G}_{3.4}^a(a\geq 0,a\neq 1),\mathrm{G}_{3.5}^a(a>0),\\ &\widetilde{\mathrm{SE}}(2),\mathrm{SE}_n(2),\mathrm{SE}(2)\cong\mathrm{G}_{3.5}^0,\\ &\tilde{\mathrm{A}},\mathrm{A}_n(n\geq 3),\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}),\mathrm{SU}(2),\mathrm{SO}(3).\end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & e^y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}, \\
\mathrm{H}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \\
\mathrm{G}_{3.2} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & e^z & 0 \\ x & -ze^z & e^z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \\
\mathrm{G}_{3.3} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & e^z & 0 \\ x & 0 & e^z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \\
\mathrm{G}_{3.4}^a &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^{az}\cosh z & -e^{az}\sinh z \\ y & -e^{az}\sinh z & e^{az}\cosh z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \\
\mathrm{G}_{3.5}^a &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & e^{az}\cos z & -e^{az}\sin z \\ y & e^{az}\sin z & e^{az}\cos z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

李群 H_3^* 是 $\mathrm{H}_3/\mathbb{Z}(\mathrm{H}_3(\mathbb{Z}))$，其中

$$\mathbb{Z}(\mathrm{H}_3(\mathbb{Z})) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

~~李群 SE(2) 是 SE(2) 的万有覆盖群，而 $\mathrm{SE}_n(2)$ 是n重覆盖空间。群 A 和 A_n分别是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的万有覆盖空间和 n重覆盖空间。

我们首先回顾 SU(2)、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 和 H_3 上左不变CR结构的标准形。

命题 3.1 ([5, 2])。对于 SU(2)、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 和 H_3，，左不变非退化CR结构分类如表 1 所示。表 1 中的CR结构两两之间不存在 CR 微分同胚；其中 H_3，SU(2) 上对应于 $a = 1$的结构，以及 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上对应于 $a = 1, -3 + 2\sqrt{2}$ 的结构均为球面型。

对于其他群，我们有如下结论

命题 3.2. 各李群上的左不变非退化 CR 结构分类如表 2 所示。表 2 中的 CR 结构两两之间不存在 CR 微分同胚，且 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$、$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times S^1$ 和 $\mathrm{G}_{3.4}^3$ 上的 CR 结构为球面型。$\mathrm{G}_{3.3}$ 上的任意左不变 CR 结构都是退化的。

证明。对于 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times S^1$ 这两种情形，通过 Ad_g 和 $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & \lambda e^y \end{smallmatrix}\right)$，我们分别可以将 e_1、e_2 映射为 $\lambda e^y e_1$、$-xe_1 + e_2$。因此，任意左不变非退化 CR 结构都可以映射为 $\mathbb{C}(e_2 + ie_1 + ae_3)$，其中 $\mathrm{Im}\, a \neq 0$。对于 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times \mathbb{R}$，通过对 $\mathbb{R}$ 乘以一个常数，我们可以进一步假设 $\mathrm{Im}\, a = 1$。此外，存在一个李代数同态，将 e_2 映射为 $e_2 - \mathrm{Re}\, ae_3$；因此我们可以假设 $a = i$。对于 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times S^1$，结论可由下一节给出的嵌入得到。

TABLE 1. 规范化左不变CR结构（H_3,SL(2,$\mathbb{R}$)、SU(2)）

群	$T^{1,0}$	基	李括号
H_3	$\mathbb{C}(e_1 - ie_2)$	$e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = 0$, $[e_3, e_1] = 0$
SL(2, $\mathbb{R}$)	$\mathbb{C}\left(ae_1 + e_2 - i\frac{1+a}{2}e_3\right)$, $a \in (-1, 0) \cup (0, 1]$	$e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = 2e_2$, $[e_3, e_1] = 2e_1$
SU(2)	$\mathbb{C}\left(e_1 - \frac{i}{a}e_2\right), a \geq 1$	$e_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_3 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$	$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$

对于 $G_{3.2}$，通过 Ad_g 和 $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & \lambda e^z & 0 \\ x & -\lambda z e^z & e^z \end{pmatrix}$，我们可以将 e_1、e_2、e_3 映射为

$$\lambda e^z e_1, \quad \lambda e^z(-ze_1 + e_2), \quad (y - x)e_1 - ye_2 + e_3,$$

分别。因此，任意 Levi 分布都可映射到 Span$\{e_1, e_3\}$ 或 Span$\{e_2, e_3\}$。此外，后者结构可映射到 $\mathbb{C}(e_3 + ie_2)$。前者结构是退化的。

对于 $G_{3.3}$，通过带有 $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & e^z & 0 \\ x & 0 & e^z \end{smallmatrix}\right)$ 的 Ad_g，我们可以分别将 e_1、e_2、e_3 映射为

$$\lambda e^z e_1, \quad e^z e_2, \quad -xe_1 - ye_2 + e_3,$$

因此，任意 Levi 分布都映射为 Span$\{e_1, e_3\}$ 或 Span$\{ae_1 + e_2$、$e_3\}$。这些 CR结构是退化的。

对于 $G_{3.4}^a$，通过带有 $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & \lambda e^{az} & z & -\lambda e^{az} \\ y & -\lambda e^{az} & z & \lambda e^{az} \end{pmatrix}$ z 双曲余弦 双曲正弦 双曲正弦 双曲余弦 z 的 Ad_g，我们可以分别将 e_1、e_2、e_3 映射为λe^{az}(双曲余弦 ze_1 − 双曲正弦 ze_2) λe^{az}(− 双曲正弦 ze_1 + 双曲余弦 ze_2)、$(y - ax)e_1 + (x - ay)e_2 + e_3$。因此，任意 Levi 分布都映射为 Span$\{e_1, e_3\}$、Span$\{e_2, e_3\}$、Span$\{e_1 + e_2, e_3\}$ 或 Span$\{e_1 - e_2, e_3\}$。此外，前两种结构分别可以映射为 $\mathbb{C}(e_3 + ie_1)$、$\mathbb{C}(e_3 + ie_2)$。后两种结构是退化的。此外，通过交换 e_1 和 e_2 的李代数同态，结构 $\mathbb{C}(e_3 + ie_1)$ 和 $\mathbb{C}(e_3 + ie_2)$ 等价。

对于 $G_{3.5}^a$，通过 Ad_g with $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & \lambda e^{az} & z & -\lambda e^{az} \\ & & z & \lambda e^{az} \end{pmatrix}$ 余弦 正弦 y λe^{az} z 正弦 余弦 z，我们可以分别将 e_1, e_2, e_3 映射到λe^{az}(余弦 ze_1 + 正弦 ze_2) $\lambda e^z az$(− 正弦 ze_1 + 余弦 ze_2)、$(y - ax)e_1 - (x + ay)e_2 + e_3$。因此，任意 Levi 分布都映射到 Span$\{e_2, e_3\}$。此外，这些结构可以映射到 $\mathbb{C}(e_3 + ie_2)$。□

TABLE 2. 仿射群 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}$、$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times S^1$、$\mathrm{G}_{3.2}$、$\mathrm{G}_{3.4}^a$、$\mathrm{G}_{3.5}^a$上的规范化左不变CR结构

群	$T^{1,0}$	基	李括号
$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}$	$\mathbb{C}(e_2+ie_1+ie_3)$	$e_1=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$[e_1,e_2]=-e_1$, $[e_2,e_3]=0$, $[e_3,e_1]=0$
仿射群$(\mathbb{R})_0\times S^1$	$\mathbb{C}(e_2+ie_1+aie_3)$, $a>0$	$e_1=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$[e_1,e_2]=-e_1$, $[e_2,e_3]=0$, $[e_3,e_1]=0$
$\mathrm{G}_{3.2}$	$\mathbb{C}(e_3+ie_2)$	$e_1=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{smallmatrix}\right)$	$[e_1,e_2]=0$, $[e_2,e_3]=e_1-e_2$, $[e_3,e_1]=e_1$
$\mathrm{G}_{3.4}^a$	$\mathbb{C}(e_3+ie_1)$	$e_1=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&a&-1\\0&-1&a\end{smallmatrix}\right)$	$[e_1,e_2]=0$, $[e_2,e_3]=e_1-ae_2$, $[e_3,e_1]=ae_1-e_2$
$\mathrm{G}_{3.5}^a$	$\mathbb{C}(e_3+ie_2)$	$e_1=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $e_3=\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&a&-1\\0&1&a\end{smallmatrix}\right)$	$[e_1,e_2]=0$, $[e_2,e_3]=e_1-ae_2$, $[e_3,e_1]=ae_1+e_2$

3.2. 嵌入。接下来，我们考察如何将上述 CR结构实现为实超曲面。

命题 3.3。表 2 中的所有 CR结构都可嵌入 $\mathbb{C}^2$。
证明。令 $f\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}^2$ 由 $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x&e^y\end{smallmatrix}\right),z\right)\mapsto(e^yi+x,z+iy)$ 定义。如 $df(e_2+ie_1+ie_3)\in T^{1,0}\mathbb{C}^2$ 在单位元处成立，且 f 是 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}$-不变的，因此我们看到 f 是一个 CR 映射。此映射将 $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}$ 嵌入超曲面 $\frac{\alpha-\bar\alpha}{2i}=e^{\frac{\beta-\bar\beta}{2i}}$。

每种情形的论证都类似，这里只给出嵌入映射 f 及其像。

对于 $\left(\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times S^1,\mathbb{C}(e_2+ie_1+aie_3)\right)$，我们可以取

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\x&e^y\end{smallmatrix}\right),e^{zi}\right)=(e^yi+x,e^{ay-zi}).$$

其像是超曲面 $\frac{\alpha-\bar\alpha}{2i}=(\beta\bar\beta)^{\frac{1}{2a}}$。

对于 $\mathrm{G}_{3.2}$，我们有 $f(g)=(\alpha,\beta)$，其中 $(1,\alpha,\beta)^\top=g(1,i,i)^\top$。其像为超曲面 $\frac{\alpha-\bar\alpha}{2i}=e^{1-\frac{\beta-\bar\beta}{\alpha-\bar\alpha}}$。

对于 $G_{3.4}^{a}$，我们取

$$f(g)=(\alpha,\beta)\quad \text{with}\,(1,\alpha,\beta)^{\top}=g\left(1,-\frac{a}{1-a^{2}}i,-\frac{1}{1-a^{2}}i\right)^{\top}.$$

令 $h\colon\ \mathbb{C}^{2}\to\mathbb{C}^{2}$ 由 $(\alpha,\beta)\mapsto((a-1)(\alpha+\beta),(a+1)(\alpha-\beta))$ 定义。则 $h\circ f$的像是超曲面 $\left(\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}\right)\left(\frac{1+a}{a-1}\right)=\frac{\beta-\bar{\beta}}{2i}$，其中 $\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}>0$。

对于 $G_{3.5}^{a}$，取

$$f(g)=(\alpha,\beta)\quad \text{with}\,(1,\alpha,\beta)^{\top}=g\left(1,\frac{1}{1+a^{2}}i,\frac{a}{1+a^{2}}i\right)^{\top}.$$

其像是超曲面 $\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}=$余弦$^{c-a}_{1+a^{2}}\ {}^{c}e^{ac}$正弦，~~其中~~

$$c=\frac{1}{2a}\log\left((1+a^{2})\left(\left(\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}\right)^{2}+\left(\frac{\beta-\bar{\beta}}{2i}\right)^{2}\right)\right).$$

□

注。这些超曲面出现在嘉当论文的表格中 [4, 第70]页。

注。（参见 [2]）CR结构 $\left(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ a=1,-3+2\sqrt{2}\right)$ 嵌入于 $\mathbb{C}^{2}$。CR结构 $\left(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ -1<a<0,a\neq-3+2\sqrt{2}\right)$ 作为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ 中的伴随轨道的双重覆盖浸入其中。CR结构 $(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\ 0<a<1)$ 作为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathrm{P}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ 中的伴随轨道的 $4:1$ 覆盖浸入其中。Rossi球面作为 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的伴随轨道的 $2:1$ 覆盖浸入其中。对于 $(\mathrm{H}_3,\mathbb{C}(e_1-ie_2))$，CR 映射：$\mathrm{H}_3\to\mathbb{C}^{2},\left(\begin{smallmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)\mapsto(\alpha,\beta)=\left(x-iy,4z-2xy+(x^{2}+y^{2})i\right)$ 将 H_3 嵌入 $\mathrm{Im}\ \beta=\alpha\bar{\alpha}$ 中。

3.3. 费弗曼度量。接下来我们计算费弗曼度量。设 $\{\omega^{i}\}$ 为 $\{e_{i}\}$ 的对偶余标架。对于每个 CR结构，取表 3 中的接触形式 θ 。然后，容许余标架以及相应的 Tanaka–Webster 联络/挠率/曲率列于表 4。利用这些结果，我们得到表 5 中的费弗曼度量 g_{θ}。

4. 除 SU(2) 外的三维连通李群上的左不变 CR结构

本节中，我们证明定理 1.1，但不包括 SU(2) 的情形。对于李群 G 上的任意左不变 CR结构，费弗曼空间为 $G\times S^{1}$，而 g_{θ} 是 $G\times S^{1}$ 上的左不变度量。因此，我们可以将第 2.2 节中的公式应用于费弗曼度量。当两个李群具有相同的李代数时，我们可以使用以下

引理 4.1. 设 G 为具有左不变非退化 CR 结构的李群。˜若 G 是 G 的覆盖群，且配备提升的 CR 结构，则˜链在 G上的投影是 G的链。

除（F）这种情况外，我们取 $\{\omega^{1},\omega^{2},\theta,ds\}$ 作为 $G\times S^{1}$的余标架，它也可视为 $G\times S^{1}$的李代数对偶空间的一组基。以平凡化 M_{j}表示，哈密顿量和李–泊松方程分别由（2.6）和（2.7）给出。注意，零测地线位于哈密顿量 $H=0$的零点集上。此外，由于动量映射 J，李–泊松方程的每个解都位于余伴随作用的一个轨道上。

TABLE 3. 接触形式及相应的Reeb向量场

	CR结构	接触形式 θ	Reeb向量场 T
(A)	$(\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0 \times S^1, \mathbb{C}(e_2 + ie_1 + aie_3))$, $a > 0$	$a\omega^1 - \omega^3$	$-e_3$
(B)	$(G_{3.2}, \mathbb{C}(e_3 + ie_2))$	$-\omega^1$	$-(e_1 + e_2)$
(C)	$(G^a_{3.4}, \mathbb{C}(e_3 + ie_1))$ $a \geq 0, a \neq 1$	$-\omega^2$	$-(e_2 + ae_1)$
(D)	$(G^a_{3.5}, \mathbb{C}(e_3 + ie_2))$ $a \geq 0$	$-\omega^1$	$-(e_1 + ae_2)$
(E)	$(H_3, \mathbb{C}(e_1 - ie_2))$	$-\omega^3$	$-e_3$
(F)	$(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \mathbb{C}\left(ae_1 + e_2 - i\frac{1+a}{2}e_3\right))$, $a \in (-1, 0) \cup (0, 1]$	$\mathrm{sign}(a)(\omega^1 - a\omega^2)$	符号(a) $\left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2a}e_2\right)$
(G)	$(\mathrm{SU}(2)\,\mathbb{C}\left(e_1 - \frac{i}{a}e_2\right)), a \geq 1$	$-\omega^3$	$-e_3$

TABLE 4. Tanaka–Webster联络

	θ^1	$2h_{1\bar{1}}$	联络/挠率/曲率
(A)	$\omega^1 + i\omega^2$	a	$\omega_1{}^1 = \frac{i}{2}(\theta^1 + \theta^{\bar{1}})$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = 0, S = -\frac{1}{a}$
(B)	$\omega^1 - \omega^2 - i\omega^3$	1	$\omega_1{}^1 = -\frac{i}{2}\theta - i(\theta^1 + \theta^{\bar{1}})$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = -\frac{i}{2}, S = -\frac{7}{2}$
(C)	$\omega^1 - a\omega^2 + i\omega^3$	1	$\omega_1{}^1 = \frac{a^2-1}{2i}\theta + ai(\theta^1 + \theta^{\bar{1}})$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = \frac{a^2-1}{2i}, S = -\frac{7a^2+12}{}$
(D)	$a\omega^1 - \omega^2 - i\omega^3$	1	$\omega_1{}^1 = \frac{a^2+1}{2i}\theta - ai(\theta^1 + \theta^{\bar{1}})$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = \frac{a^2+1}{2i}, S = \frac{1-7a^2}{2}$
(E)	$\omega^1 + i\omega^2$	1	$\omega_1{}^1 = 0$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = 0, S = 0$
(F)	$\sqrt{\frac{4\|a\|}{a+1}}\left(\omega^3 - i\frac{1+a}{2}\omega^2 - \frac{1+a}{4\|a\|}i\theta\right)$	2	$\omega_1{}^1 = -Si\theta$, $S = -\frac{1+6a+a^2}{4\|a\|\ 1+a}()$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = -i\frac{(\ 1-a^{\ 2})()}{4\|a\|\ 1+a}$
(G)	$\omega^1 + ai\omega^2$	$1/a$	$\omega_1{}^1 = -Si\theta, S = \frac{1+a^2}{2a}$, $A_{\bar{1}}^{\ 1} = \frac{1-a^2}{2ai}$

我们使用以下判据来获得非闭链。如果能找到李–泊松方程的一个非闭解，那么相应的链就是

TABLE 5. Fefferman度量

	费弗曼度量
(A)	$g_\theta = a(\omega^1\otimes\omega^1+\omega^2\otimes\omega^2)+\frac{4}{3}\left(ds-\omega^1+\frac{1}{4a}\theta\right)\odot\theta$
(B)	$g_\theta = \frac{1}{6}\omega^1\otimes\omega^1+\frac{2}{3}\omega^1\odot\omega^2+\omega^2\otimes\omega^2+\omega^3\otimes\omega^3-\frac{4}{3}\omega^1\odot ds$
(C)	$g_\theta = \omega^1\otimes\omega^1+\left(\frac{2a}{3}\omega^1-\frac{4}{3}ds\right)\odot\omega^2+\frac{a^2-3}{6}\omega^2\otimes\omega^2+\omega^3\otimes\omega^3$
(D)	$g_\theta = \frac{a^2+3}{6}\omega^1\otimes\omega^1+\omega^2\otimes\omega^2+\left(\frac{2a}{3}\omega^2-\frac{4}{3}ds\right)\odot\omega^1+\omega^3\otimes\omega^3$
(E)	$g_\theta = \omega^1\otimes\omega^1+\omega^2\otimes\omega^2-\frac{4}{3}\omega^3\odot ds$
(F)	$g_\theta = 2\theta^1\odot\theta^1+\left(-\frac{1+6a^2}{4\lvert a\rvert\sqrt{1+a^2}}\theta+\frac{4}{3}ds\right)\odot\theta$
(G)	$g_\theta = \frac{1}{a}\omega^1\otimes\omega^1+a\omega^2\otimes\omega^2+4\omega^3\odot\left(\frac{1}{8}\left(a+\frac{1}{a}\right)\omega^3-\frac{1}{3}ds\right)$

不是闭合的。如果我们能找到一个平稳解（M_j），那么零测地线的 OED 为 $\dot p = M^j e_j$，而省略 $e_4 = \frac{\partial}{\partial s}$ 分量后，即可得到链的方程（也记作 $p(t)$）。我们将证明这些链不是闭合的。

4.1. (A) 的李–泊松方程。李–泊松方程和哈密顿函数为

$$\begin{cases} \dot M_1 = M_2M_3+\frac{1}{a}M_1M_2 \\ \dot M_2 = -\frac{1}{a}M_1^2-M_1M_3-\frac{1}{a}M_1M_4-M_3M_4 \\ \dot M_3 = 0 \\ \dot M_4 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$2H = \frac{1}{a}\left((M_1+M_4)^2+M_2^2\right)+3M_3M_4-\frac{3}{4}\frac{M_4^2}{a}.$$

因此，M_3 和 M_4 沿测地线保持不变。令 $M_3=-\frac{1}{2a}$、$M_4=1$，并考虑位于 $H=0$ 上的解，即 $(M_1+1)^2+M_2^2=\frac{9}{4}$。点 $(M_1, M_2)=\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 是唯一的驻点，此处（4.1）的右端均为 0，因此这些解是同宿轨道（例如参见 [9] 关于同宿轨道的讨论），尤其是它们并不闭合。与这些轨道对应的链也不闭合，因为 M_1 不是周期的。因此，$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times S^1$ 的情形已处理完毕。根据引理 4.1，$\mathrm{Aff}(\mathbb{R})_0\times\mathbb{R}$ 的情形也已处理完毕。

4.2.（B）的李–泊松方程。方程为

$$\begin{cases} \dot M_1 = M_1M_3 \\ \dot M_2 = -M_1M_3+M_2M_3 \\ \dot M_3 = 2M_1M_4+M_1M_2-M_2^2-\frac{1}{2}M_2M_4 \\ \dot M_4 = 0 \end{cases}$$

$$2H = -3M_1M_4+M_2^2+M_3^2+M_2M_4-\frac{1}{8}M_4^2.$$

设 $M_1=0$ 和 $M_4=1$。考虑解位于 $H=0$ 上的情形，即位于 $\mathbb{R}^2$ 中的曲线 $\left(M_2+\frac{1}{2}\right)^2+M_3^2=\frac{3}{8}$ 上。点 $(M_2, M_3)=\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ 是驻点，因此这条圆上存在异宿轨道。由此得到非闭链。

4.3. (C) 的李–泊松方程。方程为

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = aM_1M_3 - M_2M_3 \\ \dot{M}_2 = aM_2M_3 - M_1M_3 \\ \dot{M}_3 = -\frac{a^2+3}{2}M_1M_4 - aM_1^2 + 2aM_2M_4 + M_1M_2 \\ \dot{M}_4 = 0 \end{cases}$$

$$2H = M_1^2 + aM_1M_4 - 3M_2M_4 + M_3^2 + \frac{9-a^2}{8}M_4^2.$$

当 $M_3 = 0, M_4 = 1$是方程组 $-\frac{a^2+3}{2}M_1 - aM_1^2 + 2aM_2 + M_1M_2 = 0$, $M_1^2 + aM_1 - 3M_2 + \frac{9-a^2}{8} = 0$的一个解时，它是一个驻点。由此根据（2.7）可得链方程为 $\dot{p} = \left(M_1 + \frac{a}{2}\right)e_1 - \frac{3}{2}e_2$。该解

$$p(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left(M_1 + \frac{a}{2}\right)t & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2}t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

不是闭的。

4.4. (D)的李–泊松方程。对于$G_{3.5}^a$，方程为

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = aM_1M_3 + M_2M_3 \\ \dot{M}_2 = aM_2M_3 - M_1M_3 \\ \dot{M}_3 = \frac{3-a^2}{2}M_2M_4 - aM_2^2 + 2aM_1M_4 + M_1M_2 \\ \dot{M}_4 = 0 \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(M_2^2 + aM_2M_4 - 3M_1M_4 + M_3^2 - \frac{9+a^2}{8}M_4^2\right).$$

当 $M_3 = 0, M_4 = 1$ 时，方程组 $\frac{3-a^2}{2}M_2 - aM_2^2 + 2aM_1 + M_1M_2 = 0$, $M_2^2 + aM_2 - 3M_1 - \frac{a^2+9}{8} = 0$ 的解给出驻点。对于这类点，链方程为 $\dot{p} = -\frac{3}{2}e_1 + \left(M_2 + \frac{a}{2}\right)e_2$，它有一个非闭解

$$p(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}t & 1 & 0 \\ \left(M_2 + \frac{a}{2}\right)t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

~由于 SE(2) 和 $SE_n(2)$ 覆盖 $G_{3.5}^a$，我们也看到这些情形同样存在非闭链。

4.5. （E）的李–泊松方程。尽管这早已为人所知，为了完整起见，我们计算了 H_3 上的链。测地线方程和哈密顿函数为

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = -M_2M_3 \\ \dot{M}_2 = M_1M_3 \\ \dot{M}_3 = 0 \\ \dot{M}_4 = 0 \end{cases}$$

$$2H = M_1^2 + M_2^2 - 3M_3M_4.$$

对于满足 $M_4 \neq 0$ 的解（$p(t)$ $\{M_i(t)\}$， M_4），

$$(p(t/M_4), \{M_i(t/M_4)/M_4\}, 1)$$

也是一个解。因此，注意到 $\theta(\dot{p}) = -M_4 \neq 0$，通过对时间参数 t 作线性变换，我们可以假设 $M_4 = 1$。因此，

$$(M_1, M_2) = \left(\sqrt{3M_3}\cos(M_3 t), \sqrt{3M_3}\sin(M_3 t)\right)$$

是李–泊松方程的一个解。

于是，链的方程可写为

$$\dot{p} = M_1 e_1 + M_2 e_2 - \frac{3}{2} M_4 e_3 - \frac{3}{2} M_3.$$

若 $M_3 \neq 0$，则链 $p(t)$ 满足 $p(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$是

$$p(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3M_3}}{M_3}\sin(M_3 t) & -\frac{3}{4M_3}\sin(2M_3 t) \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3M_3}}{M_3}(1 - \cos(M_3 t)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $M_3 = 0$，则链 $p(t)$ 可写成如下形式

$$p(t) = p(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & ct \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

其中 c 为某个常数。若取 $\mathbb{Z}(\mathrm{H}_3(\mathbb{Z}))$ 的商，则 $p(t)$ 投影为一条闭曲线。因此我们看到，H_3^* 上的所有链都是闭合的。

4.6. (F) 的李–泊松方程。令 $\{\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \tilde{e_3}\}$ 为标架

$$\left\{ae_1 + e_2, \frac{1+a}{2}e_3, \left(\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2a}e_2\right)\mathrm{sign}(a)\right\}.$$

若取 $\left\{\tilde{e_1}, \tilde{e_2}, \tilde{e_3}, \frac{\partial}{\partial s}\right\}$ 作为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times S^1$ 的李代数的一组基，则李–泊松方程和哈密顿函数为

$$\begin{cases} \dot{M_1} = M_2 M_3 + \frac{3}{1+a}\mathrm{sign}(a) M_2 M_4 \\ \dot{M_2} = -M_1 M_3 - \frac{3(1+a)}{4|a|} M_1 M_4 \\ \dot{M_3} = (\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{a(1+a)^2}) M_1 M_2 \\ \dot{M_4} = 0. \end{cases}$$

$$2H = \frac{{M_1}^2 + {M_2}^2}{2|a|(1+a)} + 3M_3 M_4 + \frac{9}{16}\frac{a^2 + 6a + 1}{|a|(1+a)} M_4^2.$$

令 $M_4 = 1$。则解曲线位于抛物面 $H = 0$ 上，其二次曲面为

$$\frac{{M_1}^2}{4a^2} + \frac{{M_2}^2}{a(1+a)^2} - {M_3}^2 = K$$

对于某个常数 K。这些二次曲面是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的余伴随作用轨道。对于 $-1 < a \leq 5 - 2\sqrt{6}, a \neq 0$，与 $K = -\frac{9}{256}\left(\frac{a^2+6a+1}{a\ 1+a}()\right)^2$ 对应的解是同宿的。对于 $5 - 2\sqrt{6} < a < 1$，与 $K = -\frac{9}{8}\frac{(1-a^{\ 2})()^2}{a\ 1+a}$ 对应的解是异宿的。当 $a = 1$ 时，链的方程为

$$\dot{p} = \frac{1}{4}M_1 \tilde{e_1} + \frac{1}{4}M_2 \tilde{e_2} + \frac{3}{2}M_4 \tilde{e_3},$$

它具有非闭解。SL(2,$\mathbb{R}$) 上的非闭链投影到 PSL(2,$\mathbb{R}$) 上的非闭链，而这些链又提升到覆盖空间˜A$_n$ 和 A 上。

5. Chains on SU(2)

5.1. 李–泊松方程。对于 SU(2) $\times S^1$ 的情形，方程为

$$\begin{cases} \dot{M}_1 = -\frac{1}{a}M_2M_3 - \frac{3}{2}M_2M_4 \\ \dot{M}_2 = aM_1M_3 + \frac{3}{2}M_1M_4 \\ \dot{M}_3 = (\frac{1}{a} - a)M_1M_2 \\ \dot{M}_4 = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

$$2H = a{M_1}^2 + \frac{1}{a}{M_2}^2 - 3M_3M_4 - c(a)M_4^2,$$

其中 $c(a) = \frac{9}{8}\left(a + \frac{1}{a}\right)$。与第 4.5 节一样，我们可以假设 $M_4 = 1$。解曲线是抛物面 $H = 0$ 与球面 $K = {M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2$ 的交线，其中 K 是某个常数。在 [5], 中，曲线在 M_1M_2 平面上的投影分类如下。

当 $a > \sqrt{3}$ 时，原点变为鞍点。与情形 $K = \frac{9}{64}\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$ 对应的曲线是同宿曲线。当 $\frac{9}{8}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \le K < \frac{9}{64}\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$ 时，曲线由两条互不相交的闭曲线组成；当 $K > \frac{9}{64}\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$ 时，两条曲线合为一条并包围原点。根据这些观察，我们看到，对于 $a > \sqrt{3}$，存在非闭链。

对于 $1 \le a \le \sqrt{3}$，所有曲线都是闭合的，并且包围原点。对于 $1 \le a \le \sqrt{3}$，当 $K \ge c(a)^2/9$ 时，球面与抛物面相交。解曲线 $M(t)$ 在 M_1M_2-平面上的投影关于 M_1 轴和 M_2 轴对称。为了描述曲线，我们设

$$\begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{2}\left(3 - 3a^2 + \sqrt{9a^4 - 4c(a)a^3 + 4Ka^2}\right), \\ \beta &= \tfrac{1}{2}\left(3 - 3a^2 - \sqrt{9a^4 - 4c(a)a^3 + 4Ka^2}\right), \\ \gamma &= \sqrt{Ka^2 - c(a)a + 9/4}. \end{aligned}$$

值得注意的是，$\beta \le \alpha \le \gamma$。因此，在第一象限中，$M_1$ 可表示为 M_2

$$M_1 = \frac{1}{a}\sqrt{-{M_2}^2 + c(a)a - 9/2 + 3s(M_2)} \quad \text{for } 0 \le M_2 \le M_2^{\max},$$

其中

$$M_2^{\max} = \sqrt{c(a)a - 9/2 + 3\alpha},$$
$$s(M_2) = \sqrt{(1-a^2){M_2}^2 + \gamma^2}.$$

那么，$M(t)$ 的周期为

$$T(K,a) = 4\int_0^{M_2^{\max}} \frac{dM_2}{(aM_3 + 3/2)\,M_1}.$$

利用 $H = 0$，可将 $aM_3 + \frac{3}{2} = s(M_2)$ 写成这样，积分中的分母可写为

$$\frac{s(M_2)}{a}\sqrt{-{M_2}^2 + c(a)a - 9/2 + 3s(M_2)}.$$

因此，变量替换后得到

$$T(K,a)=\int_{\alpha}^{\gamma}\frac{4a\,ds}{\sqrt{(s-\alpha)(s-\beta)}\sqrt{\gamma^2-s^2}}. \tag{5.2}$$

引理 5.1. 对于 $1\le a\le\sqrt{3}$，有

$$\lim_{K\to c(a)^2/9+0}T(K,a)=\frac{16a\pi}{3\sqrt{3-a^2}\sqrt{3a^2-1}}.$$

当 $a=\sqrt{3}$ 时，右端读作 ∞。

证明。由于 $K\to c(a)^2/9+0$，我们有

$$\alpha\to\frac{3}{2}-\frac{c(a)}{3},\quad \gamma\to\alpha\to\frac{3}{2}-\frac{c(a)}{3},\quad \beta\to-3a^2+\frac{c(a)a}{3}+\frac{3}{2}.$$

另一方面，由 (5.2) 及

$$\int_{\alpha}^{\gamma}\frac{ds}{\sqrt{s-\alpha}\sqrt{\gamma-s}}=\pi$$

可得估计

$$\frac{4a\pi}{\sqrt{\gamma-\beta}\sqrt{2\gamma}}\le T(K,a)\le\frac{4a\pi}{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{\alpha+\gamma}}.$$

两边都收敛到引理中所述的值。 □

类似地，我们得到以下结果

引理 5.2. 对于 $1\le a\le\sqrt{3}$，有 $\lim_{K\to\infty}T(K,a)=0$.

5.1.1. 贝里相位的计算。对于李–泊松方程的每个周期为 $T=T(K,a)$ 的闭合解 $M(t)$，我们研究 SU(2) 上链的方程：

$$\dot{p}=aM_1e_1+\frac{1}{a}M_2e_2-\frac{3}{2}e_3.$$

回忆一下，曲线 $M(t)$ 在 $\mathfrak{su}(2)^*\cong\mathbb{R}^3$ 中的轨道 C 是其与半径为 $\sqrt{K}$ 的球面的交集；记 $D(K,a)$ 为曲线 M 下方的球面部分。

为简化记号，记 $G=\mathrm{SU}(2)$，并令 $J\colon T^*G\to\mathfrak{g}^*$ 为动量映射，$\pi\colon T^*G\to\mathfrak{g}^*$ 由 M 给出。（我们的记号与 [5], 中的记号不同，其中 $G=\mathrm{SU}(2)\times S^1$。）于是可证明，$J^{-1}(\mu)\cap\pi^{-1}(C)$ 是一个二维环面 T^2，而解 $\gamma(t)=(p(t)\ M(t))$ 位于其上。由于 $\pi\colon T^2\to C$ 是一个 S^1-丛，我们可以定义 $\gamma(0)$ 与 $\gamma(T)$ 之间的角度 $\Delta\theta$，这称为贝里相位。$\Delta\theta$ 的公式已见 [5, (20)-(22)]:

$$\Delta\theta(K,a)=\frac{1}{\sqrt{K}}\int_0^{T(K,a)}f(t,K,a)dt+[\text{Area of } D(K,a)], \tag{5.3}$$

其中

$$f(t,K,a)=\frac{3}{2}M_3(t)+c(a)=\frac{1}{2}\left(aM_1(t)^2+\frac{1}{a}M_2(t)^2+c(a)\right).$$

命题 5.3. 对于 $1\le a\le\sqrt{3}$，有

$$\lim_{K\to\infty}\Delta\theta(K,a)=4\pi.$$

证明. (5.3) 的第一项满足

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{K}} \int_0^T \frac{3}{2} M_3(t) + c(a) dt \leq \frac{T}{\sqrt{K}} \left(\frac{3}{2} \sqrt{K} + c(a) \right).$$

利用引理 5.2，我们可以看到，当$K \to \infty$时，右端趋于 0。

还需证明，当 $K \to \infty$时， $D(K, a)$趋于 4π 。由于 $M_3 = \frac{1}{a} \left(-3/2 + \sqrt{(1-a^2) {M_2}^2 + \gamma^2} \right)$，我们看到 M_3 在点$(M_1, M_2) = (0, M_2^{\max})$处取到最小值 $M_3^{\min}$，该点位于 C上。因此，

$$\lim_{K \to \infty} M_3^{\min} / \sqrt{K} = \lim_{K \to \infty} \gamma / (a\sqrt{K}) = 1.$$

□

命题 5.4. 对于$1 \leq a \leq \sqrt{3}$，有

$$\lim_{K \to c(a)^2/9+0} \Delta\theta(K, a) = \frac{8a\pi}{\sqrt{3-a^2}\sqrt{3a^2-1}}.$$

对于 $a = \sqrt{3}$，右侧读作 ∞。

证明。当 $K \to c(a)^2/9 + 0 =: \lambda$、 M_1和 M_2在 t中一致收敛到 0。因此，(5.3) 的第一项收敛到

$$\frac{1}{2} c(a) \lim_{K \to \lambda} \frac{T(K, a)}{\sqrt{K}} = \frac{3}{2} \lim_{K \to \lambda} T(K, a) = \frac{8a\pi}{\sqrt{3-a^2}\sqrt{3a^2-1}}.$$

(5.3) 的第二项收敛到 0。 □

对每个固定的$1 < a \leq \sqrt{3}$， $\Delta\theta(K, a)$ 的上述两个极限值不同。因此， $\Delta\theta(K, a)$ 不是常数。特别地，并非所有链都是闭的。

在 [5, 命题 7.1], 中已证明，对于任意$a > \sqrt{3}$，并非所有链都是闭的。因此，对于 SU(2) 上任意左不变渐近 CR 结构，闭链和准周期链都存在。任意准周期链在 SU(2) 和 SO(3) 的一个二维环面上稠密 $=$ SU(2)$/\{\pm I\}$，因此准周期链在 SO(3) 上的投影并不闭。至此，我们完成了定理 1.1 的证明。

Acknowledgments

本文基于我的硕士学位论文。我要感谢 Kengo Hirachi 教授的指导和建设性建议。

References

[1] R. Abraham 和 J. E. Marsden. *Foundations of mechanics*，第2版。Addison-Wesley，波士顿，1994年。[2] G. Bor 和 H. Jacobowitz. 左不变CR结构在

3 *Complex* 维

Anal. Synerg. 7 3 23, 18, 2021

李群上。，（）：论文编号。[3] D. Burns, Jr.、K. Diederich 和 S. Shnider. 伪凸边界上的特征曲线。*Duke Math. J.*，44(2)：407–431，1977年。[4] ´E. Cartan. 关于两个复变量空间中超曲面的伪共形几何。 *Ann. Mat. Pura Appl.*，11(1)：17–90，1933年。[5] A. L. Castro 和 R. Montgomery. SU(2)上左不变柯西-黎曼结构的链。 *Pacific J. Math.*，238(1)：41–71，2008年。

[6] S. S. Chern 和 J. K. Moser. 复流形中的实超曲面。 *Acta Math.*，133：219–271，1974年。[7] F. A. Farris. 费弗曼 CR 度量的内在构造。 *Pacific J. Math.*，123(1)：33–45，1986年。[8] C. L. Fefferman. Monge-Amp`ère 方程、伯格曼核与伪凸域的几何。 *Ann. of Math. (2)*，103(2)：395–416，1976年。[9] J. Guckenheimer 和 P. Holmes. *Nonlinear oscillations dynamical systems and bifurcations*，，，*of vector fields* 42 *Applied Mathematical Sciences* 第 卷。施普林格出版社，纽约，1990年。[10] H. Jacobowitz. *An introduction to CR structures* 32 *Mathematical Surveys and*，第 *Monographs* 1990 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[11] J. M. Lee. 费弗曼度量与伪厄米不变量。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，296 1 411 429，1986（）：–。[12] M. B. Stenzel. 格劳尔特管边界上的测地流轨道与链。*Math. Ann.*，322(2)：383–399，2002年。[13] N. Tanaka. *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*。数学讲义，京都大学数学系，第9号。纪伊国屋书店株式会社，东京，1975年。[14] E. B. Vinberg，编者。 *Lie groups and Lie algebras III* 41 *Encyclopaedia of Math-*，，*ematical Sciences* 1994 第 卷。施普林格出版社，柏林，。[15] S. M. Webster. 实超曲面上的伪厄米结构。 *J. Differential Geometry*，13 1 25( )：–41，1978年。

Graduate School of Mathematical Sciences、 The University of Tokyo、 3-8-1 Komaba、 Meguro-ku、 Tokyo 153-8914 JAPAN*Email address*： maeda.daiki.math@gmail.com