arXiv:2303.17897v1 [econ.TH] 31 Mar 2023

体育联盟转播收入分享中的匿名性*

Gustavo Berganti˜nos†

Juan D. Moreno-Ternero‡

2023年4月3日

摘要

我们以公理化方式研究体育联盟转播收入的分配问题。我们的核心公理是匿名性，即经典的公正性公理。在这些问题中已经研究过的其他公正性公理包括平等者平等对待、同等者弱同等对待和对称性。我们研究所有公正性公理之间的关系。此外，我们将匿名性与文献中已有的其他公理结合起来。某些组合产生了对知名规则的新刻画。广义分割规则族可由匿名性、可加性和空团队刻画。让步并分配规则可由匿名性、可加性和关键团队刻画。其他组合则刻画了此前尚未被考虑的新规则。我们给出三种刻画，其中三个公理相同（匿名性、可加性和序保持），第四个公理各不相同（最大愿望、弱上界和非负性）。根据第四个公理的不同，我们得到三个不同的规则族。在所有这些规则族中，让步并分配规则都发挥着核心作用。

JEL分类号：C71、D63、Z20。

关键词：资源分配、广播问题、匿名性、让步与分割。

*谨此致谢：西班牙科学与创新部（Ministerio de Ciencia e Innovaci´on）、MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033通过资助项目PID2020-113440GBI00和PID2020-115011GB-I00，安达卢西亚自治区政府（Junta de Andaluc´ıa）通过资助项目P18-FR-2933，以及加利西亚自治区政府（Xunta de Galicia）通过资助项目ED431B2022/03提供的财政支持。

†ECOBAS，Vigo大学，ECOSOT，36310维戈，西班牙。电子邮箱：gbergant@uvigo.es。

‡通讯作者。经济学系，Universidad Pablo de Olavide，41013塞维利亚，西班牙

1 引言

近年来，付费观看电视转播职业体育的人数稳步增加。因此，出售转播权所获得的收入也随之增加，甚至已成为体育组织管理工作的关键。通常，转播权由各组织共同出售，然后在参与组织之间分配收入。世界各地的收入分成规则各不相同。在北美联赛中，统一分配大多占据主导地位。在欧洲联赛中，包含下限和基于绩效的奖励的混合方案广泛存在。

在 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2020a）中，我们提出了一种称为广播问题的模型。这是一个简单的模型，其分配过程基于转播观众人数。该模型考虑一项双循环锦标赛，其中所有比赛的按次付费观看费用均为固定值。因此，该模型的先验仅为一个方阵，其元素表示行团队与列团队在前者主场进行比赛时的观众人数。我们也在理论上研究了这一模型（Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero，2020b、2021、2022a、2022b、2022c、2023a）。此外，我们还将该模型应用于西甲联赛（西班牙足球联赛）（Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero，2020a、2021、2023b）。

广播问题是资源分配问题的一个实例。文献中关注的其他知名实例包括：机场问题（如 Littlechild 和 Owen，1973 年）、破产问题（如 O’Neill，1982 年；Thomson，2019a ）、电信问题（如 van den Nouweland 等，1996年）、最小成本生成树问题（如 Berganti˜nos 和 Vidal-Puga，2021）、运输问题（如 Algaba 等，2019年；Esta˜n 等，2021）、库存问题（如 Guardiola 等，2021）、根树网络责任分摊问题（如 Oishi 等，2023年）、背包问题（如 Arribillaga 和 Berganti˜nos，2023）、¨汇集博弈（Schlicher 等，2020年）、m属性博弈（Ozen 等，2022年）、城市集约化中心（Hezarkhani 等，2019年）以及含延迟的调度问题（Gon¸calves-Dosantos 等，2020年）。

资源分配文献中的两个经典概念是可加性和公正性。前者是一种稳健性公理。假设我们可以将一个问题划分为两个较小的问题。对此有两种可能的处理方式：解决原问题，或分别解决这些小问题。可加性要求这两种方式产生相同的结果（例如，Thomson，2019b）。在广播问题中，可加性表示收入应当对

观众具有可加性。至于公正性，它是正义的一项基本要求，将伦理上无关的因素排除在分配过程之外（例如，Moreno-Ternero 和 Roemer，2006）。它通常以两种方式形式化。一方面，通过平等待遇公理：如果根据问题的某些输入，两个参与者是相等的或对称的，那么两个参与者都应获得相同的分配。另一方面，通过匿名性公理：对参与者集合进行置换会相应地对分配进行置换。这一公理有一个直接含义：参与者的姓名在分配过程中无关紧要。一个因某个特定参与者的姓名而偏袒该参与者的规则，在实践中体现出明显的不公平。因此，无论在理论上还是实践中，匿名性都是一项具有规范吸引力的公理。

在广播问题中，根据何时认为两支球队相等/对称，人们使用了三种不同版本的平等者平等对待。第一种被准确地命名为平等者平等对待：如果两支球队每次与第三支球队比赛时，两场比赛的观众人数相同，则认为这两支球队相等（例如，Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero，2020b）。第二种被称为同等者弱同等对待：要认为两支球队相等，还需满足一个附加条件，即这两支球队进行的两场比赛（主场和客场）的观众人数也相同（例如，Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero，2022b）。第三种被称为对称性：当两支球队在联赛中的总观众人数相同时，即认为它们相等（例如，Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero，2021）。因此，显然这是三条公理中最强的一条，因为它对球队相等/对称所施加的条件要求最低。[1]

本文转而聚焦于广播问题中的匿名性。我们首先指出，匿名性强于同等者弱同等对待，但它既与平等者平等对待无关，也与对称性无关。随后，我们考察匿名性与文献中其他标准公理结合时所产生的影响。正如我们将要展示的，这有助于揭示这一丰富的广播问题模型的结构。

我们的出发点是将其与可加性相结合。正如我们最近在 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2023a）中所证明的那样，这两条公理的结合刻画了一族一般规则，其中每个团队获得的金额由三个部分组成：一部分取决于该团队的主场

[1]因此，我们可以将这条公理改称为“平等者强平等对待”，以便与另外两条公理的名称保持一致；但为便于与以往文献中的研究结果进行比较，我们倾向于保留以往文献使用的术语。

观众，另一部分取决于该团队的客场观众，第三部分则取决于锦标赛的观众总数。

广播问题中的两条焦点规则属于刚才描述的规则族：所谓的均分规则和让步与分割。在 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2020a）中，我们指出，每场比赛的观众基本上可分为两类：一类是因为支持参赛球队中的一支而观看比赛的人（称为铁杆球迷），另一类是因为认为特定的球队组合使比赛更有趣而观看比赛的人（称为中立球迷）。此外，我们认为，铁杆球迷带来的收入应分配给相应球队，而中立球迷带来的收入应由两支球队平分。就对待球迷的方式而言，均分规则和让步与分割是两种极端规则。均分规则假设只有中立球迷，而让步与分割则假设铁杆球迷的数量尽可能多（且与观众人数相容）。因此，均分规则将每场比赛的观众人数平均分给两支球队。让步与分割则将每场比赛中各球队的铁杆球迷人数分配给该队，并将剩余观众人数平分。两条规则都由可加性、平等者平等对待以及第三条公理所刻画：前者对应空团队，后者对应关键团队（例如，Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero, 2020a）。本文表明，在这些结果中以匿名性替代平等者平等对待，会产生显著的后果。更具体地说，我们表明，匿名性、可加性与空团队相结合，可以刻画一族规则：每场比赛的观众人数按 λ 和 $1-\lambda$ 的比例分别分配给主队和客队（当 $\lambda = 0.5$ 时，对应均分规则）。另一方面，我们表明，匿名性、可加性与关键团队相结合，仍然刻画让步与分割。

另一种满足匿名性和可加性的焦点规则是均匀规则（将锦标赛的观众平均分配给所有球队）。人们还研究了由三种焦点规则各自产生的规则对的凸组合。所谓的 EC规则族由均分规则与让步与分割规则的凸组合构成。UE 规则族由均匀规则与均分规则的凸组合构成，而 UC 规则族则由均匀规则与让步与分割规则的凸组合构成。在 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2021、2022a）的研究中，这三个规则族均得到了刻画，且刻画总是涉及形式化平等者平等对待的三条公理之一。

本文表明，如果改为考虑匿名性，就会得到三个新的规则族，分别称为扩展 EC 规则族、扩展 UE 规则族和扩展 UC 规则族，它们分别包含上述三个规则族。具体而言，扩展 EC 规则族由两个参数 $x', y' \in [0,1]$.定义。每支球队 i 获得的分配由两部分组成。第一部分由一个 EC 规则给出，其中 λ 取决于 x' 和 y'。第二部分取决于 x', y' 以及让步与分割规则在一个相关广播问题中产生的分配。当 $x' \geq y'$ 时，相关问题通过将球队 i的主场观众置零而得到；而当 $x' \leq y'$ 时，相关问题则通过将球队 i的客场观众置零而得到。当 $x' = y'$ 时，该规则便成为一个 EC 规则。其他两个扩展规则族也可以用类似方式描述。结果表明，将可加性和匿名性与文献中的其他公理相结合，可以得到对这三个扩展规则族的刻画。

我们在此结束引言，并指出本文与其他一些论文有关：这些论文同样使用与本文相似的公理来刻画规则族。以下是其中的一些例子。在可转移效用合作博弈中，Casajus 和 Huettner（2013）、van den Brink 等（2013）以及 Casajus 和 Yokote（2019）刻画了由夏普利值和平等主义值的凸组合所产生的值族。在我们的框架下，这对应于 UE 规则族。在最小成本生成树问题中，Trudeau（2014）利用可加性刻画了所谓民间规则与循环完备规则的凸组合，而 Berganti˜nos 和 Lorenzo（2021）刻画了 Kruskal 分摊规则族。在破产问题中，Thomson（2015a，2015b）刻画了满足标准非负条件的规则族。

本文其余部分的结构如下。第 2 节介绍模型、规则和公理。第 3 节给出一些知名规则族的新刻画。第 4 节给出新规则族的刻画。最后在第 5 节作总结。

2 模型

我们考虑 Berganti˜ños 和 Moreno-Ternero（2020a）提出的模型。令 N 为一个有限球队集合，其基数记为 n。我们假设 $n \geq 3$。对于每一对球队i、 $j \in N$，我们用 a_{ij}表示在 $j \in N$的体育场进行的比赛的转播观众人数（观众人数）

由 i 和 j 参加。我们采用如下记号约定：对于每个 $i \in N$， $a_{ii} = 0$。令 $A \in \mathcal{A}_{n\times n}$ 表示由 N中的球队参加的整个锦标赛所产生的转播观众矩阵。[2] 由于在整个分析过程中，集合 N 保持固定，因此在描述每个问题时，我们不再明确提及它。于是，每个对角线元素为零的矩阵 $A \in \mathcal{A}_{n\times n}$都表示一个问题，我们将问题集记为 $\mathcal{P}$。

令 $\alpha_i(A)$ 表示球队 i 获得的总观众数，即

$$\alpha_i(A) = \sum_{j\in N}(a_{ij} + a_{ji}).$$

不失一般性地，我们将每位观众产生的收入规范化为 1（可解释为“按次付费”费用）。因此，我们有时将 $\alpha_i(A)$ 称为球队 i 的份额。在不引起混淆时，我们写作 α_i，而不是 $\alpha_i(A)$。

For 对于每个 $A \in \mathcal{A}_{n\times n}$，令 $||A||$ 表示锦标赛的总观众数。即 y,

$$||A|| = \sum_{i,j\in N} a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i\in N}\alpha_i.$$

2.1 规则

一个（分享）规则（R）是这样一种映射：它为每个问题关联一个列表，列出球队从总收入中获得的金额。如上文所述，我们将每位观众产生的收入规范化为 1。形式上， R : $\mathcal{P} \to \mathbb{R}^N$，使得对于每个 $A \in \mathcal{P}$,

$$\sum_{i\in N} R_i(A) = ||A||.$$

我们首先介绍三条在 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2020a；2020b；2021；2022a；2022b；2022c；2023c）中得到研究的焦点规则。

均匀规则将整个锦标赛的观众总数在所有球队之间平均分配。形式化地,

[2]因此，我们假设采用循环赛赛制，每支球队轮流与其他每支球队交手两次：一次主场比赛，另一次客场比赛。这是欧洲足球联赛通常采用的赛制。我们的模型也可以扩展到这样的联赛：部分球队与其他球队交手的次数不同，并在常规赛结束后进行季后赛；这正是北美职业体育通常采用的赛制。在这种情况下， a_{ij} 表示 i 参加的所有比赛中的广播观众人数，以及在 i的体育场进行的 j 参加的所有比赛中的广播观众人数。

均匀规则，U：对于每个 $A \in \mathcal{P}$和每个 $i \in N$，

$$U_i(A) = \frac{||A||}{n}.$$

均分规则将每场比赛的观众在两支参赛队伍之间平均分配。形式化地，

均分规则，ES：对于每个 $A \in \mathcal{P}$和每个 $i \in N$，

$$ES_i(A) = \frac{\alpha_i}{2}.$$

对于每场比赛，让步与分割规则将每支球队的铁杆球迷数量分配给该队，并将剩余部分平均分配。我们以一种等价且更简单的方式介绍该规则。[3] 形式化地，

让步与分割规则，CD：对于每个 $A \in \mathcal{P}$和每个 $i \in N$，

$$CD_i(A) = \frac{(n-1)\,\alpha_i - ||A||}{n-2}.$$

现在介绍 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2022a；2022b）研究的一类规则。对于每个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和每场比赛（i，j），将观众 a_{ij} 在各球队 i和 j 之间按照（$1-\lambda$，λ）的比例进行分配。形式化地，对于每个 $A \in \mathcal{P}$ 和每个 $i \in N$，

$$S_i^{\lambda}(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (1-\lambda)\, a_{ij} + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \lambda a_{ji}.$$

均分规则对应于 $\lambda = 0.5$. 的情形。当 $\lambda = 0$ 全部观众分配给主队，以及当 $\lambda = 1$ 全部观众分配给客队时。我们称 R为分割规则，当且仅当 $R \in \left\{S^{\lambda}:\ \lambda \in [0,1]\right\}$. 我们称 R为广义分割规则，当且仅当 $R \in \left\{S^{\lambda}:\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Berganti˜ños 和 Moreno-Ternero（2022c；2023a）研究的下一类规则包含上述所有规则。每个团队 i 所得的金额分为三部分：一部分取决于该团队的主场观众 $\left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ij}\right)$，另一部分取决于该团队的客场观众 $\left(\sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_{ji}\right)$，第三部分则取决于锦标赛的总观众人数（$||A||$）。形式上，

[3]有关详细讨论，请参见 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2020a）。

一般规则 $\{G^{xyz}\}_{x+y+nz=1}$。对于每个满足 $x+y+nz=1$ 的三元组 $x,y,z\in\mathbb{R}$，每个 $A\in\mathcal{P}$，以及每个 $i\in N$，

$$G_i^{xyz}(A)=x\sum_{j\in N\setminus\{i\}}a_{ij}+y\sum_{j\in N\setminus\{i\}}a_{ji}+z\,||A||\,.$$

下表给出了三元组 x,y,z 的取值，由此得到上述介绍的三个焦点规则。

	x	y	z
Uniform rule	0	0	$\frac{1}{n}$
Equal-split rule	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Concede-and-divide	$\frac{n-1}{n-2}$	$\frac{n-1}{n-2}$	$\frac{-1}{n-2}$

接下来的三个规则族曾由 Berganti˜nosand Moreno-Ternero（2021；2022a；2022b）研究，也属于一般规则族，因为它们是通过两个焦点规则的凸组合定义的。

EC 规则 $\left\{EC^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]}$。对于每个 $\lambda\in[0,1]$、每个 $A\in\mathcal{P}$ 和每个 $i\in N$，

$$EC_i^{\lambda}(A)=\lambda ES_i(A)+(1-\lambda)CD_i(A)\,.$$

UC 规则 $\left\{UC^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]}$。对于每个 $\lambda\in[0,1]$、每个 $A\in\mathcal{P}$ 和每个 $i\in N$，

$$UC_i^{\lambda}(A)=\lambda U_i(A)+(1-\lambda)CD_i(A)\,.$$

UE 规则 $\left\{UE^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]}$。对于每个 $\lambda\in[0,1]$、每个 $A\in\mathcal{P}$ 和每个 $i\in N$，

$$UE_i^{\lambda}(A)=\lambda U_i(A)+(1-\lambda)ES_i(A)\,.$$

Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2020a）证明，对于每个 $A\in\mathcal{P}$，

$$ES(A)=\frac{n}{2\,(n-1)}U(A)+\frac{n-2}{2\,(n-1)}CD(A).$$

因此，

$$\begin{aligned}\left\{UC^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]} &= \left\{UE^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]}\cup\left\{EC^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]},\ \text{and}\\ ES &= \left\{UE^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]}\cap\left\{EC^{\lambda}\right\}_{\lambda\in[0,1]}.\end{aligned}$$

现在我们举一个示例来说明各种分配规则。

示例 1 设 $A \in \mathcal{P}$ 满足

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1200 & 1030 \\ 750 & 0 & 140 \\ 630 & 210 & 0 \end{pmatrix}$$

然后，$||A|| = 3960$ 以及 $(\alpha_i)_{i \in N} =$ (3610, 2300, 2010)。

三个焦点规则在此示例中产生以下分配:

$Rule$	团队 1	团队 2	团队 3
U	*1320*	*1320*	*1320*
ES	*1805*	*1150*	*1005*
CD	*3260*	*640*	*60*

我们还计算了若干广义拆分规则 S^λ所产生的分配:

λ	团队 1	团队 2	团队 3
0	*2230*	*890*	*840*
0.2	*2060*	*994*	*906*
1	*1380*	*1410*	*1170*
4	*-1170*	*2970*	*2160*

以及若干一般规则的分配 G^{xyz}:

(x, y, z)	团队 1	团队 2	团队 3
(0.5, 0.2, 0.1)	*1787*	*1123*	*1050*
$(1, 3, -1)$	*2410*	*1160*	*390*

最后，当 $\lambda = 0.5$ 时，我们计算由 EC^λ、UC^λ 和 UE^λ 得出的分配:

$Rule$	$Team\ 1$	$Team\ 2$	$Team\ 3$
$EC^{0.5}$	*2532.5*	*895*	*532.5*
$UC^{0.5}$	*2290*	*980*	*690*
$UE^{0.5}$	*1562.5*	*1235*	*1162.5*

2.2 公理

现在我们介绍本文所考虑的公理。

我们的核心公理是匿名性，即对球队集合进行置换，分配也会相应地进行同样的置换。形式上，设 σ 为球队集合的一个置换。因此， σ： $N \to N$，使得当 $i \neq j.$ 时， $\sigma(i) \neq \sigma(j)$。给定置换 σ 和 $A \in \mathcal{P}$，我们定义问题A^σ，其中对每个 i， $j \in N$， $a_{ij}^\sigma = a_{\sigma(i)\sigma(j)}.$

匿名性（AN）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$、每个置换 σ 和每个 $i \in N$，

$$R_i(A) = R_{\sigma(i)}(A^\sigma).$$

下一个公理指出，收入在 A 上应具有可加性。形式化地说，

可加性（AD）：对于每一对 A 和 $A' \in \mathcal{P}$，

$$R\left(A + A'\right) = R(A) + R\left(A'\right).$$

本文提出的所有结果都涉及以上介绍的两个公理。我们还考察其他公理。前三个公理代表了在引言中提到的应用公正原则的三种不同方式。

平等者平等对待是指，如果两支球队在面对其他每支球队时的观众数量都相同，那么它们应获得相同的金额。Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2020a；2020b；2021；2022a；2022b）曾使用过这一公理。

平等者平等对待（ETE）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$，以及满足$a_{ik} = a_{jk}$的每一对 $i, j \in N$，且 $a_{ki} = a_{kj}$，对于每个 $k \in N \setminus \{i, j\}$，

$$R_i(A) = R_j(A).$$

在 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2022a；2022b；2022c）中，我们还要求更多条件，才能将两支球队视为平等者。两支球队不仅在面对其他各支球队时必须拥有相同的观众，而且在每座体育场面对自身时也必须拥有相同的观众。形式化地说，

同等者弱同等对待（$WETE$）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$，以及满足 $a_{ij} = a_{ji}$、 $a_{ik} = a_{jk}$ 和 $a_{ki} = a_{kj}$ 的每一对 i、 $j \in N$，对于每个 $k \in N \setminus \{i, j\}$，

$$R_i(A) = R_j(A).$$

最后，对称性只要求将两支球队视为平等／对称。更准确地说，该公理指出，如果两支球队在锦标赛中的总观众人数相同，那么

它们应获得相同的金额。Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2021）曾考虑过这条公理。

对称性（SYM）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$，以及每一对 i、$j \in N$，使得 $\alpha_i(A) = \alpha_j(A)$，

$$R_i(A) = R_j(A).$$

以下公理通过规定如下情形来强化前述公理：如果团队 i的观众人数逐场比赛都不少于团队 j，那么该团队 i 获得的收益也不应少于团队 j。

序保持（OP）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$以及每一对 i、$j \in N$，使得对于每个$k \in N \setminus \{i, j\}$、$a_{ik} \geq a_{jk}$和 $a_{ki} \geq a_{kj}$，我们都有

$$R_i(A) \geq R_j(A).$$

主场序保持（HOP）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$以及每一对 i、$j \in N$，使得对于每个 $k \in N \setminus \{i, j\}$、$a_{ik} \geq a_{jk}$、$a_{ki} \geq a_{kj}$和 $a_{ij} \geq a_{ji}$，我们都有

$$R_i(A) \geq R_j(A).$$

客场序保持（AOP）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$以及每一对 i、$j \in N$，使得对于每个 $k \in N \setminus \{i, j\}$、$a_{ik} \geq a_{jk}$、$a_{ki} \geq a_{kj}$和 $a_{ji} \geq a_{ij}$，我们都有

$$R_i(A) \geq R_j(A).$$

下面两个公理涉及规则对于某些不太典型团队的表现。首先，空团队公理指出，如果某个团队没有观众，那么该团队不会获得任何收入。其次，关键团队公理指出，如果只有某个团队所进行的比赛拥有正观众数，那么该团队应获得其全部观众数。形式化地，

空团队（NT）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$ 和每个 $i \in N$，使得 $a_{ij} = 0 = a_{ji}$，对于每个 $j \in N$，

$$R_i(A) = 0.$$

关键团队（ET）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$ 和每个 $i \in N$，使得 $a_{jk} = 0$ 对于每一对 $\{j, k\} \in N \setminus \{i\}$，

$$R_i(A) = \alpha_i(A).$$

接下来的三个公理为团队可能获得的金额设定了自然的（下限/上限）。

第一条公理指出，每个团队获得的金额最多应等于其所参加比赛的观众总数。

最大愿望（MA）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$和每个 $i \in N$，

$$R_i(A) \leq \alpha_i(A).$$

第二条公理指出，每个团队获得的奖项至多应等于锦标赛中所有比赛的观众总数。

弱上界（WUB）：对于每个 $A \in \mathcal{P}$和每个 $i \in N$，

$$R_i(A) \leq ||A||.$$

第三条公理指出，任何团队获得的奖项都不应为负数。

非负性（NN）。对于每个 $A \in \mathcal{P}$和每个 $i \in N$，

$$R_i(A) \geq 0.$$

接下来的结论概述了上述公理之间的逻辑关系，其证明显而易见，故从略。[4]

命题1 以下陈述成立：

(1) $AN \to WETE \leftarrow ETE \leftarrow SYM.$

(2) $ETE \leftarrow OP \to WETE.$(3)

$MA \to WUB \leftarrow NN.$(4)

$OP \to \{HOP, AOP\} \to OP$

关于公正性公理，我们首先注意到，存在满足 $WETE$ 但违反 AN 的规则。例如，根据 $WETE.$，将观众总数平均分配给团队 1 和所有应得份额相同的球队的规则。显然，该规则满足 $WETE.$。下一个例子表明，该规则不满足 $AN.$

例2 设 $A \in \mathcal{P}$ 满足

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

[4] $A \to B$ 表示，如果一条规则满足性质 A，那么它也满足性质 $B.$

则 $R(A) = (12, 12, 0)$。

设 σ 满足 $\sigma(1) = 2$、 $\sigma(2) = 3$, 且 $\sigma(3) = 1.$。现在

$$A^{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

于是 $R(A^{\sigma}) = (24, 0, 0)$。由于 $R_1(A) \neq R_2(A^{\sigma})$, 我们推知 R 不满足 $AN.$

同样，也存在满足 ETE 但违反 AN 的规则。例如，根据 $ETE.$，将总观众人数平均分配给团队 1 和所有同样符合条件的球队的规则。显然，这条规则满足 $ETE.$。前面的例子表明，它不满足 AN （请注意，根据 ETE，球队 1 和 2 是同样符合条件的球队）。

最后，也存在满足 AN 但违反 ETE 的规则。例如，上文介绍的规则 S^1。根据 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2023a）中的定理1, S^1 满足 AN。下一个例子表明, S^1 不满足 ETE,

例3 令 $A \in \mathcal{P}$ 使得

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

球队1和球队2满足 $ETE.$ 的条件。然而, $S^1(A) = (5, 7, 12)$.

3 New 知名规则族的刻画 s

我们的第一个结果是 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero (2020a) 中定理1的对应结果，其做法是将其中的平等者平等对待替换为匿名性。

定理1 以下陈述成立:

(1) 一个规则满足可加性、匿名性和空团队，当且仅当它是广义分割规则。

（2）一个规则满足可加性、匿名性和关键团队，当且仅当它是让步与分配。

证明。我们首先讨论本证明的主要思路（这些思路也将在其余证明中加以讨论）。我们的所有定理都通过若干公理的组合来刻画规则族（在某些情况下是单个规则），其中包括可加性和匿名性。定理的证明分为两部分。第一部分，证明该规则族中的每个规则都满足这组公理。具体做法是检验该规则是否满足公理所述的公式。第二部分，证明若某个规则满足这组公理，则该规则属于该规则族。由于可加性始终是其中一条公理，这部分证明分为两个步骤。第一步，将一般问题分解为简单问题。随后，我们刻画满足这些公理组合的、适用于简单问题的规则。第二步，利用可加性，将规则从简单问题推广到一般问题。这种两步法在资源分配文献中相当常见。不同之处在于所考虑的简单问题以及用于刻画这些规则的公理。

Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2022a）的定理1指出，一个规则满足匿名性和可加性，当且仅当它是一般规则。因此，只需证明一般规则满足空团队，当且仅当它是广义分割规则；并证明让步与分配是唯一满足关键团队的一般规则。

设 R 是一般规则，即对于某些 x、y、$z \in R$，有 $R = G^{xyz}$，且 $x + y + nz = 1$。对于每一对 i、$j \in N$，若 $i \neq j$，令 $\mathbf{1}^{ij} \in \mathcal{P}$ 表示具有以下元素的矩阵：

$$\mathbf{1}^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{if } (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ThBerganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2022a）的定理1的证明表明，

$$\begin{aligned} z &= R_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right) \text{ with } k \in N \backslash \{i,j\} \\ x &= R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right) - z \text{ and} \\ y &= R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right) - z. \end{aligned} \tag{1}$$

此外，z、x 和 y 不依赖于 i、j、k.

现在，根据空团队性质，$z = 0$，因此 $x = 1 - y.$。接着，

$$R_i(A) = G^{(1-y)y0} = (1-y) \sum_{j \in N \backslash \{i\}} a_{ij} + y \sum_{j \in N \backslash \{i\}} a_{ji} = S_i^y(A).$$

因此，R 是一个广义分割规则，由此完成了命题（1）的证明 .

现在，根据关键团队，$R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = 1$.因此，$z = \frac{-1}{n-2}$.然后，根据可加性，$R(A) = CD(A)$，由此完成了命题（2）的证明。

■

注释1 定理1中使用的公理彼此独立。

(1) 均匀规则满足 AD 和 AN，但不满足 NT.

设 R^1 为这样一种规则：每场比赛的观众归给编号最小的球队。也就是说，对于每个 $A \in \mathcal{P}$以及每个 $i \in N$,

$$R_i^1(N,A) = \sum_{j \in N: j>i} (a_{ij} + a_{ji}).$$

那么，R^1 满足 NT 和 AD，但不满足 AN.

设 R^2 为这样一种规则：每场比赛的观众按照各球队在与其他球队进行的比赛中的观众人数，按比例分配给参加该场比赛的球队。也就是说，对于每个 $A \in \mathcal{P}$以及每个 $i \in N$,

$$R_i^2(N,A) = \sum_{j \in N\setminus\{i\}} \frac{\sum\limits_{k \in N\setminus\{i,j\}} (a_{ik} + a_{ki})}{\sum\limits_{k \in N\setminus\{i,j\}} (a_{ik} + a_{ki}) + \sum\limits_{k \in N\setminus\{i,j\}} (a_{jk} + a_{kj})} \left[a_{ij} + a_{ji}\right].$$

那么，R^2 满足 AN 和 NT，但不满足 AD.

(2) 均匀规则满足 AD 和 AN，但不满足 ET.

设 R^3 满足：对于每一对 i、$j \in N$，其中 $i \neq j$，每个 $\mathbf{1}^{ij} \in \mathcal{P}$ 以及每个 $k \in N$,

$$R_k^3\left(N, \mathbf{1}^{ij}\right) = \begin{cases} 1 & if\ k \in \{i,j\} \\ -1 & if\ k = \min\{l : l \in N\setminus\{i,j\}\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

我们将 R^3 利用可加性推广到所有问题。也就是说，$R^3(A) = \sum\limits_{j \in N:\ i \neq j} a_{ij} R^3\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$,

那么，R^3 满足 AD 和 ET，但不满足 AN.

设 $\mathcal{P}'$ 为至少包含一个关键团队的问题的集合。设 R^4 满足：在 $\mathcal{P}'$ 上与让步与分割一致，在 $\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}'$.上与均匀规则一致

那么，R^4 满足 AN 和 ET，但不满足 AD.

在许多资源分配问题中，一些相关规则也借助公正性公理得到刻画。通常，如果我们在刻画中用匿名性替代公正性公理

，结论仍然成立。[5] 我们强调，在Berganti˜nos和Moreno-Ternero（2020a）定理1中，用匿名性替代平等者平等对待会产生不同的影响。对于空团队，我们不再刻画均分规则，而是刻画一个包含该规则的完整规则族。对于关键团队，我们则简单地得到让步与分割的另一种刻画。我们还注意到，定理1是Berganti˜nos和Moreno-Ternero（2022a）定理3.1的对应结果，其中用匿名性替代了同等者弱同等对待。最后，如果将上文介绍的界限公理之一加入定理1的第一种表述中，我们得到的是对分割规则的刻画，而不是对广义分割规则的刻画。

推论1 规则满足可加性、匿名性、空团队性质以及最大愿望、弱上界或非负性，当且仅当它是分割规则。

证明。令 x、 y 和 z 如定理1的证明中所定义。

令 i、 $j \in N$，其中 $i \neq j$.。根据最大愿望或弱上界， $x+z = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right) \leq 1$且 $y+z = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right) \leq 1$.。由于 $z = 0$，我们推得 $y \in [0,1]$ 且 $R = S^y$.。

根据非负性，$x+z = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right) \geq 0$ 且 $y+z = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right) \geq 0$.。由于 $z = 0$，我们推得 $y \in [0,1]$ 且 $R = S^y$.。 ■

4 新规则族的刻画

本节将刻画结合匿名性与可加性以及上述其他公理的新规则族。所有规则族均由两部分组成。第一部分通过对原问题应用某一规则获得。第二部分则通过对一个相关问题应用让步与分配获得，其中原问题中的一些受众被置为无效。

形式化地，对于每个 $A \in \mathcal{P}$ 和每个 $i \in N$，令 A^{i0} 为由 A 得到的矩阵，其中所有在主场进行的比赛 i 的受众均被置为无效。也就是说，

$$a^{i0}_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{if } j = i \\ a_{jk} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，令 A^{0i} 为由 A 得到的矩阵，其中所有比赛 i 的受众均被置为无效

[5]例如，夏普利值由效率、虚玩家、可加性以及对称性或匿名性的组合所刻画。

在客场进行。也就是说，

$$a_{jk}^{0i}=\begin{cases}0 & \text{if } k=i\\ a_{jk} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

如果存在 x'、$y'\in[0,1]$，满足 $x'+y'\geq 1$，使得对于每个 $i\in N$，我们称 R 是一个扩展的 EC规则，

$$R_i(A)=\begin{cases}EC_i^{\lambda}(A)-|x'-y'|\,CD_i(A^{i0}) & \text{if } x'\geq y'\\ EC_i^{\lambda}(A)-|x'-y'|\,CD_i(A^{0i}) & \text{if } x'\leq y'\end{cases}$$

其中 $\lambda=2-2$最大化 $\{x',y'\}\in[0,1]$.

我们将上述与 x' 和 y' 相关联的扩展 EC 规则记为 $EC^{x'y'}$。注意，EC 规则都是扩展的 EC 规则（只需取 $x'=y'$）。

在下一个定理中，我们刻画扩展的 EC 规则。

定理 2 一个规则满足可加性、匿名性和最大愿望，当且仅当它是一个扩展的 EC 规则。

证明。上文已经论证， ES 是一个广义分割规则。因此，根据定理1，ES 和 CD 都满足可加性和匿名性。因此，所有扩展的 EC 规则也满足这两个性质。

设 $EC^{x'y'}$ 是一个扩展的 EC规则。我们首先证明，对于满足 i、$j\in N$ 且 $i\neq j.$的每个矩阵 $\mathbf{1}^{ij}\in\mathcal{P}$， $EC^{x'y'}$ 均满足最大愿望。

我们考虑几种情况。

1. $x'\geq y'$。

$$\begin{aligned}EC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) &= (2-2x')\,ES_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)+(2x'-1)\,CD_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)-|x'-y'|\,CD_i\left(\left(\mathbf{1}^{ij}\right)^{i0}\right)\\ &= (2-2x')\,\frac{1}{2}+(2x'-1)=x'\leq 1.\end{aligned}$$

类似地， $EC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right)=x'\leq 1.$

对于每个 $k\in N\backslash\{i,j\}$,

$$EC_k^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right)=(2x'-1)\,\frac{-1}{n-2}=\frac{1-2x'}{n-2}\leq 0.$$

2. $x' \leq y'$.

$$EC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = (2-2y')\frac{1}{2} + (2y'-1) - (y'-x') = x' \leq 1.$$

同样， $EC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = x' \leq 1.$

对于每个 $k \in N\backslash\{i,j\}$,

$$EC_k^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = (2y'-1)\frac{-1}{n-2} - (y'-x')\frac{-1}{n-2} = \frac{1-x'-y'}{n-2} \leq 0.$$

那么， $EC^{x'y'}$ 满足关于 $\mathbf{1}^{ij} \in \mathcal{P}$ 的最大愿望。现在我们在一般情况下证明这一点。设 $A \in \mathcal{P}$ 和 $i \in N.$。由于 $EC^{x'y'}$ 满足可加性,

$$\begin{aligned} EC_i^{x'y'}(A) &= \sum_{j,k\in N} a_{jk} EC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) \\ &= \sum_{j\in N\backslash\{i\}} \left(a_{ij} EC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) + a_{ji} EC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right)\right) + \sum_{j,k\in N\backslash\{i\}} a_{jk} EC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) \\ &\leq \sum_{j\in N\backslash\{i\}} (a_{ij}+a_{ji}) + \sum_{j,k\in N\backslash\{i\}} 0 \\ &= \alpha_i(A). \end{aligned}$$

反过来，设 R 是满足陈述中公理的规则。设 $A \in \mathcal{P}$。给定 i、 $j \in N$，且 $i \neq j$，令 $x' = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$ 和 $y' = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$，并令 $z = R_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$ 对于 $k \in N\backslash\{i,j\}$.

根据最大愿望，$x' \leq \alpha_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = 1$、 $y' \leq \alpha_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = 1$ 和 $z \leq \alpha_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = 0.$。由于 $z = \frac{1-x'-y'}{n-2}$，我们推得 $x'+y' \geq 1.$。那么， $x' \geq 0$ 和 $y' \geq 0.$

令 $i \in N.$ 根据可加性,

$$\begin{aligned} R_i(A) &= \sum_{j\in N} a_{ij} R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right) + \sum_{j\in N} a_{ji} R_i\left(1^{ji}\right) + \sum_{j,k\in N\backslash\{i\}} a_{jk} R_i\left(1^{jk}\right) \\ &= x'\sum_{j\in N} a_{ij} + y'\sum_{j\in N} a_{ji} + \frac{1-x'-y'}{n-2}\sum_{j,k\in N\backslash\{i\}} a_{jk}. \end{aligned}$$

我们考虑两种情形。

情形 1。$\max\{x',y'\} = x'.$

那么,

$$R_i(A) = x'\alpha_i(A) + \frac{1-2x'}{n-2}(||A|| - \alpha_i(A)) + (y'-x')\sum_{j\in N} a_{ji} - \frac{y'-x'}{n-2}(||A|| - \alpha_i(A)).$$

因此,

$$\begin{aligned} x'\alpha_i(A) + \frac{1-2x'}{n-2}(||A|| - \alpha_i(A)) &= x'\alpha_i(A) + (2x'-1)\frac{(n-1)\alpha_i(A) - ||A||}{n-2} - (2x'-1)\alpha_i(A) \\ &= (2-2x')ES_i(A) + (2x'-1)CD_i(A). \end{aligned}$$

由于 x'、 $y' \in [0,1]$、 $x'+y' \geq 1$ 和 $x' \geq y'$，我们有 $x' \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.。令 $\lambda = 2-2x'.$，则 $\lambda \in [0,1]$。

此外，

$$\begin{aligned}(y'-x')\sum_{j\in N}a_{ji}-\frac{y'-x'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right) &= (y'-x')\frac{(n-2)\sum\limits_{j\in N}a_{ji}+\alpha_i(A)-||A||}{n-2}\\ &= (y'-x')\,CD_i\left(A^{i0}\right).\end{aligned}$$

Now,

$$R_i(A) = EC^{2-2\max\{x',y'\}}(A) - |x'-y'|\,CD_i\left(A^{i0}\right).$$

情形 2. 最大值 $\{x',y'\} = y'$.

然后，

$$R_i(A) = y'\alpha_i(A) + \frac{1-2y'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right) + (x'-y')\sum_{j\in N}a_{ij} - \frac{x'-y'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right).$$

与情形 1 类似，我们推导出

$$y'\alpha_i(A) + \frac{1-2y'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right) = EC^{2-2\max\{x',y'\}}(A).$$

此外，

$$\begin{aligned}(x'-y')\sum_{j\in N}a_{ij}-\frac{x'-y'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right) &= (x'-y')\frac{(n-2)\sum\limits_{j\in N}a_{ij}+\alpha_i(A)-||A||}{n-2}\\ &= (x'-y')\,CD_i\left(A^{0i}\right).\end{aligned}$$

因此，

$$R_i(A) = EC^{2-2\max\{x',y'\}}(A) - |x'-y'|\,CD_i\left(A^{0i}\right).$$

■

定理 2 突显了让步与分割作为解决广播问题的规则所发挥的核心作用。扩展的 EC 规则包含两部分：一部分取决于 EC 规则$\left(EC_i^{\lambda}(A)\right)$ 的族，另一部分取决于让步与分割（$CD_i(A^{i0})$ 和 $CD_i(A^{0i})$）。

备注 2 定理 2 中使用的公理彼此独立。

均匀规则满足 AD 和 AN，但不满足 MA.

R^1（定义见注释1）满足 AD 和 MA，但不满足 AN.

对于每个 $A \in \mathcal{P}$，令

$$R^5(A) = \begin{cases} ES(A) & when\ ||A|| \leq 10 \\ CD(A) & otherwise. \end{cases}$$

那么， R^5 满足 AN 和 MA ，但不满足 AD.

EC 规则由可加性、最大愿望以及对称性或平等者平等对待（例如，Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero，2021，2022a）的组合刻画。定理 2 表明，如果用匿名性取代对称性或平等者平等对待，则会产生更多规则。

下一个推论阐述了在定理 2 的陈述中加入三项序保持公理的效果。

推论 2 以下陈述成立：

(1) 一个规则满足可加性、匿名性、最大愿望和主场序保持，当且仅当它是一个扩展的 EC 规则，且具有 $x' \geq y'$.

(2) 一个规则满足可加性、匿名性、最大愿望和客场序保持，当且仅当它是一个扩展的 EC 规则，且具有 $x' \leq y'$.

(3) 一个规则满足可加性、匿名性、最大愿望和序保持，当且仅当它是一个 EC 规则。

证明。(1) 设 $EC^{x'y'}$ 是一个扩展的 EC 规则，且 $x' \geq y'$. 。根据定理 2， $EC^{x'y'}$ 满足可加性、匿名性和最大愿望。由于 $x' \geq y'$，且 $\left\{EC^{\lambda}: \ \lambda \in [0,1]\right\} \subset \left\{UC^{\lambda}: \ \lambda \in [0,1]\right\}$，由下面的定理 3 可推得 $EC^{x'y'}$ 满足主场序保持。

设 R 是一个满足陈述中所有公理的规则。根据定理 2 的证明，$R = EC^{x'y'}$，其中对于每一对 i、$j \in N$，$x' = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$ 且 $y' = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$，满足 $i \neq j$. 。由主场序保持可推得 $x' \geq y'$.

（2）它与（1）类似。

（3）我们已经论证，每个 EC 规则都满足可加性、匿名性和最大愿望。显然，它们也满足序保持。

设 R 是满足陈述中所有公理的规则。根据定理 2 的证明， $R = EC^{x'y'}$，其中对于满足 $i \neq j$ 的每一对 i、$j \in N$，都有 $x' = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$ 和 $y' = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$。根据

命题1，序保持意味着平等者平等对待。因此， $x' = y'$ ，从而 R 是一个 EC 规则。

■

我们称 R是扩展的 UC规则，如果存在 x'、$y' \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $i \in N$，

$$R_i(A) = \begin{cases} UC_i^{\lambda}(A) - |x' - y'| CD_i(A^{i0}) & \text{if } x' \geq y' \\ UC_i^{\lambda}(A) - |x' - y'| CD_i(A^{0i}) & \text{if } x' \leq y' \end{cases}$$

其中 $\max\{x', y'\} \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$、$\min\{x', y'\} \in \left[\frac{1-\max\{x',y'\}}{n-1}, \max\{x', y'\}\right]$，以及 $\lambda = \frac{n(1-\max\{x',y'\})}{n-1} \in [0,1]$。

我们将与上述数值 x' 和 y'相关联的规则记为 $UC^{x'y'}$ 。注意，UC规则都是扩展的 UC 规则（只需取 $x' = y'$即可）。

在下一个定理中，我们给出扩展 UC 规则的刻画。

定理3 以下陈述成立：

(1) 一个规则满足可加性、匿名性、主场序保持和弱上界，当且仅当它是带有 $x' \geq y'$. 的扩展 UC 规则

(2) 一个规则满足可加性、匿名性、客场序保持和弱上界，当且仅当它是带有 $x' \leq y'$ 的扩展 UC 规则。

证明。(1) 显然， U 满足可加性和匿名性。根据定理 2， CD 满足可加性和匿名性。由于 U 和 CD 满足可加性和匿名性，所有扩展的UC 规则也满足可加性和匿名性。

对于主场序保持，我们首先考察每个矩阵 $\mathbf{1}^{jk}$，其中 j、$k \in N$ 满足 $j \neq k$。设 $UC^{x'y'}$ 是一个带有 $x' \geq y'$ 的扩展 UC 规则。我们计算每个 $i \in N.$ 的 $UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right)$。我们考虑几种情况。

1. $j = i.$ 于是，

$$\begin{aligned} UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ik}\right) &= \frac{n(1-x')}{n-1} U_i\left(\mathbf{1}^{ik}\right) + \frac{nx'-1}{n-1} CD_i\left(\mathbf{1}^{ik}\right) - (x'-y') CD_i\left(\left(\mathbf{1}^{ik}\right)^{i0}\right) \quad (2) \\ &= \frac{n(1-x')}{n-1}\frac{1}{n} + \frac{nx'-1}{n-1} - 0 = x'. \end{aligned}$$

2. $k = i.$ 然后，

$$UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right) = \frac{n(1-x')}{n-1}\frac{1}{n} + \frac{nx'-1}{n-1} - (x'-y') = y'. \quad (3)$$

3. $i \notin \{j,k\}$. 然后,

$$UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) = \frac{n\left(1-x'\right)}{n-1}\frac{1}{n} + \frac{nx'-1}{n-1}\frac{-1}{n-2} - \left(x'-y'\right)\frac{-1}{n-2} = 1-x'-y'. \qquad (4)$$

设 $R^{x'y'}$ 是任意扩展的 UC 规则，其中 $x' \geq y'$、 $A \in \mathcal{P}$，且 i 和 j 如主场序保持的定义所示。由可加性,

$$\begin{aligned}
UC_i^{x'y'}(A) &= a_{ij}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) + a_{ji}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right) + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{ik}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ik}\right) \\
&\quad + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{ki}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ki}\right) + \sum_{k,l\in N\setminus\{i,j\}} a_{kl}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kl}\right) \text{ and} \\
UC_j^{x'y'}(A) &= a_{ij}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) + a_{ji}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right) + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{jk}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) \\
&\quad + \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{kj}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kj}\right) + \sum_{k,l\in N\setminus\{i,j\}} a_{kl}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kl}\right).
\end{aligned}$$

由（2）和（3），

$$\begin{aligned}
a_{ij}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) + a_{ji}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right) &\geq a_{ij}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right) + a_{ji}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right) \Leftrightarrow \\
a_{ij}x' + a_{ji}y' &\geq a_{ij}y' + a_{ji}x' \Leftrightarrow \\
x'\left(a_{ij}-a_{ji}\right) &\geq y'\left(a_{ij}-a_{ji}\right),
\end{aligned}$$

这成立是因为 $x' \geq y'$ 和 $a_{ij} \geq a_{ji}$.

由（2），对每个 $k \in N\setminus\{i,j\}$、 $UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ik}\right) = UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) = x'$.。由于 $a_{ik} \geq a_{jk}$, 对每个$k \in N\setminus\{i,j\}$,

$$\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{ik}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ik}\right) \geq \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{jk}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right).$$

由（3），对每个 $k \in N\setminus\{i,j\}$、 $UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ki}\right) = UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kj}\right) = y'$.。对于每个 $k \in N\setminus\{i,j\}a_{ki} \geq a_{kj}$,

$$\sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{ki}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ki}\right) \geq \sum_{k\in N\setminus\{i,j\}} a_{kj}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kj}\right).$$

根据（4），对于每个 k、 $l \in N\setminus\{i,j\}$、 $UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kl}\right) = UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kl}\right) = 1-x'-y'$.，那么,

$$\sum_{k,l\in N\setminus\{i,j\}} a_{kl}UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kl}\right) = \sum_{k,l\in N\setminus\{i,j\}} a_{kl}UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{kl}\right).$$

那么， $UC^{x'y'}$ 满足主场序保持。

最后，关于弱上界，借鉴定理 2 中证明最大愿望时所用的类似论证，只需对满足 $i \neq j$ 的每个矩阵 $\mathbf{1}^{ij} \in \mathcal{P}$（其中 i、 $j \in N$）证明即可。我们分三种情况讨论。

1. 根据 (2) $UC_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right)=x'\leq 1.$

2. 根据 (3) $UC_j^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right)=y'\leq x'\leq 1.$

3. 根据 (4)，对于每个 $k\in N\backslash\{i,j\}$、$UC_k^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ij}\right)=1-x'-y'.$现在

$$1-x'-y'\leq 1\Leftrightarrow x'+y'\geq 0$$

这始终成立，因为 $x'\in\left[\frac{1}{n},1\right]$和 $y'\in\left[\frac{1-x'}{n-1},x'\right]$.

于是，$UC^{x'y'}$ 满足弱上界。

反之，设 R 是满足陈述中所有公理的规则。类似于定理 2 的证明，我们可以找到 x'、y'，使得对于每一对 i、$j\in N$（其中 $i\neq j$、$x'=R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$、$y'=R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$），以及对于每个 $k\in N\backslash\{i,j\}$、$\frac{1-x'-y'}{n-2}=R_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$，均成立。

根据主场序保持，

$$\frac{1-x'-y'}{n-2}\leq y'\leq x'.$$

Now,

- $x'\geq\frac{1-x'-y'}{n-2}\geq\frac{1-2x'}{n-2}$. 注意到 $x'=y'=\frac{1}{n}$ 满足前述条件。因此，$x'\geq\frac{1}{n}$.根据弱上界，$x'\leq 1$.于是，$\frac{1}{n}\leq x'\leq 1$.因此，最大值 $\{x',y'\}\in\left[\frac{1}{n},1\right]$成立。

- 由于 $\frac{1-x'-y'}{n-2}\leq y'$，可得 $\frac{1-x'}{n-1}\leq y'$.因此，最小值 $\{x',y'\}\in\left[1-\frac{\text{最大值}\ \{x',y'\}}{n-1}\right.$，最大值 $\left.\{x',y'\}\right]$成立。

Si类似于定理 2 第 (1) 部分的证明，我们可以证明，对于每个 $i\in N$ ，

$$R_i(A)=x'\alpha_i(A)+\frac{1-2x'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right)-\left(x'-y'\right)CD_i\left(A^{i0}\right).$$

Now,

$$\begin{aligned}
x'\alpha_i(A)+\frac{1-2x'}{n-2}\left(||A||-\alpha_i(A)\right) &= \frac{\left(n-2\right)x'\alpha_i(A)+\left(1-2x'\right)\left(||A||-\alpha_i(A)\right)}{n-2}\\
&= \frac{\left(1-2x'\right)||A||}{n-2}+\frac{\left(nx'-1\right)\alpha_i(A)}{n-2}\\
&= \frac{n\left(1-x'\right)}{n-1}\frac{||A||}{n}+\left(\frac{1-nx'}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}\right)||A||+\frac{\left(nx'-1\right)\alpha_i(A)}{n-2}\\
&= \frac{n\left(1-x'\right)}{n-1}\frac{||A||}{n}+\frac{nx'-1}{n-1}\left(\frac{\left(n-1\right)\alpha_i(A)-||A||}{n-2}\right).
\end{aligned}$$

Let

$$\lambda = \frac{n\left(1-x'\right)}{n-1}.$$

由于 $\frac{1}{n} \leq x' \leq 1$，可得 $0 \leq \lambda \leq 1$. 因此，

$$x'\alpha_i\left(A\right) + \frac{1-2x'}{n-2}\left(||A|| - \alpha_i\left(A\right)\right) = UC_i^{\lambda}\left(A\right).$$

（2）运用与（1）中类似的论证，我们可以证明，所有满足 $x' \leq y'$ 的扩展 UC 规则都具有可加性、匿名性、弱上界和客场序保持。反过来，设 R 是满足所有这些公理的一条规则。类似于定理 2 的证明，我们可以找到 x'、y'，使得对于每一对满足 $i \neq j$、$x' = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$、$y' = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$的 i、$j \in N$，以及每个 $k \in N \backslash \{i,j\}$、$\frac{1-x'-y'}{n-2} = R_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$。

类似于上文（1）中的论证，我们可以证明 $y' \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ 和 $x' \in \left[\frac{1-y'}{n-1}, y'\right]$。

类似于定理 2 第（2）部分的证明，我们可以证明，对于每个 $i \in N$，

$$R_i(A) = y'\alpha_i\left(A\right) + \frac{1-2y'}{n-2}\left(||A|| - \alpha_i\left(A\right)\right) - \left(y'-x'\right)CD_i\left(A^{0i}\right).$$

类似于情形 1，我们可以证明

$$y'\alpha_i\left(A\right) + \frac{1-2y'}{n-2}\left(||A|| - \alpha_i\left(A\right)\right) = UC_i^{\lambda}\left(A\right),$$

其中

$$\lambda = \frac{n\left(1-y'\right)}{n-1},$$

正如所要求的。■

定理3还突出了让步与分割作为解决广播问题的规则所发挥的核心作用。扩展的 UC规则包含两个部分：一部分取决于 UC规则$\left(UC_i^{\lambda}(A)\right)$ 这一规则族，另一部分取决于让步与分割（$CD_i\left(A^{i0}\right)$ 和 $CD_i\left(A^{0i}\right)$）。

注 3 定理3中使用的公理彼此独立。

(1) 对于每一对 $\{i,j\} \in N$ 和 $i \neq j$，以及每个 $k \in N$，令

$$R_k^6\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = \begin{cases} 2 & if\ k \in \{i,j\} \\ \frac{-3}{n-2} & otherwise. \end{cases}$$

我们利用可加性将 R^6扩展到每个问题 A。即，$R^6(A) = \sum_{\{i,j\} \subset N} a_{ij}R^3\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$

那么，R^6满足 AD、AN和 HOP，但不满足 WUB。

对于每一对 $\{i,j\} \in N$（其中 $i \neq j$），以及每个 $k \in N$，令

$$R_k^7\left(\mathbf{1}^{ij}\right) = \begin{cases} 0 & if\ k \in \{i,j\} \\ \frac{1}{n-2} & otherwise \end{cases}$$

我们利用可加性将 R^7 扩展到每个问题 A。也就是说，$R^7(A) = \sum_{\{i,j\} \subset N} a_{ij} R^7\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$.

于是，R^7 满足 AD、AN 和 WUB，但不满足 HOP。

令 $N = \{1,2,3\}$ 和 R^8 为可分规则（见 Berganti ˜nos 和 Moreno-Ternero，2022c），其中对于每个 i，$j \in N$，

$$\left(x^{ij}\right)_{i,j \in N} = \begin{pmatrix} & 0.69 & 0.83 \\ 0.63 & & 0.90 \\ 0.69 & 0.83 & \end{pmatrix} \ and \ \left(y^{ij}\right)_{i,j \in N} = \begin{pmatrix} & 0.56 & 0.49 \\ 0.49 & & 0.35 \\ 0.35 & 0.28 & \end{pmatrix}$$

于是，R^8 满足 AD、HOP 和 WUB，但不满足 AN。

对于每个 $A \in \mathcal{P}$ 和每个 $i \in N$，令

$$R_i^9(A) = \begin{cases} U(A) & if\ ||A|| \leq 10 \\ CD(A) & if\ ||A|| > 10. \end{cases}$$

于是，R^9 满足 AN、HOP 和 WUB，但不满足 AD。

(2) R^6 满足 AD、AN和 AOP，但不满足 WUB。

R^7 满足 AD、AN和 WUB，但不满足 AOP。

令 $N = \{1,2,3\}$ 和 R^{10} 为可分规则（参见Berganti ˜nos和Moreno-Ternero, 2022c），其中，对于每个 i，$j \in N$，

$$\left(x^{ij}\right)_{i,j \in N} = \begin{pmatrix} & 0.56 & 0.49 \\ 0.49 & & 0.35 \\ 0.35 & 0.28 & \end{pmatrix} \ and \ \left(y^{ij}\right)_{i,j \in N} = \begin{pmatrix} & 0.69 & 0.83 \\ 0.63 & & 0.90 \\ 0.69 & 0.83 & \end{pmatrix}$$

那么，R^{10}满足 AD、AOP和 WUB，但不满足 AN。

R^9 满足 AN、AOP和 WUB，但不满足 AD。

由定理3和命题1的第4部分可直接得出：一个规则满足可加性、匿名性、序保持和弱上界，当且仅当它是一个 UC 规则。我们不强调这一结果，因为正如Berganti ˜nos和Moreno-Ternero（2022a）所示，对于这一刻画而言，匿名性实际上是多余的。

我们称 R 为扩展的 UE 规则，如果存在 $x', y' \in \mathbb{R}$，使得对每个 $i \in N$

$$R_i(A) = \begin{cases} UE_i^{\lambda}(A) - |x' - y'| \, CD_i(A^{i0}) & \text{if } x' \geq y' \\ UE_i^{\lambda}(A) - |x' - y'| \, CD_i(A^{0i}) & \text{if } x' \leq y' \end{cases}$$

其中 $\max\{x', y'\} \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$、$\min\{x', y'\} \in [0, 1 - \max\{x', y'\}]$，以及 $\lambda = \frac{n}{(1-2\max\{x',y'\})(n-1)} \in \left[\frac{-n}{n-2}, 1\right]$。

我们将与上述数值 x' 和 y' 相关联的规则记作 $UE^{x'y'}$。请注意，所有 UE 规则也都是扩展的 UE 规则（只需令 $x' = y'$，从而得到 $x' \in \left[\frac{1}{n}, 0.5\right]$ 和 $\lambda \in [0, 1]$）。

下一个定理刻画了扩展的 UE 规则。

定理 4 以下陈述成立：

(1) 一个规则满足可加性、匿名性、主场序保持和非负性，当且仅当它是一个扩展的 UE 规则，且 $x' \geq y'$.

(2) 一个规则满足可加性、匿名性、客场序保持和非负性，当且仅当它是一个具有 $x' \leq y'$. 的扩展 UE 规则

证明。(1) 由于 ES 和 U 满足可加性和匿名性（定理 2 和定理3），所有扩展 UE 规则也满足这些性质。

使用与定理3第 (1) 部分证明中所用论证类似的方法，我们还可以证明，具有 $x' \geq y'$ 的 $UE^{x'y'}$ 满足主场序保持。最后，对于非负性，使用与定理 2 中关于最大愿望的证明所用论证类似的方法，只需证明对于每个 j、满足 $j \neq k$ 的 $k \in N$ 以及每个 $i \in N$、$UE_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) \geq 0.$，我们考虑若干种情况。

1. $j = i$.

$$\begin{aligned} UE_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ik}\right) &= \frac{n-2nx'}{n-2} U_i\left(\mathbf{1}^{ik}\right) + \frac{2nx'-2}{n-2} ES_i\left(\mathbf{1}^{ik}\right) - (x'-y') \, CD_i\left(\left(\mathbf{1}^{ik}\right)^{i0}\right) \\ &= \frac{n-2nx'}{n-2}\frac{1}{n} + \frac{2nx'-2}{n-2}\frac{1}{2} = x' \geq 0. \end{aligned}$$

2. $k = i$.

$$UE_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{ji}\right) = \frac{n-2nx'}{n-2}\frac{1}{n} + \frac{2nx'-2}{n-2}\frac{1}{2} - (x'-y') = y' \geq 0.$$

3. $i \in N \backslash \{j,k\}$.

$$UE_i^{x'y'}\left(\mathbf{1}^{jk}\right) = \frac{n-2nx'}{n-2}\frac{1}{n} - (x'-y')\frac{-1}{n-2} = \frac{1-x'-y'}{n-2} \geq 0.$$

反之，设 R 是满足陈述中所有公理的规则。与定理 2 的证明类似，我们可以找到 x'、y'，使得对于每一对 i、$j \in N$，当 $i \neq j$、$x' = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$、$y' = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$ 时，以及对于每个 $k \in N \backslash \{i,j\}$、$\frac{1-x'-y'}{n-2} = R_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$。

根据主场序保持，

$$\frac{1-x'-y'}{n-2} \leq y' \leq x'.$$

于是，

$$x' \geq \frac{1-x'-y'}{n-2} \geq \frac{1-2x'}{n-2}.$$

注意到 $x' = y' = \frac{1}{n}$ 满足上述条件。因此，$x' \geq \frac{1}{n}$.

根据非负性，$x' \geq 0$、$y' \geq 0$ 以及

$$\frac{1-x'-y'}{n-2} \geq 0 \Leftrightarrow x'+y' \leq 1.$$

于是，$x' \in \left[\frac{1}{n},1\right]$ 和 $y' \in [0,1-x']$.

与定理 2 第 (1) 部分的证明类似，我们可以证明，对于每个 $i \in N$，

$$R_i(A) = x'\alpha_i(A) + \frac{1-2x'}{n-2}\left(||A|| - \alpha_i(A)\right) - (x'-y')\,CD_i\left(A^{i0}\right).$$

Now,

$$x'\alpha_i(A) + \frac{1-2x'}{n-2}\left(||A|| - \alpha_i(A)\right) = \frac{n(1-2x')}{n-2}\frac{||A||}{n} + \frac{2(nx'-1)}{n-2}\frac{\alpha_i(A)}{2}.$$

Let

$$\lambda = \frac{n(1-2x')}{n-2}.$$

由于 $\frac{1}{n} \leq x' \leq 1$，可得 $\frac{-n}{n-2} \leq \lambda \leq 1$. 因此，

$$x'\alpha_i(A) + \frac{1-2x'}{n-2}\left(||A|| - \alpha_i(A)\right) = UE_i^{\lambda}(A).$$

(2) 运用与 (1) 中类似的论证，我们可以证明，任何满足 $x' \leq y'$ 的扩展 UC 规则都具有可加性、匿名性、非负性和客场序保持。反过来，设 R 是一个满足所有这些公理的规则。那么，类似于定理 2 的证明，我们可以找到 x', y'，使得对于每一对满足 $i \neq j$，$x' = R_i\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$, $y' = R_j\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$ 的 $i, j \in N$，

并且对于每个 $k \in N \backslash \{i,j\}$, $\frac{1-x'-y'}{n-2} = R_k\left(\mathbf{1}^{ij}\right)$。与 (1) 类似，我们可以证明 $x' \leq y'$, $y' \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $x' \in [0, 1-y']$, $\lambda = \frac{n}{(1-2y')n-2}$，并且对于每个 $i \in N$

$$R_i(A) = UE_i^{\lambda}(A) - (y'-x')\, CD_i\left(A^{0i}\right),$$

如所愿。 ■

定理 4 还凸显了让步与分割作为解决广泛广播问题的一种规则所发挥的核心作用。扩展的 UE规则包含两部分：一部分取决于 UE规则$\left(UE_i^{\lambda}(A)\right)$ 这一族，另一部分取决于让步与分割（$CD_i\left(A^{i0}\right)$ 和 $CD_i\left(A^{0i}\right)$）。

注 4 (1) 定理 4 中使用的公理彼此独立。

R^6（定义同注 3）满足 AD、 AN 和 HOP，但不满足 NN.

R^7（定义同注 3）满足 AD、 AN 和 NN，但不满足 HOP.

设 $N = \{1,2,3\}$ 和 R^{11} 为可分规则（参见 Berganti ˜nos 和 Moreno-Ternero, 2022c），其中对每一对 i、 $j \in N$,

$$\left(x^{ij}\right)_{i,j\in N} = \begin{pmatrix} & 0.50 & 0.60 \\ 0.45 & & 0.65 \\ 0.50 & 0.60 & \end{pmatrix} \text{ and } \left(y^{ij}\right)_{i,j\in N} = \begin{pmatrix} & 0.40 & 0.35 \\ 0.35 & & 0.25 \\ 0.25 & 0.20 & \end{pmatrix}$$

那么，满足 AD、 HOP 和 NN，但不满足 AN 的 R^{11}。

对于每个 $A \in \mathcal{P}$ 和每个 $i \in N$，令 as

$$R_i^{10}(A) = \begin{cases} U(A) & \text{if } ||A|| \leq 10 \\ ES(A) & \text{if } ||A|| > 10. \end{cases}$$

那么， R^{12} 满足 AN、 HOP 和 NN，但不满足 AD.

(2) R^6（定义见注 3）满足 AD、 AN 和 AOP，但不满足 NN.

R^7（定义见注 3）满足 AD、 AN 和 NN，但不满足 AOP.

令 $N = \{1,2,3\}$ 和 R^{13} 为可分规则（见 Berganti ˜nos 和 Moreno-Ternero, 2022c），其中对于每个 i, $j \in N$,

$$\left(x^{ij}\right)_{i,j\in N} = \begin{pmatrix} & 0.40 & 0.35 \\ 0.35 & & 0.25 \\ 0.25 & 0.20 & \end{pmatrix} \text{ and } \left(y^{ij}\right)_{i,j\in N} = \begin{pmatrix} & 0.50 & 0.60 \\ 0.45 & & 0.65 \\ 0.50 & 0.60 & \end{pmatrix}$$

那么，满足 AD、 AOP 和 NN，但不满足 AN 的 R^{13}。

最后， R^{10}（定义见注 3）满足 AN、 AOP 和 NN，但不满足 AD.

由定理 4 和命题1的第 4 部分可直接得出：一条规则满足可加性、匿名性、序保持和非负性，当且仅当它是一条 UE 规则。我们不强调这一结果，因为正如 Berganti˜nos 和 Moreno-Ternero（2022a）所示，在这一刻画中匿名性实际上是多余的。

5 结论

本文研究了匿名性作为广播问题公理的影响。

一方面，我们证明了，当匿名性与某些公理结合时，可以得到广播问题中已经研究过的规则和规则族的新刻画。例如，通过加入关键团队（以及可加性），我们刻画了让步与分配。用空团队替代关键团队后，我们刻画了广义拆分规则族，该规则族推广了焦点等额拆分规则。

另一方面，我们还证明了，当匿名性与其他一些公理结合时，可以刻画新的规则族：所谓的扩展 EC 规则、扩展 UC规则和扩展 UE 规则。所有这些扩展规则都可以描述为两个组成部分之和。在第一个组成部分中，我们将广播问题中已经研究过的相应规则族中的一个规则（EC 规则、 UC 规则或 UE 规则）应用于原始问题。在第二个组成部分中，我们总是将焦点让步与分配应用于原始问题中将某些受众置空后所得到的问题。

参考文献

[1] Algaba E., Fragnelli, V., Llorca, N., S´anchez-Soriano, J., 2019年。多模式公共交通系统中的横向合作：利润分配问题。《欧洲运筹学杂志》275，659-665。

[2] Arribillaga, R.P., Berganti˜ños, G., 2023年。背包分配问题的合作与公理化方法。《运筹学年鉴》318，805-830。

[3] Berganti˜nos, G., Lorenzo, L., 2021。《多个源点的最小成本生成树问题中的成本可加规则》。《运筹学年鉴》301，5-15。

[4] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2020a。《体育赛事转播收入的分配》。《管理科学》66，2417-2431。[5] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2020b。《体育联赛转播额外收入的分配》。《数学经济学杂志》90，65-73。[6] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2021。《通过妥协分配体育联赛转播收入》。《经济行为与组织杂志》183，57-74。[7] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2022a。《体育联赛转播收入分配的公理化方法》。《社会选择与福利》58，321-347。[8] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2022b。《体育联赛转播收入分配中的单调性》。《欧洲运筹学杂志》297，338-346。[9] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2022c。《分配体育联赛转播收入的可分规则》。《经济学快报》211，110233。[10] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2023a。《体育转播的分散式收入分配》。《公共选择》194，27-44。[11] Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2023b。《西甲联赛转播》。《体育经济学评论》1，100005。[12]Berganti˜nos, G., Moreno-Ternero, J.D., 2023c。《取消体育赛事后的转播收入分配》。《运筹学年鉴》，即将出版。https://doi.org/10.1007/s10479-023-05246-0[13] Berganti˜nos, G., Vidal-Puga, J., 2021。《最小成本生成树问题中的合作规则及其相关算法综述》 。SERIEs 12，73-100。[14] van den Brink, R., Funaki Y., Ju, Y., 2013。《调和边际主义与平等主义：平等主义夏普利值的一致性、单调性与实施》。《社会选择与福利》40，693-714。[15] Casajus A., Huettner F., 2013。《零玩家、团结与平等主义夏普利值》。《数学经济学杂志》49，58-61。

[16] Casajus A., Yokote, K., 2019年。《合作博弈的弱微分单调解》。《国际博弈论杂志》48，979-997。[17] Esta˜n, T., Llorca, N., Mart´ınez, R., S´anchez-Soriano, J., 2021.《如何分配运输系统的固定成本》。《运筹学年鉴》301，81-105。[18]Gon˛calves-Dosantos, J.C., Garc´ıa-Jurado, I., Costa, J., 2020年。《含延迟的随机调度问题中的延误成本分享》。《 4OR 》 18，457-476[19] Guardiola, L.A., Meca, A., Puerto, J., 2021.《异质参与者生产与库存环境中的公平合作实施》。《运筹学年鉴》305，59-80。[20] Hezarkhani, B., Slikker, M., van Woensel, T., 2019.《城市集货中心的收益分享》。《欧洲运筹学杂志》279，380-392。[21] Littlechild, S., Owen. G., 1973年。《特殊情形下夏普利值的一个简单表达式》。《管理科学》20，370-372。[22] Moreno-Ternero, J., Roemer, J., 2006.《正义理论中的公正性、优先权与团结》。《计量经济学》74，1419-1427。[23] van den Nouweland, A., Borm, P., van Golstein Brouwers, W., Groot Bruinderink, R., Tijs, S., 1996年。《电信问题的博弈论方法》。《管理科学》42，294-303。[24] Oishi, T.M., van der Laan, G., van den Brink, R., 2023.《侵权法中基于有根树网络的责任问题公理化分析》。《经济理论》 75，229-258。[25] O’Neill, B., 1982 年。《源自〈塔木德〉的权利仲裁问题》。《数学社会科学》 2，345-371。.[26] Ozen, U., Slikker, M., So˘si´c, G., 2022 年。《 m 属性博弈的核心》。《生产与运作管理》31，1770-1787。[27] Schlicher, L., Slikker, M., Van Jaarsveld, W., Van Houtum, G., 2020年。《分层池化博弈的核心非空性：结构化马尔可夫决策过程方法》。《运筹学数学》45，1445-1465。

[28] Thomson, W., 2015a.《对于索赔问题，受约束的等额分配规则与比例规则之间的折中》。《经济理论》 60，495-520。[29] Thomson, W., 2015b.《对于索赔问题，受约束的等额分配规则与比例规则之间的另一种折中》。《动力学与博弈杂志》2，366-382。[30] Thomson W., 2019a.《当资源不足时如何分配：从亚里士多德、《塔木德》和迈蒙尼德到资源分配公理化》。 计量经济学会专著。剑桥大学出版社[31] Thomson, W., 2019b.《资源分配的公理化：公理分类与有前景方向的规划》。 RCER 工作论文 596。[32] Trudeau, C., 2014.《最小成本生成树问题中环完备解与民间解的刻画》。《社会选择与福利》42，941-957。